mică enciclopedie matematică

Traducere de
VIORICA POSTELNICU și SILVIA COATU

(după lucrarea în limba germană
„KLEINE ENZYKLOPÄDIE DER MATHEMATIK",
apărută în a șasea ediție în anul 1971,
cu completările din ediția în limba engleză
„MATHEMATICS AT A GLANCE",
apărută în anul 1975)



Editura tehnică — București

MICĂ ENCICLOPEDIE MATEMATICĂ

Redactor: ing. **Vasile Buzatu**
Tehnoredactare-machetare artistică: **Elena Geru**
Coperta și supracoperta: **Eugen Kéri**
Corector: **Aurel Boncescu**
Paginație: **Niculina Popescu** și **Matilda Marcovici**
Montaj și tipar offset:
Colectivul secției condus de ing. **Ioan Șiandru**, maiștrii **Kasemir Oleksik, Erwin Schuster, Ioan Stroie** și **Ioan Crețoiu**
Legătorie:
Colectivul secției condus de maiștrii: **Vasile Dragotă** și **Simion Bătăcui**

Culegere și paginație — I.P. 13 Decembrie București
Montaj offset, tipar și legătorie — I.P. Sibiu

KLEINE ENZYKLOPÄDIE DER MATHEMATIK
MATHEMATICS AT A GLANCE

Editori: W. GELLERT, Dr. H. KÜSTNER, Dr. M. HELLWICH, H. KÄSTNER

Recenzenţi: Profesor K. A. HIRSCH, Profesor H. REICHARDT

Autorii lucrării „Kleine Enzyklopädie der Mathematik" sînt:

Dr. K.H. BACHMANN
G. BERTHOLD
Prof. O. BEYER
Prof. L. BITTNER
Prof. Dr. H. BOCK
Prof. H. BOSECK
Dr. H. G. BOTHE
Dr. G. CZICHOWSKI
J. DÄHNN
Prof. Dr. W. DÜCK
Dr. C. FRISCHMUTH
Dr. D. GÖHDE
W. GÖHLER
Prof. L. GÖRKE
Dr. H. GÖTZKE
Dr. W. HEINRICH
Dr. M. HELLWICH
Dr. H. HERRE
Prof. M. HERRMANN
H. JUNGE
H. KÄSTNER
G. LISSKE
Dr. G. LORENZ
Dr. G. MAESS
Dr. W. D. MÜLLER
Dr. F. NEIGENFIND
Prof. F. NOZICKA
Dr. S. OBERLÄNDER
Prof. M. PESCHEL
Prof. Dr. J. PIEHLER
Dr. G. P. PIETZSCH
Dr. B. RENSCHUCH
Dr. W. RICHTER
Prof. H. J. ROSSBERG
Prof. H. SACHS
Prof. H. SALIÉ
H. SCHLOSSER
Dr. E. SCHRÖDER
Dr. L. STAMMLER
A. STEGER
Prof. R. SULANKE
Prof. H. THIELE
Dr. H. THIELE
Prof. W. TUTSCHKE
Dr. H. VAHLE
Dr. L. WAGNER
Prof. W. WALSCH
Dr. V. WÜNSCH
Dr. G. WUSSING
Prof. H. WUSSING

Cuprins

Prefață la ediția în limba română

„Mica enciclopedie matematică" împlinește un gol în literatura noastră. Ea este utilă atît pentru matematicienii de carieră, cît și pentru cei care aplică matematica în activitatea lor ca inginerii, arhitecții, fizicienii, economiștii, statisticienii etc. Într-o măsură mai redusă, aceasta interesează și pe ceilalți cititori a căror profesie nu are contingență cu matematica, dar care pentru completarea culturii lor generale doresc să cunoască semnificația unor termeni matematici, din ce în ce mai frecvent întîlniți în vorbirea curentă, în urma procesului de matematizare a activității umane.

Enciclopedia este în general o lucrare lexico-grafică în care sînt expuși termenii de bază sau noțiunile dintr-una sau mai multe științe, fie în ordine alfabetică, fie pe probleme sau domenii. „Mica enciclopedie matematică" face parte din categoria a doua, conținînd o expunere sistematică a diferitelor domenii ale matematicii clasice.

Enciclopedia are trei părți. Prima parte este consacrată matematicii elementare. Numerele naturale sînt introduse folosind noțiuni elementare de teoria mulțimilor. Se arată în mod intuitiv cum au apărut numerele negative și numerele raționale. Apoi este expus modul de caloul cu simboluri de numere. Se recomandă citirea acestui capitol de către învățători. Este bine să-l cunoască și unii părinți, care au fost surprinși de faptul că în școala noastră copiii învață să numere cu ajutorul mulțimilor. Numerele sînt instrumentele cu care oamenii măsoară lumea și legitățile ei. Orice om, fie el lucrător, contabil sau om de știință, cunoaște și lucrează cu anumite categorii de numere. Progresul științei și tehnicii și necesitatea cunoașterii realității au condus succesiv la introducerea unei mari diversități de numere : naturale, întregi, raționale, reale, complexe etc. În enciclopedie, cititorul găsește o expunere concisă, accesibilă, suficientă pentru a-l face să aibă o imagine clară despre noțiunea de număr.

În partea elementară sînt tratate ecuațiile de primele patru grade, ecuațiile exponențiale și logaritmice, precum și sistemele de ecuații. Se dedică un număr de pagini și inecuațiilor.

Funcția reprezintă în matematică o noțiune fundamentală. Introdusă în știință de L. Euler încă din secolul al XVIII-lea, în dezvoltarea continuă a matematicii, noțiunea de funcție a căpătat un conținut din ce în ce mai general și mai abstract, ajungîndu-se la definiția de astăzi bazată pe teoria mulțimilor. În enciclopedie sînt studiate funcțiile raționale, expunîndu-se și unele teoreme care de obicei ies din cadrul matematicii elementare, ca de exemplu teorema lui Sturm. De asemenea sînt arătate și proprietățile cele mai importante ale funcțiilor neraționale și ale funcțiilor cu mai multe variabile.

Enciclopedia are meritul că acordă o mare importanță aplicațiilor practice ale matematicii. Prima dintre ele se referă la calculul procentelor. În viața de toate zilele se întîlnește frecvent noțiunea de procent (procentul mortalității, procentul femeilor angajate într-o întreprindere, procentul creșterii economice etc.). Cu ajutorul procentelor se arată modul de calcul al dobînzilor și al plăților eșalonate, care sînt întîlnite în asigurări.

Capitolul intitulat „Geometrie plană" conține geometria elementară a planului, născută din necesități practice, fapt pentru care, în versiunea germană, autorii au folosit și termenul de „planimetrie", care pe grecește înseamnă măsurarea pămîntului. La fel, capitolul „Geometrie în spațiu" conține geometria clasică a spațiului tridimensional, tratînd cubul, prisma, cilindrul, piramida, sfera, poliedrele etc. Cea dintîi aplicație a geometriei, expusă în enciclopedie, este geometria descriptivă, care are drept scop descrierea corpurilor din spațiu și a poziției lor prin desen. Cîmpul de aplicare a geometriei descriptive este imens, deoarece orice proiectare de aparate, mașini, construcții de clădiri etc. trebuie să se bazeze pe desenarea lor într-un plan.

Funcțiile trigonometrice sînt expuse în capitolul intitulat „Trigonometrie". Sînt date aplicații în fizică, tehnică, nautică, topometrie. Există și un capitol de trigonometrie sferică, ramură a matematicii care servește ca instrument de bază astronomilor și navigatorilor. Ca aplicații sînt date geografia matematică și astronomia sferică.

Geometriei analitice, mare descoperire a secolului al XVII-lea, de care sînt legate numele lui René Descartes și Pierre Fermat, i se dedică un capitol separat.

Partea a doua a enciclopediei „Matematici superioare" începe cu analiza matematică. Se pornește de la teorema Bolzano-Weierstrass, necesară pentru studiul șirurilor și seriilor, a căror expunere urmează. Sînt studiate limita unei funcții, continuitatea, derivata și diferențiala, derivarea funcțiilor de mai multe variabile, probleme de extrem și aplicarea calculului diferențial la studiul geometric al curbelor plane, unde se găsesc și proprietățile unor curbe clasice, ca cicloidele, epicicloidele, cisoidele, strofoidele etc. Calculul integral cuprinde integrala definită, integrala nedefinită,

metode clasice de integrare și integrarea funcțiilor cu mai multe variabile. Un alt capitol este dedicat seriilor de funcții, unde cititorul vine în contact cu seriile trigonometrice și cu analiza armonică. Analiza matematică se termină cu studiul ecuațiilor diferențiale.

Introducerea calculului vectorial permite expunerea analizei vectoriale, a geometriei analitice în spațiu și a geometriei diferențiale.

Autorii enciclopediei au introdus un capitol numit „Calculul erorilor, metode de compensare și teoria aproximării", cuprinzînd metode grafice de calcul, calculul cu diferențe etc. În acest capitol sînt expuse teoria clasică a erorilor și interpolările.

Capitolul despre teoria probabilităților și statistică matematică se reduce la cîteva definiții, legea numerelor mari și inegalitatea lui Cebîșev pentru probabilități și la culegeri de date, corelație și regresie, verificarea ipotezelor statistice.

O atenție deosebită este dată, după cum este și natural, calculului numeric. În lumea contemporană există cîteva mii de limbi, care diferă între ele și prin modul de scriere, dar există un singur fel de a calcula, care stă la baza limbii universale a matematicii, aceeași pentru toate popoarele. Perfecționarea acestui calcul în direcția rapidității executării lui, a cuprinderii unor numere din ce în ce mai mari și a unor operații din ce în ce mai complicate, a preocupat întotdeauna pe matematicieni. Se știe că încă Blaise Pascal (1623—1662) și Wilhelm Leibniz (1646—1716), doi oameni de știință care au dat un impuls teoretic matematicii, au fost și inventatorii unor mașini de calcul. În decursul timpului, mașinile de calcul au căpătat o continuă perfecționare, atingînd în secolul nostru performanțe uluitoare prin calculatoarele electronice. În enciclopedie cititorul găsește o expunere clară asupra mijloacelor moderne de calcul, asupra programării și limbajelor algoritmice.

O aplicație interesantă a matematicii este și în domeniul economiei. Rolul matematicii în operațiile financiare a fost cunoscut de multă vreme, dar el a fost limitat la calcule de dobînzi, împrumuturi, amortizări de sume și la asigurări, lăsînd la o parte operațiile matematice care stau la baza întocmirii bilanțurilor și bugetelor. Întîrzierea folosirii matematicilor superioare în economie se explică prin lipsa unor mijloace rapide de calcul, care să permită utilizarea rezultatelor numerice la timp util, fără întîrzieri dăunătoare. În ultimele decenii au apărut probleme economice de optim care sînt expuse în enciclopedie și care încheie primele două părți ale acesteia.

Ultima parte a enciclopediei este dedicată matematicilor moderne. Domeniile matematicii contemporane sînt expuse în foarte scurte rezumate. Față de dezvoltarea uriașă a matematicii moderne, aceste rezumate oferă cititorului doar o privire de ansamblu asupra conținutului și problematicii fiecărui domeniu, suficient totuși pentru a fi de mare utilitate celor care n-au studiat matematica decît în liceu sau în institutele tehnice sau economice, și doresc să cunoască în linii mari care sînt problemele dezbătute astăzi în matematică.

Conținutul enciclopediei este, după cum se vede, bogat și din această cauză se adresează unui cerc mare de cititori. Enciclopediile dau în general scurte informații asupra unui număr imens de cunoștințe și de aceea ele, singure, nu pot oferi un material didactic suficient pentru studierea unei discipline. Consider însă că această lucrare este de cel mai mare folos pentru profesorii de școală medie și de liceu, care se prezintă la definitivat sau la obținerea de grade în învățămînt. Ei găsesc în această enciclopedie aproape toate cunoștințele ce li se cer la aceste examene, expuse metodic, cu referințe istorice și cu exemple instructive. Enciclopedia nu trebuie să lipsească de pe masa de lucru a unui profesor de liceu și din motive pedagogice. Bogăția de exemple în care se aplică matematica, expuse magistral în enciclopedie, poate face cursul lui mai interesant și să demonstreze elevilor importanța relațiilor matematicii cu celelalte ramuri ale științei și cu tehnica, utilitatea ei în viața de toate zilele.

„Mica enciclopedie matematică" se ocupă în principal cu matematicile clasice, a căror construcție era definitiv încheiată la sfîrșitul secolului al XIX-lea. Școala românească de matematică s-a afirmat odată cu înființarea universităților din Iași și București în jurul anului 1860. Astfel, realizările mari ale matematicienilor români, în afară de contribuția lui Spiru Haret în astronomie, aparțin secolului al XX-lea. Cei dintîi oameni de știință români care au adus contribuții importante în matematică au fost Gheorghe Țițeica, Dimitrie Pompeiu, Traian Lalescu. Ei au creat un centru matematic la București, după cum a reușit să facă și Al. Myller la Iași. Opera lor a fost continuată între cele două războaie mondiale de matematicieni remarcabili ca V. Vâlcovici, S. Stoilov, O. Onicescu, D. Barbilian, O. Mayer, Al. Pantazi, M. Ghermănescu, G. Sudan, G. Vrănceanu, A. Ghica, G. Călugăreanu, N. Ciorănescu, M. Nicolescu, M. Haimovici, Gr. Moisil, T. Popoviciu, N. Teodorescu, C. Iacob și alții.

Dar cea mai mare dezvoltare a matematicii în țara noastră are loc după anul 1944. Acum apar veritabile școli de matematică, în care lucrează numeroși matematicieni grupați pe specialități. Există astfel școli de algebră, analiză, geometrie, mecanică, teoria probabilităților și statistică matematică, lingvistică matematică etc. Contribuțiile acestor școli sînt semnalate în publicații din lumea întreagă, aparținînd matematicii contemporane.

Acad. GH. MIHOC

Prefață la ediția în limba engleză

Este de la sine înțeles că în prezent știința și tehnologia nu pot fi stăpînite fără instrumentul matematicii. Acest instrument se aplică într-o măsură din ce în ce mai mare în multe domenii. Ca o consecință, a apărut necesitatea obiectivă a elaborării unor treceri în revistă a rezultatelor matematicii într-o formă neconvențională, care să facă posibilă acoperirea unor lacune în cunoștințele celor interesați. Nu se poate considera că o simplă enumerare de teoreme sau o colecție de formule ar fi potrivite acestui scop, deoarece astfel s-ar pune în evidență în special limbajul simbolic al semnelor și literelor decît fondul ideii matematice, dealtfel singurul lucru care prezintă importanță în realitate.

Scopul lucrării îl constituie prezentarea noțiunilor și relațiilor matematice într-un mod cît mai simplu și mai precis. Ținînd seama de volumul materialului considerat, este evident că nu s-au redat pur și simplu detalii din manualele fiecărei ramuri; ceea ce s-a urmărit a fost netezirea accesului la literatura de specialitate pentru cît mai mulți cititori. Cum din ediția apărută în limba germană s-au vîndut 700 000 de exemplare, se poate aprecia că acest scop dificil a fost atins de lucrare.

Culorile s-au folosit pe scară mare pentru ușurarea înțelegerii. Astfel, definițiile importante și grupurile de formule sînt date pe fond galben, exemplele pe fond albastru și teoremele pe fond roșu. Succesiunea calculelor mai complicate este indicată prin săgeți roșii. De asemenea, în interiorul ilustrațiilor culorile indică ideile principale.

Exemplele numeroase ajută la înțelegerea enunțurilor generale. În mod frecvent, calculele numerice au fost date separat, astfel încît o problemă poate fi citită și fără referiri la calcule, acestea putînd fi privite ca niște detalii explicitate. Unitățile fizice, care apar în unele exemple, sînt date în sistemul S.I. Exemplele din viața curentă sînt date în unități de măsură curente.

Subdivizarea sistematică a materialului, titrarea corespunzătoare și cuprinsul tabelelor prezentate au ca scop orientarea rapidă și sigură a cititorului. Indexul detaliat de termeni de specialitate al cărții asigură accesul direct la documentarea în probleme specifice.

Mulțumim autorilor diferitelor capitole, în special pentru că au răspuns la rugămintea noastră de a prezenta versiuni ușor accesibile chiar cu riscul de a devia de la terminologia uzuală. În special în partea a treia, mulți autori au considerat dificil să schițeze numai elementele de bază în domenii speciale ale matematicii, cu toate că sînt experți în aceste domenii.

Mulțumirile noastre speciale se adresează referenților, profesorului K. A. Hirsch, de la Queen Mary College — Universitatea din Londra și profesorului H. Reichardt, secția de matematică a Universității Humboldt din Berlin. Ei au lucrat neobosit pentru îmbunătățirea cărții și au contribuit la elaborarea unei lucrări care este o sursă sigură de informare pentru orice cititor și care va convinge pe oricine că matematica este pur și simplu o disciplină ce poate fi învățată.

Editorii

Introducere

Marile succese ale tehnicii, adînc pătrunse în viața oamenilor, sub toate formele ei, au contribuit la recunoașterea rolului fundamental al matematicii. Oricine știe sau are cel puțin idee că aceste succese, în totalitatea lor, nu s-ar fi putut obține fără matematică. Din acest motiv, interesul pentru matematică a crescut mereu și, odată cu acesta, necesitatea de informare asupra acestei științe.

În multe privințe, matematica este o știință abstractă și aceasta în special în ceea ce privește modul de punere a problemelor. În timp ce un cercetător dintr-un domeniu ca medicina, zoologia, botanica, geografia, geologia sau chiar din lingvistică, istorie și astronomie, poate să expună unui neinițiat marea parte a problemelor, rezultatelor, ba chiar și a metodelor și principiilor de bază din domeniul său de specialitate, în așa fel încît neinițiatul să-și poată face o idee de ansamblu asupra domeniului respectiv, acest lucru este foarte greu de făcut pentru fizica și chimia contemporană și încă și mai greu pentru matematica contemporană. Nu numai întinderea rezultatelor a crescut mult, dar problemele sînt așa de greu de tratat și atît de adînci, încît nici chiar un matematician nu poate avea decît o idee de ansamblu asupra întregii matematici. Astfel, se întîmplă adesea că unii dintre matematicieni, specializați în anumite domenii, nu au legături directe cu problemele de care se ocupă ceilalți.

Acestei divizări a matematicii, ca urmare a creării multor domenii speciale, i se opune tendința contrarie care constă în alăturarea de domenii diferite, care, uneori, nici nu sînt tangente, creîndu-se astfel o nouă teorie abstractă care dezvăluie legături între direcțiile speciale aparent îndepărtate. Acest proces poate fi privit ca o „abstracție repetată". În timp ce, pe de o parte, disciplinele de bază, ca de exemplu algebra și geometria, au apărut ca abstracții ale experienței zilnice, pe de altă parte, se poate ajunge prin astfel de abstracții la o teorie de legătură; de exemplu, din algebră și geometrie, prin abstractizare în condiții diferite, se pot obține mai multe astfel de teorii. Trebuie accentuat că prin „mod de gîndire abstract" nu se știrbește nimic din valoarea modului de gîndire — cuvîntul abstract fiind uneori interpretat ca atare — aceasta însemnînd: a lăsa la o parte tot ceea ce într-o anumită conexiune și pentru un anume scop este neesențial. Se poate menționa un exemplu foarte simplu: în geometrie nu contează în ce culoare sînt desenate figurile geometrice, pe cînd într-o altă conexiune, într-un desen în care apar figuri geometrice sau ornamente, culorile pot juca un rol însemnat.

Din toate acestea rezultă că nu mai este posibil să se dea unui începător o idee generală asupra întregii matematici contemporane. Prin începător se înțelege cel ce are ca pregătire matematică numai ceea ce se predă în școală. Chiar licențiații în matematici și profesorii de matematici pot fi considerați începători în anumite domenii, imposibil de cuprins în patru, cinci ani de studii universitare, în așa fel încît să devină specialiști în toate domeniile.

De aceea, „Mică enciclopedie matematică" nu poate avea pretenția de a cuprinde cunoștințe asupra tuturor domeniilor speciale de matematici: cuprinsul acesteia a trebuit să fie limitat destul de mult. Ceea ce aparent pare foarte simplu, adică a se începe cu fundamentele matematicii așa cum sînt cunoscute astăzi și, pornind de aici, să se clădească teoria pînă la un anumit nivel, nu este deloc simplu în realitate.

În dezvoltarea istorică, matematica a apărut într-o formă cu totul naivă. A început cu numerele 1, 2, 3 ș.a.m.d. și cu figurile intuitiv percepute în geometrie: puncte, segmente, drepte, plane în spațiu, unghiuri, triunghiuri, cercuri și a evoluat cu ajutorul unor concepte mai complicate, în care domeniul numerelor și cel al figurilor nu s-au dezvoltat separat ci legate prin conceptul de măsurare. În acest mod, trecînd de la probleme simple, intuitive și evidente, printr-o dezvoltare progresivă, la probleme mai complicate, s-a dezvoltat construcția matematică la babilonieni și egipteni, obținîndu-se rezultate remarcabile ca de exemplu: în astronomie, calculul eclipselor de lună etc.

Pe o treaptă complet nouă de dezvoltare a fost ridicată matematica de către grecii antici, care au găsit necesar nu numai să ia cu asalt multe dintre problemele noi, ci și să descopere ce se face în fond, atunci cînd cineva face matematică. Marele lor succes a fost că datorită lor matematica a devenit o știință în sensul acceptat în zilele noastre. În primul rînd ei au

recunoscut că o demonstrație constă în aceea că prin cele mai simple conexiuni logice, care de multe ori sînt sprijinite de observație și experiență, o afirmație matematică necunoscută este adusă la elemente cunoscute. Pe de altă parte ei au descoperit că o astfel de retrospectivă nu poate continua fără sfîrșit ci numai pînă la cele mai simple proprietăți de bază ale numerelor sau figurilor, care apar din observație sau experiență.

În acest mod au alcătuit pentru prima oară un sistem de realități (fapte) fundamentale (de exemplu că prin două puncte trece o dreaptă și numai una) și au dezvoltat bazele logicii. Aceste două elemente au dus la construirea sistematică, deductivă, pornind de la simplu la complex, a geometriei.

Această geometrie, euclidiană, a fost cu excepția unor mici completări, mult timp, considerată modelul unei științe. Totuși, timp de aproape două mii de ani, nu au existat nici pe departe încercări și străduințe de a construi algebra și mai tîrziu analiza, în aceeași manieră. Grecii antici considerau proprietățile de bază ale numerelor naturale ca de la sine înțelese, fiind interesați doar în problemele de divizibilitate și de numere prime. Ei operau și cu fracții ordinare dar nu au ajuns la ideea de a introduce numere negative. Legat de triunghiul dreptunghic isoscel, au ajuns la concluzia că fracțiile nu sînt suficiente pentru descrierea tuturor relațiilor dintre mărimi. Ei au observat că relația dintre ipotenuză și catetă într-un astfel de triunghi nu poate fi exprimată printr-o fracție. De aici, nu au tras concluzia, care ni se pare astăzi rezonabilă, de a extinde în mod corespunzător domeniul fracțiilor în așa fel încît această relație geometrică, și pe cît posibil toate relațiile geometrice, să poată fi reprezentate prin numere din domeniul lărgit în acest mod. Ei au procedat invers, au geometrizat algebra. A rezultat din aceasta o teorie echivalentă cu teoria numerelor reale, dar, prin geometrizare, au apărut complicații atît de mari, încît s-a oprit dezvoltarea matematicii.

Practica astronomiei și a navigației necesita în mod imperios calcule trigonometrice care se puteau face numai cu ajutorul unor tabele ale funcțiilor trigonometrice. Deoarece valorile observate puteau fi măsurate cu o exactitate mărginită, s-a ajuns la a considera suficient ca valorile calculate să fie date nu exact ci aproximativ. Astfel, s-a ajuns la fracțiile zecimale cu un număr finit de zecimale care s-au dovedit mult mai indicate pentru calculul practic decît fracțiile ordinare. În această privință desigur că s-a instalat sentimentul că rezultatele obținute sînt cu atît mai exacte cu cît s-au calculat mai multe zecimale și chiar mai mult, că printr-un număr suficient de zecimale se poate obține orice exactitate dinainte stabilită. Prin aceasta, s-a pătruns adînc în însăși esența numerelor reale și s-a putut vorbi chiar despre fracții zecimale cu un număr infinit de zecimale. Dacă teoria acestor numere s-ar fi construit în mod consecvent, s-ar fi putut obține chiar atunci o teorie consistentă a numerelor reale.

Se poate vedea cum această interpretare, e drept sub o altă formă, a apărut chiar la Arhimede, printr-un exemplu interesant și foarte important ca principiu. Arhimede a încercat să calculeze aria unor figuri plane mărginite de diferite curbe. Odată el a reușit ca prin celebra sa metodă exhaustivă să calculeze exact aria mărginită de o porțiune de parabolă și de o coardă; un raport de arii, un număr care era hotăritor, s-a dovedit a fi $1/3$. În schimb, Arhimede nu a reușit să găsească un rezultat asemănător pentru aria cercului. Dacă r este raza cercului, atunci aria acestuia este πr^2 și Arhimede trebuia să calculeze, pentru a rezolva problema, numărul π. După cum se știe astăzi, avînd la dispoziție numai fracțiile, el nu putea realiza acest calcul; a trebuit să se mulțumească prin a situa numărul π între $3\,{}^{1}/_{7}$ și $3\,{}^{10}/_{71}$. În acest scop el a calculat prin aplicarea repetată a teoremei lui Pitagora ariile poligoanelor regulate cu 96 laturi înscris și circumscris cercului. Este clar că Arhimede era conștient de faptul că π putea fi cuprins între limite din ce în ce mai strînse, că putea fi calculat cu o exactitate dinainte dată, dacă numărul laturilor poligoanelor înscris și circumscris este suficient de mare. Această posibilitate de a exprima cu o exactitate dată un număr prin fracții constituie însăși esența numerelor reale.

Această cunoaștere intuitivă a esenței numerelor reale s-a consolidat din ce în ce în decursul timpului; așa s-a întîmplat de exemplu, cu mult înainte de fundamentarea calculului diferențial și integral, la alcătuirea tabelelor de logaritmi, la reprezentarea prin coordonate a punctelor planului și spațiului, în geometria diferențială a lui Descartes și apoi în măsură și mai mare prin construcția calculului diferențial și integral începută de Leibniz și Newton, continuată cu entuziasm de frații Bernoulli, apoi Euler, Fermat, Cauchy, Gauss și alții, astfel încît nimeni nu și-a dat seama că de fapt ei se ocupă intens de bazele teoriei numerelor reale.

Problemele privind crearea teoriei numerelor reale au jucat un rol însemnat în alte două domenii, în geometrie și în algebră. În geometria euclidiană se realizase deja (după cum s-a mai amintit) un sistem de propoziții geometrice simple din care puteau fi deduse toate celelalte propoziții ale geometriei. Aceste propoziții simple, numite axiome, reprezentau o sinteză a experienței geometrice de pînă atunci și erau atît de clare și evidente încît nici nu se simțea nevoia de a

fi demonstrate. O excepție reprezenta totuși axioma paralelelor. Aceasta afirmă că printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o singură dreaptă care nu intersectează dreapta dată. Se punea problema dacă această afirmație nu reiese din sistemul de axiome, adică dacă poate fi demonstrată pe baza celorlalte axiome?

2 000 de ani o serie de matematicieni s-au ocupat zadarnic de această problemă, pînă cînd trei matematicieni: Gauss, Lobacevski și Bólyai au reușit să arate că axioma paralelelor este independentă de celelalte. Importanța acestei recunoașteri devine însă clară numai în relație directă cu alte dezvoltări.

În algebră, în căutarea unei formule de rezolvare a ecuației de gradul trei s-a ajuns la expresia $\sqrt{-1}$ aparent lipsită de sens. Dacă însă se procedează în calcule cu $\sqrt{-1}$ la fel ca și cu alte rădăcini, de exemplu $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ sau chiar $\sqrt{\pi}$, atunci se poate obține totuși ceva rezonabil. Aceasta a întărit credința despre existența acestui simbol pentru care se încetățenise între timp notația i. Au trecut apoi aproape trei sute de ani pînă cînd Gauss a arătat că tot ceea ce s-a făcut pînă atunci poate fi justificat în mod riguros prin considerarea unei extinderi a mulțimii numerelor reale care conține un număr nou al cărui pătrat este -1. Dar chiar Gauss era atît de familiarizat cu numerele reale încît credea că poate să le folosească fără rezerve. Numai unele dificultăți, întîmpinate de Cauchy și alți matematicieni, legate de clarificarea noțiunii de limită, au prilejuit preocuparea mai serioasă pentru numere reale.

S-a recunoscut astfel că toate modurile de fundamentare a acestora se bazează în ultimă instanță pe fracții. Acestea pot fi reduse mai departe la numere naturale, problema reducîndu-se la studiul mulțimii numerelor naturale ale căror proprietăți se bazează pe un număr restrîns de propoziții aproape evidente, numite axiomele lui Peano. Prin această reducere la numere naturale s-au pus bazele teoriei numerelor reale și complexe și în același timp, bazele analizei complexe și reale (adică a calculului diferențial și integral, ecuațiilor diferențiale, calculului variațional, teoriei funcțiilor ș.a.m.d.) și chiar ale geometriei. Cum geometria analitică se ocupă de reprezentarea noțiunilor de bază ale geometriei, în primul rînd punctele, prin coordonatele lor, și cum aceste coordonate sînt numere reale, rezultă în ultimă instanță că și geometria are la bază teoria numerelor reale.

În aceeași ordine de idei trebuie remarcată și o altă descoperire a cărei fundamentare a început aproximativ cu 150 de ani în urmă. S-a observat demult că anumite reguli pentru înmulțirea numerelor prezintă o asemănare formală cu unele reguli de adunare a numerelor. Legități asemănătoare, foarte simple, s-au observat și la alte operații matematice, de exemplu, compunerea mișcărilor sau a permutărilor. Mult mai tîrziu însă, s-a ajuns la consecința de a deduce din aceste proprietăți de bază, cu ajutorul unor procese logice, unele proprietăți noi mai complexe și mai adînci. Acest domeniu creat succesiv este ceea ce se numește astăzi *teoria grupurilor*. Și în acest caz se poate iarăși observa cum, la fel ca în geometria euclidiană, un sistem de axiome (adică o colecție de proprietăți fundamentale) poate duce la dezvoltările cele mai complexe. Părți însemnate ale matematicii moderne, în primul rînd algebra, dar în măsură tot mai mare și analiza și geometria se tratează astăzi axiomatic. Acest lucru se realizează astfel: fiind dată o colecție (de regulă numită mulțime) de obiecte matematice (elementele mulțimii) cu un sistem de axiome, adică cu unele propoziții, care descriu proprietățile de bază ale acestor obiecte, să se deducă din aceste axiome consecințele cele mai tari, cele mai complexe, adică să se dezvolte cît mai adînc teoria unei astfel de structuri, obținîndu-se o privire de ansamblu asupra tuturor posibilităților de realizare ale unui astfel de sistem de axiome.

Se poate întîmpla ca în realitate să existe numai o astfel de posibilitate, să existe mai multe sau chiar un număr infinit de posibilități de realizare, dar tot așa de bine se poate întîmpla să nu existe nici o posibilitate de realizare. Acest lucru se întîmplă cînd axiomele date sînt contradictorii. Cînd există multe posibilități de realizare, se caută mărimi caracteristice prin care diferitele posibilități pot fi deosebite, folosind procedee cu un număr finit de pași. Pentru unele structuri, aceste probleme sînt deja complet rezolvate, pentru altele soluția este încă departe. Se poate vedea aici foarte clar, cît de strîns legate sînt axiomatica și logica matematică.

Și mai impetuoasă a devenit în secolul trecut necesitatea unei logici matematice ca instrument de cercetare, în momentul în care în teoria mulțimilor au apărut contradicții. Teoria mulțimilor este cea mai simplă „teorie de structură", deoarece ea se referă la colecții de obiecte, nesupuse nici unei axiome. Mulțimile pot fi de puncte în plan sau în spațiu, mulțimi de anumite numere, de exemplu de numere prime, întregi sau pozitive raționale, sau mulțimi de mișcări, de funcții, de figuri geometrice dar și de oameni, de stele, de scaune sau de orice altceva. Cum nu se face nici o ipoteză asupra structurii lor, două astfel de mulțimi sînt considerate echivalente cînd au același număr de elemente.

Ceea ce se înțelege prin aceasta în cazul mulțimilor finite este cît se poate de clar; a defini însă numărul elementelor unei mulțimi infinite, așa-zisa putere a mulțimii, a constituit însă o

problemă foarte grea. „Puterea" unei mulţimi are o serie de proprietăţi care nu se deduc din proprietăţile „numărului elementelor" unei mulţimi finite. În acest sens există „la fel de multe" numere naturale ca şi fracţii, dar nu atîtea fracţii cîte numere reale, iar mulţimea punctelor pe dreaptă are aceeaşi putere ca mulţimea punctelor din plan. Acestea toate sînt afirmaţii care, deşi aparent absurde, sînt de o exactitate matematică ireproşabilă. Odată cu încercările de construire nelimitată a unor mulţimi, au apărut şi contradicţii, de exemplu, noţiunea de „mulţime a tuturor mulţimilor" este ea însăşi o contradicţie. Totuşi nu se poate spune că această contradicţie a declanşat o „criză a matematicii", ci a atras atenţia matematicienilor asupra precauţiilor ce trebuie luate atunci cînd se definesc noţiuni. De fapt, aceasta a dus la dezvoltarea sistematică a logicii matematice şi astăzi se ştie precis cum pot fi evitate astfel de contradicţii.

S-ar putea crede că acest proces de abstractizare realizat prin axiomatizare, teoria structurilor şi logică matematică se îndepărtează tot mai mult de o matematică aplicată eficient. Or, după cum se ştie astăzi, nu este o întîmplare că încă Leibniz, pe lîngă opera sa fecundă, s-a ocupat de probleme fundamentale ale logicii, construind chiar o maşină de calcul.

Cu toate acestea, apariţia maşinilor de calcul, fabricate în serie, manuale sau acţionate de motor, nu au prilejuit nici o reflexie de principiu mai importantă. Lucrurile s-au schimbat însă, odată cu apariţia maşinilor electronice de calcul la care viteza de calcul a crescut simţitor.

Aceste maşini nu sînt construite în aşa fel încît acestea să poată efectua un număr mai mare sau mai mic de operaţii mai mult sau mai puţin complicate, din care să se poată combina printr-o metodă adecvată soluţia numerică a unei probleme. Dimpotrivă, acestea funcţionează după principiul negru-alb, după cum în fiecare parte componentă trece curent electric sau nu. Cu toate acestea, aceste maşini biruie calcule care altfel nu pot fi practic efectuate şi duc la bun sfîrşit, într-un timp foarte scurt, programe complicate, care altfel ar necesita foarte mult timp. Desigur, durata de rezolvare a unui astfel de calcul depinde de programul alcătuit. Încă înainte de descoperirea calculatoarelor electronice s-a ajuns la concluzia că în scopul programării trebuie observate proprietăţi care joacă un rol şi în logica matematică, care mai tîrziu s-au concretizat în teoria algoritmilor. Cu aceasta s-a dovedit încă o dată valoarea practică a unor cercetări de matematică izvorîte din necesităţi teoretice; teoria algoritmilor constituie un exemplu clasic pentru relaţia strînsă între matematica teoretică şi matematica aplicată, în speţă tehnica de calcul.

În aceeaşi ordine de idei, trebuie subliniată deosebirea între rezolvabilitatea principială sau teoretică a unei probleme matematice şi rezolvabilitatea ei practică. De regulă, matematica are ca obiect probleme generale şi nu probleme specifice, particularizate pentru anumite valori, probleme care pot fi particularizate într-o infinitate de probleme specifice. Un exemplu foarte simplu poate fi acesta: să se determine aria triunghiului în raport cu lungimea laturilor sale. Pentru această arie există o formulă generală deşi lungimile laturilor pot lua o infinitate de valori. O astfel de problemă se consideră rezolvată atunci cînd se găseşte o formulă, o reţetă de rezolvare, un algoritm cu care poate fi rezolvat fiecare caz similar pentru care se precizează datele. În plus, se mai cere ca soluţia (formula, procedeul) să comporte un număr finit de etape. În acest caz, se consideră problema rezolvată. Se poate întîmpla însă ca, practic, problema să rămînă nerezolvabilă, deoarece numărul etapelor soluţiei, deşi finit, este aşa de mare, încît calculele nu pot fi efectuate. Se mai poate întîmpla, ca pentru valori ale datelor mici şi simple găsirea soluţiei să fie simplă întîmplare, pentru alte valori mai mari sau mai complicate acest lucru să fie imposibil. În aceste cazuri se poate încerca (şi aceasta poate duce la noi şi interesante probleme de matematică) găsirea unui alt procedeu mai eficace sau se găseşte o aproximare a soluţiei. În sfîrşit, se va încerca construirea unor maşini de calcul mai rapide cu ajutorul cărora se va putea rezolva un număr mai mare de cazuri.

Un salt important în această direcţie l-a constituit descoperirea maşinilor electronice de calcul. Urmarea a fost dezvoltarea unor noi discipline, în special în matematica aplicată, ale căror probleme nu puteau fi rezolvate pînă atunci într-un timp acceptabil. Un exemplu de problemă principial rezolvabilă este jocul de şah; este principial rezolvabilă deoarece pe baza regulilor jocului nu există decît un număr finit de procedee de joc.

Pentru jocul de şah, problema dacă „albele" pot cîştiga întotdeauna, nu este încă rezolvată, deşi este finită; chiar dacă s-ar folosi numai în acest scop toate calculatoarele existente în prezent în lume, tot nu s-ar putea obţine rezultatul. Pentru rezolvarea acestei probleme sînt necesare maşini de calcul incomparabil mai rapide decît cele de care se poate dispune astăzi.

Comparînd această succintă schiţă a dezvoltării matematicii de la noţiunile ei de bază: număr, regulă de calcul, figură, măsură, pînă la aspectul ei actual puternic axiomatizat, abundent în structuri abstracte şi cu posibilităţile noi, departe de a fi complet epuizate, ale calculatoarelor, cu conţinutul cărţii: „Mică enciclopedie matematică", se pot observa multe legături directe şi indirecte. Astfel, prima parte „Matematici elementare" cuprinde o pondere însemnată a acelei matematici care s-a dezvoltat cu începere din antichitate, continuînd apoi în evul mediu şi mergînd

pînă la descoperirea calculului diferențial și integral, cu singura deosebire că aritmetica, teoria numerelor și geometria nu sînt expuse concomitent (cum au apărut în dezvoltarea lor istorică) ci succesiv. Se începe cu numerele naturale și cu regulile de calcul privind operațiile fundamentale așa cum și le-au imaginat oamenii la început. Imediat însă se conturează și construcția axiomatică, începîndu-se cu numerele naturale și terminîndu-se cu cele complexe. Odată cu aceste noțiuni fundamentale se folosește un mod aparte de scriere, calculul cu litere, pe care grecii antici nu l-au cunoscut, din care cauză reprezentările lor erau incomode și greoaie. Scrierea cu simboluri literale este privită astăzi în școli ca ceva natural și de la sine înțeles. Notațiile sînt aici atît de bine alese și așa de ușor de mînuit încît există pericolul efectuării mecanice a calculelor. Această tendință trebuie combătută încă din școală. În primul rînd vine fondul matematic al ideii, calculele fiind secundare și nu invers. Gauss scria la 1 septembrie 1850 într-o scrisoare către Schumacher:... „Este în caracterul matematicii zilelor noastre ca prin limbajul semnelor și simbolurilor să dispunem de o manetă prin care cele mai multe argumentări să fie reduse la un anumit mecanism... De cîte ori se folosește maneta mecanic, folosirea ei implică în cele mai multe cazuri anumite ipoteze trecute sub tăcere; eu pretind ca la orice calcul, la orice folosire de concepte, să se țină seama de condițiile inițiale, iar toate produsele mecanismului să nu fie considerate niciodată în afara cadrului autorizat de aceste condiții"...

Multe probleme au ca obiect determinarea unor mărimi căutate din mărimi date. Grecii antici expuneau problema, modul de rezolvare și soluția într-o formă de cele mai multe ori greoaie, folosind multe cuvinte; prin calculul simbolic aceste probleme se formulează simplu și limpede. De multe ori se întîmplă ca probleme care apar total diferite să fie în ceea ce privește ecuația sau sistemul de ecuații care rezultă absolut de aceeași formă. Aici apare din nou paralelismul între modul de formulare a problemei specifice și abstractizare, în care se lasă la o parte sensul mărimilor date și căutate și se păstrează numai sîmburele matematic. Aici se iau în considerație în primul rînd tipuri de ecuații și sisteme de ecuații care se întîlnesc mai frecvent și care pot fi tratate elementar. Caracteristic pentru matematica modernă este gîndirea funcțională. Ea constă în considerarea unor relații funcționale, care exprimă modul în care unele mărimi depind de alte mărimi, de exemplu relația dintre aria sau unghiurile unui triunghi și laturile sale. Primul contact cu această gîndire se realizează la studiul funcțiilor elementare. Geometria elementară se ocupă de puncte, segmente, unghiuri, drepte, triunghiuri, cercuri, tetraedre ș.a.m.d. în plan și în spațiu. Noțiunea de număr joacă un rol important și în geometrie, datorită necesității de a măsura reprezentările geometrice. Desigur, gîndirea pur geometrică nu trebuie însă neglijată, mai ales în rezolvarea unor probleme. Se încearcă rezolvarea problemelor geometrice prin metode pur geometrice, adică prin desen și construcție. Modalitățile în care probleme în spațiu pot fi reprezentate grafic în plan fac obiectul geometriei descriptive. Dimpotrivă, geometria analitică reprezintă un amestec de geometrie și calcul; prin noțiunea de coordonată problemele geometrice pot fi transformate în probleme cu numere, în acest fel geometria se îndreaptă către metodele analizei.

Începuturile analizei sînt examinate în partea a doua „Matematici superioare". Deoarece noțiunea de limită a fost deja introdusă și folosită în matematicile elementare, matematicile superioare încep cu o expunere riguroasă a teoriei limitelor. Se pregătesc astfel bazele teoriei șirurilor de numere și de funcții, atît de importante pentru înțelegerea teoriei numerelor și teoriei funcțiilor și, pe de altă parte, pentru noțiunea de continuitate a funcțiilor și în general pentru calculul diferențial și integral a căror însemnătate este fundamentală nu numai pentru toată matematica dar și pentru aplicațiile în fizică, tehnică etc. Multe probleme de geometrie și de fizică se prezintă sub forma unor ecuații diferențiale, adică sub forma unei relații dintre o funcție și derivatele ei. Ecuațiile diferențiale constituie astăzi o disciplină foarte cuprinzătoare care va fi reprezentată aici numai cu părțile ei cele mai simple. O altă disciplină foarte atrăgătoare este geometria diferențială care este o aplicație a calculului diferențial și integral la teoria curbelor în plan și spațiu și a suprafețelor în spațiu. După cum s-a mai arătat înainte, soluția teoretică a unei probleme este încă destul de departe de aplicarea ei corectă într-un caz concret, datorită volumului mare de calcule pe care le implică. Obiectul reprezentărilor grafice și al metodelor numerice constă în transpunerea soluției teoretice într-una nemijlocit aplicabilă, la rezolvarea căreia mașinile electronice de calcul au un rol dintre cele mai importante. Teoria probabilităților și statistica matematică au de asemenea un rol important în aplicații; de exemplu, în economia matematică și în cibernetică, din care s-a dezvoltat apoi o teorie matematică a reglării.

În ultima parte „Matematici speciale" se încearcă o introducere succintă într-o serie de domenii de cercetare ale matematicii contemporane. Cu bagajul de noțiuni introduse în prima parte este imposibilă o pătrundere mai adîncă în problemele specifice ale acestor domenii, care sînt încă într-o continuă transformare și a căror rezolvare completă este încă departe. Cine dorește o orientare mai aprofundată este sfătuit să se adreseze literaturii de specialitate.

Hans Reichardt

I. Matematici elementare

1. Operații fundamentale cu numere raționale

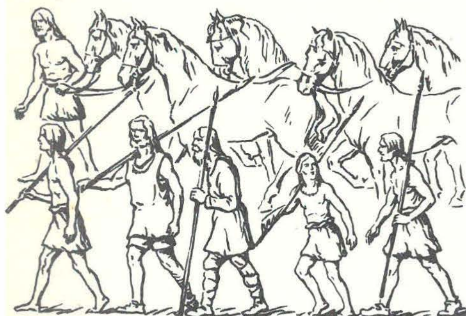
1.1. Numere naturale N

Numere și cifre

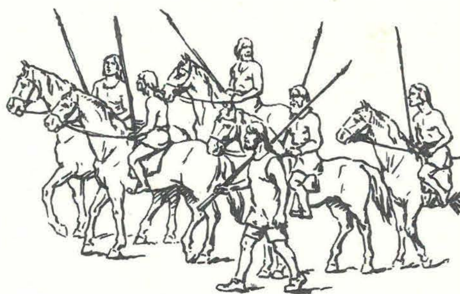
Ce reprezintă numerele naturale? Strămoșii noștri au fost puși în situația de a se ocupa de numere datorită a două genuri de activitate, ceea ce a condus la numerele *cardinale* și *ordinale*.

Numere cardinale. Omul a trebuit să compare diferite *mulțimi* de obiecte — de exemplu, pietre, cîini, tovarăși de vînătoare — pentru a vedea care mulțime conține mai multe elemente. Acest lucru se face astăzi prin numărare și prin compararea numerelor astfel obținute; dar aceasta presupune că se știe a număra, adică se cunosc deja numerele. Se poate ajunge și mai simplu la rezultat dacă se constată că oamenii și caii sînt în același număr, așezînd fiecare călăreț pe cîte un cal. Cu alte cuvinte, se stabilește o ordonare de perechi oameni-cai (fig. 1.1.1). Dacă ordonarea este completă, atunci sînt același număr de oameni și de cai și se poate afirma că mulțimile considerate, diferite prin natura elementelor lor, au aceeași putere.

Dacă însă toți caii au fost puși în corespondență cu numai o parte a oamenilor, atunci se spune că oamenii sînt în număr mai mare decît caii (fig. 1.1.2).

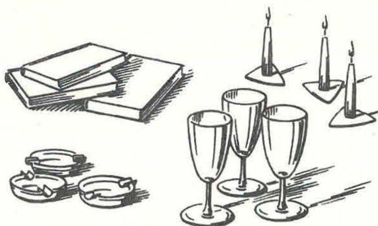


1.1.1. Oameni și cai neordonați



1.1.2. Oameni și cai ordonați. Un om rămîne în plus

Un alt exemplu este aranjarea unei mese unde farfuriile, ceștile, lingurile ș.a. sînt ordonate în tacîmuri (fig. 1.1.3).



Numerele cardinale indică mărimea mulțimii, respectiv numărul de elemente ale mulțimii	1, 2, 3, ...

Numerele ordinale sînt numere de ordine primul, al 2-lea, al 3-lea,...

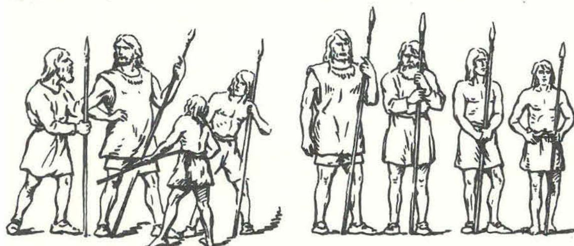
1.1.3. Mulțimi de aceeași mărime: trei

Toate mulțimile care pot fi ordonate complet în acest fel au o calitate comună: au același număr de elemente. În acest mod se formează și astăzi noțiunea de *număr cardinal*.

Această abstractizare nu se poate atinge pe toate treptele de cultură. Există triburi primitive care folosesc diferite expresii verbale pentru același număr, atunci cînd îl folosesc în legătură cu noțiuni (obiecte) diferite: *două* femei sînt, deci, ceva diferit de *două* săgeți; nu au realizat încă abstractizarea noțiunii de număr.

Numere ordinale. O altă necesitate a fost stabilirea unei ordini în interiorul unei mulțimi. După un anume criteriu — vîrstă, vitejia călărețului — trebuie constatat care va fi la vînătoare primul, al doilea, ... Ceva asemănător se întîmplă și la numărare. Axioma numărării arată că rezultatul numărării nu depinde de ordinea adoptată. Așa au luat naștere *numerele ordinale* (fig. 1.1.4).

Numerele naturale N	0, 1, 2, 3, ...



1.1.4. Mulțime de patru vînători, neordonată și ordonată după înălțime

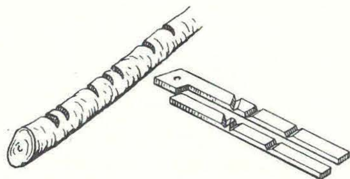
Numerele cardinale și ordinale s-au dezvoltat într-o legătură permanentă unele cu altele și formează cele două aspecte ale *numerelor naturale*, la care se adaugă de cele mai multe ori prin convenție și numărul zero.

Numerale și simbolul numerelor. Reprezentarea orală și scrisă a numerelor cardinale și ordinale se face prin numere și simboluri (fig. 1.1.5).

Reprezentarea numerelor. Cea mai simplă reprezentare a numerelor s-a făcut cu ajutorul răbojurilor, pe care s-au notat în special datoriile. De aici și expresia: am scris pe răboj (fig. 1.1.6). Și astăzi, la o numărare lungă se folosește o metodă bazată pe linii, aceeași pe care Robinson Crusoe a folosit-o la numărarea zilelor. În cazul numerelor foarte mari nu se mai poate obține repede o privire de ansamblu asupra numărului și vor trebui grupate din nou grupele existente. Ceva asemănător, se întîmplă în cazul în care va trebui să se aleagă noi numerale și simboluri pentru noi numere. Este neeconomic să se utilizeze un semn și un numeral pentru orice nou număr. Pentru numere mari se folosesc mai multe cuvinte și semne care se combină în diferite

Reprezentarea numărului prin cuvînt: *nouă*
Simbolul numărului: 𝍸 IIII *sau* IX *sau* 9

1.1.5. Trei cifre pentru numeralul nouă



1.1.6 Răbojuri

Simboluri de bază:	I 1	X 10	C 100	M 1000
Simboluri auxiliare:	V 5	L 50	D 500	
Exemple:	MDCCLXVIII	1768		

1.1.7. Cifre romane

moduri. După felul de grupare și ordonare a semnelor se deosebesc două sisteme de numerație (numărare): sistem aditiv de numărare și sistem pozițional.

Sistem de numerație aditiv. Cel mai cunoscut exemplu îl reprezintă cifrele romane: zece semne de bază egale se pot scrie cu ajutorul unui semn de bază imediat superior. Se mai întîlnesc și semne ajutătoare. Despre apariția acestor cifre romane nu există date precise. Unele dintre ele (de exemplu 1 000 — M) este folosit în această formă din evul mediu. Romanii scriau CIO pentru 1 000. Specific acestui sistem este faptul că folosește puține semne (șapte) (fig. 1.1.7). Există regula ca semnul pentru numărul mai mare să fie situat în stînga semnului pentru numărul mai mic. Dar această regulă are și o excepție datorită dorinței de a folosi cît mai puține semne. Nouă poate fi reprezentat VIIII (5 + 4) sau IX (10 — 1). Dacă o cifră mai mică se află înaintea uneia mai mari, cifra respectivă va fi scăzută și nu adunată. Nu este permisă așezarea mai multor semne de bază sau a unor semne ajutătoare în fața cifrei mai mari: MCMLIX pentru 1959, CML și nu LM pentru 950. Neajunsurile sistemului aditiv sînt: numerele sînt în general foarte lungi și de aceea de necuprins cu privirea; dacă numerele devin mai mari, trebuie înființate noi semne; operațiile matematice cu aceste semne sînt foarte anevoioase. O paralelă între sistemul de numerație aditiv și cel pozițional se poate găsi în poezia lui Christian MORGENSTERN „Doisprezece — unsprezece".

Sistemul pozițional. Sistemul de numerație pozițional folosit astăzi a fost inventat de indieni și preluat de europeni datorită arabilor. În acest sistem cîte 10 indivizi (unități u) formează o nouă grupă (zece, z) și 10 grupe de cîte 10 formează o sută (s) și așa mai departe. Dar pentru fiecare grupă nouă formată nu se va folosi ca la cifre romane un nou semn, ci ele se vor deosebi datorită poziției. În scrierea romană folosită pentru treizeci, XXX, fiecare semn are valoarea zece și se ajunge la rezultat prin adunarea valorilor fiecărui semn.

În numărul 444, folosit pentru patru sute patruzeci și patru, fiecare cifră are aceeași valoare patru; dar fiecare are altă poziție și anume poziția cea mai la dreapta o au unitățile:

321 reprezintă: 3s + 2z + 1u;

CCCXXI reprezintă: 100 + 100 + 100 + 10 + 10 + 1.

Deoarece grupele sînt formate din zece elemente, se poate vorbi de sistemul zecimal. Numărul zece reprezintă baza sistemului. Valorile de poziție reprezintă puterile lui zece.

Putere	Număr	Numeral	Putere	Număr	Numeral
10^0	1	unu	10^6	1 000 000	milion
10^1	10	zece	10^9	1 000 000 000	miliard
10^2	100	o sută	10^{12}	1 000 000 000 000	bilion
10^3	1 000	o mie	10^{18}	1 000 000 000 000 000 000	trilion

Urmează — adăugînd cîte șase zerouri — *cvadrilion, cvintilion, sextilion, septilion, octilion, nonilion, decilion.* 10^{15} se numește *biliard.* În U.R.S.S., S.U.A. și Franța 10^9 este numit *bilion.* Se presupune că desemnarea lui zece ca bază are legătură cu numărul degetelor.

În unități de măsură mai vechi (duzină) se întîlnește sistemul de numerație cu baza doisprezece. Măsurarea timpului (1 h = 60 min, 1 min = 60 s) ca și împărțirea cercului în 360° sînt bazate pe sistemul sexagesimal. Acest sistem de numerație are trăsături evidente de sistem pozițional. La dezvoltarea deplină a unui astfel de sistem a lipsit folosirea unui semn pentru poziții libere, respectiv zero. Introducerea cifrei zero reprezintă una din marile descoperiri ale indienilor (800 î.e.n.). Pentru fiecare sistem de poziție trebuie folosite atîtea cifre cît este baza de mare; cu cît baza este mai mare, cu atît avem mai multe cifre, dar lungimea numărului pe care-l scriem va fi mai mică.

Sistemul binar. O importanță deosebită în tehnică o are și sistemul binar sau dual. Pozițiile reprezintă puterile numărului 2, adică 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ... Numerele vor fi foarte lungi dar nu este nevoie decît de două cifre 0 și 1. Se va nota cifra 1 cu semnul L.

$7 = 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2^0 = \text{L L L}.$

$9 = 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = \text{LOOL}.$

$22 = 1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = \text{LOLLO}.$

Sistemul binar este folosit la calculatoare numerice.

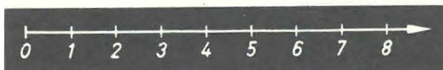
Ordonarea numerelor naturale N. Orice număr natural dat are un succesor, de exemplu 96 este succesorul lui 95. Aceasta înseamnă că în șirul numerelor naturale nu există un ultim număr, acest șir fiind infinit. 0 nu este succesor. Oricare alt număr natural are un predecesor; aceasta înseamnă că șirul numerelor naturale îl are pe 0 ca primul număr.

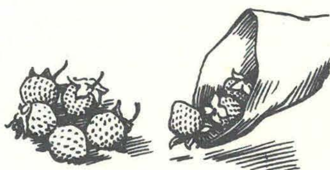
Pentru oricare două numere naturale n_1 și n_2 există una din cele trei relații: $n_1 < n_2$, adică n_1 este mai mic decît n_2; ex. $3 < 7$; $n_1 = n_2$, adică n_1 este egal cu n_2, ex. $5 = 5$; $n_1 > n_2$, adică n_1 este mai mare decît n_2, ex. $8 > 6$.

Dacă vrem să arătăm că n_1 este cel mult egal cu n_2, atunci scriem $n_1 \leqslant n_2$, adică n_1 este mai mic sau egal cu n_2. Dacă $n_1 \geqslant n_2$, adică n_1 este mai mare sau egal cu n_2, aceasta reprezintă faptul că n_1 este cel puțin egal cu n_2; deci sînt adevărate următoarele două inegalități: $4 \leqslant 19$ și $11 \leqslant 11$.

Aceste inegalități se bucură de o proprietate numită tranzitivitate; de ex. dacă $n_1 < n_2$ și $n_2 < n_3$, atunci și $n_1 < n_3$.

Relațiile de ordine (mai mic și mai mare) ordonează liniar numerele naturale (fig. 1.1.8). Reprezentarea numerelor naturale pe *axa numerelor* printr-o mulțime discretă de puncte indică această ordonare. Faptul că n_1 este mai mic decît n_2 apare pe axă în felul următor: n_1 este la stînga lui n_2.





1.1.8. Axa numerelor.

1.1.9. Reuniunea a două mulțimi „5 + 3= 8".

Operații cu numere naturale N

Adunarea și scăderea. Adunarea este cea mai simplă operație matematică cu numere naturale, iar scăderea este operația inversă adunării. Acestea sînt operații de gradul întîi.

Adunarea. Adunarea oglindește *reuniunea* a două mulțimi. Semnul operației este + (plus). Adunarea poate fi explicată drept o numărare succesivă: $5 + 3$ este $5 + 1 \rightarrow 6 + 1 \rightarrow 7 + 1 \rightarrow 8$. Cele două numere care se adună se numesc *termenii sumei*, iar rezultatul *suma* (fig. 1.1.9).

Adunarea	termen al sumei	plus	termen al sumei		suma
	3	+	2	=	5

Comutativitatea adunării
$a + b = b + a$

Cuvîntul sumă se folosește cu dublu înțeles: 8 este suma numerelor 5 și 3, iar expresia $5 + 3$ reprezintă o sumă.

Adunarea a două numere naturale are soluție în mulțimea numerelor naturale, adică se poate găsi întotdeauna un al treilea număr natural care este suma celorlalte două. Adunarea se bucură de următoarele proprietăți:

Comutativitatea. Suma nu depinde de ordinea termenilor, de exemplu: $5 + 3 = 3 + 5 = 8$. Deoarece această lege este adevărată pentru toate numerele naturale, putem scrie pe scurt: $a + b = b + a$, unde a și b reprezintă simboluri pentru orice număr natural.

Asociativitatea. Pînă acum am discutat numai despre adunarea a doi termeni. Dacă trebuie să adunăm trei termeni, întîi va trebui să adunăm doi dintre ei, apoi la suma lor adunăm pe al treilea termen. Și aici ordinea nu are nici o influență asupra rezultatului. Această lege este valabilă pentru toate numerele naturale.

Asociativitatea adunării
$(a+b) + c = a + (b+c)$

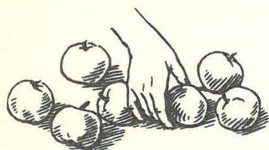
Exemple. 1. $5 + 3 + 4 = (5 + 3) + 4 = 8 + 4 = 12$.
2. $5 + 3 + 4 = 5 + (3 + 4) = 5 + 7 = 12$.

Monotonia. Inegalitatea numerelor naturale rămîne valabilă dacă adunăm în amîndouă părțile același număr; de ex: dacă $3 < 4$, atunci și $3 + 7 < 4 + 7$. Și această proprietate este valabilă pentru toate numerele naturale.

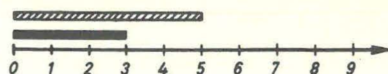
Monotonia adunării	dacă $a < b$, rezultă $a + c < b + c$

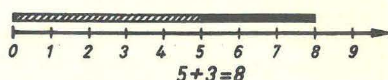
Scăderea. Scăderea numerelor ne indică pe plan abstract ideia de scoatere dintr-o mulțime a unei părți din elementele acelei mulțimi. Semnul operației este – (minus) (fig. 1.1.10). Scăderea este o numărare inversă succesivă: de ex. 7 – 3 este 7 – 1 → 6 – 1 → 5 – 1 → 4. Dacă se caută un termen al unei sume, cînd se cunoaște rezultatul adunării, se ajunge de la adunare la scădere: 4 + ? = 7; ? = 7 – 4. Deci scăderea este operația inversă adunării. Numărul din care se scade se numește *descăzut* iar numărul care se scade se numește *scăzător*. Rezultatul scăderii se numește diferență.

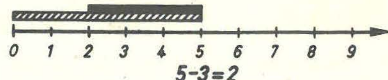
Scăderea				
descăzut	minus	scăzător	egal	diferență
7	–	3	=	4



1.1.10. 7 – 3 = 4







1.1.11. Operații pe axa numerelor

Ca și cuvîntul „sumă" și „diferența" este folosit cu dublu înțeles. Diferența între 7 și 3 este 4; dar și 7–3 reprezintă o diferență.

Scăderea nu are întotdeauna rezolvare în mulțimea numerelor naturale; de exemplu: 2–9 nu are ca rezultat un număr natural. Deci, ca regulă, în mulțimea numerelor naturale descăzutul trebuie să fie întotdeauna mai mare decît scăzătorul.

Operații de gradul întîi pe axa numerelor. Adunarea și scăderea numerelor naturale pot fi rezolvate pe axa numerelor ca adunări și scăderi de distanțe (fig. 1.1.11).

Tehnica adunării. Termenii adunării se așază unul sub altul în așa fel încît unitățile să fie sub unități, zecile sub zeci, sutele sub sute etc. Ordinea în care se face adunarea nu are importanță, se poate aduna de sus în jos și invers. Se efectuează întîi adunarea unităților, se continuă cu zecile, sutele etc., deci se adună de la dreapta la stînga. Dacă la adunarea unei coloane se atinge sau se depășește valoarea bazei, se trece la ordinul imediat superior.

Exemplu.

	m	s	z	u		m	s	z	u		
	7	3	6	2		7	3	6	2		7 362
	+1	6	8	4	sau	+1	6	8	4	altfel	+ 1 684
		1	4	6		1	1				9 046
	1	0				9	10	14	6		
	9										

La adunarea mai multor numere se procedează în același mod.

Tehnica scăderii. Dacă fiecare cifră a descăzutului este mai mare sau egală cu cifra scăzătorului, scăderea se poate face cifră cu cifră. Dacă această condiție nu este satisfăcută, se modifică sau expresia descăzutului sau a scăzătorului.

Deci scăderea se poate face în două moduri, pe care le vom prezenta mai jos.

Exemplu.

6 311
– 768
– 229
– 1 046
4 268

1) Se modifică expresia descăzutului trecînd unitățile de la un ordin mai mare la unul mai mic. Deoarece 2 este mai mic decît 6, vom descompune o sută în zece zeci și 12 fără 6 va avea ca rezultat 6. Deci vom avea acum numai două sute care fără o sută ne va da o sută.

82 328
– 7 163
75 165

2) Scăderea lui 6 din doi nu se poate efectua, așa că vom scădea 6 din 12. Nu vom scădea suta pe care am descompus-o în zeci de la descăzut, ci o vom aduna scăzătorului, adică trei sute fără două sute va avea ca rezultat tot o sută.

A doua metodă este folosită și la scăderea mai multor numere dintr-un număr printr-un singur calcul.

Se procedează în felul următor:

Unitățile sînt $6 + 9 + 8 = 23$; scăzînd 23 din 31 rezultă 8. Cele trei zeci descompuse în unități le adunăm la scăzător. Deci zecile vor fi: $3 + 4 + 2 + 6 = 15$; 15 din 21 fac 6.

Sutele vor fi: $2 + 0 + 2 + 7 = 11$; 11 din 13 fac 2.

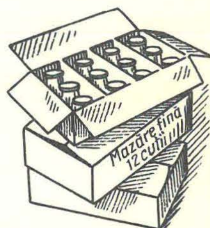
Miile vor fi: $1 + 1 = 2$; 2 din 6 fac 4.

Înmulțirea și împărțirea. Înmulțirea și împărțirea sînt operații de gradul doi.

Înmulțirea. La operația de înmulțire s-a ajuns prin adunarea mai multor termeni egali (fig. 1.1.12).

Semnul operației este un punct la mijlocul înălțimii numerelor (·). Înainte se folosea și semnul ×.

Înmulțirea				
deînmulțit	înmulțit	înmulțitor	egal	produs
3		12	=	36
factor		factor	egal	produs



1.1.12.
$12 + 12 + 12 = 3 \cdot 12 = 36$

Datorită proprietății de comutativitate a înmulțirii, termenii se mai numesc și factori. Denumirea de produs este folosită cu dublu înțeles: 36 este produsul dintre 3 și 12 și $3 \cdot 12$ reprezintă un produs. Înmulțirea are întotdeauna soluție în mulțimea numerelor naturale. Înmulțind două numere naturale, va exista în mulțimea numerelor naturale al treilea număr care va fi produsul lor. Prin definiție $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$; $a \cdot 1 = 1 \cdot a = 1$.

Comutativitatea. Avem $3 \cdot 4 = 4 + 4 + 4 = 12$ sau $4 \cdot 3 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$, deci $4 \cdot 3 = 3 \cdot 4$. Factorii unui produs pot fi schimbați între ei fără a influența rezultatul.

Comutativitatea înmulțirii	$a \cdot b = b \cdot a$

Asociativitatea înmulțirii	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Asociativitatea. Dacă avem de înmulțit trei numere, vom efectua înmulțirea a două dintre ele, iar produsul lor îl vom înmulți cu al treilea. Ordinea în care facem operațiile nu influențează rezultatul. $3 \cdot 4 \cdot 7 = (3 \cdot 4) \cdot 7 = 12 \cdot 7 = 84$; $3 \cdot 4 \cdot 7 = 3(4 \cdot 7) = 3 \cdot 28 = 84$.

Datorită acestei proprietăți putem renunța la paranteză.

Monotonia. Dacă avem $3 < 4$, atunci și $3 \cdot 8 < 4 \cdot 8$; dar $3 \cdot 0 = 4 \cdot 0$. Pentru trei numere naturale a, b, c există:

Monotonia	dacă $a < b$, atunci $ac < bc$ pentru $c > 0$

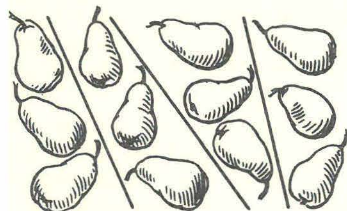
Împărțirea. Vom da două cazuri diferite care să ne conducă la operația de împărțire (fig. 1.1.13):

a) *împărțirea: 12 pere dacă se împart în 4 părți, rezultatul este 3 pere;*

b) *faptul că este conținut: de cîte ori este conținută mărimea* 4 cm *în* 12 cm? (fig. 1.1.14).

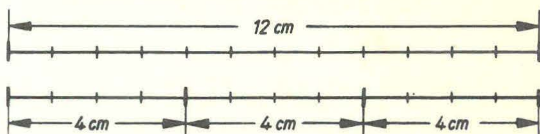
Matematic se ajunge la împărțire ca inversa înmulțirii în cazul cînd cunoaștem produsul și vrem să aflăm unul dintre factori: $3 \cdot ? = 15$ sau $? \cdot 3 = 15$, ne conduce la $? = 15 : 3$.

Semnul operației este : (împărțit). $15 : 3$ reprezintă un cît, iar 5 este cîtul dintre 15 și 3.



1.1.13. Împărțire. 12 pere împărțite în 4 părți egale

Împărțirea	deîmpărțit	împărțit	împărțitor	egal	cît
	15	:	3	=	5



1.1.14. De cîte ori se cuprind 4 cm în 12 cm?

Împărțirea nu are întotdeauna rezultat în cadrul numerelor naturale; de ex. nu există nici un număr natural cu proprietatea ca $3 \cdot n = 7$. Deci 7 nu este divizibil cu 3. Se poate scrie

$7 : 3 = 2$, rest 1. Împărțirea cu 0 nu este posibilă căci nu există nici un număr care înmulțit cu 0 să dea alt număr decît 0.

Nu se poate împărți cu 0

Ordinea operațiilor. Dacă intervin mai multe feluri de operații, ordinea efectuării operațiilor are influență asupra rezultatului: $7 \cdot (5 + 3)$ este egal cu $7 \cdot 8 = 56$ dacă efectuăm întîi adunarea și este egal cu $7 \cdot 5 + 3 = 38$ dacă înmulțirea este prima operație efectuată. De aceea este stabilită ordinea operațiilor.

Operația de grad superior se efectuează la început

Dacă nu apar operații de gradul trei, putem afirma: Operațiile ale căror semne sînt puncte preced pe cele ale căror semne sînt linii. Punctele au o putere mai mare decît liniile. Dacă operațiile trebuie făcute în altă ordine, atunci se folosesc parantezele care se vor efectua primele:

$$(12 + 96) : 3 - 8 \cdot (5 - 2) = 108 : 3 - 8 \cdot 3 = 36 - 24 = 12.$$

Distributivitatea. De ex. $5 \cdot (4 + 3) = 5 \cdot 7 = 35$ și $5 \cdot 4 + 5 \cdot 3 = 20 + 15 = 35$. Deci $5 \cdot (4 + 3) = 5 \cdot 4 + 5 \cdot 3$.

Datorită proprietății de distributivitate avem și următoarele relații:

$(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$;
$(a + b) : c = a : c + b : c$, pentru $c \neq 0$;
$(a - b) : c = a : c - b : c$, pentru $c \neq 0$.

Distributivitatea
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Tehnica înmulțirii. Datorită legii de distributivitate a înmulțirii, înmulțirea se reduce la tabla înmulțirii. În principiu se procedează astfel:

$2\,356 \cdot 473 = 2\,356 \cdot (400 + 70 + 3) =$
$= 2\,356 \cdot 4(00) + 2\,356 \cdot 7(0) + 2\,356 \cdot 3 =$
$= 9\,424(00) + 16\,492(0) + 7\,068 = 1\,114\,388$

Exemplu.

```
2356 · 473            2356 · 473
----------            ----------
 9424                       7068
  16492       sau          16492
    7068                  9424
----------            ----------
 1114388               1114388
```

Înmulțirea primului factor 2 356 în rîndul 2 se face descompunîndu-l în unități, zeci, sute etc. Adunarea produselor se face tot în scris. În loc de zerouri la produsele parțiale, la înmulțirea curentă se procedează prin mișcare pe orizontală. Există mai multe procedee de înmulțire.

Tehnica împărțirii. Ne bazăm pe următoarea proprietate: pentru orice trei numere naturale a, b, c $(c \neq 0)$ avem $(a + b) : c = a : c + b : c$. Aceasta se aplică deîmpărțitului descompus în unități, zeci, sute etc., astfel : $86 : 2 = (80 + 6) : 2 = 80 : 2 + 6 : 2 = 40 + 3 = 43$. Deoarece împărțirea este inversă înmulțirii, trebuie ca produsul dintre cît și împărțitor să fie egal cu deîmpărțitul. Acest lucru este valabil și pentru cîturile parțiale. Pe acest raționament se bazează schema împărțirii

```
11208 : 23 = 487;
92
---
 200
 184
 ---
  168
  161
  ---
    7
```

sau mai scurt, făcînd operațiile de scădere mintal,

```
11208 : 23 = 487, rest 7
 200
  168
    7
```

Operații și unități de măsură. Operațiile pe care le-am analizat se rezolvă într-o mulțime de numere. Foarte des în practică se folosesc numerele în legătură cu unități de măsură, de exemplu: 5 m, 30 cm, 25 kWh. Dacă sîntem nevoiți să facem operații cu astfel de expresii, trebuie să fim atenți la unitățile de măsură și să stabilim ce unitate de măsură corespunde rezultatului. Socotelile se fac oricum numai cu numere.

Teoria elementară a numerelor

Divizibilitate. Avem 12 : 4 = 3, dar 15 : 4 = 3, rest 3. Numărul 12 este divizibil cu 4, iar 15 nu este divizibil. Se mai spune că 4 este divizorul lui 12, dar nu este divizorul lui 15. În general, se spune că a este divizibil cu b dacă există un număr n astfel încît $a = n \cdot b$; b se numeşte divizorul lui a (n este şi el dizivorul lui a). 0 este divizibil cu orice număr. Orice număr $a \neq 0$ este divizibil cu 1 şi cu el însuşi; acestea se numesc divizori improprii.

Numere prime. Numerele care nu se divid decît cu ele însuşi şi cu unu se numesc numere prime, de ex. 5 este divizibil cu 5 şi cu 1, 13 este divizibil cu 13 şi cu 1, deci 5 şi 13 sînt numere prime. 1 nu este număr prim, deci numerele prime încep de la numărul 2.

Numere prime	2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...

Descompunerea numerelor în factori primi: Un număr care nu este prim poate fi descompus în factori primi:

$120 = 4 \cdot 30$

$4 = 2 \cdot 2 \quad 30 = 2 \cdot 15$

$15 = 3 \cdot 5$

deci $120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5.$

La acelaşi rezultat se ajunge dacă îl descompunem pe 120 ca $10 \cdot 12$. Bazîndu-ne pe algoritmul lui Euclid se poate demonstra unicitatea descompunerii în factori primi. Cu ajutorul puterilor se poate scrie mai uşor descompunerea în factori primi: de ex. $1\,008 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$.

Ciurul lui Eratostene. Matematicianul grec ERATOSTENE (275—194 î.e.n.) a aplicat următoarea metodă pentru aflarea numerelor prime dintr-o parte a numerelor naturale. Se scrie şirul numerelor naturale de la 2 pînă la 100. Numărul 2 este prim, vom tăia toţi multiplii lui 2; 3 este număr prim, deci vom tăia toţi multiplii lui 3; tot aşa vom proceda şi cu 5; apoi va urma 7. Deoarece $7 \times 7 = 49 < 100$ şi $11 \times 11 = 121 > 100$, toate numerele care au rămas după ce am tăiat multiplii de 7 sînt prime.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

prima a 2-a a 3-a a 4-a ştergere din tabel.

Dacă de exemplu vrem să vedem ce fel de număr este 1 303 va trebui să verificăm dacă 1 303 este divizibil cu numerele prime p, care se bucură de proprietatea ca $p^2 < 1\,303$; numerele prime q pentru care $q^2 > 1\,303$ nu pot fi divizori ai lui 1 303. Pentru 1 303 trebuie să remarcăm dacă numerele prime $p = 2, 3, 5, ..., 31$ sînt divizorii lui 1 303, numărul prim 37 nu mai trebuie să fie verificat deoarece $37^2 = 1\,369$.

Infinitatea mulţimii numerelor prime. EUCLID (300 î.e.n) şi-a pus întrebarea dacă mulţimea numerelor prime este finită sau infinită. El a demonstrat că nu există cel mai mare număr prim. Să presupunem că ar exista cel mai mare număr prim pe care-l vom nota cu P. Vom construi numărul natural $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ... \cdot (P + 1)$. Acest număr nu este divizibil cu nici unul din numerele 2, ..., P. Dar aceasta contrazice ipoteza că P este cel mai mare număr prim, deci şirul numerelor prime este infinit. Este încă nerezolvată problema dacă există o infinitate de perechi de numere prime consecutive între ele ca de ex: [5; 7], [59; 61], [641; 643], [1451; 1453] etc.

Divizor comun și multiplu comun. *Cel mai mare divizor comun.* Dacă t este un divizor al lui a, atunci la descompunerea în factori a lui t apar numai numere prime care apar și la descompunerea lui a, care pot avea exponenții cel mult egali cu cei care intervin în descompunerea lui a, de ex. $12 \mid 60$; $12 = 2^2 \cdot 3$; $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. Dacă t este divizorul comun al lui a și b, atunci t are numai factori primi care intervin și în a și în b la puterea cea mai mică. De exemplu 12 este divizorul comun al lui 48 și 360; din descompunerea în factori primi $12 = 2^2 \cdot 3$, $48 = 2^4 \cdot 3$ și $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ se observă că 48 și 360 au mai mulți divizori comuni: 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Dintre ei 24 este cel mai mare divizor comun (c.m.m.d.c) al lui 48 și 360. Fiecare divizor comun al lui a și b este un divizor al celui mai mare divizor comun al lui a și b, căci cel mai mare divizor comun este produsul tuturor factorilor primi care intervin în a și b la puterea cea mai mică. Pe acest procedeu se bazează aflarea celui mai mare divizor comun al mai multor numere după cum reiese din exemplul alăturat. Dacă două numere a și b nu au alt divizor comun decît 1, c.m.m.d.c. $(a, b) = 1$, numerele a și b se numesc prime între ele.

Exemplu.

$1\,260 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$
$3\,024 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 7$
$5\,544 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$

c.m.m.d.c. $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 252$

Algoritmul lui Euclid. Pentru numere mari, descompunerea în factori primi este destul de dificilă căci se face prin încercări; de ex: 23 613 864 709 este produsul numerelor prime 112 843 și 209 263. Dacă vrem să stabilim cel mai mare divizor comun al unor astfel de numere, atunci se va folosi o metodă care nu folosește descompunerea în factori primi — algoritmul lui Euclid. Vom prezenta un exemplu, fără a da și demonstrația. Să vedem care este cel mai mare divizor comun al numerelor 53 667 și 25 527.

$$53\,667 = 25\,527 \times 2 + 2\,613$$
$$25\,527 = 2\,613 \times 9 + 2\,010$$
$$2\,613 = 2\,010 \times 1 + 603$$
$$2\,010 = 603 \times 3 + 201$$
$$603 = 201 \times 3$$

Ultimul divizor, 201 este cel mai mare divizor comun al numerelor 53 667 și 25 527

Putem demonstra cu ajutorul algoritmului lui Euclid și faptul că două numere sînt prime între ele:

$$87 = 41 \times 2 + 5$$
$$41 = 5 \times 8 + 1$$
$$5 = 1 \times 5 + 0$$

C.m.m.d.c. (87,41) = 1 și deci numerele sînt prime între ele.

Algoritmul lui Euclid se poate folosi și pentru aflarea c.m.m.d.c. al mai multor numere, de exemplu a, b și c. Se va proceda în etape. Întii vom găsi c.m.m.d.c. $(a, b) = d$ iar apoi vom afla c.m.m.d.c. $(c, d) = e$.

Cel mai mic multiplu comun: 60 este un multiplu comun între 6 și 15, căci 60 este un multiplu de 6 și este și un multiplu de 15. Dar există o infinitate de multipli comuni ai lui 6 și 15. Dacă v este un multiplu al lui a și b, atunci toți multiplii lui v sînt multiplii lui a și b. Multiplii comuni ai lui 6 și 15 sînt 30, 60, 90, 120, ... Dintre ei, 30 este cel mai mic și putem spune că 30 este cel mai mic multiplu comun al lui 6 și 15 (c.m.m.m.c).

Dacă e = c.m.m.m.c. (a, b), atunci e trebuie să conțină toți factorii primi care intervin în descompunerea lui a și b la puterea cea mai mare. În cazul numerelor mari devine iarăși incomod de calculat c.m.m.m.c., deoarece descompunerea în factori primi cere mult timp. Dar și aici există o metodă mai ușoară.

Exemplu.

$40 = 2^3 \cdot 5$
$36 = 2^2 \cdot 3^2$
$126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$

c.m.m.m.c $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2\,520$

Cu ajutorul algoritmului lui Euclid se găsește c.m.m.d.c. dar și c.m.m.m.c.; c.m.m.m.c $(a, b) = \dfrac{a \cdot b}{\text{c.m.m.d.c. } (a, b)}$.

Această metodă nu se poate extinde la mai mult decît două numere.

Reguli de divizibilitate. Numărul 84 este divizibil cu 4 și 3, deci este divizibil cu $4 \cdot 3 = 12$. Acest lucru nu este adevărat, dacă cei doi divizori nu sînt primi între ei. În general:

Dacă a este divizibil cu m și n și c.m.m.d.c. $(m, n) = 1$, atunci a este divizibil și cu $m \cdot n$.

Stabilirea divizorilor, adică recunoașterea imediată a faptului că un număr este divizibil cu altul este foarte mult folosită la simplificarea fracțiilor. Regulile pe care le vom stabili pentru aflarea divizorilor se bazează pe faptul că numerele sînt scrise în sistemul zecimal. Mutiplii de zece sînt divizibili cu 2 și 5, căci 10 se divide cu 2 și 5; multiplii lui 100 sînt divizibili cu 4 și 25,

căci 100 este divizibil cu 4 și 25; multiplii de 1 000 sint divizibil cu 8 căci 1 000 este divizibil cu 8. Toate puterile lui 10, la împărțirea cu 3 sau cu 9 au restul egal cu 1.

Datorită regulilor la operații cu resturi, avem la împărțirea cu 3 sau cu 9 următoarele resturi: 600 are un rest egal cu $6 \cdot 1 = 6$; $240 = 2 \cdot 100 + 4 \cdot 10$, atunci restul va fi egal cu $2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 6$. La împărțirea numerelor prin 3 sau 9 restul va fi egal cu acel obținut de la împărțirea sumei cifrelor numerelor prin 3 sau 9; 7 309 are suma cifrelor $7 + 3 + 0 + 9 = 19$ care nu se împarte fără rest nici cu 3 nici cu 9. Deci 7 309 nu este divizibil cu 3 și nici cu 9. Toate puterile pare ale lui 10, 100, 10 000, 1 000 000 etc. la împărțirea prin 11 au un rest egal cu 1, iar puterile impare ale lui 10 la împărțirea cu 11 au un rest egal cu 10 sau $10 - 11 = -1$. În acest caz suma alternantă a cifrelor are același rest ca și numărul. Cum se calculează suma alternantă este arătat în exemplul de mai jos.

Exemplu. 8 **5** 9 **7** 6 $\quad 8 + 9 + 6 = 23$

5 + **7** = **12** suma alternantă a cifrelor

23 − **12** = 11.

Deci 85 976 este divizibil cu 11.

Un număr este divizibil cu:
2, dacă ultima cifră este divizibilă cu 2;
4, dacă ultimele două cifre formează un număr divizibil cu 4;
8, dacă ultimele trei cifre formează un număr divizibil cu 8;
5, dacă ultima cifră este divizibilă cu 5, deci 5 și 0;
25, dacă ultimele două cifre formează un număr divizibil cu 25;
3, dacă suma cifrelor este divizibilă cu 3;
9, dacă suma cifrelor este divizibilă cu 9;
11, dacă suma alternantă a cifrelor este divizibilă cu 11.

Probele operațiilor. *Operații cu rest.* Dacă la împărțirea lui a și b prin d rămîne același rest r, se poate scrie $a \equiv b$ (modulo d) (a este congruent cu b modulo d); de ex: $17 \equiv 42$ (modulo 5). Pentru restul r se poate scrie $a \equiv r$ (modulo d) și $b \equiv r$ (modulo d); $17 \equiv 2$ (modulo 5) și $42 \equiv 2$ (modulo 5). Dacă a este divizibil prin d, atunci putem scrie $a \equiv 0$ (modulo d). Sînt adevărate următoarele legi:

Dacă $a_1 \equiv b_1$ (modulo d)
și $a_2 \equiv b_2$ (modulo d)
atunci $a_1 + a_2 \equiv b_1 + b_2$ (modulo d)
$a_1 - a_2 \equiv b_1 - b_2$ (modulo d)
$a_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot b_2$ (modulo d)

Exemplu. $22 \equiv 4$ (modulo 6)
$15 \equiv 3$ (modulo 6)
$37 \equiv 7$ (modulo 6) $\equiv 1$ (modulo 6)
$7 \equiv 1$ (modulo 6)
$330 \equiv 12$ (modulo 6) $\equiv 0$ (modulo 6)

Exemplele ne arată că totdeauna ajungem la *resturile minime* 0, 1, 2, ..., $d - 1$, în cazul nostru (0, 1, ..., 5) dacă adăugăm sau scădem pe d de cîte ori ne convine. Aceste reguli au aplicații la verificarea operațiilor. În loc să repetăm operația cu numere, putem să facem aceeași operație lucrînd cu resturi modulo d. Mai simplu este de a lucra cu $d = 9$ sau, mai rar, cu $d = 11$. Dacă există un dezacord între rezultate, atunci operația este greșită; dacă nu există, atunci operația este corect făcută.

Proba cu 9. Fiecare împărțire cu 9 are același rest ca și împărțirea sumei cifrelor cu 9. Aceasta este o generalizare a regulii de divizibilitate cu 9. Ea ușurează proba la operațiile elementare.

Restul la împărțirea cu 9 a unei sume (diferențe, produs) este egală cu suma (diferența, produsul) resturilor împărțirii fiecărui factor cu 9.

Exemple. Problema → suma cifrelor → restul împărțirii cu 9

	Problema		suma cifrelor		restul împărțirii cu 9
1.	412		7		7
	+ 3 964	→	22	→	+ 4
	+ 4 722		15		+ 6
	9 098	→	26 ≡ 8	→	17 ≡ 8
2.	7 428		21		3
	− 3 986	→	26	→	− 8
	3 442	→	13 ≡ 4	→	− 5 ≡ 4
3.	617		14		5
	· 382	→	13	→	· 4
	234 694	→	28 ≡ 1	→	20 ≡ 2

Adunarea și scăderea. Reducerea la resturi minime trebuie făcută cu atenție mai ales cînd avem de-a face cu resturi negative.

Înmulțirea. Restul împărțirii cu 9 a produsului nu este egal cu produsul resturilor obținute la împărțirea fiecărui factor cu 9. Produsul obținut nu este corect, cel corect va fi **235 694.**

Proba cu 11. Cu ajutorul sumei cifrelor obținem restul împărțirii cu 9, iar cu ajutorul sumei alternante obți-

nem restul împărţirii cu 11. Trebuie să fim atenţi la calcularea sumelor alternante. În exemplul alăturat rezultatul poate fi greşit, cel mult cu un multiplu al lui 11.

Exemplu. Problema	→ suma alternantă	→ restul împărţirii cu 11
2 468	→ 12 − 8 = 4	→ 4
+ 4 293	→ 5 − 13 = − 8	→ 3
6 761	→ 8 − 12 ≡ − 4 ≡ 7	→ 7

Dacă folosim la aceeaşi operaţie şi proba cu 9 şi cea cu 11, putem obţine un rezultat greşit cel mult cu un multiplu al lui 99.

1.2. Numere întregi Z

Generalităţi

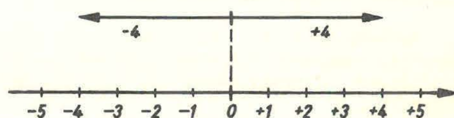
De ce sînt necesare numerele întregi? Există cazuri în realitatea înconjurătoare în care caracterele mărimilor nu pot fi exprimate cu ajutorul numerelor naturale, căci pot exista două tendinţe sau direcţii opuse, de exemplu temperatura 23°C poate fi deasupra punctului 0° sau sub punctul 0° (fig. 1.2.1). Suma de 100 de lei poate fi sau economie la CEC sau o datorie. Şi despre înălţimea la care se află o localitate este important de precizat dacă înălţimea este deasupra nivelului mării sau sub nivelul mării. Pentru a pune în evidenţă aceste două tendinţe se folosesc *semne înaintea numerelor*; de ex. + 23°C şi −23°C sau + 395 m şi − 395 m; anii dinaintea erei noastre sau ai erei noastre pot fi notaţi şi cu − 300 şi +300. Trebuie să existe un ***punct de origine***, la care se raportează mărimea. Deci în raport cu cele două tendinţe avem de-a face cu ***numere pozitive*** + 1, + 2, + 3, . . . şi ***negative*** − 1, − 2, − 3, ... Mulţimea numerelor pozitive, negative şi zero formează mulţimea numerelor întregi.

Posibilitatea efectuării scăderii. Introducerea numerelor întregi a fost necesară şi pentru a putea rezolva operaţia inversă adunării, scăderea; de ex. scăderea 7 − 11 nu se poate efectua în mulţimea numerelor naturale.



1.2.1. Temperatura 23°C

Mulţimea numerelor întregi este mulţimea în care fiecare operaţie de scădere are rezultat.



1.2.2. Axa numerelor şi numerele opuse (+4) şi (−4)

Numere opuse. În timp ce şirul numerelor naturale este o ilustrare bună a noţiunii de număr natural, axa numerelor serveşte la ilustrarea numerelor întregi. Numerele întregi nenegative corespund numerelor naturale. Pe axa numerelor există pentru orice întreg diferit de 0 un alt întreg care are faţă de zero aceeaşi distanţă dar în sens contrar (fig. 1.2.2). Două astfel de numere care diferă numai prin semn se numesc opuse, −4 şi + 4. Opusul unui număr se formează schimbînd semnul numărului. Acest lucru se face prin semnul minus, de exemplu $-(-4) = +4$ şi $-(+4) = -4$. În cazul numărului zero avem $: -0 = 0$.

Valoare absolută. Două numere opuse care au faţă de zero aceeaşi distanţă pe axa numerelor au aceeaşi valoare absolută. Valoarea absolută este definită astfel:

$$|a| = a \text{ pentru } a \geq 0 \text{ şi } |a| = -a \text{ pentru } a < 0.$$

Ordonarea. Dintre două numere întregi întotdeauna cel mai mic se află la stînga pe axa numerelor.

Între două numere întregi n_1 şi n_2 există întotdeauna una din cele trei relaţii: $n_1 < n_2$, $n_1 = n_2$ sau $n_1 > n_2$, de exemplu, $-3 < +2$, $+5 < +7$, $+8 = +8$, $-1 > -7$, $+3 > -5$. Orice întreg are un predecesor şi un succesor, deci, şirul numerelor întregi nu conţine nici cel mai mic nici cel mai mare, nici primul, nici ultimul număr întreg.

Operații cu numere întregi Z

Operații aritmetice de gradul întîi. Pentru operațiile de gradul întîi are o importanță deosebită diferența dintre *semnul numărului* și *semnul operației*, mai ales că sînt identice la scris. Ca să evităm confuziile, închidem între paranteze numerele întregi (fig. 1.2.3).

Adunarea. Pentru a putea înțelege adunarea numerelor reale ne bazăm pe adunarea numerelor naturale, în special la reprezentarea pe axa numerelor. Adunarea se va reprezenta grafic pe axa numerelor cu ajutorul unor segmente orientate. Se stabilesc următoarele reguli:

Dacă termenii sumei au același semn, și suma va avea același semn. Valoarea absolută a sumei va fi egală cu suma valorilor absolute ale termenilor.

Semnele operațiilor
$(+7)+(-2)-(+5)$
Semnele numerelor

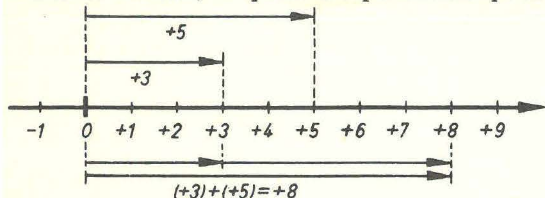
1.2.4. Semnele numerelor și ale operațiilor

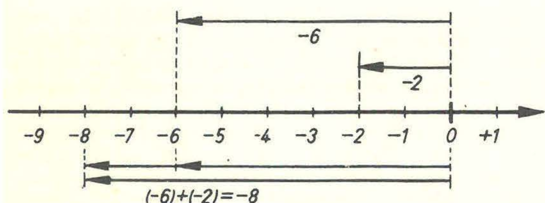
De ex. $(+5)+(+11)=+16$ și $(-19)+(-8)=-27$.

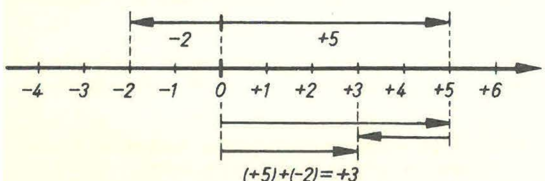
În cazul adunării a două numere de semne diferite, suma va avea semnul numărului cu valoarea cea mai mare iar valoarea absolută va fi egală cu diferența valorilor absolute ale termenilor.

Ex. $(+15)+(-28)=-13$ și

$(-37)+(+47)=+10$.







1.2.3. Adunarea pe axa numerelor

Regulile adunării. Exemplele $(-9)+(+7)=-2$ și $(+7)+(-9)=-2$ ne arată că termenii sumei se pot inversa. Și celelalte proprietăți ale adunării numerelor naturale sînt valabile la adunarea numerelor întregi. Dacă a, b și c sînt numere întregi, atunci se pot enunța următoarele proprietăți:

Comutativitatea	$a+b=b+a$
Asociativitatea	$(a+b)+c=a+(b+c)$
Monotonia	dacă $a<b$, atunci $a+c<b+c$

Scăderea. Și la numere întregi scăderea este operația inversă adunării; $(-7)-(+3)=x$ reprezintă în fond același lucru ca $x+(+3)=-7$. Se știe că $(-10)+(+3)=-7$, deci $x=-10$ și $(-7)-(+3)=-10$. Dar și $(-7)+(-3)=-10$. Datorită acestui fapt putem afirma: *Scăderea unui număr întreg este echivalentă cu adunarea negativului acelui număr.*

Ex. $(+28)-(-16)=(+28)+(+16)=44$.

Se constată că în mulțimea numerelor întregi orice scădere este rezolvabilă.

Sume algebrice. Deoarece în mulțimea numerelor întregi orice scădere poate fi înlocuită cu o adunare, expresiile matematice ai căror membri sînt legați între ei prin operații de gradul întîi se numesc *sume algebrice*. Dacă avem de adunat mai multe numere, atunci este indicată următoarea ordine a operațiilor:

$(+15)-(+27)+(-11)-(-9)+(+31)$	**transformarea în sumă**
$=(+15)+(-27)+(-11)+(+9)+(+31)$	**ordonarea**
$=(+15)+(+9)+(+31)+(-27)+(-11)$	**gruparea numerelor cu același semn**
$=(+55)+(-38)$	**sfîrșitul adunării**
$=+17$.	

Operații de gradul doi. *Înmulțirea.* Adunarea numerelor întregi se face în același mod ca și adunarea numerelor naturale. Și înmulțirea numerelor întregi se bazează pe înmulțirea numerelor naturale. Deoarece $4 \cdot 7 = 28$, stabilim ca $(+4) \cdot (+7) = +28$.

În general $(+u) \cdot (+v) = +uv$.

Care va fi rezultatul înmulțirii $(+4) \cdot (-7)$? Înmulțirea numerelor naturale a fost explicată ca o adunare repetată a aceluiași termen $4 \cdot 7 = 7+7+7+7$. Deoarece numerele întregi pozitive corespund numerelor naturale, vom avea $(+4) \cdot (-7) = (-7) + (-7) + (-7) + (-7)$.

Deci $(+4) \cdot (-7) = -28$ sau în general $(+u)(-v) = -uv$.

Deoarece înmulțirea este comutativă, $(-7) \cdot (+4) = (+4) \cdot (-7) = -28$, deci $(-u) \cdot (+v) = -uv$.

Pentru a găsi rezultatul înmulțirii $(-7) \cdot (-4)$, comparăm cele trei înmulțiri de mai sus. Se observă că la schimbarea semnului unui factor se schimbă și semnul produsului. Deci $(-7) \cdot (-4) = +28$ sau în general $(-u) \cdot (-v) = +uv$.

Dacă două numere întregi au același semn, atunci produsul este pozitiv, iar dacă au semne contrare, produsul va fi negativ. Valoarea absolută a produsului este egală cu produsul valorilor absolute ale factorilor.

$(+u) \cdot (+v) = (-u) \cdot (-v) = +uv$
$(+u) \cdot (-v) = (-u) \cdot (+v) = -uv$

Comutativitatea	$a \cdot b = b \cdot a$
Asociativitatea	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Exemple. 1. $(-13) \cdot (+5) = -65$. 2. $(-8) \cdot (-12) = +96$.
3. $(+3) \cdot (-4) \cdot (-9) = (+3) \cdot (+36) = +108$.
4. $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = +81$.

Regulile înmulțirii. Pe baza constatărilor făcute cu ocazia introducerii noțiunii de înmulțire a numerelor întregi și a exemplului cu trei factori se observă că proprietățile de asociativitate și comutativitate sînt valabile și în cazul înmulțirii numerelor întregi a, b, c.

Înmulțirea numerelor naturale se bucură și de proprietatea de *monotonie*. Dacă $c > 0$ și $a < b$, $a \cdot c < b \cdot c$.

Această proprietate nu este valabilă în cazul numerelor întregi; dacă $a < b$ și $c < 0$, $ac > bc$.

Exemplu. $(+5) < (+7)$ dar $(+5) \cdot (-3) > (+7) \cdot (-3)$.

Împărțirea. Împărțirea este operația inversă înmulțirii. De aceea $(+12) : (-4) = x$ este echivalentă cu $(-4) \cdot x = +12$; x va fi egal cu -3. În mod asemănător se deduc toate regulile împărțirii în cazul diferitelor semne.

Dacă deîmpărțitul și împărțitorul au același semn, cîtul va fi pozitiv; dacă au semne diferite, cîtul va fi negativ. Valoarea absolută a cîtului va fi cîtul valorilor absolute.

$(+u) : (+v) = (-u) : (-v) = +u : v$
$(-u) : (+v) = (+u) : (-v) = -u : v$

Exemple.
$(+72) : (+6) = +12$. $(+119) : (-17) = -7$.
$(-75) : (+25) = -3$. $(-91) : (-7) = +13$.

Numere întregi pozitive — numere naturale. Cu numerele întregi pozitive și zero, adică cu *numerele întregi nenegative* se fac operații în același mod ca și cu numerele naturale. De aceea în cazul numerelor întregi pozitive se poate renunța la semn, deci le înlocuim cu numere naturale. Astfel vom simplifica și scrierea lor:

$(+9) + (-17) - (+6) + (+21) - (-2) = 9 - 17 - 6 + 21 + 2 = 9$; $7 \cdot (-9) = -63$; $(-56) : (-7) = 8$.

Exemple.

1.	$4 + 7 = 11$	$(+4) + (+7) = +11$
2.	$12 - 5 = 7$	$(+12) - (+5) = +7$
3.	$3 \cdot 9 = 27$	$(+3) \cdot (+9) = +27$
4.	$39 : 3 = 13$	$(+39) : (+3) = +13$

Istoria numerelor întregi. Grecii antici nu cunoașteau încă numerele negative. Primele începuturi se întîlnesc tîrziu la DIOFANTE (250 e.n.). La *indieni* (700 e.n.) operațiile cu numere întregi erau deja cunoscute. Cuvintele *pozitiv* și *negativ* provin din limba indiană de la cuvintele *credit* și *datorie*.

În Europa, numerele negative au fost foarte tîrziu cunoscute, deoarece legătura între India și Europa a fost făcută de arabi care respingeau noțiunea de număr negativ. În Europa medievală prima carte în care au fost amintite este Arithmetica integra (1544) a lui Michael STIFEL.

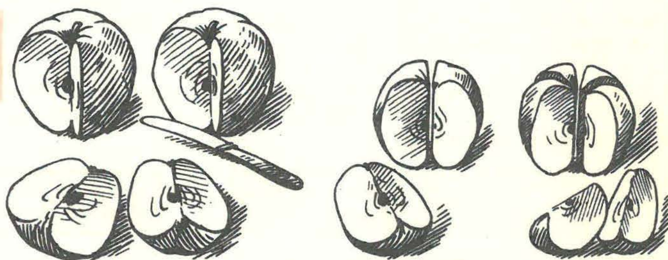
1.3. Numere raționale Q

Generalități

Ce reprezintă fracțiile? Dacă avem de împărțit în mod egal 6 mere la 3 copii, atunci dividem 6 prin 3 obținînd 2 și știm că fiecare copil va primi 2 mere. Dacă va trebui să împărțim 2 mere tot la 3 copii, atunci trebuie rezolvată împărțirea 2: 3 (fig. 1.3.1).

Această operație *nu are soluție* în mulțimea numerelor naturale. Totuși vom putea efectua împărțirea numerelor cu ajutorul cuțitului. Cantitatea de măr va fi definită cu ajutorul fracției $\frac{2}{3}$. Toate cazurile asemănătoare conduc la fracții.

Fracțiile se formează prin diviziunea unui sau mai multor întregi.



1.3.1. 2 mere pentru 3 copii 1.3.2. O treime este egală cu două șesimi

Fiecare fracție are forma $\frac{p}{q}$. *Numărătorul* p ne indică numărul de părți, iar ***numitorul*** q ne arată în cîte părți a fost împărțit întregul. *Linia de fracție* este orizontală; numai în text poate fi și înclinată, ex.: 1/2. Fracțiile pot fi *subunitare* $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{10}{11}$, unitare $\frac{5}{5}$ sau *supraunitare* $\frac{3}{2}$, $\frac{16}{3}$, $\frac{9}{8}$. Dacă numărătorul unei fracții este egal cu numitorul altei fracții și invers, atunci fracțiile se numesc *inverse*: $\frac{3}{5}$ și $\frac{5}{3}$; $\frac{17}{6}$ și $\frac{6}{17}$. Dacă două fracții au același numitor, atunci fracția care are numărătorul mai mare este mai mare decît cealaltă: $\frac{2}{7} < \frac{6}{7}$.

În cazul numărătorilor egali, fracția cu numitor mai mare este mai mică decît cealaltă: $\frac{5}{9} < \frac{5}{6}$,

Numărătorii și numitorii pot fi și negativi, ex. $\frac{-3}{5}$; $\frac{-2}{-9}$; $\frac{7}{-4}$. Datorita regulii semnului $\frac{-3}{5} = \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5}$; $\frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$.
În general semnul se scrie înaintea fracției, adică nu la numărător sau numitor.

Schimbări de formă. Dacă împărțim întregul numai în 3 părți și luăm din el o parte, avem aceeași cantitate ca și cînd am împărți numărul în 6 părți și luăm 2 părți, $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ (fig. 1.3.2).

Conform celor afirmate înainte putem scrie $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$; $\frac{5}{3} = \frac{20}{12}$; $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \ldots$
$\ldots = \frac{24}{36} = \ldots$

Amplificare. Dacă numărătorul și numitorul unei fracții sînt multiplii numărătorului și numitorului altei fracții, spunem că fracția s-a obținut prin amplificarea celei de a doua fracții. De ex. $\frac{8}{9} = \frac{40}{45}$.

Amplificarea înseamnă înmulțirea numitorului și numărătorului prin același număr.

Amplificarea	$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$

Operația inversă amplificării se numește simplificare.

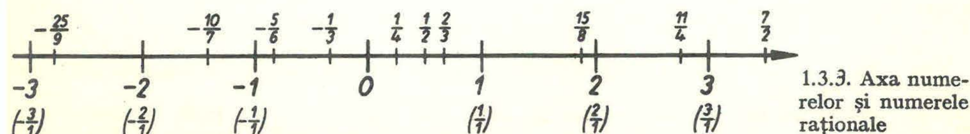
Simplificarea	$\frac{a}{b} = \frac{a:c}{b:c}$

Se poate simplifica orice fracție în care numitorul și numărătorul conțin factori identici. Operația $\frac{2}{7} = \frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{6}{21}$ reprezintă, de la stînga la dreapta, o amplificare iar de la dreapta la stînga o simplificare. Este indicată simplificarea fracțiilor, deoarece prin această operație se micșorează atît valoarea numitorului cît și a numărătorului.

Număr rațional. Toate fracțiile $\left(\frac{3}{4}; \frac{6}{8}; \ldots; \frac{27}{36}; \ldots\right)$ obținute prin simplificare sau amplificare, care reprezintă aceeași cantitate, reprezintă un *număr rațional* unic $\left(\frac{3}{4}\right)$. Deci $\frac{3}{4}$ are un dublu sens: reprezintă o fracție și un număr rațional, adică reprezintă toate fracțiile obținute din $\frac{3}{4}$ prin amplificare. Și fracțiile cu numitorul 1 și cele obținute prin amplificarea lor sînt conținute tot în mulțimea numerelor raționale; de ex. $\frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \ldots = \frac{18}{6} = \ldots$ Ele pot fi substituite una alteia. Numărul întreg 0 poate fi înlocuit cu o mulțime de fracții care au numărătorul 0.

Numitorul 0 este exclus.

Ordonarea numerelor raționale. Ca și în cazul numerelor naturale sau întregi, avem și în cazul a două numere raționale $r_1 < r_2$, $r_1 = r_2$ sau $r_1 > r_2$. Pentru a așeza mai multe fracții date în ordinea lor de mărime le aducem *la același numitor*. Prin aceasta, unitățile fracționare fiind aceleași, numărătorii ne vor arăta ordinea de mărime; $\frac{7}{12} = \frac{35}{60}$ și $\frac{11}{20} = \frac{33}{60}$ deci $\frac{11}{20} < \frac{7}{12}$.



1.3.3. Axa numerelor și numerele raționale

Cîteodată este mai simplu să aducem fracțiile la o formă încît să aibă același numărător $\frac{3}{13} = \frac{15}{65}$ și $\frac{5}{28} = \frac{15}{84}$ sau $\frac{5}{28} < \frac{3}{13}$. Deci, dacă două fracții au același numărător, este mai mare fracția cu numitor mai mic. În mulțimea numerelor raționale *nu există cel mai mic și nici cel mai mare număr.* Un număr rațional *nu are un predecesor sau succesor unic.*

Între două numere raționale r_1 și r_2 există o mulțime infinită de numere raționale r. Avem $r_1 < r < r_2$ sau $r_1 > r > r_2$.

Axa numerelor (fig. 1.3.3). Datorită relațiilor de ordine stabilite între numerele raționale, și ele pot fi reprezentate pe o dreaptă prin puncte discrete. Punctul care reprezintă un număr rațional r reprezintă infinitatea de fracții care conduc toate la același număr rațional r. Și aici este valabilă aceeași regulă: cu cît un număr este *mai mic* (mare), cu atît va fi reprezentat *mai la stînga* (dreapta) pe dreaptă.

Operații cu fracții ordinare

Acest titlu a fost ales în locul titlului „*Operații cu numere raționale*" căci vom folosi două moduri de scriere pentru numerele raționale. Denumirea de *fracții ordinare* a fost întîi introdusă ca să se deosebească de fracțiile sexagesimale, iar acum în opoziție cu fracții zecimale.

Adunarea și scăderea. Să analizăm operațiile cu fracții care au același numitor sau cu numitori diferiți.

Fracțiile care au același numitor se adună și se scad în modul următor: se adună sau se scad numărătorii iar numitorul rămîne neschimbat.

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$$

Exemple. 1. $\frac{3}{7} + \frac{5}{7} = \frac{8}{7}$. 2. $\frac{4}{11} - \frac{7}{11} = -\frac{3}{11}$.

3. $\frac{5}{17} + \frac{9}{17} - \frac{18}{17} + \frac{13}{17} - \frac{2}{17} = \frac{7}{17}$

Datorită acestei reguli fracțiile *supraunitare* se pot descompune într-un întreg și o fracție subunitară: $\frac{8}{7} = \frac{7}{7} + \frac{1}{7}$; $\frac{22}{5} = \frac{20}{5} + \frac{2}{5}$.

De aceea fracțiile supraunitare se pot scrie ca de exemplu: $\frac{8}{7} = 1\frac{1}{7}$; $\frac{22}{5} = 4\frac{2}{5}$; între numărul întreg și fracție ar trebui pus semnul plus dar nu se mai scrie.

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{d} = \frac{ad}{cd} \pm \frac{bc}{cd} = \frac{ad \pm bc}{cd}$$

Fracțiile care nu au același numitor se adună sau se scad în felul următor: se aduc la același numitor și după aceea le adunăm sau le scădem. Numitorul comun este cel mai mic multiplu comun al celor doi numitori.

Aducerea la același numitor este o schimbare de formă a numerelor raționale la care se ajunge prin *amplificare.*

a) $\frac{2}{3} - \frac{7}{12} + \frac{5}{4}$. În acest caz unul dintre numitori este multiplul comun al celorlalți doi. Amplificăm pe $\frac{2}{3}$ și pe $\frac{5}{4}$ cu 4, respectiv 3; astfel au și acestea numitorul 12: $\frac{2}{3} - \frac{7}{12} + \frac{5}{4} = \frac{8}{12} - \frac{7}{12} + \frac{15}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$. În general simplificăm modul de scriere în așa fel încît suma a doua se scrie direct ca o fracție al cărei numărător este suma numărătorilor fracțiilor: $\frac{2}{3} - \frac{7}{12} + \frac{5}{4} = \frac{8 - 7 + 15}{12} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.

b) $\frac{1}{6} + \frac{3}{10} - \frac{11}{15}$. În acest exemplu trebuie căutat multiplul comun al numitorilor. Unul pe care-l găsim imediat este 60. Dar noi nu dorim să avem numărători mari, de aceea vom căuta cel mai mic multiplu comun al numitorilor care va fi numitorul comun (n.c.). C.m.m.m.c se determină prin descompunerea în factori primi și factorul de amplificare (f.a.) se stabilește tot din produsul factorilor primi renunțînd la factorii care sînt conținuți în numărătorul fracției respective; de ex. numitorul comun este $2 \cdot 3 \cdot 5$, iar ultimul numitor $15 = 3 \cdot 5$; deci factorul de amplificare va fi 2.

Exemplu.

	f.a.
$6 = 2 \cdot 3$	5
$10 = 2 \cdot 5$	3
$15 = 3 \cdot 5$	2
n.c. $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$	

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{10} - \frac{11}{15} = \frac{5 + 9 - 22}{30} = \frac{-8}{30} = -\frac{4}{15}.$$

Exemplu. $3\frac{17}{21} - \frac{3}{8} - \frac{11}{12} + 2 = \frac{80}{21} - \frac{3}{8} - \frac{11}{12} + 2$

	f.a.
$21 = 3 \cdot 7$	$2^3 = 8$
$8 = 2^3$	$3 \cdot 7 = 21$
$12 = 2^2 \cdot 3$	$2 \cdot 7 = 14$
n.c. $2^3 \cdot 3 \cdot 7 = 168$	

c) La stabilirea numitorului comun și a factorului de amplificare în cazul existenței în calcule a unui întreg se ține seama că întregul are numitorul 1.

$$\frac{80}{21} - \frac{3}{8} - \frac{11}{12} + 2 = \frac{640 - 63 - 154 + 336}{168} = \frac{759}{168} = \frac{253}{56}\left(= 4\frac{29}{56}\right).$$

d) $\frac{3}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9}$. În acest caz numitorii nu au factori primi comuni. Numitorul comun va fi produsul numitorilor. Rezultatul va fi $\frac{113}{180}$.

Regulile adunării. La adunarea numerelor raționale rămîn valabile proprietățile de comutativitate, asociativitate și monotonie.

Înmulțirea și împărțirea. Operațiile de gradul doi în mulțimea fracțiilor ordinare sînt mai ușor de executat decît cele de gradul unu, deoarece nu mai este nevoie de stabilirea numitorului comun. De aceea nu se fac deosebiri între fracțiile cu același numitor sau cu numitori diferiți unul de altul.

Înmulțirea. Putem da multe exemple despre importanța înmulțirii fracțiilor în viața de toate zilele: un tren circulă cu viteza de $45\frac{1}{2}$ km/h. Ce drum parcurge el în $2\frac{3}{4}$ h?

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Produsul a două fracții este tot o fracție: numărătorul său este produsul numărătorilor iar numitorul — produsul numitorilor.

Numerele întregi sînt considerate fracții cu numitorul 1. Ca să nu ajungem la numere mari și deci mai ușor la greșeli, simplificăm înainte de înmulțire.

Exemple.

1. $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 8} = \frac{1 \cdot 3}{5 \cdot 4} = \frac{3}{20}$. *2.* $\frac{4}{7} \cdot 3\frac{9}{32} = \frac{4}{7} \cdot \frac{105}{32} = \frac{4 \cdot 105}{7 \cdot 32} = \frac{1 \cdot 15}{1 \cdot 8} = \frac{15}{8}\left(= 1\frac{7}{8}\right)$.

3. $7 \cdot \frac{9}{28} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7 \cdot 9 \cdot 2}{1 \cdot 28 \cdot 3} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{3}{2}\left(= 1\frac{1}{2}\right)$. *4.* $\frac{11}{17} \cdot \frac{17}{11} = \frac{11 \cdot 17}{17 \cdot 11} = \frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 1} = 1$.

Ultimul exemplu ne arată că produsul dintre o fracție și inversa ei este egal cu 1. De aici rezultă următoarea definiție:

Două numere raționale se numesc reciproce sau inverse, dacă produsul lor este 1.

De ex. -3 și $-\frac{1}{3}$ sînt reciproce căci $-3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 1$.

Orice număr rațional în afară de 0 are un invers.

Împărțirea. Următorul exemplu ne arată că împărțirea fracțiilor are aplicații practice. O motocicletă are în medie un consum de benzină de $2\frac{1}{2}$ l pe 100 km. Cîți kilometri poate să circule dacă are un rezervor de $6\frac{1}{4}$ l?

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Împărțirea printr-o fracție se face înmulțind cu inversa fracției.

Putem constata că înmulțirea a fost făcută corect ținînd seama de faptul că produsul dintre cît și împărțitor trebuie să fie egal cu deîmpărțitul (împărțirea este operația inversă înmulțirii):

$\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{9}$; $\frac{8}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2}{3}$ sau $\frac{ad}{bc} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$.

Exemple. *1.* $\frac{7}{12} : \frac{5}{8} = \frac{7 \cdot 8}{12 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 2}{3 \cdot 5} = \frac{14}{15}$. *2.* $\frac{3}{5} : 6 = \frac{3 \cdot 1}{5 \cdot 6} = \frac{1}{10}$.

3. $5 : \frac{6}{7} = \frac{5 \cdot 7}{1 \cdot 6} = \frac{35}{6} = 5\frac{5}{6}$. *4.* $2\frac{4}{13} : \frac{16}{39} = \frac{30 \cdot 39}{13 \cdot 16} = \frac{15 \cdot 3}{1 \cdot 8} = \frac{45}{8} = 5\frac{5}{8}$.

5. $\frac{11}{12} : \frac{11}{12} = \frac{11 \cdot 12}{12 \cdot 11} = 1$.



Între numerele raționale este posibilă orice împărțire excluzînd împărțirea la 0.

Fracții etajate. Numărătorul sau numitorul unei fracții poate fi el însăși o fracție, de ex. $\frac{\frac{3}{7}}{5}$, $\frac{\frac{1}{3}}{9}$, $\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{8}}$. Este incomodă scrierea și vom efectua operația de *împărțire*. Linia de fracție dintre cele două fracții trebuie să fie mai lungă și scrisă în dreptul semnului egal sau al operației.

Exemple. *1.* $\dfrac{3}{\frac{7}{5}} = 3 : \frac{7}{5} = 3 \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{7}$. *3.* $\dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{5} : \frac{3}{8} = \frac{2}{5} \cdot \frac{8}{3} = \frac{16}{15} = 1\frac{1}{15}$.

2. $\dfrac{\frac{1}{3}}{9} = \frac{1}{3} : 9 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{27}$. *4.* $\dfrac{3}{\frac{7}{5}} = \frac{15}{7}$, dar $\dfrac{\frac{3}{7}}{5} = \frac{3}{35}$.

Fracții zecimale

Generalități. Într-un *sistem pozițional* cifrele unui număr au în afară de valoarea lor și o valoare datorită poziției pe care o ocupă. În numărul 3 752, 5 are datorită poziției o valoare de 5 zeci. La sistemul *pozițional zecimal*, fiecare parte reprezintă $\frac{1}{10}$ din valoarea poziției dinainte (la stînga). La scrierea numerelor naturale unitățile ocupau ultima poziție; la scrierea numerelor raționale după unități urmează *zecimi* (*z*), *sutimi* (*s*), *miimi* (*m*) etc. Unitățile sînt despărțite de zecimi printr-o virgulă; 7,5 cm = 7 cm și 5 mm deoarece 1 mm reprezintă o zecime dintr-un centimetru.

Exemplu. 58,37 reprezintă:

$$58{,}37 = 5\,z + 8\,u + 3\,z + 7\,s = 5 \cdot 10 + 8 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{10} + 7 \cdot \frac{1}{100} =$$
$$= 50 + 8 + \frac{3}{10} + \frac{7}{100}.$$

Pozițiile după virgulă se numesc zecimale. Zecimile reprezintă prima zecimală, sutimile a doua zecimală etc. 4,81 are două zecimale. Fiecare număr, care nu reprezintă un întreg, scris în modul de mai sus, se numește fracție zecimală.

Deci o fracție ordinară al cărei numitor este o putere a lui 10 se numește *fracție zecimală*; de ex. 0,375 sau 17,8. Se mai folosește și denumirea de *număr zecimal*.

Trecerea de la o fracție ordinară la una zecimală. Fiecare fracție ordinară care are numitorul egal cu o putere a lui 10 se scrie foarte ușor ca o fracție zecimală.

Exemple. *1.* $\frac{3}{10} = 0{,}3$. 2. $\frac{23}{100} = \frac{20 + 3}{100} = \frac{2}{10} + \frac{3}{100} = 0{,}23$. *3.* $\frac{70\,105}{1\,000} = 70{,}105$.

Deoarece $10 = 2 \cdot 5$, puterile lui 10 conțin factori primi numai pe 2 și pe 5. De aceea putem scrie toate fracțiile ordinare al căror numitor conține numai puteri ale lui 2 sau 5 ca fracții zecimale, transformîndu-le întîi prin amplificare într-o fracție ordinară cu numitorul egal cu o putere a lui 10.

Ex. $\frac{7}{20} = \frac{35}{100} = 0{,}35$; $1\frac{3}{8} = \frac{1\,375}{1\,000} = 1{,}375$.

O astfel de transformare nu este posibilă dacă numitorul conține și alți factori primi decît 2 și 5 și aceștia nu pot fi simplificați. Acestea se pot transforma în fracții zecimale (periodice). Vom analiza următoarele exemple pentru a ajunge la noțiunea de fracție periodică. Împărțirea număru-

lui 2 la 7 este posibilă în mulțimea numerelor raționale. În mulțimea numerelor raționale există două posibilități de rezolvare:

a) $2 : 7 = \frac{2}{1} : \frac{7}{1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$;

b) $2 : 7 = 0{,}28571428 \ldots$

20
60
40
50
10
30
20
60
...

Calcul mintal:

2 împărțit la 7 este egal cu 0, rest $2 = \frac{20}{10}$;

$\frac{20}{10}$ împărțit la 7 este egal cu $\frac{2}{10}$, rest $\frac{6}{10} = \frac{60}{100}$;

$\frac{60}{100}$ împărțit la 7 este egal cu $\frac{8}{100}$, rest $\frac{4}{100} = \frac{40}{1000}$.

Ambele rezultate sînt egale: $\frac{2}{7} = 0{,}28571428 \ldots$ Împărțirea b) nu are sfîrșit căci altfel ar însemna că fracția $\frac{2}{7}$ se poate scrie ca o fracție ordinară cu numărătorul egal cu o putere a lui 10. De ce a luat naștere o fracție zecimală infinită? Deoarece la împărțirea unui număr cu 7 sînt posibile cel mult 6 resturi diferite (1,2, ..., 6), trebuie ca cel tîrziu al șaptelea rest să fie egal cu unul dinaintea lui, deci cel mai tîrziu la a șaptea zecimală vom întîlni aceleași cifre și în aceeași ordine. Fracția astfel obținută este *periodică*, iar lungimea perioadei poate fi cel mult 6 în cazul în care împărțitorul este 7.

Fie $\frac{p}{q}$ o fracție ordinară ireductibilă al cărei numitor are și factori primi diferiți de 2 și de 5. Aceasta se transformă într-o fracție zecimală periodică, perioada avînd cel mult $q - 1$ cifre.

Perioada se pune în paranteză:

$\frac{1}{3} = 0{,}33 = 0{,}(3)$; $\frac{34}{99} = 0{,}(34)$; $\frac{17}{12} = 1{,}41(6)$, $\frac{11}{26} = 0{,}4(230769)$.

(*primele două fracții sînt fracții periodice simple iar următoarele fracții periodice mixte*).

Fracțiile periodice mixte reies din transformarea fracțiilor ordinare care au la numitor factori primi pe 2 sau pe 5.

Transformarea fracției zecimale în fracție ordinară. O fracție zecimală simplă se poate transforma ușor în fracție ordinară, de ex. $0{,}17 = \frac{1}{10} + \frac{7}{100} = \frac{10 + 7}{100} = \frac{17}{100}$; $6{,}05 = \frac{605}{100} = \frac{121}{20}$. Se scriu cifrele numărului la numărător iar numitorul este o putere a lui 10 cu exponentul egal cu numărul de zecimale. Și fiecare fracție zecimală periodică se poate scrie ca o fracție ordinară. O fracție *periodică simplă* se transformă în felul următor: cifrele perioadei formează numărătorul iar numitorul este puterea lui 10 la un exponent egal cu numărul cifrelor perioadei micșorat cu 1, de ex. $0{,}(3) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$; $0(27) = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$; $0{,}(253) = \frac{253}{999}$.

Exemple. 1. $\frac{p}{q} = 0{,}(369)$

$$1\,000 \frac{p}{q} = 369{,}(369)$$
$$999 \frac{p}{q} = 369$$
$$\frac{p}{q} = \frac{369}{999}$$
$$\frac{p}{q} = \frac{41}{111}$$

2. $\frac{p}{q} = 0{,}3(58)$

$$100 \frac{p}{q} = 35{,}8(58)$$
$$99 \cdot \frac{p}{q} = 35{,}5 = \frac{355}{10}$$
$$\frac{p}{q} = \frac{355}{10} : 99 = \frac{355}{990}$$
$$\frac{p}{q} = \frac{71}{198}$$

Fracţiile zecimale periodice mixte se transformă în felul următor:

$$0,3(58) = 0,3 + 0,0(58) = 0,3 + 0,(58)\cdot 0,1 = \frac{3}{10} + \frac{58}{99}\cdot\frac{1}{10} = \frac{297+58}{990} = \frac{355}{990} = \frac{71}{198}.$$

Din exemplul de mai sus deducem că fracţia periodică mixtă este egală cu o fracţie ordinară în care: 1) numărătorul se găseşte scăzînd neperioada din numărul format de neperioadă urmată de perioadă; 2) numitorul se găseşte scriind pe 9 de atîtea ori, cîte cifre are perioada şi în continuare pe 0 de atîtea ori cîte cifre are neperioada.

Fiecare fracţie ordinară se poate scrie ca o fracţie zecimală neperiodică sau periodică. Fiecare fracţie zecimală periodică sau neperiodică se poate transforma într-o fracţie ordinară. Fracţiile ordinare şi fracţiile zecimale periodice sau neperiodice sînt două moduri de scriere a numerelor raţionale.

Operaţii cu fracţii zecimale

Vom analiza modul de calcul cu fracţii zecimale neperiodice. Fracţiile periodice se rotunjesc sau se transformă în fracţii ordinare.

Adunarea şi scăderea. Fracţiile zecimale se adună în acelaşi mod ca numerele naturale sau întregi. Se scriu numerele unul sub altul în aşa fel încît virgulele să ocupe aceeaşi poziţie. Rezolvarea uşoară a operaţiilor de gradul unu are marele avantaj datorită fracţiilor zecimale.

Exemple. 1.
$$\begin{array}{r} 713,25 \\ +\ 1,085 \\ +\ 22,9 \\ \hline 737,235 \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{r} 38,023 \\ -\ 9,13 \\ -\ 0,0258 \\ \hline 28,8672 \end{array}$$

Exemplu.
$$\begin{array}{r} 0,175\cdot 3,5 \\ \hline 525 \\ 875 \\ \hline 0,6125 \end{array}$$

Înmulţirea. Fiecare fracţie zecimală poate fi scrisă ca o fracţie ordinară cu numitorul egal cu o putere a lui zece. Efectuăm înmulţirea celor două fracţii fără să le simplificăm, de ex.

$$0,175\cdot 3,5 = \frac{175}{1\,000}\cdot\frac{35}{10} = \frac{175\cdot 35}{1\,000\cdot 10} = \frac{6\,125}{10\,000}.$$

Rezultatul este tot o fracţie ordinară cu numitorul egal cu o putere a lui 10. Numărătorul este egal cu produsul numărătorilor. La transformarea ei într-o fracţie zecimală vom obţine o fracţie care va avea un număr de zecimale egal cu suma numărului de zecimale ale factorilor.

Două fracţii zecimale se înmulţesc astfel: întîi se efectuează înmulţirea numerelor neţinînd seama de virgulă, iar la rezultat despărţim atîtea cifre zecimale cîte au cele două numere zecimale împreună.

Înmulţirea unei fracţii zecimale cu o putere a lui 10 se face mutînd virgula spre dreapta peste un număr de cifre egal cu exponentul lui 10 : $7,136\cdot 100 = 713,6$.

Împărţirea. Cîtul unei împărţiri nu se schimbă dacă înmulţim deîmpărţitul şi împărţitorul cu aceeaşi cifră, de ex. $12 : 4 = 48 : 16 = 120 : 40 = 1,2 : 0,4 = 6 : 2 = 3$. Ca să putem face împărţirea în acelaşi mod ca în cazul numerelor naturale înmulţim deîmpărţitul şi împărţitorul cu acea putere a lui 10 care transformă împărţitorul *în număr întreg.* de ex. : $33 : 6,5 = 330 : 65$; $6,729 : 13,58 = 672,9 : 1\,358$.
Se efectuează împărţirea ca în cazul numerelor naturale şi fixăm virgula la cît, atunci cînd ajungem la ea în deîmpărţit.

Exemple. 1. $47,275 : 3,1 = 472,75 : 31 = 15,25$

$$\begin{array}{r} 162 \\ \hline 77 \\ \hline 155 \\ \hline 0 \end{array}$$

2. $714,5 : 100 = 7,145$

3. $1,92 : 1\,000 = 0,00192$

Împărţirea unei fracţii zecimale cu o putere a lui 10 se face mutînd virgula spre stînga peste un număr de cifre egal cu exponentul puterii.

Calculele aproximative prescurtate. Înmulțirea și împărțirea fracțiilor zecimale dau, în general, rezultate cu mai multe zecimale decît termenii cu care se fac operațiile. Dacă factorii sînt și ei *numere aproximative* care au fost obținute prin măsurări neexacte, atunci anumite zecimale nu sînt sigure și se poate renunța la ele. La operațiile de gradul unu cu numere aproximative, rezultatul nu poate avea decît tot atîtea zecimale socotite sigure, cît are și termenul cu cele mai puține zecimale.

La înmulțire și împărțire rezultatul nu poate avea decît tot același număr de cifre sigure (nu zecimale!) cîte are termenul cu cele mai puține cifre.

Cifrele sigure ale unui număr sînt toate cifrele numărului cu excepția zerourilor care se află în fața primei cifre diferite de zero; de ex. 307,6 are ca și 0,00002643 tot 4 cifre sigure.

Ca să evităm calculele cu cifre nesigure vom folosi calculele aproximative la care rezultatul va avea numai cifre sigure.

Adunarea și scăderea aproximativă prescurtată. Dacă termenii sumei au aceeași sumă de zecimale sigure, atunci adunarea și scăderea se fac obișnuit.

În cazul cînd numărul de zecimale sigure este diferit, se procedează în felul următor: fie k numărul cel mai mic de zecimale sigure întîlnit; atunci rotunjim toate numerele celelalte la $k+1$ zecimale și adunăm și scădem numerele ținînd seama de ultima zecimală numai pentru calculul penultimei, adică a zecimalei k.

Exemplu.

	→	
2,7362		2,736
+ 0,8749		+ 0,875
+ 17,53		+ 17,53
+ 8,665		+ 8,665
		29,81

Exemplu.

27,8673 · 49,23	278,67 · 4,923
1114692	1114 68
2508057	250 80
557346	5 57
836019	83
1371,907179	1371,9 ≈ 1372

Înmulțirea aproximativă prescurtată. Aici nu mai luăm în considerare zecimalele sigure și numărul de cifre sigure. Dacă un factor are k cifre sigure și celălalt mai multe cifre sigure, atunci se rotunjește celălalt factor la $k+1$ cifre sigure. Scriem factorul cu $k+1$ cifre ca deînmulțit și avem grijă ca înmulțitorul să conțină numai unități; de ex. $27{,}8673 \cdot 49{,}23 = 278{,}673 \cdot 4{,}923$.

Vom arăta pe acest exemplu tehnica de înmulțire aproximativă. La prima înmulțire parțială intervine încă deînmulțitul întreg, pe cînd la următoarele se renunță la cîte o cifră, totuși ținîndu-se seama de ultima cifră la care s-a renunțat pentru rotunjire. La cel de al treilea produs parțial se procedează astfel: $2 \cdot 6 = 12$, 1 este păstrat pentru calculul produsului respectiv $2 \cdot 8 + 1 = 17$, $2 \cdot 7 + 1 = 15$, $2 \cdot 2 + 1 = 5$. Deci al treilea produs parțial va fi 557. La calcularea sumei produselor parțiale nu se va scrie ultima zecimală dar se va ține seama de suma ei la calcularea penultimei.

Dacă produsul se cere calculat cu k zecimale, atunci se face pe cît este posibil înmulțirea factorilor cu cîte $k+1$ cifre sigure și se rotunjește după aceea.

Împărțirea aproximativă. Numărul de cifre sigure ale cîtului este egal cu cel mai mic dintre numerele de cifre sigure ale factorilor. Dacă cîtul este cerut dinainte cu un număr de k cifre sigure, alegem deîmpărțitul și împărțitorul cu $k+1$ cifre sigure și rotunjim la a k-a cifră sigură a cîtului.

Exemplu :

67 428,3 : 43 917 = 1,535	6 743 : 4 392 = 1,54
43 917	4 392
235113	2351
219585	2196
155280	155
131751	176
235290	−21

În loc să adăugăm zerouri ca la împărțirea obișnuită, la împărțirea prescurtată vom renunța treptat la cîte o cifră de la sfîrșitul împărțitorului, dar care va fi reținută în minte pentru calcularea produselor parțiale.

2 351 : 439 = 5; $5 \cdot 2 = 10$(1 reținem); $5 \cdot 9 + 1 = 46$; $5 \cdot 3 + 4 = 19$; $5 \cdot 4 + 1 = 21$. La următorul pas vom împărți 155 la 44 și obținem 4 deoarece $44 \cdot 4 = 176$ este mai aproape de 155 decît $44 \cdot 3 = 132$.

Istoric. Teoria fracţiilor ordinare şi operaţiile cu ele este opera *indienilor* (BRAHMAGUPTA — 600 e.n.) şi s-a făcut cunoscută în Europa, datorită arabilor. Totuşi, încercări de a se lucra cu fracţii ordinare se făcuseră deja şi în Europa.

În cartea lui AHMES (Papyrus Rhind, 1700 î.e.n.) se întîlnesc numai fracţii care au numărătorul unu (cu excepţia lui 2/3). *Babilonienii* foloseau fracţiile sexagesimale, iar romanii numai fracţii cu numitorul egal cu 12. Fracţiile zecimale au fost folosite tîrziu. Prima dată le întîlnim în opera inginerului olandez Simon STEVIN care le asocia cu sistemul zecimal de numeraţie. El explica utilitatea folosirii unui sistem de măsură bazat pe sistemul zecimal.

1.4. Proporţionalitate şi proporţii

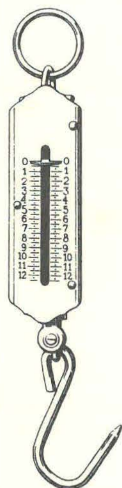
Proporţionalitate directă. Cu cît un corp suspendat este mai greu, cu atît extensia arcului unui cîntar cu arc este mai mare (fig. 1.4.1). La un anumit cîntar o greutate de x unităţi provoacă o extensie de g unităţi de lungime.

x	50	100	125	175	240	300
y	10	20	25	35	48	60

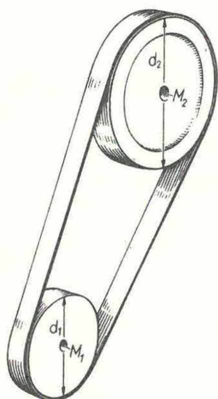
Din valorile pentru greutatea x se obţin valorile pentru lungimea g a extensiei corespunzătoare prin înmulţire cu 0,2, adică $y = 0{,}2x$ sau $y/x = 0{,}2$.

În general două cantităţi x şi y se numesc direct proporţionale dacă: 1) oricărei valori a primei cantităţi îi corespunde o valoare a celei de a doua; 2) din fiecare valoare măsurată a lui x rezultă o valoare corespunzătoare pentru y, prin înmulţire cu unul şi acelaşi număr. Numărul x se numeşte factor de proporţionalitate. El caracterizează situaţia practică reprezentată prin legătură. În exemplul dat constanta $c = 0{,}2$ este o caracteristică a cîntarului folosit.

Proporţionalitate directă	$y = cx$ sau $\frac{y}{x} = c$



1.4.1. Balanţa cu arc.



1.4.2. Cureaua de transmisie.

Într-un sistem de coordonate rectangulare, această legătură se reprezintă grafic printr-o dreaptă care trece prin originea coordonatelor; punctul (x, y) se găseşte pe această dreaptă.

Proporţionalitate indirectă sau inversă. Dacă două roţi de diametre diferite sînt legate printr-o curea de transmisie (fig. 1.4.2), atunci dacă roata mică cu diametrul de 20 cm se va învîrti o dată, numărul de rotaţii ale celeilalte roţi este cu atît mai mare cu cît diametrul ei x este mai mic:

x	4	5	10	15	20	30
y	5	4	2	4/3	1	2/3

Pentru valorile corespunzătoare x şi y are loc relaţia $y \cdot x = 20$ sau $y = 20/x$. Acelaşi lucru se observă la două roţi de dimetre diferite acţionate prin frecare, sau la două roţi dinţate.

În general, două cantităţi y şi x se zic invers proporţionale dacă:

1) fiecărei valori a primei cantităţi îi corespunde exact o valoare a celei de a doua cantităţi:

2) pentru orice valoare a lui x, valoarea corespunzătoare a lui y se obţine prin împărţirea aceluiaşi număr c prin x.

Proporţionaltate indirectă	$y = \frac{c}{x}$ sau $y \cdot x = c$

Această legătură are ca reprezentare grafică într-un sistem de coordonate rectangulare o hiperbolă echilaterală.

Deoarece numărul c apare în $y = c/x = c \cdot 1/x$, el se numeşte şi în acest caz *factor de proporţionalitate.*

Rapoarte. Un turbopropulsor modern are viteza de 650 km/oră, un tren rapid are viteza de numai 130 km/h. Aceasta înseamnă că într-o oră turbopropulsorul străbate o distanță de 5 ori mai mare decît rapidul sau că viteza turbopropulsorului și viteza rapidului sînt în raportul 5 la 1.

Raportul a două cantități de aceeași natură este cîtul măsurilor acestor cantități.

Pentru numere, raportul se definește în mod analog; în ambele cazuri raportul este un număr.

Se pot forma rapoarte și cu cantități de tipuri diferite. Dacă unui om îi trebuie 4 ore pentru a acoperi mergînd 11 km, atunci se formează raportul 11 km : 4 h = 11/4 km/h (se citește unsprezece pe patru kilometri pe oră). În acest caz formarea raportului a dus la noul concept de viteză cu unitatea de măsură km/h sau km $\cdot$ h^{-1}.

În proporționalitatea directă valorile asociate au întotdeauna același raport iar în proporționalitatea indirectă același produs.

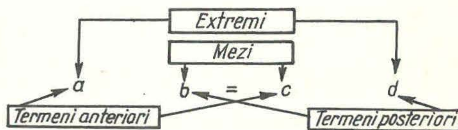
Deoarece un cît nu se schimbă atunci cînd deîmpărțitul și împărțitorul se înmulțesc sau se împart cu același număr $c \neq 0$, unul și același raport poate fi dat în mai multe moduri, de exemplu, 5 : 1 = 10 : 2 = 30 : 6 = 1 : 0,2 = 650 : 130. De regulă se alege expresia care conține cele mai mici numere naturale, de exemplu 5 : 1.

Proporții sau egalitatea rapoartelor. O egalitate de două rapoarte se numește *proporție*, de exemplu 2 : 3 = 1 : 1,5 sau 4/5 = 8/10. O proporție este adevărată dacă același raport, exprimat în două moduri diferite, se găsește în ambele părți ale proporției; 4 : 5 = 5 : 4 este o proporție falsă (fig. 1.4.3).

Dacă într-o proporție termenii interiori sau exteriori sînt egali, atunci valoarea comună a termenilor egali se numește medie proporțională a celorlalți doi termeni: de exemplu 12 : 6 = 6 : 3, 6 este medie proporțională pentru 12 și 3. Media geometrică $m_g = \sqrt{ab}$, a două mărimi a și b este în același timp valoarea absolută a mediei proporționale în proporția $a : x = x : b$.

$a : c = c : b$	c medie proporțională

Proporție continuă echivalentă	$a : b : c = d : e : f$ $a : d = b : e = c : f$



1.4.3. Termenii proporției

Dacă termenii posteriori ai unei proporții sînt egali cu termenii anteriori ai alteia, se scrie de regulă o proporție continuă; de exemplu pentru 2 : 5 = 4 : 10 și 5 : 8 = 10 : 16 se scrie 2 : 5 : : 8 = 4 : 10 : 16. Aceasta este numai o scriere simbolică deoarece dacă s-ar interpreta cele două părți drept cîturi s-ar obține un neadevăr : 1/20 = 1/40. În general $a : b : c = d : e : f$ este o prescurtare pentru următoarele trei proporții $a : b = d : e$, $b : c = e : f$ și $a : c = d : f$, unde fiecare este o consecință a celorlalte două. De exemplu, prin schimbarea mezilor în primele două se obține $a : d = b : e$ și $b : e = c : f$, în consecință $a : d = c : f$ sau $a : c = d : f$, adică a treia proporție.

Înmulțind primele două proporții cu b/d sau c/e se obține un șir de ecuații $a/d = b/e = c/f$ din care se pot obține proporțiile. De exemplu teorema simetriilor din geometria plană se poate scrie în una din formele:

$$a / \sin \alpha = b / \sin \beta = c / \sin \gamma \text{ sau } a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$$

Teoreme asupra proporțiilor. O proporție este o egalitate, deci i se pot aplica toate operațiile folosite la transformarea egalităților. Există însă și reguli speciale prin care se transformă o proporție $a : b = c : d$ în alta.

Dacă se înmulțesc ambele părți ale unei proporții $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ cu $b \cdot d$ și se simplifică la stînga cu b și la dreapta cu d, atunci se obține o egalitate de produse $ad = cb$.

În orice proporție *produsul mezilor este egal cu produsul extremilor*	$a : b = c : d$ $ad = bc$

Invers, din egalitatea $a \cdot d = b \cdot c$ ($\neq 0$) se poate obține o proporție. Împărțirea cu $b \cdot d$ duce la $a : b = c : d$ iar împărțirea prin $a \cdot b$ duce la $d : b = c : a$ etc.

Se ajunge astfel la teoremele de comutare.

Teoreme de comutare. *Într-o proporție pot fi schimbați mezii între ei, extremii între ei, ambii mezi cu ambii extremi, cele două rapoarte între ele.*

Adunări și scăderi corespondente. Următoarele reguli servesc la transformarea proporțiilor și ușurează calculele cu unele proporții mai complicate. Ele mai pot fi folosite în unele demonstrații, în geometrie.

Dacă în proporția $a : b = c : d$ se adună sau se scade 1 în ambele părți, atunci prin

adunare corespondentă se obține: și prin **scădere corespondentă se obține:**

$(a + b) : b = (c + d) : d$ $\quad$ $(a - b) : b = (c - d) : d$

$(a + b) : a = (c + d) : c$ $\quad$ $(a - b) : a = (c - d) : c$

Împărțind cele două proporții derivate, termen cu termen, se obține: $(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d)$

Aceste formule sînt doar cele mai simple cazuri particulare ale regulilor generale de adunare și scădere corespondente.

Adunare sau scădere corespondentă	din $\left\{ \begin{matrix} a : b = c : d \\ p, q, r, s \text{ arbitrari} \end{matrix} \right\}$	rezultă $\dfrac{pa + qb}{ra + sb} = \dfrac{pc + qd}{rc + ds}$

Această afirmație rezultă notînd $a : b = c : d = k$ și înlocuind valorile $a = bk$, $c = dk$ în proporția derivată și simplificînd cu b respectiv d.

Proporționalitate și proporții. Dacă între două cantități x și y există proporționalitate directă, atunci $y_1/x_1 = y_2/x_2 = \ldots = y_n/x_n = c$ pentru orice n perechi de valori asociate x_i, y_i. Repetînd schimbarea mezilor se ajunge la $y_1 : y_2 : \ldots : y_n = x_1 : x_2 : \ldots : x_n$. Aceasta înseamnă că pentru o proporționalitate directă valorile asociate y_i și x_i sînt întotdeauna în același raport și că orice perechi de valori x_i și x_j sînt în același raport cu perechea y_i și y_j.

În cazul proporționalității indirecte a cantităților x și y, valorile asociate x_i și y_i satisfac $x_1y_1 = x_2y_2 = \ldots = x_ny_n = c$. Din aceste ecuații se pot deriva proporții ca $y_1 : y_2 = x_2 : x_1$ și în sfîrșit $y_1 : y_2 : \ldots : y_n = x_n : \ldots : x_3 : x_2 : x_1$. Aceasta înseamnă că în proporționalitatea indirectă raportul oricărei perechi de valori x_i și x_j este egal cu inversul raportului perechii y_i și y_j.

Rezolvarea proporțiilor. Rapoartele $50 : 140 = 10 : x$ și $x : 2 = 50 : 80$ conțin fiecare cîte o variabilă. A le rezolva înseamnă găsirea valorilor lui x care substituite să dea rapoarte egale. Este vorba de problema găsirii celei de a patra proporționale. În primul caz se vede imediat că $x = 28$ iar în al doilea caz $x = 5/4$. Proba se face cu ajutorul ecuației produselor.

În cazurile mai dificile se poate folosi ecuația produselor pentru găsirea soluției.

Exemplul 1. $(8x - 7) : (4x - 1) = (6x - 5) : 3x$

Cu ajutorul egalității de produse se obține

$3x(8x - 7) = (4x - 1)(6x - 5)$,
$24x^2 - 21x = 24x^2 - 26x + 5$
$5x = 5$,
$x = 1$.

Proba
$(8 \cdot 1 - 7) : (4 \cdot 1 - 1) = 1 : 3$
$(6 \cdot 1 - 5) : 3 \cdot 1 = 1 : 3$
$1 : 3 = 1 : 3$.

Exemplul 2. Două corpuri cu același volum au unul densitatea $q_1 = 7{,}3$ kg/dm^3 și al doilea $q_2 = 2{,}7$ kg/dm^3. Care este masa celui de al doilea corp dacă masa primului corp este de 4,8 kg?

$4{,}8 : x = 7{,}3 : 2{,}7$, $\quad x = 1{,}775$. $\quad$ Masa celui de al doilea corp este 1,775 kg.

Exemplul 3. O sîrmă cu lungimea $l_1 = 400$ m și cu diametrul $d_1 = 4$ mm are masa $m_1 = 36{,}7$ kg. Ce lungime de sîrmă din același material, dar cu dimetrul $d_2 = 6$ mm are masa $m_2 = 90$ kg? Sîrma fiind din același material, raportul maselor este egal cu raportul volumelor și deci

$$m_1 : m_2 = \frac{d_1^2}{4}\pi l_1 : \frac{d_2^2}{4}\pi l_2 \qquad m_1 : m_2 = d_1^2 l_1 : d_2^2 l_2.$$

Din egalitatea produselor rezultă soluția

$$l_2 = \frac{m_2 d_1^2 l_1}{m_1 d_2^2},$$

unde mărimile care intervin (m_2, m_1, d_1, d_2, l_1) sînt exprimate în aceleași unități de măsură. Folosind datele problemei se găsește $l_2 = 436$ m.

Exemplul 4. O pompă de benzină dispune de o rezervă pentru 24 de zile, dacă vinde zilnic 1 000 l. Cît timp îi ajunge rezerva dacă se folosesc zilnic 1 200 l? Rezerva ajunge, așadar, pentru 20 de zile.

$$24 : x = 1\,200 : 1\,000; \quad x = \frac{24\,000}{1\,200}, \quad x = 20.$$

Istoric. Studiul proporțiilor a ocupat în matematica veche un loc central, deoarece o mare diversitate de probleme conduceau la proporții. Matematica greacă determina a patra proporțională (cu ajutorul construcțiilor geometrice). În Europa, calculul cu proporții și regula de trei simplă au început a fi utilizate abia în sec. 15—17 în legătură cu calculele comerciale. Astfel de probleme constituiau partea principală a celor mai răspîndite cărți de aritmetică, obiectul de studiu principal pentru profesorii de aritmetică și socotitorii din acea vreme. Dintre aceștia, în Germania cel mai cunoscut a dost Adam RIES (1492—1559).

Proporțiile au jucat de asemenea un rol important în arta plastică a Renașterii. Clădirile picturile și sculpturile trebuiau să îndeplinească anumite „canoane", adică anumite părți ale lor trebuiau să se găsească în rapoarte de mărime fixate; de exemplu, capul : înălțimea corpului = = 1 : 8, cap : obraz = 5 : 4, trunchi : partea de sus a coapsei = partea de sus a coapsei : partea de jos a coapsei, înălțimea unei clădiri: lățimea unei clădiri = 3 : 7 ș.a. Un mare rol l-a jucat aici „secțiunea de aur" (vezi cap. 7). Chiar și astăzi se mai folosește expresia „bine proporționat" în sensul proporționat pentru a satisface simțul estetic. În acest domeniu au lucrat mult în perioada renașterii Leonardo DA VINCI (1452—1519) și Albrecht DÜRER (1471—1529).

1.5. Simboluri generale ale numerelor

Caracterul simbolurilor generale ale numerelor. În circulația publică simbolul „parcarea interzisă" este valabil pentru orice fel de vehicul. Simbolurile 3 și 7 reprezintă mulțimi formate din trei, respectiv șapte elemente. Tot astfel există simboluri generale pentru orice fel de numere care de obicei sînt litere. Cu ajutorul lor se pot formula ușor proprietățile și regulile (de ex. comutativitatea) și se pot obține metode generale de rezolvare a diferitelor probleme care se pot particulariza prin introducerea valorilor individuale în rezolvarea obținută în general. Trebuie specificat pentru ce fel de numere — naturale, întregi, raționale — sînt folosite simbolurile. Dacă nu este specificat, ele sînt folosite pentru numere raționale.

În loc de același simbol se introduce același număr. Nu este corectă folosirea a două numere diferite pentru același simbol. În egalitatea, de ex. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, nu este permisă înlocuirea lui a în partea stîngă cu $\frac{1}{2}$ și în partea dreaptă cu -7. Pentru simboluri diferite este permisă folosirea aceluiași număr, de ex. $2a + 5b$ pentru $a = b = -\frac{3}{7}$ are valoarea -3.

Nu se poate discuta despre efectuarea operațiilor aritmetice cu simbolurile generale ale numerelor în același sens ca în cazul numerelor întregi naturale etc., ele neformînd o mulțime de numere ca cele întregi, raționale. Putem exprima cu ajutorul lor numai reguli, formule, legi, specificînd că ele înlocuiesc elementele unei mulțimi de numere. De exemplu proprietățile numerelor reale se pot scrie cu ajutorul simbolurilor astfel:

Comutatitatea	$a + b = b + a$; $a \cdot b = b \cdot a$
Asociativitatea	$a + (b + c) = (a + b) + c$; $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Distributivitatea	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Trebuie să se țină seamă la calculele făcute cu simbolurile generale de ordinea operațiilor.

Adunarea și scăderea. **Operațiile de gradul unu nu pot fi efectuate decît cu același fel de termeni, de ex. $5a + 7c - 3b + 6c - 2a - 7b - 5c = 3a - 10b + 8c$. Acest lucru se bazează pe proprietatea de distributivitate, de ex. $5a - 2a = (5 - 2)a = 3a$.**

Sume algebrice. **Ca și în cazul numerelor întregi și în cazul simbolurilor generalizate scăderea poate fi privită ca adunarea respectivului număr negativ: $3a - 10b + 5c = 3a + (-10b) + 5c$. Astfel de expresii se numesc din nou sume algebrice. Pentru sume algebrice**

formate din mai multe simboluri generale se folosește denumirea de polinom, care însă este mai frecvent folosită în matematică în alt sens.

Monomul este format dintr-un singur termen, binomul din doi termeni etc. Ex. $6u - 11v$ reprezintă un binom.

Înmulțirea și împărțirea. Și în cazul acesta ne dăm seama că $m \cdot n$ sau $s \cdot t$ nu au sens, adică nu se pot efectua. La semnul înmulțirii se poate renunța. Se scrie ab și nu $a \cdot b$ și $6(p + q)$ în loc de $6 \cdot (p + q)$. Numitorii trebuie să fie diferiți de zero. Și în cazul simbolurilor generale se folosește scrierea cu puteri.

Exemple. 1. $4m \cdot 3n \cdot 15k = 180\, kmn$. 2. $(-320pq) : (-80q) = 4p$.

3. $125c^2 \cdot \left(-\frac{3}{7} d\right) \cdot \frac{14}{75} cd = -10c^3d^2$; 4. $93s^2t^4 : 31st^2 = 3st^2$.

Ordonarea lexicografică. Datorită proprietății de comutativitate, ordinea termenilor sumei sau a factorilor nu are importanță dar în general se ordonează lexicografic, adică conform alfabetului. Nu scriem $28b^3af^2d$ ci $28ab^3df^2$ sau $2{,}5uv - 3{,}2uw + 36vw$ în loc de $36vw + 2{,}5uv - 3{,}2uw$
Într-o sumă de termeni care conțin același simbol la puteri diferite, se ordonează după mărimea exponentului $s^5 - 3s^4 + 2s^2 - 8s$.

Operații cu sume algebrice

Adunarea și scăderea. La adunarea și scăderea sumelor algebrice pot fi întîlnite paranteze de ex. $(7a - 3b) + (5c - 3b - 6a) - (7b - 8a + 2c)$ care vor fi efectuate mai întîi.

Desfacerea parantezelor. Un exemplu numeric pentru efectuarea calculelor mintal:

$$\begin{aligned} &227 + 36 - 213 - 198 + 29 = \\ &= 227 + (30 + 6) - (200 + 13) - (200 - 2) + (30 - 1) = \\ &= 227 + 30 + 6 - 200 - 13 - 200 + 2 + 30 - 1. \end{aligned}$$

Dacă în fața unei paranteze este semnul plus, se renunță la paranteză; dacă se află semnul minus, odată cu renunțarea la paranteză se schimbă toate semnele termenilor.

Dacă avem de efectuat operația $6a - (4a - b)$, atunci va trebui să scădem din $6a$ pe $4a - b$, adică valoarea lui $4a$ micșorată cu b. Dacă scădem $4a$, înseamnă că am scăzut cu valoarea lui b mai mult și va trebui să adunăm la loc b. Deci $6a - (4a - b) = 6a - 4a + b = 2a + b$.

Exemplu.

$$\begin{aligned} &8p - (15r - 7q + 6p) + (8q - p + 7r) = \\ &= 8p - 15r + 7q - 6p + 8q - p + 7r = \\ &= p + 15q - 8r. \end{aligned}$$

Paranteze multiple. Dacă într-o expresie matematică întîlnim operații cu sume algebrice aflate în paranteză, atunci va trebui să deosebim parantezele după formă. Mai des se rezolvă întîi parantezele care se află cuprinse între alte paranteze.

$$\begin{aligned} &17m + [\,6n - (3m + 4n)\,] - \{\,(8m - n) - [(5m + (3n - 6m)\,]\,\} = \\ &= 17m + [6n - 3m - 4n] - \{\,8m - n - [\,5m + 3n - 6m\,]\} = \\ &= 17m + [\,-3m + 2n\,] - \{\,8m - n - [\,-m + 3n\,]\} = \\ &= 17m - 3m + 2n - \{\,8m - n + m - 3n\,\} = \\ &= 14m + 2n - \{\,9m - 4n\,\} = 14m + 2n - 9m + 4n = 5m + 6n. \end{aligned}$$

Același rezultat obținem desfăcînd întîi parantezele exterioare.

$$\begin{aligned} &17m + [\,6n - (3m + 4n)\,] - (8m - n) + [\,5m + (3n - 6m)\,] = \\ &= 17m + 6n - (\,3m + 4n\,) - (\,8m - n\,) + 5m + (\,3n - 6m) = \\ &= 22m + 6n - 3m - 4n - 8m + n + 3n - 6m = 5m + 6n. \end{aligned}$$

Înmulțirea. Sumele algebrice se pot înmulți cu un număr, un monom sau cu o altă sumă algebrică.

Înmulțirea cu un monom. Aici se ține seama de proprietatea de distributivitate și de faptul că orice scădere a unui număr se transformă într-o adunare a opusului său.

Deoarece $a(b + c) = ab + ac$, avem $a(b - c) = a[b + (-c)] = ab + a(-c) = ab + (-ac)$, deci $a(b - c) = ab - ac$.

Trebuie ținut seama de regula semnului, care este cunoscută deja de la analizarea numerelor întregi.

Exemplu. $6x + 7(3x - 2y) - 5x(3 - 6y) - 3y(10x + 9) =$
$= 6x + (21x - 14y) - (15x - 30xy) - (30xy + 27y) =$
$= 6x + 21x - 14y - 15x + 30xy - 30xy - 27y = 12x - 41y.$

Dacă posedăm bine regula semnului putem trece de la rîndul întîi direct la rîndul trei.

Înmulțirea a două sume algebrice. Regulile pentru înmulțirea mai multor sume algebrice se stabilesc pe baza proprietății de distributivitate, ținînd seama de regula semnului (fig. 1.5.1).

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = $$
$$= ac + ad + bc + bd$$

Două sume algebrice se înmulțesc astfel: fiecare termen al unei sume se înmulțește cu fiecare termen al celeilalte sume iar produsele obținute se adună.

1.5.1. Reprezentarea grafică a înmulțirii a două binoame: $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

În următoarele exemple se calculează produsul mai multor sume algebrice, înmulțirea făcîndu-se în etape.

Exemple. 1. $(7u - 3v)(4u + 5v) =$
$= 28u^2 + 35uv - 12uv - 15v^2 =$
$= 28u^2 + 23uv - 15v^2$

2. $(2s - 3t)(5r - 7s + 2t) =$
$= 10rs - 14s^2 + 4st - 15rt + 21st - 6t^2 =$
$= 10rs - 15rt - 14s^2 + 25st - 6t^2.$

3. $(u + 7v)(3u + v)(9u - 6v)(2u - v) = (3u^2 + 22uv + 7v^2)(18u^2 - 21uv + 6v^2) =$
$= 54u^4 + 333u^3v - 318u^2v^2 - 15uv^3 + 42v^4.$

Gruparea termenilor în paranteze. Proprietatea de distributivitate este valabilă și de la stînga la dreapta și de la dreapta la stînga: $a(b + c) = ab + ac$. Este întotdeauna posibilă gruparea în paranteze a expresiilor cînd termenii sumei conțin aceiași factori.

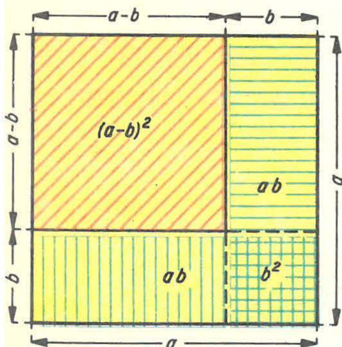
Exemple.

1. $44p - 77q + 99r = 11 \cdot 4p - 11 \cdot 7q + 11 \cdot 9r = 11(4p - 7q + 9r).$
2. $54a^3b^2c^3 + 18a^2b^3c^2 - 36a^2b^2c^2 = 18a^2b^2c^2(3ac + b - 2).$
3. $18am - 24bm + 15an - 20bn = 6m(3a - 4b) + 5n(3a - 4b) = (3a - 4b)(6m + 5n).$

Formule binomiale. Un caz special al înmulțirii sumelor algebrice îl constituie înmulțirea a doi factori identici sau aproape identici. Rezultatele obținute poartă denumirea de formule binomiale, de ex. $(a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Formule binomiale	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Folosirea formulelor binomiale ușurează mult calculele (fig. 1.5.2).



1.5.2. Reprezentarea grafică a binomului $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Exemple.

1. $(7uv - 5vw)^2 = 49u^2v^2 - 70uv^2w + 25v^2w^2.$
2. $\left(5m + \frac{1}{2}n\right)\left(5m - \frac{1}{2}n\right) = 25m^2 - \frac{1}{4}n^2.$
3. $1{,}96r^2 + 1{,}4rs + 0{,}25s^2 = (1{,}4r + 0{,}5s)^2.$
4. $16a^2 - 56ab + 49b^2 - 64c^2 = (4a - 7b)^2 - 64c^2 = (4a - 7b + 8c)(4a - 7b - 8c).$
5. $394 \cdot 406 = (400 - 6)(400 + 6) = 160\,000 - 36 = 159\,964.$
6. $204^2 = (200 + 4)^2 = 40\,000 + 1\,600 + 16 = 41\,616.$
7. $47^2 - 43^2 = (47 + 43)(47 - 43) = 90 \cdot 4 = 360.$

Puteri mai mari decît 2. Se pot scrie formule binomiale corespunzătoare unor exponenţi mai mari decît 2:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$
$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$
$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$
etc.

Dacă se înlocuieşte un termen al binomului cu negativul său, atunci toate puterile impare ale acestui termen au semnul minus. Exponentul lui a scade de la termen la termen, în timp ce exponentul lui b creşte în aşa fel încît suma exponenţilor să rămînă constantă. La dezvoltarea binomială a lui $(a + b)^n$ suma exponenţilor este n. Factorii care se află în faţa produselor se numesc *coeficienţi binomiali* C_n^k şi reprezintă

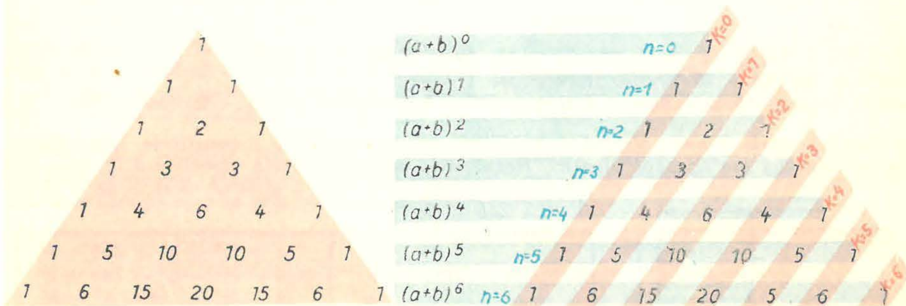
$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}.$$

Se defineşte $C_n^0 = 1 = C_n^n$ şi astfel dezvoltarea binomială a lui $(a + b)^n$, denumită şi binomul lui Newton se scrie

Binomul lui Newton	$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k =$ $= C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^n b^n$

Expresia celui de al cincilea termen al dezvoltării binomiale a lui $(a + b)^6$ va fi $C_6^4 a^{6-4}b^4 = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^2b^4 = 15a^2b^4.$

Triunghiul lui Pascal (fig. 1.5.3). Acest triunghi este un mijloc de a afla coeficienţii binomiali fără a mai calcula combinările C_n^k şi se obţine scriind coeficienţii începînd cu $(a + b)^0 = 1$ şi $(a + b)^1 = a + b$ şi bazîndu-ne pe relaţia $(a + b)^{n+1} = (a + b)^n(a + b)$.



1.5.3. Triunghiul lui Pascal

Numerele din fiecare rînd se obţin adunînd cele două numere care se află deasupra, de ex. $C_6^4 = C_5^3 + C_5^4 = 10 + 5 = 15.$

Această relaţie dintre coeficienţii binomiali se scrie în general astfel:

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1},$$

$$C_n^k + C_n^{k+1} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} + \frac{n!}{(n-k-1)!\,(k+1)!} = \frac{n!\,[(k+1)+(n-k)]}{(n-k)!\,(k+1)!} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n-k)!\,(k+1)!} = C_{n+1}^{k+1}.$$

Împărțirea. Și la împărțire va trebui să facem deosebirea între împărțirea cu un număr sau cu o sumă algebrică.

Împărțirea la un monom. Dacă în proprietatea de distributivitate $(a + b)d = ad + bd$ înlocuim pe d cu $\frac{1}{c}$ și ținem seama că linia de fracție este echivalentă cu semnul împărțirii, putem scrie

$$\boxed{(a + b) : c = a : c + b : c}$$

Sumele algebrice se divid în felul următor: fiecare termen se divide cu c, ținînd seama de regula semnului.

Exemplu. $(28m^2n - 63m^2n^2 + 84mn^2) : 7mn = 4m - 9mn + 12n.$

Împărțirea printr-o sumă algebrică. Această operație se poate efectua de multe ori cu ajutorul cunoștințelor pe care le avem în legătură cu formulele binomiale și gruparea în paranteze. Astfel descompunem deîmpărțitul în factori, după o grupare convenabilă a termenilor.

Exemplu. $(0{,}54fg - 0{,}3eh - 0{,}45fh + 0{,}36eg) : (0{,}2e + 0{,}3f) = (0{,}36eg - 0{,}3eh +$
$+ 0{,}54fg - 0{,}45fh) : (0{,}2e + 0{,}3f) = [0{,}2e(1{,}8g - 1{,}5h) + 0{,}3f(1{,}8g - 1{,}5h)] : (0{,}2e + 0{,}3f) =$
$= [(1{,}8g - 1{,}5h)(0{,}2e + 0{,}3f)] : (0{,}2e + 0{,}3f) = 1{,}8g - 1{,}5h.$

Dacă nu reușim să grupăm astfel deîmpărțitul încît să putem simplifica factorii, atunci trebuie să facem o *împărțire în etape*. Trebuie să ținem seama că deîmpărțitul și împărțitorul să fie ordonate în același mod. Exemplificăm modul de împărțire în pași, întîi pe numere 286 : 22 = = 13 și apoi facem și împărțirea la o *sumă algebrică*.

Exemple.

1.
$$\begin{array}{l}
286 : 22 = \\
= (200 + 80 + 6) : (20 + 2) = 10 + 3 = 13 \\
\underline{-(200 + 20)} \\
\quad 0 \quad 60 + 6 \\
\quad \underline{-(60 + 6)} \\
\qquad 0
\end{array}$$

2.
$$\begin{array}{l}
(13a^2x + 3x^3 - ax^2 + 10a^3) : (2a + 3x) = \\
= (10a^3 + 13a^2x - ax^2 + 3x^3) : (2a + 3x) = \\
\underline{-(10a^3 + 15a^2x)} \qquad\qquad = 5a^2 - ax + x^2. \\
\quad 0 \quad - 2a^2x - ax^2 + 3x^3 \\
\quad \underline{-(-2a^2x - 3ax^2)} \\
\qquad 0 \quad 2ax^2 + 3x^3 \\
\qquad \underline{-(2ax^2 + 3x^3)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

3.
$$\begin{array}{l}
(a^3 - b^3) : (a - b) = a^2 + ab + b^2 \\
\underline{-(a^3 - a^2b)} \\
\qquad a^2b \\
\quad \underline{-(a^2b - ab^2)} \\
\qquad\quad ab^2 - b^3 \\
\qquad \underline{-(ab^2 - b^3)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

După cum observăm din exemplul 3 suma algebrică $a^3 - b^3$ se divide cu $a - b$ fără rest. Pentru orice număr natural n, $a^n - b^n$ se divide la $a - b$ fără rest, iar pentru orice n par $a^n - b^n$ este divizibilă și cu $a + b$.

$$\boxed{(a^n - b^n) : (a - b) = \underbrace{a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}}_{n \text{ termeni}}}$$

Împărțirea cu rest. Și dacă împărțirea se face cu rest, tehnica de calcul rămîne aceeași.

Exemplu.
$$\begin{array}{l}
(x^4 - x^3 - 5x^2 - 40x + 7) : (x^2 + 3x + 9) = x^2 - 4x - 2, \text{ rest } 2x + 25. \\
\underline{-(x^4 + 3x^3 + 9x^2)} \\
\quad - 4x^3 - 14x^2 \\
\underline{-(-4x^3 - 12x^2 - 36x)} \\
\qquad - 2x^2 - 4x \\
\quad \underline{-(-2x^2 - 6x - 18)} \\
\qquad\quad 2x + 25
\end{array}$$

Ex. $47 : 5 = 9$, rest 2, se mai poate scrie $47 : 5 = 9 + \frac{2}{5} = 9\frac{2}{5}$.

Tot astfel vom putea scrie

$$(x^4 - x^3 - 5x^2 - 40x + 7) : (x^2 + 3x + 9) = x^2 - 4x - 2 + \frac{2x + 25}{x^2 + 3x + 9}$$

sau

$$\frac{x^4 - x^3 - 5x^2 - 40x + 7}{x^2 + 3x + 9} = x^2 - 4x - 2 + \frac{2x + 25}{x^2 + 3x + 9}.$$

Fracţii cu simboluri generale ale numerelor

Amplificare şi simplificare. Operaţiile de simplificare şi amplificare sînt cunoscute deja de la fracţii ordinare; le putem aplica şi la simbolurile generale ale numerelor.

Amplificare. Numărătorul şi numitorul se vor înmulţi cu acelaşi factor: $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}$; $\frac{5m}{9n} = \frac{3 \cdot 5m}{3 \cdot 9n} = \frac{15m}{27n}$ şi $\frac{7}{3a + 3b} = \frac{7a - 7b}{3a^2 - 3b^2}$ (amplificat cu $a - b$).

Simplificare. Numărătorul şi numitorul fracţiei se simplifică cu aceeaşi expresie, de ex. $\frac{6cd}{22de} = \frac{3c}{11e}$. Sumele algebrice nu se pot simplifica, trebuie să le grupăm în factori dacă este posibil şi apoi să simplificăm

$$\frac{15u^2 - 24uv}{12u^2} = \frac{3u(5u - 8v)}{12u^2} = \frac{5u - 8v}{4u}.$$

Adunarea şi scăderea. Adunarea şi scăderea fracţiilor cu acelaşi numitor în cazul simbolurilor generalizate ale numerelor sînt la fel de simple ca şi în cazul fracţiilor ordinare: $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$.

Exemplu. $\frac{7i + 5k}{3k^2} - \frac{5i - 4k}{3k^2} = \frac{7i + 5k - (5i - 4k)}{3k^2} = \frac{7i + 5k - 5i + 4k}{3k^2} = \frac{2i + 9k}{3k^2}$ (atenţie la paranteze!)

În cazul cînd avem multă siguranţă la calcule putem renunţa la calculele intermediare. Trebuie avut din nou multă grijă la semne.

Fracţii cu numitor diferit. Aceste fracţii trebuie aduse întîi la acelaşi numitor, operaţie care se face amplificînd respectivele fracţii. Şi în acest caz este preferabil de ales cel mai mic multiplu comun al celor două expresii care să aibă toţi numitorii ca factori. Cîteodată cel mai mic multiplu comun este foarte simplu de găsit, ca în exemplele de mai jos:

Exemple. 1. $\frac{2y}{3z} + \frac{5x}{6z} - \frac{y + 2x}{4z} = \frac{4 \cdot 2y + 2 \cdot 5x - 3(y + 2x)}{12z} = \frac{8y + 10x - 3y - 6x}{12z} = \frac{4x + 5y}{12z}.$

2. $4 + \frac{3a}{a - b} - \frac{2b}{b - a} = 4 + \frac{3a}{a - b} + \frac{2b}{a - b} = \frac{4(a - b) + 3a + 2b}{a - b} = \frac{7a - 2b}{a - b}.$

Dacă numărătorii sînt mai complicați, trebuie să-i descompunem pe fiecare în parte în factori primi

$$\frac{3}{12u - 18v} - \frac{2u - v}{36u^2 - 81v^2} + \frac{6u - 5v}{8u^2 + 24uv + 18v^2}$$

	Factori de amplificare
$12u - 18v = 2 \cdot 3 \cdot (2u - 3v)$	$3(2u + 3v)^2$
$36u^2 - 81v^2 = 3^2(2u - 3v)(2u + 3v)$	$2(2u + 3v)$
$8u^2 + 24uv + 18v^2 = 2 \cdot (2u + 3v)^2$	$3^2(2u - 3v)$
c.m.m.m.c. $= 2 \cdot 3^2 \cdot (2u - 3v)(2u + 3v)^2$	

Astfel vom obține următorul rezultat:

$$\frac{3^2(2u + 3v)^2 - 2(2u + 3v)(2u - v) + 3^2(2u - 3v)(6u - 5v)}{18(2u - 3v)(2u + 3v)^2}.$$

Această fracție va avea o formă mai simplă după efectuarea calculelor și eventualelor simplificări.

Înmulțirea și împărțirea. Deoarece la operațiile de gradul doi nu va mai trebui să aducem fracțiile la același numitor, efectuarea calculelor va fi mai simplă. Este de preferat să facem simplificări înainte de efectuarea operației.

Înmulțirea. La înmulțirea fracțiilor este valabilă egalitatea

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Exemple. 1. $\frac{32r^2}{35q} \cdot \frac{25p}{24r} = \frac{32r^2 \cdot 25p}{35q \cdot 24r} = \frac{4r \cdot 5p}{7q \cdot 3} = \frac{20pr}{21q}$

2. $\frac{7p}{15m - 25n} \cdot (6m - 10n) = \frac{14p}{5}$ prin simplificarea cu $3m - 5n$.

Împărțirea. Împărțirea la o fracție este echivalentă cu înmulțirea cu fracția răsturnată (inversă): $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$.

Exemple. 1. $\frac{14m}{9k^2} : \frac{7mn}{6k} = \frac{14m \cdot 6k}{9k^2 \cdot 7mn} = \frac{4}{3kn}$; 2. $\frac{18s - 18t}{u} : (12s^2 - 12t^2) = \frac{3}{2u(s + t)}$;

3. $95e^4f^3g^2 : \frac{38e^2f^3g^4}{3h} = \frac{95e^4f^3g^2 \cdot 3h}{38e^2f^3g^4} = \frac{15e^2h}{2g^2}$.

Fracții etajate sînt fracțiile care au ca numărător și numitor fracții.

Exemple. $\dfrac{\frac{1}{m^2} + \frac{2}{mn} + \frac{1}{n^2}}{\frac{3}{m} + \frac{3}{n}}$; $\dfrac{\frac{a}{7}}{3b}$; $\dfrac{x}{\frac{y}{x} + 9}$.

Exemplu. $\dfrac{\frac{1}{m^2} + \frac{2}{mn} + \frac{1}{n^2}}{\frac{3}{m} + \frac{3}{n}} = \dfrac{\frac{n^2 + 2mn + m^2}{m^2n^2}}{\frac{3n + 3m}{mn}} =$

$= \frac{(m^2 + 2mn + n^2)mn}{m^2n^2(3m + 3n)} = \frac{m + n}{3mn}$.

Se procedează în același mod ca în cazul fracțiilor numerice la transformarea lor în fracții simple.

Unicitatea descompunerii unui număr natural în factori primi. Un exemplu pentru folosirea simbolurilor generale la demonstrarea unei teorii matematice valabile pentru toate numerele dintr-o mulțime de numere îl constituie demonstrarea unicității descompunerii unui număr natural în factori primi. Ne bazăm pe algoritmul lui Euclid, care este pus în evidență cu ajutorul unor egalități. Pentru două numere 13 013 și 390, respectiv a și b obținem cel mai mare divizor comun prin împărțiri succesive a numărului mai mare la cel mic, a celui mic la restul r_1, a lui r_1 la r_2 etc. Vom continua aceste împărțiri pînă vom găsi prima împărțire exactă.

Ultimul împărţitor este c.m.m.d.c. În exemplul nostru, respectiv c.m.m.d.c. (13 013, 390) = 13 şi respectiv c.m.m.d.c. $(ab) = r_n$.

Exemplu. 13 013 = 390 · 33 + 143 $\qquad a = b \cdot q_1 + r_1$.
390 = 143 · 2 + 104 $\qquad b = r_1 \cdot q_2 + r_2$.
143 = 104 · 1 + 39 $\qquad r_1 = r_2 q_3 + r_3$.
104 = 39 · 2 + 26 $\qquad$ ....
39 = 26 · 1 + 13 $\qquad r_{n-2} = r_{n-1} \cdot q_n + r_n$.
26 = 13 · 2 + 0 $\qquad r_{n-1} = r_n \cdot q_{n+1} + 0$.

Resturile succesive r_i *sînt cel puţin cu o unitate mai mici decît împărţitorul.* După un număr finit n de împărţiri, restul r_{n+1} trebuie să fie egal cu 0. Analizînd egalităţile de jos în sus deducem că r_n este un divizor al lui r_{n-1} şi deci şi a lui r_{n-2} etc., deci şi a lui b şi a. Deci r_n este cel mai mare divizor comun al lui a şi b. Din egalitatea $r_1 = a - bq_1$ reiese că r_n divide şi pe r_1 şi pe r_2 etc. r_n *se numeşte cel mai mare divizor comun al numerelor* a *şi* b şi se scrie c.m.m.d.c. $(a, b) = r_n$. Din penultima egalitate reiese că $r_n = r_{n-2} - r_{n-1}q_n$. Dacă înlocuim pe r_{n-1} prin $r_{n-3} - r_{n-2}\, q_{n-1}$ şi pe r_{n-2} cu $r_{n-4} - r_{n-3}q_{n-2}$ etc., vom ajunge să obţinem două numere naturale x şi y pentru care este adevărată relaţia c.m.m.d.c. $(a, b) = r_n = ax - by$. Dacă a şi b sînt prime între ele, c.m.m.d.c. $(a, b) = 1 = ax - by$. Din aceste considerente putem afirma:

Dacă numerele a şi b sînt prime şi dacă b este un divizor a lui ac, atunci c este divizibil cu b.

Datorită ipotezei făcute există un număr natural k pentru care $ac = bk$ şi c.m.m.d.c. $(a, b) = 1$. Deci $1 = ax - by$ sau înmulţind cu c

$$c = acx - bcy = bkx - bcy = b(kx - cy).$$

Deci b este divizorul lui c.

Lemă. Dacă un produs ab este divizibil cu un număr prim p, atunci cel puţin unul din factori este divizibil cu p.

Acum vom putea demonstra şi *unicitatea descompunerii unui număr în factori primi.* Fie $n = p_1p_2 \dots p_r = q_1q_2 \dots q_s$ două descompuneri în factori primi ale numărului n. Deci p_i trebuie să fie divizorul unuia din factorii $q_1, \dots, q_s$, adică divizorul unuia dintre factorii primi q_i. Aceasta nu este posibil decît în cazul în care amîndoi sînt egali. Ordonînd favorabil produsele, de exemplu după mărime, putem afirma că $p_1 = q_1$. Aplicăm acelaşi raţionament în cazul produselor $p_2p_3 \dots p_r = q_2q_3 \dots q_s$ şi vom avea $p_2 = q_2$; $p_3 = q_3$ pentru $p_3 \dots p_r = q_3 \dots q_r$ şi la sfîrşit $p_r = q_s$.

Istoric. În antichitate calculele, teoremele şi formulele au fost explicate numai în cuvinte. Deoarece acest lucru nu oferea o privire de ansamblu asupra expresiilor, s-a încercat o prescurtare a lor. Grecii au început să noteze punctele, liniile şi suprafeţele cu litere. DIOFANT din Alexandria (300 e.n.) folosea şi pentru numere necunoscute litera ξ; dar trebuie să remarcăm că grecii antici notau şi numerele tot prin litere.

Litere ca simboluri generalizate ale numerelor se întîlnesc prima dată la LEONARDO din Pisa (1180 — 1228). El folosea şi linia de fracţie dar nu cunoştea însă semnele operaţiilor. Pentru prima dată a folosit consecvent operaţiile cu simboluri generale ale numerelor francezul François VIÈTE (latinizat VIETA 1540 — 1603). Şi René DESCARTES (latinizat CARTESIUS 1596 — 1650) folosea simboluri generalizate, actuala scriere a puterilor fiind prima dată folosită de el. Semnele operaţiilor plus şi minus se găsesc în cartea de matematică a lui Johannes VIDMANN; în 1631 englezul William OUGHTRED foloseşte semnul înmulţirii ×, iar Wilhelm LEIBNIZ (1646 — 1716) introduce următoarele două semne: pentru înmulţire (·) şi pentru împărţire (:). Semnul egalităţii se foloseşte mai tîrziu fiind introdus de medicul englez Robert RECORDE (1557).

2. Operaţii de grad superior

Adunarea, scăderea, înmulțirea și împărțirea sînt cele patru operații de bază. Cum o adunare repetată a aceluiași număr a dat naștere la o nouă operație, înmulțirea, tot astfel o înmulțire repetată cu același factor a dat naștere la o nouă operație, ridicarea la putere. Ca și adunarea, și înmulțirea are o inversă dar nu are o singură operație inversă ci două: logaritmarea și extragerea rădăcinii.

2.1. Operațiile ridicarea la putere și extragerea rădăcinii

Istoric. Puterile au fost folosite pentru calcule geometrice de popoarele antichității. *Babilonienii* aveau deja tabele pentru pătrate și puteri. Erau în stare să calculeze dobînzile cu ajutorul puterilor de gradul doi. În cartea lui EUCLID din Alexandria (secolul 4 î.e.n.) „Elementele" se întîlnește $(a+b)^2$ calculat, care era o mare realizare pentru acele vremuri. Pentru prima dată noțiunea de putere este întîlnită în lucrările matematicianului grec HIPPOCRATE din Chios (secolul 5 î.e.n.). Mai tîrziu întîlnim puterile și în lucrările lui PLATON (427—347, î.e.n.). Inițial se considerau ca puteri, puterile de ordinul doi. Rafaele BOMBELLI din Bologna (sec. 16) a folosit pentru prima dată cuvîntul putere (*potentia*-putere). Și el se referea tot la pătratele numerelor. Francezul René DESCARTES (1596—1650) a introdus noțiunea de putere mai mare decît 2 dar numai pentru exponenții întregi. Puterile cu exponenți fracționari se întîlnesc pentru prima dată la francezul Nicole ORESME (1323—1382).

Și radicalii au fost cunoscuți încă din antichitate. Babilonienii aveau tabele cu rădăcinile pătrate ale numerelor. Cunoșteau și numerele iraționale. Aproximau numerele iraționale cu ajutorul mediilor aritmetice și geometrice. Ca formulă se folosește $\sqrt{a^2+b} \approx a + \frac{b}{2a}$. *Grecii* antici știau că rădăcina pătrată din numerele 2, 3, ..., 17, cu excepția lui 4, 9 și 16 sînt iraționale (400 î.e.n.). Demonstrația că aceste rădăcini sînt iraționale a fost făcută de HIPPASOS din Metapont și THEODOROS din Chyrene. Și în „Elementele" lui EUCLID din Alexandria sînt amintite rădăcinile.

În evul mediu s-a dezvoltat mult noțiunea de rădăcină. Indienii (sec. 9, e.n.), rezolvau ecuații de gradul doi și cunoșteau faptul că nu se poate extrage rădăcina pătrată reală dintr-un număr negativ. Puteau calcula rădăcina pătrată și de ordinul trei pe baza unor formule de aproximație. Germanul Michael STIFEL (1487—1567) amintește de extragerea rădăcinii pînă la cea de ordinul 7. Teoria numerelor iraționale de forma $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ întîlnită în „Elementele" lui Euclid a fost dezvoltată de Michael STIFEL pînă la cele de forma $\sqrt[m]{a+\sqrt[n]{b}}$.

Christoph RUDOLF (sec. 16 e.n.) folosea următoarele simboluri: $\surd$ pentru $\sqrt[2]{}$; $\surd\surd\surd$ pentru $\sqrt[3]{}$ etc. Cu timpul s-a trecut la scrierea pe care o cunoaștem astăzi și la scrierea rădăcinilor de ordinul n ca putere cu exponent fracționar.

Puteri

Noțiunea de putere. De multe ori se întîmplă să fim nevoiți să adunăm același număr de mai multe ori: $3{,}7 + 3{,}7 + 3{,}7 + 3{,}7 + 3{,}7$. Această sumă poate fi înlocuită cu produsul $5 \cdot 3{,}7$. La fel putem întîlni produsul unui număr cu el însuși de mai multe ori. Și în acest caz există o scriere prescurtată; în geometrie întîlnim suprafața unui pătrat de latură a care se calculează prin înmulțirea lui a cu a, adică $A = a \cdot a$ sau prescurtat $A = a^2$ *(a la pătrat sau pătratul lui a)*. La fel volumul unui cub rezultă din înmulțirea $V = a \cdot a \cdot a = a^3$. În general pentru numere întregi pozitive n avem:

Putere	$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori } a,\ n>0,\ \text{întreg}} = a^n$

(se poate citi ca a n-a putere a lui a sau a la puterea n).

a se numește *baza*, iar n reprezintă *exponentul*. Puterea a n-a a lui a reprezintă produsul a n numere egale ca valoare. Ridicarea la putere reprezintă o înmulțire repetată a aceluiași număr. Ridicarea la putere reprezintă o operație de gradul 3. Deoarece $0 \cdot 0 = 0$, avem $0^n = 0$, $n > 0$.

Și la ridicarea la putere a numărului 1 avem pentru orice n întreg > 0, $1^n = 1$.

La operația de ridicare la putere nu este permisă inversarea bazei cu exponentul: $2^3 \neq 3^2$.

Exponentul puterii poate fi un număr *par* (6^4, c^{16} sau mai general a^{2n}) *sau impar* (5^7, m^{17} sau mai general a^{2n-1}).

Exemple. Puterile sînt întîlnite în multe formule și legi ale matematicii și legi ale științelor naturii și tehnicii, de ex. volumul unei sfere este $\frac{4}{3}\pi r^3$, aria unui triunghi echilateral este $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$, iar în fizică $\frac{gt^2}{2}$ reprezintă legea căderii libere.

O deosebită importanță o au *puterile lui 10.* Se folosesc pentru a avea o privire de ansamblu asupra mărimii unui număr și pentru a scrie mai ușor numere foarte mari și foarte mici. $100 = 10^2$; $1\,000 = 10^3$, *un milion* $= 10^6$, *un miliard* $= 10^9$, *un bilion* $= 10^{12}$, *un trilion* $= 10^{18}$ etc. 1 291 000 se poate scrie $1{,}291 \cdot 10^6$ sau $1\,291 \cdot 10^3$. Și la anumite unități de măsură ca de ex. m^2 (metru pătrat), cm^3 (centimetru cub), m/s^2 (metru pe secundă la pătrat) etc. se folosesc puteri pentru scrierea lor. Puteri a căror bază este cuprinsă între 0 și 1 devin mai mici la o majorare a exponentului

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3 > \left(\frac{1}{2}\right)^4 > \dots$$

spre deosebire de cele cu bază mai mare decît 1, care cresc la majorarea exponentului.

Cea mai veche carte de matematică cunoscută, care este atribuită lui AHMES (1700 î.e.n.) amintește următorul exemplu:

7 persoane posedă 7 pisici, fiecare pisică mănîncă 7 șoareci, fiecare șoarece mănîncă 7 spice de orz, din fiecare spic pot răsări 7 plante noi. Cîte plante noi ar răsări? Rezolvare: 7^5, adică 16 807 plante.

Ridicarea la putere a numerelor negative. Deoarece înmulțirea se poate efectua și cu numere negative, înseamnă că baza unei puteri poate fi și negativă.

Bazîndu-ne pe regula semnului, obținem $(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = +81$ or $(-5)^3 = (-5)(-5)(-5) = -125$.

Se observă că produsul a două numere negative va fi un număr pozitiv, a trei numere negative un număr negativ, a patru numere negative un număr pozitiv etc. Dacă numărul de semne minus este un număr par, atunci puterea va fi pozitivă, iar dacă numărul va fi impar, puterea va fi negativă. Dar exponentul ne indică numărul factorilor.

Puterea unui număr negativ va avea o valoare pozitivă în cazul unui exponent par și o valoare negativă în cazul unui exponent impar.

Pentru a exemplifica mai concludent, luăm ca bază numărul (-1); este un lucru cunoscut că valoarea puterii unui număr pozitiv este pozitivă și în cazul oricărui $n > 0$, vom avea

$$(+1)^n = +1, \quad (-1)^{2n} = +1, \quad (-1)^{2n-1} = -1$$

Înmulțirea și împărțirea puterilor. *Puteri cu același exponent.* Dacă ridicăm la putere un produs, de exemplu: $(ab)^n$ obținem n factori ab, adică în total $2n$ factori, dintre care n factori a și n factori b intercalați. Pe baza proprietății de comutativitate a înmulțirii putem schimba ordinea factorilor, obținînd n factori a și n factori b.

Exemple. 1. $(2xyz)^5 = 2^5x^5y^5z^5 = 32x^5y^5z^5$.
2. $(3a)^3 = 3a \cdot 3a \cdot 3a = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot a \cdot a \cdot a = 3^3a^3 = 27a^3$
3. $2^8 \cdot 5^7 = 2 \cdot 2^7 \cdot 5^7 = 2(2 \cdot 5)^7 = 2 \cdot 10^7 = 20\,000\,000$.

$$(ab)^n = a^nb^n$$

Ridicarea la putere a unui produs se efectuează astfel: se ridică la putere fiecare factor și puterile obținute se înmulțesc. Invers, puterile cu același exponent a două numere se înmulțesc astfel: se efectuează întîi produsul numerelor de la bază și apoi se ridică la putere produsul.

Analog ridicarea la putere a fracției $\frac{a}{b}$ se efectuează ca o înmulțire a n factori $\frac{a}{b}$, $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ va fi o fracție al cărei numărător va conține n factori a, iar numitorul n factori b.

Exemple. *1.* $\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{5^3}{6^3} = \frac{125}{216}.$

2. $\left(\frac{5x}{2a}\right)^3 = \frac{5^3x^3}{2^3a^3} = \frac{125x^3}{8a^3}.$

3. $\frac{17^4}{34^5} = \frac{17^4}{34 \cdot 34^4} = \frac{1}{34} \cdot \left(\frac{17}{34}\right)^4 = \frac{1}{34} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{34 \cdot 2^4} = \frac{1}{544}.$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

O fracție se ridică la putere în modul următor: numărătorul și numitorul fracției se ridică la putere și apoi se împart puterile. Invers, împărțirea puterilor cu același exponent se efectuează astfel: se face cîtul bazelor și fracția obținută se ridică la putere.

Puteri cu aceeași bază. Înmulțirea. Conform definiției puterii, înmulțirea a două puteri a^m și a^n care au aceeași bază reprezintă înmulțirea celor m factori a cu încă n factori a, deci în total vom avea $m + n$ factori a sau mai concis a^{m+n}.

Proprietatea I a puterilor: Înmulțirea a două puteri cu aceeași bază are ca rezultat baza ridicată la o putere egală cu suma exponenților.

Exemple. *1.* $3^4 \cdot 3^2 = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^{4+2} = 3^6$

2. $56a^5b \cdot 98a^7b^5 \cdot 14a^2b^3 = 2^3 \cdot 7a^5b \cdot 2 \cdot 7^2a^7b^5 \cdot 2 \cdot 7a^2b^3 =$

$= 2^{3+1+1}7^{1+2+1} \cdot a^{5+7+2}b^{1+5+3} = 2^5 \cdot 7^4a^{14}b^9$

Împărțirea. Deoarece fiecare împărțire poate fi exprimată printr-o fracție (deîmpărțitul fiind numărătorul fracției, iar împărțitorul numitorul fracției), obținem la împărțirea unei puteri a^m la o putere a^n o fracție cu m factori a la numărător și n factori a la numitor. Dacă n este exponentul mai mic, atunci prin simplificarea de n ori a lui a numitorul devine 1, și numărătorul va avea n factori mai puțin, deci numai $m - n$ factori, deci va avea valoarea a^{m-n}. Dacă m este exponentul mai mic, atunci prin simplificare numărătorul va deveni 1 și la numitor vor rămîne $n - m$ factori a; vom obține $\frac{1}{a^{n-m}}$.

Dacă exponenții numărătorului și numitorului sînt egali, prin simplificare vom obține și la numărător și la numitor 1, și deci, pentru orice bază, valoarea fracției va fi 1.

Exemple. *1.* $7^6 : 7^4 = \frac{7 \cdot 7 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7}}{\cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7}} = 7^{6-4} = 7^2 = 49$

2. $11^3 : 11^5 = \frac{\cancel{11} \cdot \cancel{11} \cdot \cancel{11}}{\cancel{11} \cdot \cancel{11} \cdot \cancel{11} \cdot 11 \cdot 11} = \frac{1}{11^{5-3}} = \frac{1}{11^2} = \frac{1}{121}.$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \text{ dacă } m > n;$$

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}, \text{ dacă } n > m;$$

$$\frac{a^m}{a^n} = 1, \text{ dacă } m = n.$$

Comparînd cu rezultatul obținut pentru înmulțirea a două puteri, unde se obținea drept exponent pentru produs suma exponenților, în cazul împărțirii a două puteri se obține pentru exponentul cîtului *diferența* $m - n$, *sau* $n - m$, sau chiar numărul 1. În plus, deoarece împărțirea reprezintă inversul înmulțirii trebuie ca diferența $m - n$ a exponenților numărătorului și numitorului să definească, în orice caz, un rezultat, ceea ce rezidă în proprietatea a doua a puterilor.

Proprietatea a II-a a puterilor: Împărțirea puterilor care au aceeași bază se rezumă la ridicarea bazei la o putere egală cu diferența dintre exponenții numărătorului și numitorului.

Conform principiului continuității, elaborat în 1867 de către Hermann HANKEL (1839—1873) valabilitatea regulilor de calcul se va păstra și pentru o generalizare a noțiunilor. Diferența $m - n$ a exponenților, aferentă proprietății a II-a a puterilor are sens, în primul rînd, pentru $m > n$. Conform principiului continuității această proprietate trebuie să rămînă valabilă atît pentru $m = n$, cît și pentru $m < n$. În acest fel apar însă la rezultatul împărțirii expo-

nenți nuli sau negativi, care după definiția de pînă acum, a^ν, înseamnă ν factori a „egali" nu au nici un sens. Pentru aceasta se extinde noțiunea de putere prin două noi definiții.

Dezvoltarea noțiunii de putere	$a^0 = 1$ și $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ pentru orice $a \neq 0$

Cu aceasta, fără excepție, în concordanță cu rezultatele anterioare, este valabilă relația $a^m : a^n = a^{m-n}$, deoarece:

1. pentru $m > n$, a^{m-n} conform definiției inițiale;
2. pentru $m = n$, $a^{m-n} = a^0 = 1$;
3. pentru $m < n$ conform noii definiții $a^{m-n} = a^{-(n-m)} = \frac{1}{a^{n-m}}$.

Exemple. 1. $a^3 : a^5 = a^{3-5} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$.

2. $25 \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{-n} \cdot (2n)^0 \cdot 5^{-3} \left(\frac{a}{x}\right)^{-n} = 5^{2-3} \cdot a^n \cdot a^{-n} \cdot x^{-(-n)} = 5^{-1}a^0x^n = \frac{x^n}{5}$.

3. $27a^4b^4 \cdot 56a^2b^{-3} \cdot 42a^{-2}b^3 = 3^3a^4b^4 \cdot 7 \cdot 2^3a^2b^{-3} \cdot 7 \cdot 3 \cdot 2a^{-2}b^3 =$
$= 2^4 \cdot 3^4 \cdot 7^2a^4b^4 = (2^2 \cdot 3^2 \cdot 7a^2b^2)^2$.

4. Cîtă energie în kWh ($1\,\text{kWh} = 3{,}6 \cdot 10^{13}\,\text{g cm}^2\text{s}^{-2}$) corespunde unui defect de masă de 2 mg?
$E = mc^2$ (E—energie, m—masa, c—viteza luminii $\approx 3 \cdot 10^{10}$ cm/s). Vom obține
$$\frac{2 \cdot 10^{-3}(3 \cdot 10^{10})^2}{3{,}6 \cdot 10^{13}}\,\text{kWh} = \frac{2 \cdot 9 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{20}}{3{,}6 \cdot 10^{13}}\,\text{kWh} = 5 \cdot 10^{+4}\,\text{kWh}.$$

Puterea ca exponent negativ este folosită pentru *unități de măsură*, de exemplu: $\text{ms}^{-1} = \text{m/s}$ pentru viteză; $\text{gcm}^{-3} = \text{g/cm}^3$ pentru densitate etc. Se folosesc ***puteri ale lui zece cu exponent negativ*** pentru a avea o mai bună privire de ansamblu asupra numerelor foarte mici ca de exemplu $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$C sau pentru măsurarea diametrului atomului de hidrogen $d = 1{,}06 \cdot 10^{-8}$ cm. Pentru a ne imagina mărimea diametrului unui atom facem următoarea comparație. Raportul dintre diametrul unui atom și cel al unei mingi de fotbal este același cu raportul dintre diametrul mingii de fotbal și al Pămîntului.

Ridicarea la o putere a unei puteri. Pentru a calcula puterea unei puteri $(a^m)^n$ ne bazăm pe definiția puterii și deci vom avea un produs de n factori (a^m), care fiecare la rîndul lui este constituit din m factori a. Deci în total avem de înmulțit $m \cdot n$ factori a. Același lucru se poate afirma și în cazul cînd numerele m și n sînt negative.

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	**A III-a regulă pentru ridicarea la putere: Puterile se ridică la putere în felul următor: se ridică baza la o putere egală cu produsul exponenților.**

Ordinea factorilor se poate schimba, deci putem schimba și ordinea exponenților. Putem descompune exponenții unei puteri în factori a căror ordine nu contează: $a^{m \cdot n} = (a^m)^n = (a^n)^m$.

Exemple. 1. $(2^2)^4 = (2^4)^2 = 16^2 = 256$.

2. $\frac{(-9a^2b^3)^5}{(-6a^2b)^4} = \frac{(-1)^5(3^2a^2b^3)^5}{(-1)^4(2 \cdot 3a^2b)^4} = -\frac{3^{10}a^{10}b^{15}}{2^4 3^4 a^8 b^4} = -\frac{3^6a^2b^{11}}{2^4}$.

3. Cel mai mare număr pe care-l putem scrie cu ajutorul a trei cifre este $9^{(9^9)}$ căci $9 + 9 + 9 < 9 \cdot 9 \cdot 9 < 999 < 99^9 < (9^9)^9 < 9^{99} < 9^{(9^9)} = 9^{387420489}$. Pentru a scrie acest număr ne trebuie o hîrtie lungă cît distanța Leipzig-Helsinki, sau se pot tipări 33 cărți cu cîte 800 pagini, fiecare pagină conținînd 14 000 cifre.

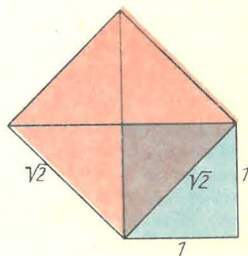
Tabele pentru pătratul și cubul numerelor

Căutarea pătratelor numerelor. În tabela pătratelor numerelor, pe coloana notată cu 0 se găsesc pătratele numerelor de la 1,0 pînă la 9,9, conținute în coloana notată cu x, prima din stînga; de ex. $5{,}9^2 = 34{,}81$.

Următoarele coloane, notate cu 1, 2, ..., 9, conțin pătratele rotunjite la patru cifre ale tuturor numerelor formate din cîte trei cifre (fig. 2.1.1) și anume, cele care au ultima cifră 1, în coloana notată cu 1, cele care au ultima cifră 2, în coloana notată cu 2 ș.a.m.d. și deci pătratul numărului 5,93, la intersecția liniei notată cu 5,9 cu coloana notată cu 3. Rezultă *valoarea rotunjită la patru cifre*, $5{,}93^2 = 35{,}16$, în timp ce valoarea exactă este 35,1649. În același mod se obțin pătratele numerelor 59,3; 593; 0,593; 0,0593 ș.a.m.d., cu aceeași precizie, poziția virgulei trebuind să fie fixată printr-un calcul suplimentar. Dacă baza, al cărei pătrat se caută, are patru cifre, atunci diferența d dintre pătratele numerelor a cîte trei cifre care o încadrează va fi împărțită în zece părți egale (tabelă de interpolare). De ex. pentru $5{,}936^2$ numerele care încadrează baza sînt 5,930 și 5,940; $5{,}930^2 = 35{,}16$; $5{,}940^2 = 35{,}28$; $d = 0{,}12$ (sau 12 unități ale poziției a patra); $0{,}12 : 10 = 0{,}012$ (sau 1,2 valoarea unei unități $d/10$); $6 \cdot 0{,}012 = 0{,}072$ $(6 \cdot 1{,}2 = 7{,}2)$ reprezentînd $d \cdot z/10 = c$ unități). *Corecția* c, care trebuie aplicată valorii unei tabele cu patru cifre rezultă prin rotunjire la 0,07 și se obține $5{,}936^2 = 35{,}16 + 0{,}07 = 35{,}23$. Avînd în vedere împărțirea în intervale egale a diferenței d, se spune că se face o *interpolare liniară*. Pentru aceasta, deoarece curba pătratelor este o parabolă, porțiunea dintre punctele corespunzătoare valorilor $5{,}93^2$ și $5{,}94^2$ este aproximată cu un segment de dreaptă. Cu cît este mai mică diferența dintre numerele succesive ale tabelei, cu atît mai mică va fi eroarea care se face prin această interpolare liniară. Cuburile numerelor se caută în același mod în tabele de valori cubice (fig. 2.1.2).

2.1.1. Tabela care conține pătratul $5{,}93^2 = 35{,}16$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	1.000	1.030	1.061	1.093	1.125	1.158	1.191	1.225	1.260	1.29[illegible]
1.1	1.331	1.368	1.405	1.443	1.482	1.521	1.561	1.602	1.643	1.68[illegible]
1.2	1.728	1.772	1.816	1.861	1.907	1.953	2.000	2.048	2.097	2.147
1.3	2.197	2.248	2.300	2.353	2.406	2.460	2.515	2.571	2.628	2.686
1.4	2.744	2.803	2.863	2.924	2.986	3.049	3.112	3.177	3.242	3.308
1.5	3.375	3.443	3.512	3.582	3.652	3.724	3.796	3.870	3.944	4.020
[illegible]	[illegible]096	4.173	4.252	4.331	4.411	4.492	4.574	[illegible]	4.742	4.827
[illegible]	[illegible]13	5.000	5.088	5.178	5.268	5.359	5.452	[illegible]	[illegible]640	5.735
[illegible]	[illegible]2	5.930	6.029	6.128	6.230	6.332	6.43[illegible]	[illegible]	[illegible]645	6.751
[illegible]	[illegible]	6.968	7.078	7.189	7.301	7.415	7.53[illegible]	[illegible]	[illegible]762	7.881



2.1.2. Tabela care conține cubul $1{,}57^3 = 3{,}870$

2.1.3. Pătrat cu aria dublă față de a unui alt pătrat dat

Rădăcini

Noțiunea de rădăcină. Încă grecii și-au pus întrebarea, cît este latura unui pătrat, de arie dată, de ex. 2m^2. Este ușor de rezolvat această problemă, atunci cînd aria x^2 are valori ca 4m^2, 9m^2, 16m^2 ș.a.m.d., adică atunci cînd este pătratul unui număr întreg; din $x_1^2 = 3^2\text{m}^2$, sau din $x_2^2 = (0{,}5)^2\text{m}^2$ rezultă imediat $x_1 = 3\text{m}$ și $x_2 = 0{,}5\text{m}$. Însă pentru cazul general, al ariei egale cu un număr pozitiv (real) oarecare, atunci nu s-a găsit nici o soluție generală; într-un *Dialog Platonian*, SOCRATES îi arată lui MENON, printr-o lungă explicație geometrică, că diagonala unui pătrat de latură egală cu 1 este la rîndul ei latura unui pătrat de arie egală cu 2 (fig. 2.1.3). Astăzi, conținutul geometric al dialogului cu Menon a fost

concentrat în expresia că latura x_3 a unui pătrat de suprafață egală cu 2 este $x_3 = \sqrt{2}$. În aceasta simbolul $\sqrt{2}$ (se *citește rădăcina de ordinul doi, sau rădăcina pătrată din* 2), care determină pe x_3 trebuie să îndeplinească condiția ca, înmulțit cu el însuși, sau, ceea ce este totuna, ridicat la pătrat să dea valoarea 2. În unele cazuri, găsirea lui x_3 prin condiția de mai sus este ușor de rezolvat; de ex., $x_4 = \sqrt{9} = 3$, $x_5 = \sqrt{0{,}0144} = 0{,}12$, ceea ce se verifică imediat, dacă se face proba: $x_4^2 = 3^2 = 9$, respectiv $x_5^2 = (0{,}12)^2 = 0{,}0144$.

În general, prin rădăcina pătrată $x = \sqrt{a}$, din numărul real nenegativ a, se înțelege numărul nenegativ x, care înmulțit cu el însuși dă o valoare egală cu a: $x^2 = a$.

În mod analog, *problema delică* a matematicienilor greci antici a condus către rădăcina *de ordinul trei*, sau *cubică*; ei căutau latura unui cub de volum egal cu dublul volumului cubului cu latura 1. Astăzi această problemă se reduce la forma: latura k a unui cub de volum egal cu 2 trebuie să fie numărul $k = \sqrt[3]{2}$ (citește *rădăcina de ordinul trei*, sau *cubică din* 2), a cărui putere a treia trebuie să fie 2; $k^3 = 2$. Această condiție este iarăși, în unele cazuri, ușor de rezolvat; de ex. pentru $k_1 = \sqrt[3]{8} = 2$ sau $k_2 = \sqrt[3]{0{,}125} = 0{,}5$, deoarece $k_1^3 = 2^3 = 8$, respectiv $k_2^3 = 0{,}5^3 = 0{,}125$. Așa cum expresiile $x = \sqrt{a}$ și $x^2 = a$, $x \geqslant 0$, respectiv $k = \sqrt[3]{a}$ și $k^3 = a$ sînt echivalente, trebuie ca și pentru $b \geqslant 0$ să existe $a = \sqrt[n]{b}$ și $a^n = b$, $a \geqslant 0$.

Definiție. Rădăcina de ordinul n a lui b, b fiind un număr real nenegativ, este numărul a real nenegativ, a cărui a n-a putere are valoarea b; $a^n = b$.

Extragerea rădăcinii (latinește *radix*, rădăcină) este operația inversă ridicării la putere. Numărul b se numește *cantitatea de sub radical* și corespunde puterii numărului, a este rădăcina și corespunde bazei puterii, iar exponentul va fi numit indicele radicalului. Pentru fiecare număr pozitiv întreg n, $1^n = 1$, deci $\sqrt[n]{1} = 1$. Tot astfel din inversarea lui $0^n = 0$ obținem $\sqrt[n]{0} = 0$. Definim $\sqrt[1]{a} = a$. Soluțiile ecuației $x^2 = 2$ sînt $x_1 = +\sqrt{2}$ și $x_2 = -\sqrt{2}$ căci $x_1^2 = (+\sqrt{2})^2 = 2$ și $x_2^2 = (-\sqrt{2})^2 = (-1)^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = +2$. Rădăcina $\sqrt[n]{b} = x$ este unică, soluțiile ecuației $x^n = b$ pentru n par trebuie deosebite prin semnul dinaintea radicalului.

Ecuația $x^3 = -8$ are soluția $x = -2$. Datorită definiției radicalului ca fiind un număr pozitiv vom folosi următoarea scriere: $x = -\sqrt[3]{-(-8)} = -\sqrt[3]{8}$. Pentru n impar și $b < 0$, soluția ecuației $x^n = b$ este $x = -\sqrt[n]{-b}$. De multe ori se scrie $x = \sqrt[3]{-8}$ ca soluție a ecuației $x^3 = -8$, bazîndu-ne pe faptul că pentru n impar, radicalul dintr-un număr negativ este egal cu negativul rădăcinii extrase din valoarea absolută a numărului.

Concluzia trasă, în glumă, din următoarea egalitate este falsă: $(+2)^2 = (-2)^2$. Extrăgînd rădăcina, obținem $+2 = -2$ — fals, căci $\sqrt{(+2)^2} = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$; numai din rezolvarea ecuației $x^2 = 4$ obținem $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.

Extragerea rădăcinii și *ridicarea la putere* sînt operații inverse, numai în mulțimea numerelor pozitive.

Calcularea rădăcinilor. În aplicațiile practice se întîlnesc numai rădăcini de ordinul 2 sau 3 de aceea vom trata metodele de calcul cu mare precizie.

Calculul numeric. În lucrările lui Michael STIFEL (sec. XVI) întîlnim radicali de ordinul șapte. Astăzi astfel de radicali se calculează cu ajutorul logaritmilor. Vom calcula radicalii de ordinul doi. Un număr compus din două cifre ridicat la pătrat, de exemplu 21 sau 85, va fi un număr de trei sau patru cifre. În general *pătratul unui număr de n cifre va fi un număr format din 2n — 1 sau 2n cifre.* Deoarece extragerea rădăcinii este operația inversă ridicării la putere vom putea stabili următoarele: *rădăcina pătrată a unui număr format din 2n și 2n — 1 cifre va fi un număr format din n cifre.*

Exemplu. $\sqrt{441} = 21$ și $\sqrt{7\,225} = 85$. Astfel se va putea stabili numărul de cifre pe care-l va avea rădăcina pătrată dintr-un număr. Împărțim cifrele numărului în *grupe de două cifre* pornind de la virgulă și spre stînga și spre dreapta. Numărul de cifre al rădăcinii dinaintea virgulei va fi egal cu numărul de grupe formate în cantitatea de sub radical înaintea virgulei iar numărul de cifre ale rădăcinii după virgulă va fi egal cu numărul de grupe formate în cantitatea de sub radical după virgulă, de ex. $\sqrt{44|44|48{,}88|89} = 666{,}67$, deci avem trei cifre înaintea virgulei și două după. $\sqrt{441}$ va fi un număr format din două cifre, adică de

forma $a+b$, unde a este un multiplu de 10. Deci $441 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + (2a+b)b$. Această egalitate se folosește la extragerea rădăcinii pătrate făcînd întîi scăderea lui a^2 și apoi a lui $(2a+b)b$.

$$\begin{array}{rrl}
 & \sqrt{441} & = 20 + 1 = 21. \\
-a^2 & -400 & \quad a \quad\; b \quad a+b \\
 & 41 & \\
-(2a+b)b & -41 & \\
 & 0 &
\end{array}$$

Analog se calculează o rădăcină pătrată care va avea trei cifre:

$$\begin{array}{lrl}
 & \sqrt{57\,45{,}64} & = 70 + 5 + 0{,}8 = 75{,}8 \\
-\;a^2 & -49\,00 & \quad a \quad\; b \quad\; c \quad a+b+c \\
 & 8\,45 & \\
-(2a+b)b & -7\,25 & \\
 & 1\,20{,}64 & \\
-(2a+2b+c)c & -1\,20{,}64 & \\
 & 0 &
\end{array}$$

Formule de aproximare. În acest capitol vor fi prezentate numai formule clasice de aproximare, cunoscute încă din evul mediu. Alte metode de aproximare vor fi prezentate în capitolul despre serii.

Cînd a este foarte mare față de b, atunci în expresiile $\left(a + \frac{b}{2a}\right)^2 = a^2 + b + \frac{b^2}{4a^2}$ și $\left(a + \frac{b}{3a^2}\right)^3 = a^3 + b + \frac{b^2}{3a^3} + \frac{b^3}{27a^6}$, membrii care conțin la numitor puteri ale lui a sînt neglijabil de mici; se obțin formulele de aproximare pentru rădăcina pătratică și cea cubică:

$$\left(a + \frac{b}{2a}\right)^2 \approx a^2 + b;\quad \sqrt{a^2+b} \approx a + \frac{b}{2a};\quad \left(a + \frac{b}{3a^2}\right)^3 \approx a^3 + b;\quad \sqrt[3]{a^3+b} \approx a + \frac{b}{3a^2}.$$

Exemple. 1. $\sqrt{35} = \sqrt{36-1} \approx 6 - \frac{1}{12} = 5{,}917$ față de valoarea exactă $5{,}91608\ldots$

2. $\sqrt[3]{730\,000} = \sqrt[3]{729\,000 + 1\,000} \approx 90 + \frac{1\,000}{3\cdot 90^2} = 90{,}041$ față de valoarea exactă $90{,}0411\ldots$

Extragerea rădăcinii prin alte mijloace ajutătoare. Extragerea rădăcinii se poate realiza, de multe ori, cu ajutorul riglei de calcul sau al tabelelor de logaritmi, cu o cantitate de calcul neglijabilă. Extragerea rădăcinii cu ajutorul logaritmilor prezintă avantajul că permite extragerea de rădăcini de indici oarecare, fără nici o dificultate.

Pentru extragerea rădăcinii printr-o metodă grafică se folosește reprezentarea grafică a funcției $y^n = x$, din care rezultă pentru valori date ale ordonatei x abscisa $y = \sqrt[n]{x}$.

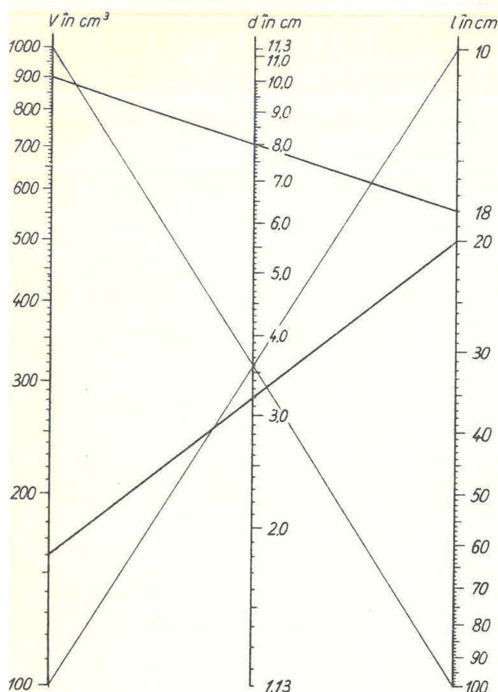
În afară de acestea, adesea se utilizează *nomograme*. Astfel, dependența dintre înălțimea l, diametrul d și volumul V ale unui cilindru pot fi redate printr-o nomogramă (fig. 2.1.4).

Exemplu. Cît este diametrul unui cilindru, de lungime 20 cm și volum 160 dm^3?

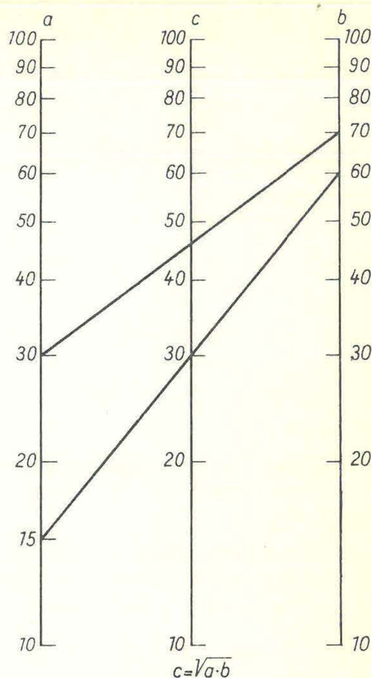
Se unesc printr-o dreaptă punctul de valoare 160, de pe scala volumelor, cu punctul de valoare 20, de pe scala lungimilor. Această dreaptă dă, la intersecția cu scala diametrelor, valoarea diametrului căutat, 3,2 cm. În mod analog: un cilindru cu un volum de 900 cm^3 și o lungime de 18 cm are un diametru de 8,0 cm.

La fel *media geometrică* poate fi reprezentată grafic și servește astfel ca ***nomogramă*** pentru extragerea rădăcinii pătrate dintr-un produs (fig. 2.1.5).

Extragerea rădăcinii cu ajutorul tabelelor. Tabelele de pătrate ale numerelor conțin valorile rotunjite pînă la patru cifre—ale acestora. Valoarea rădăcinii unui număr se obține din cifrele coloanei de capăt, urmate de cea a liniei de capăt, corespunzătoare valorii numărului. De exemplu, se găsește că $\sqrt{76{,}39} = 8{,}74$; $\sqrt{0{,}1136} = 0{,}337$; $\sqrt{2\,777} = 52{,}7$ sau $\sqrt{2{,}402} = 1{,}55$ (fig. 2.1.6).



2.1.4. Nomograma pentru calcularea diametrului $d = \sqrt{\frac{4V}{\pi l}}$ al unui corp cilindric



2.1.5. Rădăcina pătrată a unui produs $c = \sqrt{ab}$

2.1.6. Calcularea rădăcinii pătrate $\sqrt{2,402} = 1,55$

Dacă numărul dat este situat între două valori de pătrate din tabelă, atunci cu ajutorul tabelei de interpolare se obține corecția c.

În tabelele de rădăcini pătrate citirea și interpolarea se fac la fel ca în tabelele de pătrate. De remarcat însă că la aceste tabele, coloana și linia de capăt conțin numărul, în restul tabelei găsindu-se valorile rădăcinii pătrate. *Exemplu.* $\sqrt{55,3} = 7,437$

Tot ce s-a spus pentru rădăcinile pătrate rămîne valabil — în mod analog — pentru rădăcinile cubice.

În afara unor excepții, în care numărul reprezintă un pătrat, respectiv puterea a n-a a unui număr rațional, toate rădăcinile pătrate, respectiv rădăcinile de ordin n sînt numere iraționale (v. cap. 3).

Rădăcina ca putere cu exponent fracționar

Extragerea rădăcinii este operația inversă ridicării la putere. O putere se ridică la o putere pozitivă n înmulțind exponentul puterii cu numărul n. Deoarece împărțirea este inversa operației de înmulțire putem enunța următoarele:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Rădăcina de ordinul n dintr-o putere se extrage astfel: se împarte exponentul puterii la n.

Astfel am definit un nou număr $a^{\frac{m}{n}}$ pentru care $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ dacă a este un număr real pozitiv și m și n sînt două numere întregi pozitive. Deci $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^m$. Această exprimare este *unică:* deoarece $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ și $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n']{a^{m'}}$. Regulile pentru puteri care au exponenți întregi sînt valabile și pentru cele cu exponenți fracționari. Deci se pot formula următoarele egalități:

1. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$, deoarece $a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}$.

2. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$, deoarece $\dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$.

3. $\dfrac{1}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{1}{b}}$, deoarece $b^{-\frac{1}{n}} = (b^{-1})^{\frac{1}{n}}$.

4. $\sqrt[rq]{a^{sq}} = \sqrt[r]{a^s}$, deoarece $a^{\frac{s\cdot q}{r\cdot q}} = a^{\frac{s}{r}}$.

Exemple: *1.* $\sqrt[3]{24x^4} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3 \cdot x^3 \cdot x} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{3x} = 2x\sqrt[3]{3x}$.

2. $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{27}} = \sqrt{\dfrac{3\cdot4}{3\cdot9}} = \sqrt{\dfrac{4}{9}} = \dfrac{2}{3}$. *3.* $\sqrt[3]{\dfrac{1}{64}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{64}} = \dfrac{1}{4}$. *4.* $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} = (x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}$.

5. $\sqrt[6]{9} = {}^{2\cdot}\sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{3}$. 6. $\sqrt[7]{a^5} = a^{\frac{5}{7}}$; *7.* $\dfrac{1}{\sqrt[7]{(14a)^3}} = (14a)^{-\frac{3}{7}}$.

8. $\sqrt[3]{18a^2b} \cdot \sqrt[3]{12ab^2} \cdot \sqrt[3]{16ab} = \sqrt[3]{2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 2^4 \cdot a^4b^4} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 2 \cdot 3^3 \cdot a^4b^4} = 2^2 \cdot 3^1 \cdot a^1b^1 \cdot \sqrt[3]{2ab} =$
$= 12ab\sqrt[3]{2ab}$. 9. $8\sqrt{\dfrac{13}{128}} = 2^3 \cdot \sqrt{\dfrac{13}{2^7}} = \dfrac{2^3}{2^3}\sqrt{\dfrac{13}{2}} = \sqrt{\dfrac{13}{2}}$.

10. $\sqrt{\left(2 + \dfrac{14}{25}\right)\dfrac{a^4}{p^2q^2}} = \sqrt{\dfrac{64 \cdot a^4}{25p^2q^2}} = \dfrac{8a^2}{5pq}$.

11. $12bc\sqrt{\dfrac{5a}{24b^2c}} = \sqrt{\dfrac{12^2b^2c^2 5a}{24b^2c}} = \sqrt{\dfrac{12c \cdot 5a}{2}} = \sqrt{30ac}$.

12. $(\sqrt[4]{16})^3 = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{(2^4)^3} = \sqrt[4]{2^{12}} = 2^{\frac{12}{4}} = 2^3 = 8.$

13. $(\sqrt[6]{n^2v})^9 = \left[(n^2v)^{\frac{1}{6}}\right]^9 = n^{\frac{2\cdot 9}{6}} v^{\frac{9}{6}} = n^3 \cdot v^{\frac{3}{2}} = n^3 \cdot v^{1+\frac{1}{2}} = n^2 v\sqrt{v}.$

14. $\sqrt[n]{a + \frac{a}{a^n - 1}} = \sqrt[n]{\frac{(a^{n+1} - a) + a}{a^n - 1}} = \sqrt[n]{\frac{a^n \cdot a}{a^n - 1}} = a\sqrt[n]{\frac{a}{a^n - 1}}$

pentru $a = 3$, $n = 2$, vom obține $\sqrt{3 + \frac{3}{8}} = 3\sqrt{\frac{3}{8}}$;

pentru $a = 2$, $n = 5$, vom obține $\sqrt[5]{2 + \frac{2}{31}} = 2\sqrt[5]{\frac{2}{31}}$.

15. $\sqrt[5]{\sqrt{32}} = \left[(2^5)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{5}{10}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$

16. $\sqrt[3]{a^5\sqrt[4]{a^5}} = \left[a^5(a^5)^{\frac{1}{4}}\right]^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{3}} \cdot a^{\frac{5}{12}} = a^{\frac{25}{12}} = a^{2+\frac{1}{12}} = a^2\sqrt[12]{a}.$

17. $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}} = \left[3\left(3 \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot \left(3 \cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{8}} = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}} =$

$= 3^{\frac{7}{8}} = \sqrt[8]{3^7}.$

18. $\sqrt[3]{a^2} : \sqrt{a})^3 = a^{\frac{2}{3}} : a^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{2}{3}-\frac{3}{2}} = a^{-\frac{5}{6}} = \frac{1}{\sqrt[6]{a^5}}.$

19. $\sqrt[5]{a^{2x}} \cdot \sqrt[6]{a^{5x}} = a^{\frac{2}{5}x} \cdot a^{\frac{5}{6}x} = a^{\frac{2}{5}x + \frac{5}{6}x} = a^{\frac{37}{30}x} = a^{\left(1 + \frac{7}{30}\right)x} = a^x \cdot \sqrt[30]{a^{7x}}.$

20. a) $\sqrt[2]{\sqrt[2]{\sqrt[5]{10}}} = \sqrt[10]{\sqrt[10]{10}} = \sqrt[10^2]{10} = \sqrt[100]{10} = 10^{0{,}01}.$

b) $\sqrt[10^4]{10} = 10^{0{,}0001}.$

Raționalizarea numitorului. Rădăcinile unui număr sînt in general numere iraționale care sînt exprimate prin fracții zecimale neperiodice infinite. De aceea se evită împărțirea in radicali și se raționalizează numitorul. Există întotdeauna un număr cu care putem să înmulțim numitorul și numărătorul ca să obținem un numitor rațional.

Dacă numitorul este $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, atunci prin înmulțirea cu $a^m : a^{\frac{m}{n}} = a^{\left(1-\frac{1}{n}\right)m} = a^{\frac{n-1}{n}m}$ acesta ia valoarea a^m. Fracția $\frac{1}{\sqrt[3]{p}}$ se raționalizează cu $p^{\frac{3-1}{3}} = p^{\frac{2}{3}}$.

Exemple. 1. $\frac{1}{\sqrt[3]{p}} = \frac{1 \cdot p^{\frac{2}{3}}}{p^{\frac{1}{3}} \cdot p^{\frac{2}{3}}} = \frac{p^{\frac{2}{3}}}{p} = \frac{1}{p}\sqrt[3]{p^2}.$ 2. $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$

Dacă numitorul are forma $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, fracția o vom raționaliza cu $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ deoarece $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = [(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2] = a - b.$

Exemplu. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{3 + \sqrt{6}}{3 - 2} = 3 + \sqrt{6}.$

Puteri cu exponenți iraționali. Am văzut că exponenții pot fi și negativi și numere raționale. Vom analiza acum cazul cînd exponenții sînt numere iraționale.

Fie α un astfel de număr irațional, care se poate scrie ca o *fracție zecimală neperiodică*, deci $\alpha = a{,}a_1a_2a_3 \ldots a_i \ldots$,

$$\alpha = a + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_i}{10^i} + \ldots,$$

unde a_i reprezintă întregii, a_1 zecimile, a_2 sutimile etc., a_i poate lua oricare din valorile 0, 1, 2, ..., 9. Pentru $\alpha = \sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$, deci $a = 1$, $a_1 = 4$, $a_2 = 1$, $a_3 = 4$, $a_4 = 2$, $a_5 = 1$, $a_6 = 3$, $a_7 = 5, \ldots$

Dacă această sumă o scriem numai pînă la $\frac{a_i}{10^i}$ obținem o *valoare aproximatvă* α_i care diferă cu mai puțin de $\frac{1}{10^i}$ de valoarea reală. Oricare ar fi $\varepsilon > 0$, ε fiind o valoare apropiată de zero, va exista întotdeauna un indice I astfel încît $|\alpha_I - \alpha| < \varepsilon$, α_I fiind un număr rațional. Pentru o bază pozitivă b, b^{α_I} va fi o putere cu exponent rațional a cărei valoare diferă printr-un factor de b^{α}, factor mai apropiat de 1 decît b^{ε}.

2.2. Operații cu logaritmi

Acum 150 de ani filozofii vedeau în tabelele de logaritmi întruchiparea însăși a matematicii. „Ceea ce sînt logaritmii pentru matematică este matematica pentru alte științe" (NOVALIS). Astăzi, tabelele de logaritmi sînt — în acest sens — cu mult mai puțin importante. În locul lor se întîlnesc riglele de calcul și mașinile de calculat.

Regulile operațiilor cu logaritmi și sisteme de logaritmi

Înmulțirea cu ajutorul puterilor. Fie exponentul l, puterea p și valoarea ei n, pentru baza 2. În acest caz înmulțirea și împărțirea valorilor puterilor n se poate realiza ușor cu ajutorul exponenților l; de ex., $4 \cdot 8 = 2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32$ sau $16 : 64 = 2^4 : 2^6 = 2^{-2} = \frac{1}{4}$.
Cu folosirea tabelei, după regulile puterilor este suficient să se calculeze numai $2 + 3 = 5$, respectiv $4 - 6 = -2$. În locul ridicării la putere este suficient să se înmulțească: $4^3 = (2^2)^3 = 2^6 = 64$; corespunzător, extragerea rădăcinii poate fi înlocuită prin împărțire, de ex. $\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = 2^{-\frac{4}{4}} = \frac{1}{2}$.
Toate operațiile pot fi aduse la un rang mai mic, atunci cînd în locul *valorilor puterilor* se calculează cu *exponenții corespunzători* lor. Un dezavantaj al metodei este acela că pentru numerele cuprinse între valorile puterilor lui 2 nu există exponenți cunoscuți. Dacă se calculează însă $\sqrt[100]{2} = 1{,}006956 = 2^{0{,}01}$, atunci puterile acestui număr dau valorile puterilor pentru toți exponenții cuprinși între 0,01 și 1, de ex. $2^{0{,}02} = (2^{0{,}01})^2 = 1{,}01396$ sau $2^{0{,}1} = (2^{0{,}01})^{10} = 1{,}071773$. De asemenea se pot găsi valori intermediare cuprinse între valorile puterilor, de ex. $2^{1{,}01} = 2^1 \cdot 2^{0{,}01} = 2{,}013912$ sau $2^{3{,}1} = 2^{3+0{,}1} = 8 \cdot 1{,}071773 = 8{,}574184$. Toate aceste valori ale puterilor rezultă din calcul ca numere iraționale; este de dorit însă să se găsească exponenți pentru care valoarea puterii este un număr dat, oarecare, de ex. 3, sau 5, sau 7,26.

Pentru o bază b, mai mare decît 1 și pentru un număr n pozitiv oarecare, se poate arăta ușor că un asemenea *exponent l al puterii $b^l = n$ trebuie să existe*. Pentru exponenți ν, pozitivi și suficient de mari sînt puterile numărului $b > 1$, mai mari decît orice număr real $n > 1$, respectiv pentru exponenți ν, negativi, mai mici decît orice număr real $0 \leqslant n < 1$. Există deci un exponent a cu proprietatea că

l	p	n
-4	$\frac{1}{2^4}$	$\frac{1}{16}$
-3	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2}$
0	$\left(\frac{1}{2}\right)^0$	1
1	2^1	2
2	2^2	4
3	2^3	8
4	2^4	16
5	2^5	32
6	2^6	64

$b^a \leqslant n < b^{a+1}$. Împărțind intervalul dintre a și $a+1$ în zece părți de mărime $\frac{1}{10}$ se poate găsi un număr a_1, cuprins între 0 și 9, astfel ca $b^{a+\frac{a_1}{10}} \leqslant n < b^{a+\frac{a_1}{10}+\frac{1}{10}}$. Continuînd procedeul și împărțind din nou în 10 părți intervalul dintre ultimii doi exponenți, se obține o *fracție zecimală* $\alpha = a,a_1a_2 \ldots a_i \ldots = a + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \ldots + \frac{a_i}{10^i} + \ldots$, care este fie *rațională*, atunci cînd pentru $\alpha_i = a,a_1a_2 \ldots a_i$ există $b^{\alpha_i} = n$, fie se apropie oricît de mult de numărul *irațional* α, astfel ca $b^\alpha = n$. Exponenții $l = \alpha$ se pot calcula printr-o dezvoltare în serie. Acest exponent l se numește logaritm în baza b al numărului n; prescurtat se spune: l este logaritmul în bază b al lui n și se scrie $l = \log_b n$. Baza b trebuie să fie mai mare decît 1, iar n trebuie să fie pozitiv. Toți logaritmii într-o bază dată b_1 se desemnează ca un *sistem de logaritmi în bază* b_1.

Pînă aici au fost tratați numai logaritmii în bază 2. Ei vor fi notați cu lb (binar). În noul mod de notare, $\text{lb}\, n = \log_2 n$.

$\text{lb}\, 2 = 1$, deci $2^1 = 2$; $\text{lb}\, 4 = 2$, deci $2^2 = 4$; $\text{lb}\, 32 = 5$, deci $2^5 = 32$; $\text{lb}\, \frac{1}{16} = -4$, deci $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$; $\text{lb}\, 1{,}006956 = 0{,}01$, deci $2^{0,01} = 1{,}006956$; $\text{lb}\, 1{,}071773 = 0{,}1$, deci $2^{0,1} = 1{,}071773$;

$\text{lb}\, 8{,}574184 = 3{,}1$, deci $2^{3,1} = 8{,}574184$;

$\text{lb}\,(4 \cdot 8) = \text{lb}\, 4 + \text{lb}\, 8 = 2 + 3 = 5 = \text{lb}\, 32$;

$\text{lb}\,(16 : 64) = \text{lb}\, 16 - \text{lb}\, 64 = 4 - 6 = -2 = \text{lb}\, \frac{1}{4}$;

$\text{lb}\, 4^3 = 3\, \text{lb}\, 4 = 3 \cdot 2 = 6 = \text{lb}\, 64$;

$\text{lb} \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}\, \text{lb}\, \frac{1}{16} = \frac{1}{4}(-4) = -1 = \text{lb}\, \frac{1}{2}$.

Expresiile date sînt valabile pentru orice bază b, ele rezultînd numai din proprietățile valabile pentru exponenți. Din seria de puteri ..., b^{-3}, b^{-2}, b^{-1}, 1, b^1, b^2, b^3, ... rezultă în primul rînd

$\log_b b^2 = 2$, $\log_b b^3 = 3, \ldots, \log_b b^\nu = \nu$,

$\log_b b = 1$, $\log_b 1 = 0$, $\log_b \frac{1}{b} = -1, \ldots, \log_b \frac{1}{b^\nu} = -\nu$,

adică logaritmul lui 1 este zero, iar pentru valorile uzuale se utilizează tabela alăturată. Regulile de calcul cu logaritmi sînt:

$$\log_b (n_1 \cdot n_2) = \log_b n_1 + \log_b n_2$$

1. Logaritmul unui produs este egal cu suma logaritmilor factorilor.

Bază	Numere cuprinse între	Logaritmi cuprinși între
$b > 1$	$1 \ldots b$	$0 \ldots 1$
	$b \ldots b^2$	$1 \ldots 2$
	$b^\nu \ldots b^{\nu+1}$	$\nu \ldots \nu+1$
	$1 \ldots \frac{1}{b}$	$0 \ldots -1$
	$\frac{1}{b^{\nu-1}} \ldots \frac{1}{b^\nu}$	$-\nu+1 \ldots -\nu$

Din

$l = \log_b (n_1 \cdot n_2)$; $l_1 = \log_b n_1$; $l_2 = \log_b n_2$

rezultă

$b^l = n_1 \cdot n_2$, $b^{l_1} = n_1$, $b^{l_2} = n_2$ sau $b^l = n_1 \cdot n_2 = b^{l_1 + l_2}$, adică $l = l_1 + l_2$

$$\log_b \frac{n_1}{n_2} = \log_b n_1 - \log_b n_2$$

2. Logaritmul unui raport este egal cu diferența dintre logaritmul numărătorului și cel al numitorului.

Din $l = \log_b \frac{n_1}{n_2}$; $l_1 = \log_b n_1$; $l_2 = \log_b n_2$ rezultă

$$b^l = \frac{n_1}{n_2};\quad b^{l_1} = n_1;\quad b^{l_2} = n_2$$

sau

$$b^l = n_1 : n_2 = b^{l_1 - l_2},\ \text{adică}\ l = l_1 - l_2.$$

Exemplu. $\log_3 \frac{1}{17} = \log_3 1 - \log_3 17 = -\log_3 17.$

$$\log_b (p^r) = r \log_b p$$

3. Logaritmul unei puteri este egal cu produsul dintre exponentul puterii și logaritmul bazei puterii.

Din $l = \log_b p^r$; $l_1 = \log_b p$ rezultă

$$b^l = p^r;\quad b^{l_1} = p\quad \text{sau}\quad b^l = p^r = (b^{l_1})^r = b^{rl_1}\quad \text{adică}\quad l = r \cdot l_1.$$

Exemple. 1. $\log_b \frac{5^3 x^2}{6^4} = 3 \log_b 5 + 2 \log_b x - 4 \log_b 6.$ *2.* $\log_b b^r = r \log_b b = r \cdot 1 = r,$

$$\log_b \sqrt[r]{w} = \frac{1}{r} \log_b w.$$

4. Logaritmul unei rădăcini este egal cu logaritmul cantității de sub radical, împărțit prin exponentul radicalului.

Din $l = \log_b \sqrt[r]{w}$; $l_1 = \log_b w$ rezultă $b^l = \sqrt[r]{w}$; $b^{l_1} = w$ sau $b^l = w^{\frac{1}{r}} = b^{\frac{1}{r} \cdot l_1}$, adică $l = \frac{1}{r} \cdot l_1$.

Exemplu. $\log_b \sqrt[3]{\frac{q^5}{s^2}} = \frac{1}{3} (\log_b q^5 - \log_b s^2) = \frac{5}{3} \log_b q - \frac{2}{3} \log_b s.$

Sisteme de logaritmi. Dintre toate sistemele de logaritmi posibile (baza $b > 1$), în principal se utilizează doar două: logaritmii naturali și logaritmii zecimali. *Logaritmii naturali* se întrebuințează în mod aproape exclusiv în matematicile superioare. Baza lor, numărul e este definită prin $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sau prin seria infinită

$$e = 2{,}71828\,18\ldots$$

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots,$$

Puterea lui e, cu diferiți exponenți reprezintă funcția exponențială, adecvată pentru descrierea tuturor acelor fenomene, a căror creștere sau descreștere este astfel încît derivata este proporțională cu valoarea funcției, de exemplu dezintegrarea radioactivă, sau dezvoltarea

Numărul	Logaritmul
...	...
$\frac{1}{10^3} = 10^{-3}$	-3
$\frac{1}{100} = 10^{-2}$	-2
$\frac{1}{10} = 10^{-1}$	-1
1	0
10	1
100	2
1000	3
...	...

unei păduri, or a populației globului. De asemenea, matematicienii din secolele 16 și 17 au calculat mai întîi logaritmii acestui sistem. Ei vor fi notați cu ln, în loc de $\log_e$; $\log_e x \equiv \ln x$ (logaritmul natural al lui x). Valorile logaritmilor naturali se obțin din seria mai sus menționată. *Logaritmii zecimali* sau obișnuiți au baza 10 și sînt cunoscuți ca *logaritmii lui Briggs*, de la numele matematicianului englez Henry Briggs (1561 – 1630). Ei se folosesc aproape exclusiv pentru aplicațiile practice și se notează cu lg, în loc de $\log_{10}$; $\log_{10} x \equiv \lg x$. Avantajul pe care-l oferă *logaritmii zecimali* constă în valorile întregi pe care le iau, deoarece baza lor este aceeași cu cea a sistemului de numerație (v. tabela alăturată). Aceasta înseamnă de asemenea că este necesar să se calculeze logaritmii zecimali numai pentru numerele cuprinse între 0 și 10; de ex., dacă s-a găsit că lg 2,37 = 0,3747, atunci logaritmii zecimali ai numerelor 23,7; 2 370; 0,237; 0,00237 etc., adică ai oricăror numere exprimabile ca produsul dintre 2,37 și o putere oarecare a lui 10 se pot calcula foarte ușor (v. tabela).

Din lg 2,37 = 0,3747 rezultă logaritmii:

Numărul	Procedeul de calcul	Logaritmul	Caracteristica logaritmului
$23{,}7 = 10 \cdot 2{,}37$	$\lg 10 + \lg 2{,}37$	$\lg 23{,}7 = 1{,}3747$	1
$2370 = 10^3 \cdot 2{,}37$	$\lg 10^3 + \lg 2{,}37$	$\lg 2370 = 3{,}3747$	3
$0{,}237 = \frac{1}{10} \cdot 2{,}37$	$\lg \frac{1}{10} + \lg 2{,}37$	$\lg 0{,}237 = 0{,}3747 - 1$	-1
$0{,}00237 = \frac{1}{10^3} \cdot 2{,}37$	$\lg \frac{1}{10^3} + \lg 2{,}37$	$\lg 0{,}00237 = 0{,}3747 - 3$	-3

Cifrele 3 747, care se calculează efectiv pentru stabilirea logaritmului se denumesc ***mantisa*** sa, iar numerele 1; 3; 0, ..., -1; 0, ..., -3, *caracteristica* sa. Această caracteristică este egală cu 0, pentru numere cuprinse între 1 și 9, egală cu 1, pentru numere cuprinse între 10 și 99, și în general, pentru numere cu ν cifre înaintea virgulei ia valoarea $\nu - 1$; dacă numărul este însă o fracție zecimală mai mică decît 1, atunci caracteristica logaritmului său zecimal este negativă și valoarea sa este egală cu numărul de poziții cu care trebuie deplasată virgula, către dreapta, pînă cînd prima cifră, diferită de zero, apare înaintea acesteia. Pentru logaritmii în bază b este necesar să se calculeze numai mantisele numerelor cuprinse între 1 și b; pentru numere cuprinse între b și b^2, caracteristica este egală cu 1 ș.a.m.d. Avantajul logaritmilor zecimali constă în identitatea dintre baza lor și baza sistemului de numerație, caracteristica calculîndu-se în mod simplu, fără a mai fi necesar să se stabilească puterile lui b.

Trecerea de la un sistem de logaritmi la altul. Faptul că prin dezvoltare în serie se obțin logaritmii naturali, iar în mod practic se folosesc logaritmii zecimali face să fie necesară exprimarea logaritmului în bază b al unui număr n în funcție de logaritmul său într-o altă bază, a. Se cunoaște deci $l_a = \log_a n$ și se caută $l_b = \log_b n$. În sistemul de logaritmi cu bază a cunoscut se poate determina logaritmul lui b, baza celuilalt sistem, $\bar{l}_a = \log_a b$. Exprimate sub formă de puteri, aceste trei relații devin

$$a^{l_a} = n; \quad b^{l_b} = n; \quad a^{\bar{l}_a} = b.$$

Ridicind a treia relație la putere l_b rezultă

$$a^{\bar{l}_a \cdot l_b} = b^{l_b} = n = a^{l_a}, \quad \text{adică} \quad a^{\bar{l}_a \cdot l_b} = a^{l_a} \quad \text{sau} \quad \bar{l}_a \cdot l_b = l_a.$$

Regulă de calcul	$\log_a b \cdot \log_b n = \log_a n.$

Dacă se consideră calculați logaritmii naturali, atunci trebuie să se pună $a = \mathrm{e}$ și $b = 10$ și se obține $\ln 10 \cdot \lg n = \ln n$. Logaritmii zecimali se obțin prin înmulțirea celor naturali cu constanta $\frac{1}{\ln 10} = M_{10}$; aceasta se numește *modul al sistemului de logaritmi în bază 10.*

$$\lg n = \frac{1}{\ln 10} \cdot \ln n = M_{10} \cdot \ln n$$

$$\ln n = \frac{1}{\lg \mathrm{e}} \cdot \lg n = \frac{1}{M_{10}} \lg n$$

$M_{10} = 0{,}4342945\ldots$	$\lg M_{10} = 9{,}6377843 - 10$	$\frac{1}{M_{10}} = \ln 10 = 2{,}3025851\ldots$

Dacă, dimpotrivă, trebuie să se treacă de la o tabelă de logaritmi zecimali, dată, la cei naturali, trebuie ca în regula de calcul să se pună $a = 10$, $b = \mathrm{e}$ și se obține $\lg \mathrm{e} \cdot \ln n = \lg n$. Faptul că $\lg \mathrm{e} = M_{10}$ rezultă imediat, dacă se ia $n = 10$: din $\ln n = \frac{\lg n}{\lg \mathrm{e}}$ se obține $\ln 10 = \frac{1}{\lg \mathrm{e}}$ sau $\lg \mathrm{e} = \frac{1}{\ln 10} = M_{10}$.

Operații inverse. Adunarea și înmulțirea au fiecare numai cîte o operație inversă, scăderea, respectiv împărțirea; din $s_1 + s_2 = s$ rezultă $s_1 = s - s_2$, respectiv $s_2 = s - s_1$; corespunzător din $f_1 \cdot f_2 = p$ rezultă fie $f_1 = p : f_2$, fie $f_2 = p : f_1$. Dacă se urmărește însă calculul bazei r sau al exponentului q din expresia puterii $r^q = p$, atunci sînt necesare două operații distincte; *baza* se obține ca o *rădăcină* $r = \sqrt[q]{p}$, iar *exponentul* ca un logaritm $q = \log_r p$. Prin înlocuirea transformărilor inverse formale în expresia puterii $r^q = p$, se obține fie $(\sqrt[q]{p})^q = p$, adică definiția rădăcinii, fie $r^{\log_r p} = p$, adică definiția logaritmului. *Rădăcina* ca inversa puterii este valabilă pentru *exponenții raționali* ai acesteia; pentru $q = \frac{t}{s}$, unde t și s sînt numere întregi și prime între ele, din $r^{t/s} = p$ rezultă imediat $r^t = p^s$, $r = \sqrt[t]{p^s}$. Atunci însă, cînd q ia valoarea irațională α, rădăcina poate fi exprimată numai ca o putere cu exponent fracționar: $r = p^{\frac{1}{\alpha}}$. La calculul puterii p și al rădăcinii r, la exponenți iraționali α, logaritmii pot fi de ajutor. Din $p = r^\alpha$ se obține, prin logaritmarea ambilor membri, în baza zece $\lg p = \alpha \lg r$, de unde $p = 10^{\alpha \lg r}$ sau $\lg r = \frac{\lg p}{\alpha}$, $r = 10^{\frac{\lg p}{\alpha}}$.

În afara numerelor care sînt puteri ale bazei b a sistemului de logaritmi, toți logaritmii iau *valori iraționale*. De ex., dacă $\lg 2 = \frac{t}{s}$ ar fi un număr rațional, cu t și s numere întregi și prime între ele ($s > t$), ar trebui ca $10^{t/s} = 2$ sau $10^t = 2^s$ și după reducere, $5^t = 2^{s-t} = z$, în contradicție cu regula de descompunere a numărului z în factori primi. Concluzia se poate generaliza pentru o bază b și un număr n, unde n poate fi luat între 1 și b. Contradicția din relația $b^t = n^s$ rezultă în aceea că datorită inegalității $b > n$, b trebuie să aibă cel puțin unul din divizorii lui n.

Aplicații ale logaritmilor. La descoperirea logaritmilor, matematicianul și astronomul francez Pierre-Simon de Laplace (1749—1827) spunea că descoperirea logaritmilor scurtează durata unor calcule, care altfel ar dura cîteva luni, pînă la cîteva zile și astfel, se poate spune că dublează viața celui care calculează.

Importanța logaritmilor nu se limitează însă numai la ușurarea considerabilă a calculelor. Noțiunea de logaritm este utilizată și în multe domenii ale matematicilor superioare, ca de ex. în calculul diferențial și integral, în ecuații diferențiale, teoria funcțiilor, teoria cîmpului și teoria analitică a numerelor.

În *termodinamică*, entropia S a unui corp, respectiv a unui sistem de corpuri depinde direct proporţional de logaritmul natural al probabilităţii termodinamice, W, existînd relaţia $S = k \cdot \ln W$, unde k este constanta lui Planck-Boltzmann ($k = 1{,}380 \cdot 10^{-16}$ erg · grd^{-1}).

În *astronomie*, ca măsură pentru strălucirea m a unei stele nu se ia energia I a razei care întîlneşte ochiul, ci logaritmul acesteia. Există relaţia $m - m_0 = -2{,}5 \lg \frac{I}{I_0}$, unde I_0 este energia de radiaţie corespunzătoare unei străluciri m_0, iar I — energia de radiaţie corespunzătoare unei străluciri m.

Exemplu. Dacă soarele are strălucirea absolută $M_0 = +4{,}7$, iar steaua Rigel din constelaţia Orion strălucirea $M = -5{,}8$, se obţine:

$$-5{,}8 - 4{,}7 = -2{,}5 \lg \frac{I}{I_0}\,; \quad 10{,}5 : 2{,}5 = 4{,}20 = \lg \frac{I}{I_0} \quad \text{sau} \quad \frac{I}{I_0} \approx 16\,000,$$

adică steaua Rigel radiază în fiecare secundă de cca. 16 000 ori mai multă energie decît soarele

Această lege poate fi considerată ca un caz particular al legii lui *Weber-Fechner*, conform căreia senzaţia variază proporţional cu logaritmul natural al excitaţiei.

Relaţia barometrică dintre înălţimea deasupra solului şi presiunea atmosferică are forma $h - h_0 = 18\,400 (\lg b_0 - \lg b)$, unde h şi h_0 sînt înălţimi deasupra solului, iar b şi b_0, presiunile atmosferice, corespunzătoare, din locul respectiv.

Exemplu. La ce înălţime faţă de sol zboară un *avion*, dacă presiunea aerului care îl înconjoară este $b = 596$ torri, în timp ce o staţiune de la sol anunţă o presiune $b_0 = 750$ torri? Deoarece $\lg b_0 = 2{,}8751$ şi $\lg b = 2{,}7752$ se obţine $h = 18\,400 \cdot 0{,}1\,m = 1\,840$ m.

În *biologie* se poate calcula circa cîţi ani sînt necesari pentru o creştere dată a unei păduri, cu ajutorul cunoscutei formule a dobînzii la dobîndă, $b_n = b\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$. Aici b, respectiv b_n, reprezintă stadiile pădurii la începutul şi respectiv la sfîrşitul perioadei de timp considerate, iar p rata anuală de dezvoltare, exprimată în procente. Această formulă este valabilă, în general, pentru dezvoltare naturală.

La cercetarea substanţelor radioactive s-a găsit că din n nuclee, se dezintegrează $\lambda \cdot n$, unde λ are o valoare cuprinsă între 0 şi 1. Este deci valabilă ecuaţia diferenţială $\frac{dn}{dt} = -\lambda n$ care se poate integra prin separarea variabilelor $\frac{dn}{n} = -\lambda\, dt$ sau $\ln \frac{n}{n_0} = -\lambda t$, respectiv $n = n_0 e^{-\lambda t}$, unde n_0 este numărul de nuclee luat în considerare la timpul $t = 0$. Intervalul de timp T în care se dezintegrează jumătate din nuclee, denumit *timp de înjumătăţire*, se obţine din $\ln \frac{1}{2} = -\lambda T$ şi deci $T = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

Calculul cu logaritmi

Pentru calculele practice *logaritmii zecimali* prezintă importanţa cea mai mare. Cum totodată se poate trece de la logaritmii într-un sistem la logaritmii în alt sistem, cu ajutorul unor relaţii simple este suficient să fie luaţi în considerare numai logaritmii zecimali. Despre aceştia se ştie deja că este suficient să se stabilească o *tabelă de logaritmi* numai pentru numerele între 0 şi 10. Toate celelalte numere ale sistemului zecimal se pot reprezenta ca produsul unei puteri a lui 10 prin unul din aceste numere. Exponentul acestei puteri este un număr întreg, pozitiv pentru numere mai mari decît 1 şi negativ pentru numere mai mici decît 1; acest număr se numeşte caracteristică. Logaritmii numerelor cuprinse între 1 şi 10 sînt fracţii zecimale iraţionale cuprinse între 0 şi 1; partea zecimală a lor (cifrele de după virgulă) se numeşte mantisă (fig.).

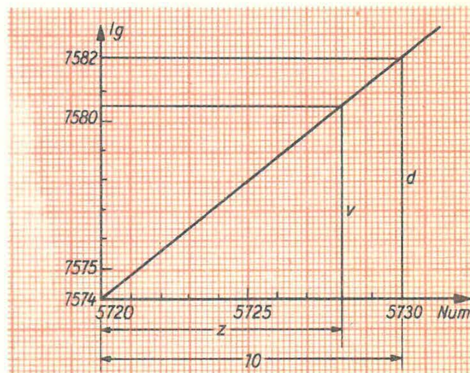
Tabele de logaritmi. După numărul de cifre considerate prin rotunjirea valorilor iraționale ale logaritmilor, există tabele de logaritmi cu 4, 5 sau 7 cifre. Tabele de logaritmi cu un număr mai mare de cifre (de ex. cu 10 cifre) se folosesc numai pentru scopuri speciale. Coloana din stînga tabelei conține primele 2, 3 sau 4 cifre ale numărului, deci numere între 10 și 99 (la tabele cu 4 cifre), între 100 și 999 (la tabele cu 5 cifre) (fig. 2.2.1), respectiv între 1 000 și 9 999 (la tabele cu 7 cifre). În dreapta fiecărui număr al coloanei din stînga sînt trecute cîte 10 mantise corespunzătoare cifrei din poziția a 3-a, a 4-a, respectiv a 5-a a numărului, care ia valorile 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Într-o tabelă de logaritmi cu 5 cifre, primele două cifre sînt identice pentru mai multe

930		848	853	858	862	867	872	876	881	886	890
931		895	900	904	909	914	918	923	928	932	937
932		942	946	951	956	960	965	970	974	979	984
933		988	993	997	*002	*007	*011	*016	*021	*025	*030
934	97	035	039	044	049	053	058	063	067	072	077
935		081	086	090	095	100	104	109	114	118	123
936		128	132	137	142	146	151	155	160	165	169

2.2.1. Liniile 930 pînă la 936 ale unei tabele de logaritmi cu 5 cifre

mantise, de ex. cifrele 97 pentru valorile lg 9,333 = 0,97002, ..., lg 9,340 = 0,97035, ..., lg 9,549 = = 0,97996 și, în total, pentru 217 mantise. Pentru eliminarea acestor repetări inutile, ambele aceste cifre vor fi scrise *într-o coloană separată*, numai o singură dată și anume înaintea primei linii ale cărei mantise încep toate cu aceste două cifre. O parte din aceste mantise anterioare, cu ultimele cifre cuprinse între 002 și 030, deși formal aparțin mantiselor ce încep cu cifrele 96, sînt de fapt în grupa celor cu 97 și vor fi pentru aceasta marcate cu un asterisc: *002, pînă la *030 (v. fig. 2.2.2). În tabelele de logaritmi cu 7 cifre sînt trecute separat primele 3 cifre ale mantiselor (fig. 2.2.3).

2.2.2. Căutarea mantisei lui lg 5,728 = = 0,7580



2.2.3. Interpretarea grafică pentru mantisa lui lg 5,728 = 0,7580

Ultimele z poziții ale numărului se iau în considerare printr-o *interpolare liniară*, ceea ce înseamnă că *diferența d* dintre valorile tabelate ale mantiselor vecine se va împărți în 10 părți egale $\frac{d}{10}$, corectarea mantisei tabelate făcîndu-se cu valoarea $v = \frac{d \cdot z}{10}$. De ex. lg 5,728 se găsește între 0,7574 și 0,7582 (v. fig.), diferența dintre liniile tabelei (intervalul de interpolare) este $d = 0{,}7582 - 0{,}7574 = 0{,}0008$, cifra următoare a numărului este 8, deci corecția care este de adus mantisei va fi $v = \frac{d \cdot z}{10} = \frac{8 \cdot 8}{10} = 6{,}4 \approx 6$ unități în poziția celei de a patra zecimale

de după virgulă; rezultă lg 5,728 = 0,7574 + 0,0006 = 0,7580 (v. fig.). În cazul unei tabele cu 4 zecimale, lg 5,7283 are aceeași valoare; într-o tabelă cu 5 zecimale acesta se situează însă, între lg 5,728 = 0,75800 și lg 5,729 = 0,75806 și deci $d = 6$, $z = 3$, $v = 0{,}6 \cdot 3 = 1{,}8$, rezultînd lg 5,7283 = 0,75802. O situație asemănătoare se obține pentru lg 5,728342, cifrele 4 și 2 neputînd fi luate în considerare, într-o tabelă cu 5 cifre. În schimb, cu o tabelă cu 7 cifre se obține: lg 5,7283 = 0,7580258 și lg 5,7284 = 0,7580333 (fig. 2.2.4); din intervalul de interpolare, $d = 75$ și cu ajutorul tabelei de proporționalitate rezultă:

pentru cifra 4, o corecție $v_4 = 30{,}0$;
pentru cifra 0,2, o corecție $v_{0,2} = 1{,}5$;

deci pentru cifrele 42, o corecție $v = 31{,}5 \approx 32$
cu care lg 5,728342 = 0,7580290

27	9272	9348	9423	9499	9575	9651
28	758 0030	0106	0182	0258	0333	0409
29	0788	0864	0940	1016	1091	1167
5730	758 1546	1622	1698	1774	1849	1925
31	2304	2380	2456	2531	2607	2683

2.2.4. Liniile 5727 pînă la 5731 a unei tabele de logaritmi cu 7 cifre în mantisă.

Dimpotrivă, dacă se dă un logaritm și se caută numărul corespunzător lui, atunci în afara intervalului de interpolare d se cunoaște și corecția v și pentru următoarele cifre, z, ale numărului; se obține $z = \dfrac{10 \cdot v}{d}$.

	75
1	7,5
2	15,0
3	22,5
4	30,0
5	37,5
6	45,0
7	52,5
8	60,0
9	67,5

Exemple. 1. lg n_1 = 0,5412 se situează între 0,5403 și 0,5416, deci n_1 se găsește între 3,47 și 3,48; $d = 13$, $v = 9$, deci $z = \dfrac{90}{13} \approx 7$ și $n_1 = 3{,}477$.

2. lg n_2 = 0,50000 se situează între lg 3,162 = 0,49996 și lg 3,163 = = 0,50010; deoarece $d = 14$ și $v = 4$, rezultă $z = \dfrac{40}{14} \approx 3$ și $n_2 = 3{,}1623$.

	249
1	24,9
2	49,8
3	74,7
4	99,6
5	124,5
6	149,4
7	174,3
8	199,2
9	224,1

3. lg n_3 = 0,2409357 se situează între lg 1,7415 = 0,2409235 și lg 1,7416 = 0,2409484 Tabela de proporționalitate pentru $d = 249$ dă pentru $v = 122$ ca a 6-a cifră 4 ($4 \cdot 24{,}9$ = = 99,6) și cum 122 − 99,6 = 22,4, a 7-a cifră ia valoarea 9; deci $n_3 = 1{,}741549$.

Adesea se dorește să nu apară *caracteristici ale logaritmului negative* și atunci se operează astfel încît logaritmul să fie pus sub forma unei sume formate dintr-o fracție zecimală, cuprinsă între 0 și 10, și valoarea fixă − 10. Această valoare fixă, − 10, o avem mereu în vedere, dar nu o mai scriem. În special se scrie în acest fel în tabelele de logaritmi ale funcțiilor trigonometrice.

Exemple 1. lg 0,723 = 0,8591 − 1 = 9,8591 − 10, scriindu-se 9,8591.

2. lg 0,00723 = 0,8591 − 3 = 7,8591 − 10, scriindu-se 7,8591.

3. Cît de mare este $n = \dfrac{\lg 2}{\lg 1{,}03}$? Dintr-o tabelă cu 4 cifre se obține lg 2 = = 0,3010 și lg 1,03 = 0,0128. În egalitatea n = 0,3010/0,0128 se logaritmează în ambii membri: lg n = lg 0,3010 − lg 0,0128 = (0,4786 − 1) − (0,1072 − 2) = 0,3714 + 1 = 1,3714.

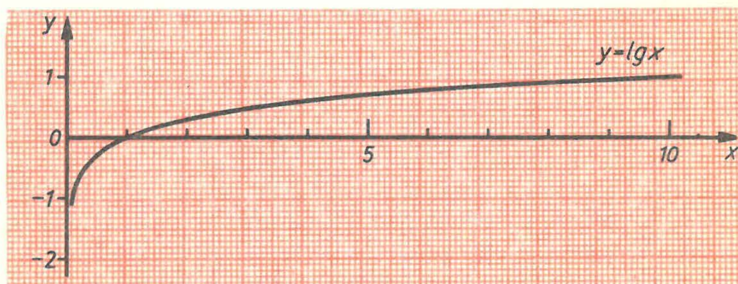
4. Cît este ln 2? Ținînd seamă de relația de convertire a sistemului, rezultă

$$\ln 2 = \frac{\lg 2}{\lg e} = \frac{0,3010}{M_{10}} = \frac{0,3010}{0,4343}.$$

Prin logaritmare se obține:

lg (ln 2) = lg 0,3010 − lg 0,4343 = (9,4786 − 10) − (9,6378 − 10) = (19,4786 − 20) − − (9,6378 − 10) = 9,8408 − 10 = 9,8408.
Numărul corespunzător acestui logaritm este 0,6931; deci ln 2 = 0,6931.

Reprezentarea grafică a funcției $y = \lg x$. Din tabelă rezultă valorile funcției y, pentru fiecare valoare reală x. Punînd aceste valori într-un sistem de coordonate cartezian se obține curba funcției $y = \lg x$ (v. fig.). Ea intersectează axa Ox în punctul $x_0 = 1$, $y_0 = \lg 1 = 0$. Pentru valori ale lui x mergînd de la 1 către 0, curba *are o scădere rapidă* și tinde *asimptotic* către axa Oy negativă, atunci cînd $x \to 0$. Pentru valorile lui x cuprinse între 1 și 10 funcția *crește monoton* și lent. Cum $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln 10} = \frac{M_{10}}{x} = \frac{0,4343}{x} = \operatorname{tg} \alpha$ ia valori cuprinse între 0,4343 pentru $x = 1$ și 0,04343 pentru $x = 10$, *unghiul* α, pe care-l face tangenta la curbă cu axa x este mic. Pentru numere cuprinse între 10 și 100, care au caracteristica egală cu 1, funcția



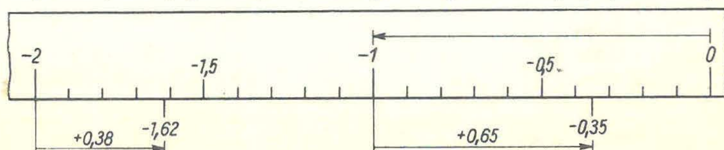
2.2.5. Curba logaritmilor zecimali $y = \lg x$

crește cu un același $\Delta y = 1$, deși intervalul considerat pentru variația lui x este de 10 ori mai mare. Lucrurile se petrec identic pentru intervalul $x = 1\,000$ pînă la $x = 10\,000$. De remarcat deosebirea foarte mică a curbei, față de o dreaptă și deci justificarea interpolărilor liniare. Valorile date în tabele se situează între $x = 100$ și $x = 1\,000$, pentru o tabelă cu 4 cifre, respectiv între $x = 10\,000$ și $x = 100\,000$, pentru cea cu 7 cifre (fig. 2.2.5).

Exemple de calcul. Exemplele numerice de mai jos conțin diferite situații. Cînd ele conțin numai operații de grade mai înalte, atunci pot fi calculate *prin logaritmare* fără restricții, rezultatul obținîndu-se după ce s-au făcut toate operațiile cu logaritmi. Dacă expresiile conțin însă sume, respectiv diferențe, acestea trebuie să fie calculate separat, lor neputîndu-se aplica logaritmarea.

Nu se pot logaritma numere negative. Deși *caracteristica* logaritmului se stabilește altfel decît mantisa sa, pentru fixarea valorii logaritmului ea nu poate fi neglijată. Operațiile făcute asupra logaritmilor decurg în mod identic, atît pentru caracteristici, cît și pentru mantise. Dacă logaritmul unui număr x are valoarea $\lg x = 5{,}6$, atunci $\frac{1}{2} \lg x = \lg \sqrt{x} = 2{,}8$, respectiv $3 \lg x = \lg x^3 = 16{,}8$.

La *logaritmarea fracțiilor subunitare* se ivesc dificultăți aparente în aplicarea acestor reguli. Acești logaritmi au *valori negative* îndepărtîndu-se astfel puțin de situațiile întîlnite pînă aici. Pe axa numerelor nu se merge de la 0 către numărul dat, ci înapoi, ceva în plus peste acesta, pînă la un număr complet negativ (fig. 2.2.6); de exemplu $-0{,}35 = -1 + 0{,}65$, sau $-1{,}62 =$



2.2.6. Logaritmi cu caracteristica negativă

$= -2 + 0{,}38$. Această depășire este realizată cu exprimarea numitorului fracției prin puteri ale lui 10 și face posibilă *diferitele reprezentări ale aceluiași număr*; de exemplu: $-0{,}35 = -2 + 1{,}65$; $-0{,}35 = -10 + 9{,}65$; $-1{,}62 = -5 + 3{,}38$; $-1{,}62 = -20 + 18{,}38$ ș.a.m.d. În aceste exemple mantisele sînt 65, respectiv 38; *caracteristicile* sînt constituite din două numere întregi, unul pozitiv și altul negativ, poziționat de obicei al doilea; corespunzător exemplelor de mai sus avem (0, ..., −1); (0, ..., −2); (1, ..., −2); (9, ..., −10); (3, ..., −5) sau (18, ..., −20). La înmulțiri, împărțiri, ridicări la putere ale numerelor, adică la operații cu logaritmi nu apare nici o dificultate. La extragerea rădăcinii, căreia îi corespunde o împărțire a logaritmului este necesar să se stabilească o caracteristică, al cărei număr întreg negativ, să rămînă întreg și după împărțire. O asemenea reprezentare se poate obține însă mereu.

Exemplul 1. $x = \sqrt[3]{100}$.

$$\lg x = \frac{1}{3} \lg 100 = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3} = 0{,}6667,$$
$$x = 4{,}642$$

Exemplul 2. $x = \sqrt{0{,}2}$,

$$\lg x = \frac{1}{2} \lg 0{,}2 = \frac{1}{2}(0{,}3010 - 1) =$$
$$= \frac{1}{2}(1{,}3010 - 2) = 0{,}6505 - 1$$

sau
$$\lg x = \frac{1}{2}(9{,}3010 - 10) =$$
$$= \frac{1}{2}(19{,}3010 - 20) =$$
$$= 9{,}6505 - 10,$$
$$x = 0{,}4472.$$

Exemplul 3. $x = \sqrt[3]{1 - (0{,}927)^5}$

$$\lg 0{,}927 = 9{,}9671 - 10,$$
$$5 \lg 0{,}927 = 49{,}8355 - 50$$
$$= 9{,}8355 - 10,$$
$$(0{,}927)^5 = 0{,}6847.$$

$$\lg 0{,}3153 = 29{,}4987 - 30,$$
$$\frac{1}{3} \lg 0{,}3153 = 9{,}8329 - 10,$$
$$\sqrt[3]{03153} = 0{,}6807$$
$$x = \sqrt[3]{1 - 0{,}6847} =$$
$$= \sqrt[3]{0{,}3153},$$
$$x = 0{,}6807.$$

Exemplul 4.

$x = \boxed{160{,}6} \cdot \boxed{0{,}2856} \cdot \boxed{0{,}006998} =$
$= a \cdot b \cdot c$

$\lg x = \lg a + \lg b + \lg c$.

În schema de mai jos numărul N și logaritmul corespunzător lui sînt separați prin linia verticală

N	lg	
$a = 160{,}6$	2,2057	+
$b = 0{,}2856$	0,4558 − 1	
$c = 0{,}006998$	0,8450 − 3	
$a \cdot b \cdot c$	3,5065 − 4	
$x = 0{,}3210$	0,5065 − 1	

Exemplul 5. $x = \boxed{0{,}07535} : \boxed{6{,}459}$
$= a : b$

$\lg x = \lg a - \lg b$

N	lg	
0,07535	0,8771 − 2	−
6,459	0,8101	
$x = 0{,}01167$	0,0670 − 2	

Exemplul 6. $x = \boxed{56{,}07} : \boxed{992{,}6}$
$= a : b$

$\lg x = \lg a - \lg b$

N	lg	
56,07	3,7488 − 2	−
992,6	2,9967	
$x = 0{,}05651$	0,7521 − 2	

Exemplul 7.

$x = \boxed{0{,}002934} : \boxed{0{,}00008998}$
$= a : b$

$\lg x = \lg a - \lg b$

N	lg	
0,002934	1,4675 − 4	−
0,00008998	0,9541 − 5	
$x = 32{,}62$	0,5134 + 1	
	1,5134	

Exemplul 8.

$x = \boxed{0{,}07440}^5$
$= a^5$

$\lg x = 5 \lg a$

N	lg	
$a = 0{,}07440$	0,8716 − 2	· 5
a^5	4,3580 − 10	
$x = 0{,}000002281$	0,3580 − 6	

Exemplul 9.

$$x = 16{,}24^{\pi} = a^{\pi}$$
$$\lg x = \pi \lg a$$
$$\lg(\lg x) = \lg \pi + \lg(\lg a)$$

N	lg	lg
16,24	1,2106	0,0830
π		0,4971
x = 6353	3,803	0,5801

Exemplul 10.

$$x = \sqrt[5]{0{,}009028} = \sqrt[5]{a} = a^{\frac{1}{5}}$$
$$\lg x = \frac{1}{5} \lg a$$

N	lg	
0,009028	2,9556 − 5	: 5
x = 0,3900	0,5911 − 1	

Exemplul 11.
$$x = \sqrt[6]{\frac{89{,}49^{3,5} \cdot \sqrt{0{,}006\,006}}{0{,}000\,010\,01^{2} \cdot 3\,601\,000^{4}}} = \sqrt[6]{\frac{a^{3,5} \cdot \sqrt{b}}{c^{2} \cdot d^{4}}}$$
$$\lg x = \frac{1}{6}\left[3{,}5 \lg a + \frac{1}{2} \lg b - 2 \lg c - 4 \lg d\right],$$
$$x = 0{,}01774.$$

N	lg	Operația	lg	
89,49	1,9517	·3,5	6,8310	
0,006 006	1,7786 − 4	: 2	0,8893 − 2	
$a^{3,5}\sqrt{b}$			5,7203	17,7203 − 12
0,000 01001	0,0004 − 5	· 2	0,0008 − 10	
3 601 000	6,5564	· 4	26,2256	
$c^2 \cdot d^4$			16,2264	16,2264
0,01774	0,2490 − 2	: 6		1,4939 − 12

Exemplul 12.
$$x = \frac{\sqrt[3]{2934} \cdot 1{,}843^{2} - 11{,}55 \cdot 32{,}94 \cdot 0{,}8844}{4{,}321^{3} \cdot \sqrt[3]{0{,}9428 \cdot 0{,}01036}},$$
$$x = \frac{\sqrt[3]{a} \cdot b^{2} - c \cdot d \cdot e}{f^{3} \cdot \sqrt{g \cdot h}} = \frac{A - B}{C} = -354{,}8$$

N		N	lg	operația	lg	
	a	2934	3,4675	: 3	1,1558	
	b	1,843	0,2655	· 2	0,5310	
+ 48,62	A				1,6868	
	c	11,55	1,0626			
	d	32,94	1,5177			
	e	0,8844	0,9467 − 1			
− 336,50	B		2,5270			
− 287,88	A − B		2,4592 n			2,4592 n
	f	4,321	0,6356	: 3	1,9068	
	g	0,9428	1,9744 − 2	: 2	0,9872 − 1	
	h	0,01036	0,0153 − 2		0,0153 − 2	
	C				0,9093 − 1	(0,9093 − 1) p
	x	− 354,8	2,5499 n			(1,5499 + 1) n

Cologaritmi. Pentru înlăturarea scăderilor în operațiile cu logaritmi se utilizează *cologaritmii* (prescurtat : colog). Pentru introducerea cologaritmului se folosește relația

$$\lg \frac{1}{a} = -\lg a = \operatorname{colog} a.$$

De exemplu, $a = 5{,}09$, deci

$$\lg a = \lg 5{,}09 = 0{,}7067 \text{ și } \lg \frac{1}{a} = -\lg a = -0{,}7067$$

sau

$$-\lg a = (1 - 0{,}7067) - 1, \quad \text{iar colog } 5{,}09 = 0{,}2933 - 1.$$

Exemplu. $x = \frac{4{,}77}{5{,}09}$; $\lg \frac{4{,}77}{5{,}09} = \lg 4{,}77 + \lg \frac{1}{5{,}09}$
$= \lg 4{,}77 + \operatorname{colog} 5{,}09$;
$x = 0{,}9372$.

N	lg
lg 4,77	0,6785
colog 5,09	0,2933 – 1
0,9372	0,9718 – 1

Istoric. Apariția calculelor cu logaritmi arată în mod clar dependența dintre dezvoltarea societății și cea a matematicii. Descoperirea căilor maritime către India este strîns legată cu o perioadă de apogeu în astronomie, navigație și trigonometrie. Matematica era un lucru indispensabil al navigatorului. Datorită lărgirii corespunzătoare a comerțului crește în același timp importanța noțiunilor de calcul negustorești, în special *calculul dobînzilor*. În ambele domenii — după metodele de calcul de atunci — solicitările la care erau supuși cei ce făceau calculele erau extraordinar de mari ; ar fi de evaluat doar cantitatea de calcule pe care a efectuat-o astronomul Johannes KEPLER (1571—1630) pentru stabilirea legii care-i poartă numele. Se doreau metode de calcul mai simple, în special o combinație de progresii aritmetice și geometrice, care ar fi trebuit să înlocuiască înmulțirile prin adunări.

Matematicienii danezi WITTICH și Christoph CLAVIUS (1537—1612) propun în cartea lor *„de Astrolabio"*, apărută în 1593, ca înmulțirea a două numere a și b (mai mici decît 1) să se reducă la o adunare, prin exprimarea lor ca funcții trigonometrice, $a = \sin\alpha$ și $b = \sin\beta$. Conform teoremelor de trigonometrie:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \sin\beta \cos\alpha$$
$$\frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(x - \beta)] = \sin\alpha \cos\beta = ab.$$

Pentru $a = 0{,}61566$ și $b = 0{,}93969$ ei obțineau $\alpha = 38°$, $\beta = 20°$, deci $\alpha + \beta = 58°$, $\alpha - \beta = 18°$, iar

$$a \cdot b = \frac{1}{2}(0{,}84805 + 0{,}30902) = \frac{1}{2} \cdot 1{,}15707; \quad 0{,}61566 \cdot 0{,}93969 = 0{,}57854.$$

Simon STEVIN (1548—1620) era contabil și a insistat pentru modul *indo-arab* de scriere a numerelor și în special pentru *scrierea zecimală* a fracțiilor. El a întocmit tabele pentru calculul dobînzilor multiple, pe care mecanicianul elvețian Jost BÜRGI (1552—1632) le continuă și le publică la Praga, în anul 1620, sub titlul *„Arithmetische und geometrische Progresstabuln"*. Acesta a plecat de la baza $1{,}0001 = \left(1 + \frac{1}{10\,000}\right)$, ale cărei puteri se pot ușor calcula, deoarece într-o exprimare mai modernă este necesar un număr relativ redus de termeni ai dezvoltării binomiale, pentru a obține chiar și precizia de 10 cifre, pe care și-a impus-o. Puterea a 10 000-*a* a bazei sale $\left(1 + \frac{1}{10\,000}\right)^{10\,000}$ este egală cu 2,71846, în timp ce e = 2,7182818 este $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. De asemenea, scoțianul John NEPER (1550—1617) a reușit în lucrarea

sa din 1614, „Mirifici logarithmorum canonis descriptio" să-și atingă parțial scopul, constînd în studierea funcției $y = g\,e^{-\frac{x}{g}}$, unde $g = 10\,000\,000$. Pentru o sumă deexponenți $x = x_1 + x_2$ s-a obținut $y = g\,e^{-\frac{x_1}{g}} \cdot e^{-\frac{x_2}{g}} = y_1 \frac{y_2}{g}$. Împreună cu profesorul londonez Henry BRIGGS (1556—1630), Neper se decise pentru funcția $y = 10^x$. După moartea lui Neper, BRIGGS termină calculele acestuia; lucrarea sa „*Arithmetica logarithmica*", apărută în 1624, conține logaritmii cu 14 zecimale ai numerelor de la 1 la 20 000 și de la 90 000 la 100 000. Logaritmii care mai lipseau au fost calculați de către topometrii olandezi Ezechiel de DECKER și Adrian VLACQ (către 1600 — 1667); în anul 1627 apare prima lor tabelă completă de logaritmi. Pentru transformarea unei tabele de antilogaritmi, într-o tabelă de logaritmi Briggs a utilizat relația dintre o progresie aritmetică și progresia geometrică ordonată de aceasta, anume că mediei aritmetice $\frac{a_1 + a_2}{2}$ a două numere, din prima progresie, îi corespunde media geometrică $\sqrt{g_1 g_2}$ a termenilor respectivi din cea de a doua progresie. De ex. în șirul puterilor bazei 3;

1	2	3	4	...
3	9	27	81	...

$\frac{2+3}{2} = 2{,}5$ corespunde valorii $\sqrt{9 \cdot 27} = 9\sqrt{3}$, deoarece $3^{\frac{2+3}{2}} = \sqrt{3^2 \cdot 3^3} = \sqrt{9 \cdot 27}$.

Dacă se ia baza 10 și se desemnează membrii progresiei aritmetice drept logaritmi, l_i, iar termenii progresiei geometrice drept valori ale puterii n_i, atunci se obține pentru intervalele $0 < l_i < 1$, respectiv $1 < n_i < 10$, următoarele șiruri:

$$l_1 = \frac{1}{2}(0 + 1) = 0{,}5, \qquad n_1 = \sqrt{10} = 3{,}162277\ldots$$

$$l_2 = \frac{1}{2}(l_1 + 1) = 0{,}75, \qquad n_2 = \sqrt{n_1 \cdot 10} = 5{,}623413\ldots$$

$$l_3 = \frac{1}{2}(l_1 + l_2) = 0{,}625, \qquad n_3 = \sqrt{n_1 \cdot n_2} = 4{,}216964\ldots$$

$$l_4 = \frac{1}{2}(l_2 + l_3) = 0{,}6875, \qquad n_4 = \sqrt{n_2 \cdot n_3} = 4{,}869674\ldots$$

$$l_5 = \frac{1}{2}(l_2 + l_4) = 0{,}71875, \qquad n_5 = \sqrt{n_2 \cdot n_4} = 5{,}232991\ldots$$

$$l_6 = \frac{1}{2}(l_4 + l_5) = 0{,}703125, \qquad n_6 = \sqrt{n_4 \cdot n_5} = 5{,}048065\ldots$$

$$l_7 = \frac{1}{2}(l_4 + l_6) = 0{,}6953125, \qquad n_7 = \sqrt{n_4 \cdot n_6} = 4{,}958067\ldots$$

$$l_8 = \frac{1}{2}(l_6 + l_7) = 0{,}69921875, \qquad n_8 = \sqrt{n_6 \cdot n_7} = 5{,}002865\ldots$$

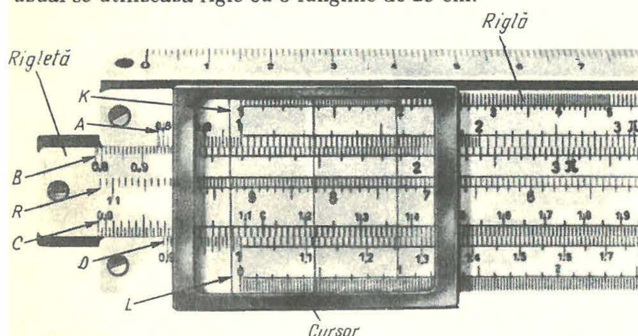
Din cele opt etape de calcul de mai sus se obține logaritmul lg 5,002865 = 0,69921875 și metoda arată cum prin extrageri de rădăcină pătrată se poate atinge, în cele din urmă, valoarea lui lg 5, cu orice precizie impusă.

Rigla de calcul logaritmică

Istoric. Începînd din al doilea deceniu al secolului XVII a fost dat principiul unei *rigle de calcul* logaritmice, de către englezul Edmund GUNTER (1561— 1626). El a utilizat pentru aceasta o scală divizată logaritmic. Operațiile de calcul erau realizate mai întîi cu ajutorul unui compas,

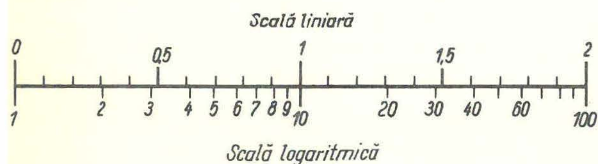
cu care erau obținute lungimile corespunzătoare. Cîțiva ani mai tîrziu, englezul William OUGHTRED (1574—1660) a pus alături scale glisante, care au permis să se renunțe la compas. Din mijlocul sec. XVII englezul Edmund WINGATE (1593—1656) și Seth PARTRIDGE (sec. XVII) foloseau o riglă de calcul prevăzută cu o limbă indicatoare, adică un instrument asemănător cu riglele de calcul actuale. Forma sa de astăzi a căpătat-o în sec. XIX, iar către sfîrșitul aceluiași secol se trece la producția industrială de rigle de calcul. Puțin mai tîrziu s-au construit riglele de calcul specializate, unele pentru comercianți, altele pentru electricieni (fig. 2.2.7).

Construcția riglelor de calcul logaritmice. Următoarele considerații se referă la o riglă sistem Rietz sau Darmstadt. Ultimele sînt preferate de cercetătorii științifici și de tehnicieni. În mod uzual se utilizează rigle cu o lungime de 25 cm.



2.2.7. Rigla de calcul logaritmică

Rigla de calcul se compune din trei piese: *rigla, rigleta și cursorul.* Pe riglă se găsesc scalele K, D, A și L (fig.). În canalul decupat în riglă se mișcă rigleta, care conține pe una din fețe scalele C, R și B, pe cealaltă față fiind scalele funcțiilor trigonometrice. Deasupra riglei și a rigletei se deplasează cursorul, care este prevăzut cu trei linii de marcaj. Uzual, se folosește marcajul din mijlocul cursorului. Marcajele laterale se utilizează pentru calculul suprafeței cercului și calculul volumului cilindrului.



2.2.8. Scală liniară și scală logaritmică

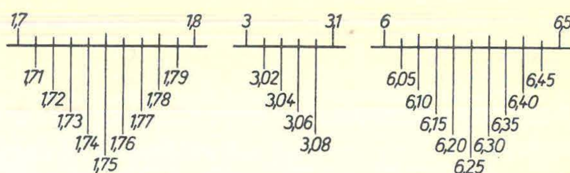
Scalele riglei de calcul. Scalele riglei de calcul sînt *funcții derivate* din funcția $y = \lg x$. La aceste scale logaritmice numerele imprimate pe ele au o distanță față de începutul scalei proporțională cu logaritmul lor.

Scalele C și D sînt scale logaritmice pentru numere cuprinse între 1 și 10 (fig. 2.2.8). Distanța unei diviziuni a scalei, față de începutul ei, se obține prin înmulțirea lungimii scalei cu logaritmul numărului respectiv. De ex., distanța dintre numerele 1 și 2 de pe scală, pentru o riglă cu lungimea de 250 mm este 250 mm. $\lg 2 = 75{,}3$ mm. Legea de variație, neliniară, a logaritmilor impune o scală logaritmică de asemenea neliniară (fig.). Se remarcă că la valori mari ale numerelor, spațiile dintre ele devin mai mici.

Scalele A și B sînt de asemenea logaritmice. Ele sînt constituite din două jumătăți identice. Distanța dintre numerele 1 și 10 este pe scalele A și B pe jumătate cît este pe scala D. În consecință o porțiune dată de pe scala D, de lungime $\lg n$ corespunde pe scala B unei porțiuni de lungime $2 \lg n$, sau $\lg n^2$. Aceasta înseamnă că numerelor de pe scalele D și C le corespund respectiv pe scalele A și B pătratele lor.

La fel, pe scala K se găsesc valorile cubice (cuburile) numerelor de pe scala D. Scala K se compune din subscale identice și succesive. Scala L se găsește la marginea de mai jos a riglei și este scală liniară. Pe ea se găsesc mantisele logaritmilor zecimali ai numerelor de pe scala de deasupra ei (scala D).

Scala R, sau CI se numește *scala valorilor reciproce* (inverse). Ea corespunde scalei D, fiind identică cu aceasta, însă ordonată de la dreapta către stînga. Această scală dă valorile reciproce, sau inverse $1/n$ ale numerelor de pe scala D.



2.2.9. Diferite subdivizări pe rigla de calcul.

Citirea și fixarea numerelor. Pe o riglă de calcul se pot citi numere cu 3 cifre. Pentru primele două cifre nu sînt dificultăți, acestea fiind inscripționate pe riglă (fig. 2.2.9).

Cu totul altfel este citirea și poziționarea celei de a 3-a cifre, datorită gradării neregulate a scalei.

Considerînd scala D, deosebim pe ea 3 *porțiuni*, diferențiate după modul de gradare. Prima porțiune, situată între 1 (sau 1,00) și 2 (sau 2,00) are intervalele dintre două repere marcate cu cifre împărțite în cîte 10 subdiviziuni (de ex., între 1,00 și 1, 10 subdiviziunile corespund numerelor 1,01; 1,02; ...; 1,09; vezi figura).

A doua porțiune este cuprinsă între numerele 2 și 4 și intervalele dintre două repere sînt împărțite în cîte *5 subdiviziuni* (de ex., între 2,00 și 2,10 subdiviziunile corespund numerelor 2,02; 2,04; ...; 2,06).

Deoarece mergînd către capătul din dreapta al riglei spațiile dintre numere devin din ce în ce mai mici, în a 3-a porțiune intervalele dintre două repere vecine, corespunzătoare primelor două cifre sînt subdivizate numai în două (de ex. între 6,00 și 6,10 există subdiviziunea 6,05).

Citirea sau poziționarea unui număr pe riglă se face cu ajutorul reperului mijlociu al cursorului. Acesta se deplasează și se suprapune cît mai exact peste numărul considerat. Pentru un număr situat între reperele riglei se va proceda prin aproximare.

Calculul cu rigla. La fel cum în cazul calculelor cu logaritmi trebuie făcută o evaluare a caracteristicii, în calculele cu rigla trebuie efectuat un calcul aproximativ suplimentar, pentru stabilirea rangurilor cifrelor rezultatului. Acest calcul este util și pentru verificarea aproximativă a rezultatului. Calculul cu rigla se reduce la adunări, respectiv scăderi geometrice de lungimi; pe scalele A, B și K lungimile se pot dubla, respectiv tripla. Mai departe se vor prezenta cîteva exemple.

Înmulțirea. La baza acesteia stă relația $\lg (a \cdot b) = \lg a + \lg b$.

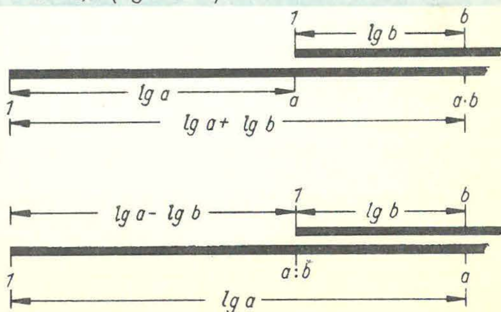
Adunarea celor doi logaritmi se traduce, pe rigla de calcul, în adunarea a două lungimi de valoare $\lg a$, respectiv $\lg b$. Se deplasează rigleta, astfel încît începutul ei, punctul 1 de pe scala C să vină în dreptul punctului a, de pe scala D. Apoi se aduce cursorul cu reperul său central în dreptul numărului b de pe scala C a rigletei și se citește rezultatul $a \cdot b$ pe scala *D* a riglei, în dreptul reperului central al cursorului (2.2.10).

Exemplul 1. Se calculează $2 \cdot 1{,}5$. Deasupra lui 2, de pe scala D se duce 1 de pe rigletă (scala C). Sub 1,5 de pe rigletă se citește rezultatul $3 = 2 \cdot 1{,}5$ (fig. 2.2.11).

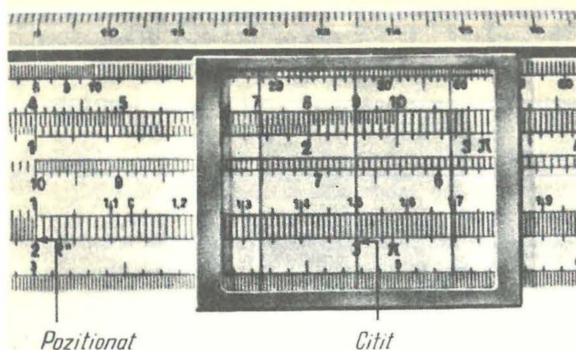
Exemplul 2. Se calculează $2{,}84 \cdot 4{,}55$. Calculul estimativ: $3 \cdot 4 = 12$.

Din calculul estimativ se vede că rezultatul nu mai poate fi citit pe scala D. În acest caz se calculează astfel: se poziționează 2,84 pe scala D și mișcînd rigleta către stînga se suprapune extremitatea sa 10, de pe scala C, peste punctul 2,84. Se aduce cursorul în dreptul lui 4,55 de pe scala C și în dreptul lui se citește rezultatul $2{,}84 \cdot 4{,}55 = 12{,}9$ pe scala D.

O explicație pentru acest mod de a calcula se obține făcînd aceeași înmulțire pe scalele pătratice, A și B, unde rezultatul se obține în a doua subscală.



2.2.10. Înmulțirea și împărțirea

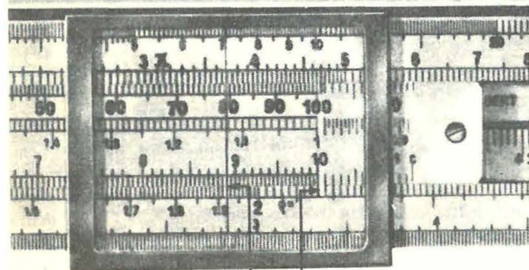


2.2.11. Exemple pentru inmulțirea cu rigla de calcul $2 \cdot 1,5 = 3$

La inmulțire rigleta se va poziționa fie cu extremitatea sa stingă 1, fie cu cea dreaptă 10.

Împărțirea. Relația corespunzătoare impărțirii este $\lg \frac{a}{b} = \lg a - \lg b$. Pe rigla de calcul aceasta se reduce la scăderea segmentului de lungime $\lg b$, din segmentul de lungime $\lg a$. Se deplasează rigleta aducind-o cu punctul b de pe scala C, in dreptul punctului a, de pe scala D. Apoi rezultul $\frac{a}{b}$ se citește pe scala D in dreptul inceputului 1, respectiv sfirșitului 10 al scalei C a rigletei.

Exemplul 1. Se calculează 88,5 : 0,515. Calcul estimativ: 90 : 0,5 = 180. Peste punctul 88,5 de pe scala D se așază punctul 0,515, de pe scala C. Rezultatul 88,5 : 0,515 = = 172 se găsește pe scala D, in dreptul inceputului 1 al scalei C.



2.2.12. Împărțirea cu rigla de calcul 19,2: 89 = = 0,216

Exemplul 2. Se calculează 19,2 : 89. Calculul estimativ: 20 : 90 ≈ 0,2. Se procedează exact ca in exemplul precedent, cu singura deosebire că rezultatul se citește sub valoarea 10, din extrema dreaptă a scalei C. Rezultat: 19,2 : 89 = = 0,216 (fig.).

La impărțire se poziționează numitorul in dreptul numărătorului și se citește in dreptul lui 1, sau al lui 10 de pe rigletă.

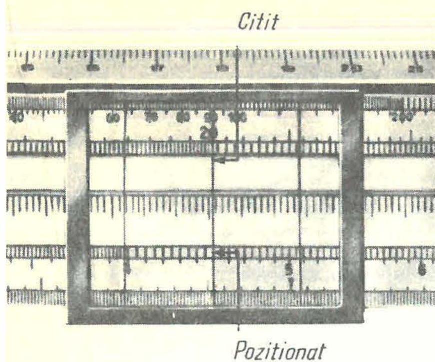
La expresii de forma $\frac{a_1 \cdot a_2 \ldots}{b_1 \cdot b_2 \ldots}$ se inmulțește și se imparte succesiv, căutind să se facă cit mai puține deplasări ale rigletei. De asemenea, la calculul *proporțiilor*, expresii de forma $y = \frac{a \cdot c}{b}$, mai intii se va realiza împărțirea $a : b$, iar rezultatul acesteia va fi multiplicat cu c. Dacă s-ar fi efectuat mai intii $a \cdot b$ și rezultatul s-ar fi impărțit cu c, ar fi trebuit făcute două deplasări ale rigletei (fig. 2.2.12).

Calculul cu scala reciprocă. Scala reciprocă R dă valorile reciproce pentru orice valoare de pe scalele C, respectiv D; de exemplu, în dreptul numărului 4 de pe scala C se găsește pe scala R valoarea sa inversă 0,25. Scala reciprocă poate fi utilizată și la înmulțiri și împărțiri. Pentru aceasta este de remarcat că $a \cdot b = a : 1/b$. La utilizarea scalei inverse în loc de înmulțire, se va efectua împărțirea.

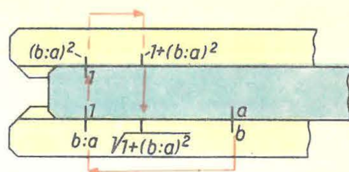
Exemplu. Se calculează 4,8 · 3,6. Calculul estimativ dă 5 · 3 = 15. În dreptul valorii 4,8 de pe scala D se aduce valoarea 3,6 de pe scala inversă R, iar rezultatul se citește pe scala D, în dreptul valorii 1, cu care începe scala inversă: 4,8 · 3,6 = 17,28.

Ridicarea la pătrat și extragerea rădăcinii pătrate. După cum s-a arătat, numerele de pe scalele A, respectiv B, reprezintă valorile pătratelor numerelor de pe scalele D, respectiv C.

Dacă se cere pătratul unui număr a, nu trebuie decît să se poziționeze acesta, cu ajutorul cursorului pe scala D, iar a^2 se citește în dreptul reperului cursorului, pe scala A (fig.). La extragerea rădăcinii pătrate se procedează în mod invers. Este însă important ca poziționarea radicalului, pe scala pătratică să fie făcută corespunzător, în ceea ce privește alegerea subscalei (fig. 2.2.13).



2.2.13. Exemplu de ridicare la pătrat $(4,5)^2 = 20,52$



2.2.14. Poziția riglei pentru calculul expresiei $\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$

$\sqrt{25} = 5$. Poziționarea lui 25 se face pe subscala ce conține numere cuprinse intre 10 și 100.

$\sqrt{250} = 15,81$. Poziționarea lui 250 se va face pe subscala cu numere cuprinse intre 1 și 10, deoarece $\sqrt{250} = \sqrt{2,5 \cdot 100} = 10\sqrt{2,5}$.

Prin urmare, radicalii cuprinși între 1 și 100 se poziționează în dreptul valorii lor de pe scala pătratică. Ceilalți radicali se aduc, prin multiplicări cu puteri ale lui 100, la o valoare cuprinsă între 1 și 100.

Ridicarea la cub și extragerea rădăcinii cubice. Pe scala K se găsesc valorile cubice ale numerelor de pe scala D. Calculul cuburilor și al rădădinilor cubice decurge la fel ca pentru pătrate și rădăcini pătrate.

Calculul lui $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Foarte des se intilnesc expresii de forma $c = \sqrt{a^2+b^2}$. Se poate presupune $b > a$ și calculul se desfășoară după relația

$$c = a\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

Etapele de parcurs sînt: calculul lui $b : a$ cu ajutorul scalelor D și C; citirea valorii lui $(b : a)^2$ pe scala A; adunarea mintală cu 1 a lui $(b : a)^2$ și poziționarea lui $\sqrt{1 + (b : a)^2}$, pe scala D; în sfîrșit, înmulțirea acestei ultime valori cu a. Figura alăturată ilustrează procedeul descris (fig. 2.2.14).

Scalele trigonometrică, pitagorică și exponențială. Pe partea opusă a rigletei, în sistemul Darmstadt se găsesc scalele: *scala sinus-tangentă*, pentru unghiuri mici, cuprinse între 34,5′ și 6°, pentru care sinusul și tangenta sînt practic egale; scala sinus, pentru unghiuri cuprinse între 5°45′ și 90°; scala tangentelor, care permite și calculul cotangentelor și este gradată de la stînga către dreapta cu valori cuprinse între 5°45′ și 45°, iar în sens invers, cu valori de la 45° pînă la 84°15′; *scala pitagorică* care dă funcția $\sqrt{1 - x^2}$ și permite astfel și calculul cosinusurilor; cele trei scale exponențiale sînt caracteristice pentru rigle de calcul sistem Darmstadt. Operațiile cu aceste scale nu vor fi abordate aici.

Precizia de calcul. Rigla de calcul este cel mai comod mijloc de calcul și poate fi utilizată oricînd, dacă precizia rezultatelor obținute astfel este suficientă. Lucrînd atent, eroarea de citire prezumată—pentru o scală cu lungimea de 12,5 cm—este de cca. 0,15%. La scalele cu lungimea de 25 cm o eroare de citire este estimată pe jumătate. Cum chiar și la cele mai simple calcule sînt de făcut mai multe poziționări și citiri, trebuie estimată o eroare de cca 0,5%, la utilizarea scalelor de 12,5 cm lungime. La calcule mai complicate este de așteptat o eroare și mai mare.

Rigle de calcul speciale există astăzi pentru diferite scopuri, cum sînt calculele diferitelor formule din electrotehnică, hidraulică, construcții, geodezie, navigație, optică. Există de asemenea „rigle de calcul" circulare, sau cilindrice, caracterizate de precizii sporite.

3. Construcţia mulţimilor de numere

Numerele sînt un produs al inteligenței omului, cu ajutorul cărora acesta percepe aspectele cantitative ale lumii înconjurătoare și stabilește relații de ordine între ele. Socotind cu numere este posibil ca pornind de la numere cunoscute să se ajungă la numere necunoscute. Acest instrument—numerele—s-a perfecționat odată cu dezvoltarea necesităților omului. Astfel au rezultat următoarele domenii de numere: *numerele naturale* 0, 1, 2, 3, ..., *numerele raționale pozitive*, de exemplu $\frac{2}{3}$, $\frac{8}{5}$; *numerele întregi*, de exemplu 0, ± 1, ± 2, ...; *numerele raționale*, de exemplu $-\frac{1}{2}$, $+\frac{7}{1}$; *numerele reale* de exemplu π, $\sqrt{2}$, $-\frac{3}{8}$; *numerele complexe*, de exemplu $3 + 4i$, $2 - 6i$, $-4 + \pi i$.

Orice om, fie el muncitor, tehnician, contabil sau avînd orice altă profesie, trebuie să stăpînească cel puțin unele din aceste domenii, adică trebuie să știe să socotească cu numere din aceste domenii. Pentru o înțelegere deplină a cuceririlor științei moderne este însă necesară cunoașterea legităților care stau la baza acestor operații, pentru că numai astfel pot fi trase concluzii generale din rezultatele obținute prin calcul. Toată experiența umană, privind operațiile de calcul, exprimată prin milioane de aplicații, se reduce în fond la un număr redus de noțiuni de bază și axiome, din care aceste reguli de calcul pot fi deduse. Fiecare domeniu de numere are structura sa tipică. Pornind de la domeniul numerelor naturale pot fi construite toate celelalte domenii de numere; domeniul numerelor complexe se obține pas cu pas, prin construcții logice, din domeniul numerelor naturale. Fundamentul acestei construcții logice îl constituie teoria multimilor și logica matematică.

3.1. Numere naturale N

Cel mai simplu domeniu de numere este mulțimea *numerelor naturale*. Acesta a rezultat dintr-o combinare a *numerelor cardinale* cu *numerele ordinale*.

În cele ce urmează nu se va mai face nici o deosebire între numerele ordinale și numerele cardinale; reprezentanții claselor respective vor fi denumiți *numere naturale*.

Axiomele lui Peano. Ar fi foarte incomod ca în cercetarea proprietăților numerelor naturale să se facă mereu apel la clase de mulțimi. Acest lucru nu este din fericire necesar, deoarece, Giuseppe PEANO (1858—1932) a arătat în anul 1891 că toate proprietățile numerelor naturale rezultă din următoarele cinci axiome:

Axiomele lui Peano

1. **0 este un număr.**
2. **Orice număr *n* are exact un succesor *n'*.**
3. **0 nu succede nici unui număr.**
4. **Două numere distincte au succesori distincți.**
5. **Mulțimea numerelor naturale este cea mai mică mulțime cu proprietățile: îl conține pe zero; odată cu orice *n* conțin și orice succesor *n'*.**

Operații cu numere naturale. Pentru numerele naturale se introduc mai întîi două operații algebrice: adunarea și înmulțirea. Cu ajutorul axiomelor lui Peano se vor deduce apoi regulile de calcul cunoscute.

Adunarea şi înmulţirea. Aceste operaţii se definesc astfel: $m + 0 = 0 + m = m$ şi $(m + n') = (m + n)'$; $m \cdot 0 = 0 \cdot m = 0$ şi $m \cdot n' = m \cdot n + m$, unde prin n' s-a notat succesorul lui n. Se poate arăta prin inducţie matematică că adunarea şi înmulţirea sînt definite unic pentru orice numere naturale. Operaţiile astfel definite se bucură de următoarele proprietăţi:

Comutativitatea	$a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$
Asociativitatea	$(a + b) + c = a + (b + c)$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Distributivitatea	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Aceste reguli de calcul se deduc din axiomele lui Peano prin inducţie. Asociativitatea $(a + b) + c = a + (b + c)$ se demonstrează ţinînd seama de $0' = 1$, $1' = 2, \ldots, m' = m + 1$ şi de definiţia operaţiei de adunare. După cum rezultă din definiţia adunării, afirmaţia este adevărată pentru $c = 1$ (baza inducţiei): $(a + b) + 1 = (a + b) + 0' = [(a + b) + 0]' = (a + b)' = a + b' = a + (b + 1)$. Se face acum ipoteza de inducţie presupunîndu-se afirmaţia adevărată pentru $c = n$; $(a + b) + n = a + (b + n)$, şi se cere să se arate că afirmaţia este adevărată pentru $c = n + 1$. Dar

$$(a + b) + n' = [(a + b) + n]' = [a + (b + n)]' = a + (b + n)' = a + (b + n').$$

Proprietatea este deci adevărată pentru orice număr natural c. Pentru mai mult decît două elemente, operaţiile se vor scrie $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = (a_1 + \ldots + a_{n-1}) + a_n$ sau $a_1 a_2 \ldots a_n = (a_1 \ldots a_{n-1}) \cdot a_n$. Într-o sumă, respectiv într-un produs se pot deci adăuga şi suprima paranteze în mod arbitrar.

Scăderea şi împărţirea. Fiind date numerele a şi b, dacă există numerele x şi y astfel încît $a + x = b$, respectiv dacă $a \neq 0$, $a \cdot y = b$, atunci x se zice diferenţa celor două numere, $x = b - a$, iar y cîtul, $y = b : a$, celor două numere. Dacă aceste numere există, atunci ele sînt unic definite şi $a + (b - a) = (a + b) - a = b$, $a \cdot (b : a) = (a \cdot b) : a = b$.

Scăderea şi împărţirea sînt operaţii inverse ale adunării, respectiv înmulţirii. Totuşi, diferenţa şi cîtul nu există (în domeniul numerelor naturale) pentru orice numere naturale p şi q.

Scăderea şi împărţirea nu se pot întotdeauna efectua în mulţimea numerelor naturale.

Pentru a înlătura această restricţie trebuie construit un alt domeniu de numere mai cuprinzător decît mulţimea numerelor naturale.

Ridicarea la putere. Pentru numerele naturale $a \neq 0$ şi n se defineşte din nou, prin recurenţă, puterea a^n

$$a^0 = 1 \quad \text{şi} \quad a^{n'} = a^n \cdot a.$$

Înmulţirea şi ridicarea la putere cît şi împărţirea puterilor se fac conform regulilor obişnuite de calcul cu puteri (v. cap. „Operaţii de ordin superior"). Operaţiile de ridicare la putere nu sînt nici comutative, nici asociative după cum se poate vedea din exemplele următoare: $3^2 = 9$ dar $2^3 = 8$, $(3^2)^3 = 9^3 = 729$, dar $3^{(2^3)} = 3^8 = 6\,561$.

Extragerea rădăcinii şi logaritmarea. Fiind date numerele a şi n ($n \neq 0$ şi $n \neq 1$) dacă există un număr b astfel încît $b^n = a$, atunci b se numeşte rădăcină de ordinul n a lui a, $b = \sqrt[n]{a}$. Fiind date numerele $a \neq 0$ şi b, dacă există un număr n astfel încît $a^n = b$, atunci n se numeşte logaritmul lui b în baza a şi $n = \log_a b$, de exemplu $5 = \sqrt[3]{125}$, $6 = \log_2 64 = \text{lb}\, 64$.

Privire generală asupra operaţiilor aritmetice :

De tip 1. *Adunarea şi operaţia inversă ei scăderea.*
De tip 2. *Înmulţirea şi operaţia inversă ei împărţirea.*
De tip 3. *Ridicarea la putere şi operaţiile ei inverse : extragerea rădăcinii şi logaritmarea.*

Prin relația de succesiune s-a introdus o relație de ordine între două elemente vecine $n' > n$. Pentru două numere oarecare a și b se introduce o relație de ordine în modul următor: dacă există un număr $c \neq 0$ astfel încît $a = b + c$, atunci a se zice mai mare decît b, $a > b$ sau $b < a$. Această relație este într-adevăr o relație de ordine. Pe lîngă proprietățile obișnuite ale unei relații de ordine ea se mai bucură de:

Proprietăți speciale ale relației de ordine dintre numerele naturale.

Trichotomie. Două numere naturale oarecare a și b sînt neapărat într-una din relațiile $a > b$ sau $b > a$ sau $a = b$.

Monotonia adunării și înmulțirii. Dacă $a > b$ iar $c \neq 0$ și $d \neq 0$ sînt două numere naturale oarecare, atunci $a + c > b + c$ și $a \cdot d > b \cdot d$; asemenea și pentru relațiile inverse.

Axioma lui Arhimede. Pentru două numere a, b naturale oarecare, $a > 0$, există un n astfel încît $a \cdot n > b$.

Ținînd seama de aceste proprietăți, mulțimea numerelor naturale se zice *liniară* și *arhimedic ordonată*.

Pentru calculele cu numere naturale sînt valabile regulile obișnuite, de exemplu următoarele în care se presupune că operațiile respective au sens:

$$a + (b - c) = (a + b) - c = a + b - c = a - c + b, \qquad (a \cdot c) : (b \cdot c) = a : b, \quad b \neq 0, \quad c \neq 0,$$

$$a - (b + c) = (a - b) - c = a - b - c = a - c - b, \qquad (b - c) : a = (b : a) - (c : a).$$

$$a - (b - c) = (a - b) + c = a - b + c = a + c - b,$$

Din proprietățile ordonării rezultă că pentru $a > 1$, puterile a^n formează un șir de numere crescătoare iar rădăcinile și logaritmul, în cazul în care există, sînt unice.

3.2. Numere raționale pozitive. Fracții

Împărțirea și măsurarea necesită o mulțime de numere în care să se poată efectua și alte operații decît cele admise pentru numerele naturale. În special este necesar să se poată efectua fără restricții împărțirea numerelor. Mulțimea astfel preconizată trebuie să conțină ca submulțime, mulțimea numerelor naturale. Condiția ca domeniul lărgit să satisfacă pe cît posibil proprietățile vechiului domeniu este denumită *postulatul permanenței*.

Construcția noilor numere. Se formează perechi ordonate de numere naturale n, m, unde $n \neq 0$ și se consideră fracțiile $\frac{m}{n}$. Două astfel de fracții se zic egale $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, dacă $mq = pn$, de exemplu $\frac{2}{1} = \frac{4}{2}$ deoarece $2 \cdot 2 = 4 \cdot 1$. Această egalitate îndeplinește condițiile echivalenței. Toate fracțiile egale pot fi cuprinse în acest caz într-o clasă, de exemplu $\left\{\frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \ldots, \frac{100}{50}, \ldots\right\}$ formează o clasă. Orice fracție aparține unei singure clase. Clasele astfel definite se numesc numere raționale pozitive sau absolute. Fiecare număr poate fi reprezentat printr-o fracție oarecare a clasei; de exemplu $\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{30}{45}, \ldots$ sînt reprezentări pentru același număr natural rațional $\alpha = \left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \ldots\right\}$. Această reprezentare se scrie pe scurt $\alpha = \left\{\frac{2}{3}\right\}$. Acolada indică deosebirea dintre clasă și reprezentantul ei.

Operații algebrice și de ordonare. Pentru introducerea operațiilor algebrice și a ordonării pentru numerele raționale pozitive se folosesc regulile de calcul cu fracții. Cu ajutorul lor se introduc definiții astfel încît noul domeniu de numere să fie înzestrat cu proprietăți care în decursul a secole de practică s-au dovedit plauzibile. Operațiile algebrice pentru $\alpha = \left\{\frac{m}{n}\right\}$ și $\beta = \left\{\frac{p}{q}\right\}$ se definesc astfel:

$$\alpha + \beta = \left\{\frac{mq + pn}{nq}\right\}, \text{ de exemplu } \left\{\frac{2}{3}\right\} + \left\{\frac{10}{7}\right\} = \frac{2 \cdot 7 + 10 \cdot 3}{3 \cdot 7} = \left\{\frac{44}{21}\right\};$$

$$\alpha - \beta = \left\{\frac{mq - pn}{nq}\right\} \text{ dacă } mq \geqslant pn;$$

$$\alpha \cdot \beta = \left\{\frac{mp}{nq}\right\}, \text{ de ex. } \left\{\frac{3}{5}\right\} \cdot \left\{\frac{20}{9}\right\} = \left\{\frac{3 \cdot 20}{5 \cdot 9}\right\} = \left\{\frac{60}{45}\right\} = \left\{\frac{4}{3}\right\},$$

$$\alpha : \beta = \left\{\frac{mq}{np}\right\} (p \neq 0); \text{ de ex. } \left\{\frac{3}{5}\right\} : \left\{\frac{7}{1}\right\} = \left\{\frac{3 \cdot 1}{5 \cdot 7}\right\} = \left\{\frac{3}{35}\right\}.$$

Se poate observa din aceste definiții că în mulțimea numerelor raționale pozitive împărțirea se poate efectua fără restricții. Scăderea și împărțirea sînt operații inverse ale adunării, respectiv înmulțirii. Scăderea nu se poate efectua fără restricții. Operațiile cu mai mult decît trei numere se definesc analog. Prin analogie cu egalitatea, se poate defini o relație de ordine: $\alpha > \beta$, dacă $mq > pn$, de ex. $\frac{8}{9} > \frac{11}{14}$ deoarece $8 \cdot 14 > 11 \cdot 9$.

Toate aceste considerații au sens cînd operațiile și relația de ordine introduse nu depind de reprezentanții claselor α și β aleși. De exemplu, în cazul ordonării, fie $\left\{\frac{m}{n}\right\} > \left\{\frac{p}{q}\right\}$ deci $mq > np$; fie $\frac{m_1}{n_1}$ o altă fracție din $\left\{\frac{m}{n}\right\}$, iar $\frac{p_1}{q_1}$ o altă fracție din $\left\{\frac{p}{q}\right\}$, atunci $\frac{m}{n} = \frac{m_1}{n_1}$ și $\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1}$.

Amplificînd $mq > pn$ prin n_1q_1 se obține $mn_1qq_1 > pq_1nn_1$. Cum din ipoteza $mn_1 = m_1n$ și $pq_1 = p_1q$, se obține prin înlocuire $m_1nqq_1 > p_1qnn_1$. Simplificînd cu nq rezultă $m_1q_1 > p_1n_1$. Relația de ordine astfel definită se bucură de aceleași proprietăți ca relația de ordine din mulțimea numerelor naturale.

Mulțimea numerelor raționale pozitive este liniară și arhimedic ordonată.

Mulțimea numerelor raționale pozitive se poate reprezenta pe o dreaptă cu păstrarea ordinii. Imaginile punctelor sînt dense pe această dreaptă, adică între două puncte oarecare se găsește întotdeauna un alt punct, de exemplu, între imaginile numerelor α și β se găsește numărul $\frac{\alpha + \beta}{2}$.

Proprietățile operațiilor algebrice pentru numere naturale ca comutativitatea, distributivitatea și altele rămîn valabile și pentru domeniul numerelor raționale absolute.

Ca exemplu, să demonstrăm asociativitatea înmulțirii. Fie

$$\alpha = \left\{\frac{m}{n}\right\}, \quad \beta = \left\{\frac{p}{q}\right\}, \quad \gamma = \left\{\frac{r}{s}\right\}.$$

Atunci

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \left\{\frac{m \cdot p}{n \cdot q}\right\}\left\{\frac{r}{s}\right\} = \left\{\frac{m \cdot p \cdot r}{n \cdot q \cdot s}\right\} = \left\{\frac{m}{n}\right\}\left\{\frac{p \cdot r}{q \cdot s}\right\} = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma).$$

Numere raționale pozitive și numere naturale. Noua mulțime de numere, astfel construită, conține ca submulțime un domeniu ce corespunde numerelor naturale, și anume acela al claselor $\left\{\frac{1}{1}\right\}, \left\{\frac{2}{1}\right\}, \left\{\frac{3}{1}\right\}, \ldots, \left\{\frac{k}{1}\right\}, \ldots$ Prin adunarea sau înmulțirea a două astfel de numere se obține tot un astfel de număr:
$\left\{\frac{m}{1}\right\}+\left\{\frac{n}{1}\right\}=\left\{\frac{m+n}{1}\right\}$ și $\left\{\frac{m}{1}\right\}\cdot\left\{\frac{n}{1}\right\}=\left\{\frac{m\cdot n}{1}\right\}$. De asemenea $\left\{\frac{m}{1}\right\}>\left\{\frac{n}{1}\right\}$ atunci și numai atunci cînd $m > n$. Punînd în corespondență lui $\left\{\frac{1}{1}\right\}$ numărul natural 1, lui $\left\{\frac{2}{1}\right\}$ numărul natural 2 și în general lui $\left\{\frac{k}{1}\right\}$ numărul natural k, se observă că se pot efectua cu $\left\{\frac{k}{1}\right\}$ exact aceleași operații ca și cu numerele naturale.

Submulțimea numerelor raționale pozitive de forma $\{k/1\}$ este izomorfă cu mulțimea numerelor naturale, în raport cu operațiile algebrice definite pentru aceasta și cu relația de ordine.

Deci numerele $\left\{\frac{k}{1}\right\}$ se vor putea scrie k și tratate tot ca numerele naturale, deci satisfac axiomele lui Peano. Și pentru celelalte numere raționale absolute ne putem dispensa acum de paranteze, de exemplu $\left\{\frac{m}{n}\right\}+\left\{\frac{p}{q}\right\}=\frac{m}{n}+\frac{p}{q}$. Există totuși o diferență în ce privește noțiunile. Fracțiile $\frac{3}{7}$ și $\frac{6}{14}$ nu sînt identice ci echivalente. Numerele pozitive $\frac{3}{7}$ și $\frac{6}{14}$ sînt însă identice. Nu se pot face greșeli de calcul dacă se respectă regulile de calcul cu fracții. La construcția acestui domeniu de numere s-a avut în vedere izomorfismul despre care s-a vorbit mai sus. Acesta este de fapt conținutul *postulatului permanenței al lui Hankel*, care se poate enunța astfel: *operațiile și relația de ordine se introduc în noul domeniu astfel încît proprietățile lor în raport cu vechiul domeniu să fie pe cît posibil păstrate.* Spre deosebire de principiul inducției matematice, postulatul permanenței nu poate fi folosit în demonstrații. Se poate trage deci concluzia:

Mulțimea numerelor raționale pozitive reprezintă o extindere a mulțimii numerelor naturale. Ea se compune din numere naturale și fracții.

Ridicarea la putere și operațiile ei inverse. În cazul în care $\beta = n$ este un număr natural, puterea $\alpha^\beta = \gamma$ se definește ca în cazul numerelor naturale. Tot așa pentru un γ dat se definesc în acest caz numerele $\alpha = \sqrt[\beta]{\gamma}$ și $\beta = \log_\alpha \gamma$ care satisface $\alpha^\beta = \gamma$. Dacă β este însă un număr rațional absolut, $\beta = \frac{r}{s}$, atunci $\alpha^\beta = \gamma$ se definește prin $\gamma = \sqrt[s]{\alpha^r}$. În acest caz pentru o valoare γ numerele $\alpha = \sqrt[\beta]{\gamma}$ și $\beta = \log_\alpha \gamma$ se definesc ca mărimi care satisfac egalitatea $\alpha^\beta = \gamma$. Dacă α, respectiv β există în domeniul numerelor raționale pozitive, atunci prin aceste relații ele sînt unic determinate.

Exemple. 1. Pentru $\alpha_1 = \frac{2}{3}$ și $\beta_1 = 3$ se obține $\gamma_1 = \alpha_1^{\beta_1} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{27}$.
Dacă se dau însă $\gamma_1 = \frac{8}{27}$ și $\beta_1 = 3$, atunci $\alpha_1 = \sqrt[\beta_1]{\gamma_1} = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$. Din $\gamma_1 = \frac{8}{27}$ și $\alpha_1 = \frac{2}{3}$ rezultă $\beta_1 = \log_{\alpha_1}\gamma_1 = \log_{\frac{2}{3}}\frac{8}{27} = 3$.

2. Pentru $\alpha_2 = \frac{9}{16}$ și $\beta_2 = \frac{1}{2}$ se obține $\gamma_2 = \alpha_2^{\beta_2} = \left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$. Dacă se dau însă $\gamma_2 = \frac{3}{4}$ și $\beta_2 = \frac{1}{2}$, atunci $\alpha_2 = \sqrt[\beta_2]{\gamma_2} = \sqrt[\frac{1}{2}]{\frac{3}{4}} = \frac{9}{16}$ deoarece $\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$; din $\gamma_2 = \frac{3}{4}$ și $\alpha_2 = \frac{9}{16}$ rezultă $\beta_2 = \log_{\alpha_2}\gamma_2 = \log_{\frac{9}{16}}\frac{3}{4} = \frac{1}{2}$.

3. Pentru $\alpha_3 = 2$, $\beta_3 = \frac{1}{2}$ rezultă $\gamma_3 = \alpha_3^{\beta_3} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$. După cum se va vedea mai departe, această expresie nu mai reprezintă un număr rațional.

3.3. Numere raționale Q

În domeniul numerelor raționale pozitive se pot efectua fără restricții operațiile: adunare, înmulțire și împărțire, nu însă și scădere. Pentru a putea efectua și scăderea se va proceda la o nouă extindere a acestui domeniu. La fel cum s-a procedat la prima extindere, se formează perechi ordonate de numere raționale pozitive (m, n) pentru care se introduce o relație de echivalență, de data aceasta – *egalitatea diferențelor*: se scrie $(\alpha, \beta) \sim (\alpha', \beta')$ dacă $\alpha + \beta' = \alpha' + \beta$. De exemplu, $\left(\frac{12}{5}, \frac{3}{5}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{10}\right)$ deoarece $\frac{12}{5} + \frac{7}{10} = \frac{5}{2} + \frac{3}{5}$. Clasa perechilor (m, n) se numește număr *rațional*. Ea se va nota la început prin $\{(m, n)\}$. Pentru noile numere, operațiile algebrice se vor defini astfel încît să fie independente de reprezentanții claselor și scăderea să se poată efectua fără restricții. Demonstrarea proprietăților acestor operații are la bază valabilitatea lor pentru numerele reale pozitive.

Semnul. Pentru a evita modul de scriere greoi $\alpha = \{(m, n)\}$, perechea $\{(m, n)\}$ se va scrie astfel: dacă $m > n$ sub forma $(n + k, n)$, pentru $m < n$ sub forma $(m, m + j)$, iar dacă $m = n$ sub forma (m, m). De exemplu $\left\{\left(2, \frac{1}{2}\right)\right\} = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left\{\left(\frac{3}{4}, 1\right)\right\} = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)$, $\left\{\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{10}\right)\right\} = \left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$. Se introduce apoi un nou mod de scriere:

$$\alpha = \begin{cases} (+k) \text{ dacă } m = n + k, \ (k > 0); \text{ de ex. } \left\{\left(2, \frac{1}{2}\right)\right\} = \left(+\frac{3}{2}\right); \\ (-k), \text{ dacă } n = m + k, \ (k > 0), \text{ de ex. } \left\{\left(\frac{3}{4}, 1\right)\right\} = \left(-\frac{1}{4}\right); \\ (0), \text{ dacă } m = n; \text{ de ex. } \left\{\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{10}\right)\right\} = (0). \end{cases}$$

Independența acestui mod de scriere de reprezentanții claselor rezultă din egalitatea diferențelor. Semnul plus sau minus se va numi pe scurt *semn* și nu trebuie confundat cu semnul care indică operațiile de adunare și scădere. Numerele $\alpha = (+k)$ se zic *pozitive* și numerele $\beta = (-k)$ *negative* iar k se numește valoare absolută a lui α, respectiv β și se notează $k = |\alpha|$,

$k = |\beta|$; k este un număr rațional pozitiv. Pentru numerele raționale se introduce relația de ordine:

$$\alpha > \beta \begin{cases} \text{dacă } \alpha \text{ este pozitiv, } \beta \text{ pozitiv sau nul și } |\alpha| > |\beta|; \text{ de exemplu } \left(+\frac{7}{3}\right) > \left(+\frac{7}{6}\right) \\ \text{dacă } \alpha \text{ este pozitiv și } \beta \text{ negativ, de exemplu } \left(+\frac{1}{100}\right) > (-1\,000) \\ \text{dacă } \alpha \text{ este negativ sau nul, } \beta \text{ negativ și } |\alpha| < |\beta|, \text{ de exemplu } \left(-\frac{2}{3}\right) > (-1). \end{cases}$$

Această relație de ordine este compatibilă cu relația de echivalență și are proprietatea de tranzitivitate. Monotonia are loc numai pentru adunarea și înmulțirea cu factori pozitivi. Semnul inegalității se inversează dacă ambele părți ale inegalității se multiplică cu același număr negativ, de exemplu din $(+5) > (+2)$ rezultă

$$(+5) + (-1) > (+2) + (-1) \quad \text{și} \quad (+5)\cdot\left(+\frac{3}{4}\right) > (+2)\cdot\left(+\frac{3}{4}\right),$$

$$\text{dar } (+5)\cdot(-1) < (+2)\cdot(-1).$$

Mulțimea numerelor raționale este arhimedic ordonată.

Numere raționale și numere raționale pozitive. Domeniul numerelor raționale conține ca subdomeniu mulțimea numerelor raționale pozitive. Dacă fiecărui număr $(+k)$ i se pune în corespondență valoarea absolută k, atunci acest subdomeniu se aplică univoc pe domeniul numerelor raționale absolute. Prin această aplicație operațiile introduse și relația de ordine se păstrează, de exemplu $(+k)\cdot(+l) = (+k\cdot l)$.

Mulțimea numerelor raționale pozitive este izomorfă cu mulțimea numerelor raționale pozitive în raport cu operațiile algebrice și relația de ordine.

Deoarece $(+k) + (-l) = (+k) - (+l)$ modul de scriere se poate simplifica astfel încît semnul pozitiv să poată fi lăsat la o parte, de exemplu, $\left(+\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{2}{5}\right) = \left(+\frac{3}{4}\right) - \left(+\frac{2}{5}\right) = \frac{3}{4} - \frac{2}{5}$.

$$\alpha^\beta = \begin{cases} |\alpha|^{|\beta|} & \text{dacă } \beta > 0, \\ 1 & \text{dacă } \beta = 0, \\ \dfrac{1}{|\alpha|^{|\beta|}} & \text{dacă } \beta < 0. \end{cases}$$

Puterea α^β este definită pentru α pozitiv astfel: α^β este definită numai pentru acele valori, pentru care $|\alpha|^{|\beta|}$ există în domeniul numerelor raționale absolute; $\sqrt[n]{\alpha}$ și $\log_\beta \alpha$ sînt definite, numai pentru α și β pozitivi ($\beta \neq 1$) și n natural, în același mod ca și pentru numerele raționale absolute.

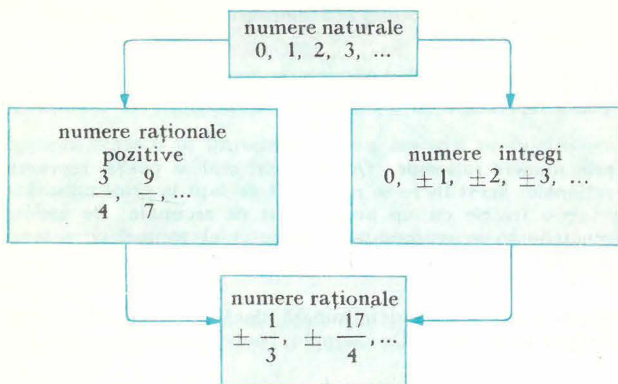
Mulțimea numerelor raționale reprezintă o extindere a mulțimii numerelor raționale pozitive. În această mulțime adunarea, scăderea, înmulțirea și împărțirea se pot efectua fără restricții, nu însă și extragerea rădăcinii și logaritmarea.

3.4. Numere întregi Z

În loc de a proceda astfel, adică pornind de la numerele naturale se construiesc numerele raționale absolute și apoi numerele raționale, se poate proceda și altfel (v. cap. 1).

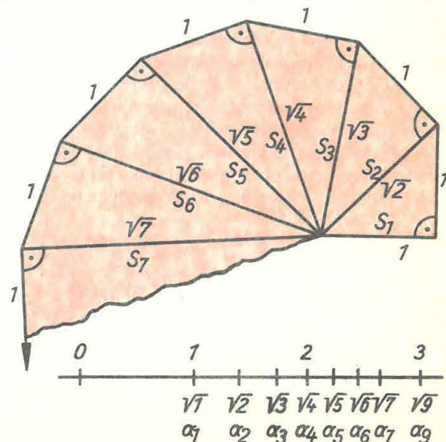
Întîi se extinde domeniul numerelor naturale cu ajutorul perechilor ordonate de numere și al relației de echivalență bazate pe egalitatea diferenței, la domeniul *numerelor întregi* 0, ± 1, ± 2, ... iar pe urmă acest domeniu se extinde cu ajutorul fracțiilor la domeniul numerelor raționale.

Domeniul numerelor întregi conține ca subdomeniu numerele întregi pozitive care este izomorf cu domeniul numerelor naturale. Domeniul numerelor raționale conține de asemenea subdomeniul numerelor $\pm k$, izomorf cu domeniul numerelor întregi. În ambele cazuri s-au obținut extinderi ale domeniului numerelor naturale.



3.5. Numere reale R

Așa cum se reprezintă numerele pozitive pe o dreaptă, pot fi reprezentate și numerele raționale pe *axa numerelor* fără însă a o acoperi în întregime. Acest lucru se poate vedea din următorul exemplu. Fiecare segment s are corespondent un număr pozitiv α care reprezintă lungimea acestui segment. Se poate construi un șir de triunghiuri dreptunghice (fig. 3.5.1) care să aibă ca latură segmentele S_1, S_2, S_3, S_4, ... corespunzătoare numerelor $\alpha_1 = 1$, α_2, α_3, α_4, ... Din teorema lui Pitagora rezultă $\alpha_2^2 = 2$, $\alpha_3^2 = 3$, $\alpha_4^2 = 4$, ... Aceste numere corespund pe axele respective punctelor trasate la distanțele s_1, s_2, s_3, s_4, ... de origine. Numerele s_1, s_2, s_3, s_4, ... nu sînt raționale; de exemplu dacă α_2 ar fi rațional, $\alpha_2 = \frac{r}{s}$ (r și s întregi primi între ei), atunci $\frac{r^2}{s^2} = 2$, ceea ce este însă imposibil, r și s fiind numere prime între ele și deci fracția $\frac{r^2}{s^2}$ nu se poate simplifica. La fel se demonstrează că α_3, α_5 etc. nu sînt raționale dar pentru α_4, α_9 și în general pentru α_n care este un pătrat perfect se ajunge la o fracție r/s cu $s = 1$, deci la un întreg. Lungimea unui cerc cu diametrul d este $\pi \cdot d$. Johann Heinrich LAMBERT (1728-1777) a demonstrat că această expresie nu este un număr rațional. Dacă fiecărui segment i se pune în corespondență un număr care să reprezinte lungimea lui, atunci se obține un nou domeniu de numere



3.5.1. Construcția segmentelor S_1, S_2, ... și a punctelor pe axa numerelor

care este o extindere a domeniului numerelor raționale. Acest domeniu nu poate fi construit, așa cum s-a procedat pînă acum, cu ajutorul perechilor de numere. Un mod de construcție a acestor numere este sugerat de procedeele folosite în măsurători. Pentru a măsura un segment prin segmentul unitate se folosesc pe rînd unitățile de măsurătoare e, $\frac{e}{10}$, $\frac{e}{100}$, ... Fiecare măsurătoare succesivă furnizează o nouă zecimală a numărului care reprezintă măsura segmentului. În general șirul acestor zecimale este infinit.

Mulțimea numerelor reale este alcătuită din mulțimea fracțiilor zecimale pozitive și negative cu o infinitate de zecimale.

Mulțimea numerelor reale cuprinde mulțimea numerelor raționale, deoarece și orice fracție zecimală finită se poate reprezenta cu o infinitate de zecimale, de exemplu $7{,}58 = 7{,}57999\ldots$

Aproximarea prin numere raționale. Orice număr real se poate reprezenta cu o precizie dată prin numere raționale. Acest lucru se realizează de fapt la orice măsurătoare care în practică se exprimă printr-o fracție cu un număr finit de zecimale; de exemplu, o treime din lungimea unui segment de 16 m reprezentată în sistemul zecimal cu o precizie de 10^{-4} este $5\frac{1}{3}$ m $\approx 5{,}3333$ m.

O fracție zecimală este complet determinată dacă se dă numărul dinaintea virgulei și o regulă de determinare a zecimalelor. De exemplu, pentru numărul α_2 cu $\alpha_2^2 = 2$, regula constă în:

din $1^2 < \alpha_2 < 2^2$, rezultă $1 < \alpha_2 < 2$,
din $1{,}4^2 < \alpha_2 < 1{,}5^2$, rezultă $1{,}4 < \alpha_2 < 1{,}5$,
din $1{,}41^2 < \alpha_2 < 1{,}42^2$, rezultă $1{,}41 < \alpha_2 < 1{,}42$,
din $1{,}414^2 < \alpha_2 < 1{,}415^2$, rezultă $1{,}414 < \alpha_2 < 1{,}415$.

Numărul $\alpha_2 = \sqrt{2}$ se găsește la mijlocul unui număr infinit de intervale cuprinse unul în altul cu extremități raționale (1; 2), (1,4; 1,5), (1,41; 1,42), ... Extremitățile din stînga ale intervalelor cresc iar cele din dreapta descresc. Lungimile intervalelor devin oricît de mici. Prin acest șir de intervale numărul $\alpha_2 = \sqrt{2}$ este unic definit. În mod analog pot fi determinate toate celelalte rădăcini din numere raționale pozitive, cu o precizie dată.

Relația de ordine și operații algebrice. În mulțimea numerelor reale se poate introduce o relație de *ordine* în mod lexicografic: numărul scris ca un șir pozitiv de cifre $\alpha = a{,}a_1a_2a_3\ldots$ este mai mare decît numărul pozitiv $\beta = b{,}b_1b_2b_3\ldots$ dacă $a > b$ sau cînd $a = b$ dacă prima zecimală a_i care se deosebește de b_i este mai mare decît b_i; de exemplu $3{,}78634\ldots > 3{,}78629\ldots$ Numerele negative se ordonează apoi în mod simetric și astfel se obține o relație de ordine pentru toate numerele reale. Numerele reale se pot reprezenta pe mulțimea punctelor unei drepte (axa numerelor reale), cu menținerea relației de ordine. Oricărui număr real îi corespunde un punct și oricărui punct îi corespunde un număr real. Adunarea și scăderea, înmulțirea și împărțirea se introduc ținîndu-se seama de felul în care s-au introdus numerele. Să considerăm, ca exemplu, împărțirea $\alpha : \beta$ a două numere reale α și β. Se va face întîi ipoteza că α și β sînt pozitive. Pentru fiecare din aceste numere există un șir de intervale (a_i, a_i'), respectiv (b_i, b_i') astfel încît $a_i < \alpha < a_i'$, $b_i < \beta < b_i'$. Atunci $\frac{1}{b_i'} < \frac{1}{\beta} < \frac{1}{b_i}$ și $\frac{a_i}{b_i'} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{a_i'}{b_i}$. Intervalele $\left\{\left(\frac{a_i}{b_i'}, \frac{a_i'}{b_i}\right)\right\}$ definesc deci raportul $\frac{\alpha}{\beta}$, extremitățile lor superioare formînd un șir descrescător, mărginit superior iar cele inferioare un șir crescător, mărginit inferior.

Lungimea l_n a celui de-al n-lea interval este

$$l_n = \left|\frac{a_n'}{b_n} - \frac{a_n}{b_n'}\right| = \left|\frac{a_n'b_n' - a_nb_n}{b_nb_n'}\right| = \frac{|(a_n' - a_n)\, b_n' + a_n\,(b_n' - b_n)|}{|b_nb_n'|}.$$

Factorii b_n' și a_n de la numitor sînt mărginiți și cum expresiile din paranteze pot fi făcute oricît de mici, rezultă același lucru pentru tot numărătorul. Deoarece β este diferit de zero, există pentru n suficient de mare o margine inferioară comună pentru b_n și b_n'. Numărul definit

prin șirul de intervale considerat se notează cu $\frac{\alpha}{\beta}$. Dacă α sau β sau α și β sînt negativi, rămîn valabile aceleași considerații.

Pentru a defini puterea α^β $(\alpha > 0)$ se formează intervalele $(a_i^{b_i}, a_i'^{b_i'})$. Ele definesc la rîndul lor un număr real. În acest caz însă, limitele intervalelor nu mai sînt raționale. Are loc următoarea proprietate de completitudine:

Teorema de completitudine. Orice șir de intervale (ρ_i, ρ_i') cu $(\rho_{i+1}, \rho_{i+1}') \subset (\rho_i, \rho_i')$ definește în mod unic un număr real ρ cu proprietatea $\rho_i \leqslant \rho \leqslant \rho_i'$ pentru orice i.

Nu vom demonstra aici această proprietate. Șirul de intervale $\{(a_i^{b_i}, a_i'^{b_i'})\}$ definește deci un număr real pe care îl vom nota cu α^β.

Operațiile algebrice, care s-au introdus aici, au aceleași proprietăți ca și în cazul numerelor raționale.

Mulțimea numerelor reale reprezintă o extindere a mulțimii numerelor raționale. Ea cuprinde și rădăcinile de orice ordin ale numerelor pozitive.

Modul de obținere a numerelor reale nu a fost aici decît schițat. Se poate introduce și în mulțimea intervalelor definite mai sus, o relație de echivalență care duce la o împărțire în clase.

Istoric. Creator al teoriei numerelor reale poate fi considerat matematicianul grec EUDOXUS (408—355 î.e.n.). Ideile sale inspirate din geometrie au fost preluate de Karl WEIERSTRASS (1815—1897) și de Richard DEDEKIND (1831—1916) și dezvoltate prin metode aritmetice și analitice moderne. Lui WEIERSTRASS îi aparține definiția numerelor reale printr-un șir descrescător de intervale. DEDEKIND a introdus numerele reale ca *tăieturi* în domeniul numerelor raționale iar Georg CANTOR (1845—1918) le-a construit cu ajutorul *șirurilor Cauchy fundamentale*. Domeniile obținute prin aceste metode diferite sînt izomorfe între ele, astfel încît domeniul numerelor reale este unic ca structură.

3.6. Fracții continue

Fracțiile continue oferă o posibilitate mai bună de aproximare a numerelor reale prin numere raționale decît reprezentarea zecimală.

Fracții continue de ordinul n. Fie $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n$ numere întregi cu $b_k > 0$ pentru $k > 0$. Se numește fracție continuă de ordinul n cu termenii $b_1, b_2, \ldots, b_n$ și cu termenul inițial b_0, $[b_0; b_1, b_2, \ldots, b_n]$ expresia

$$b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \ddots + \cfrac{1}{b_n}}}}$$

Exemplu. $n = 3$; $b_0 = 2$, $b_1 = 3$; $b_2 = 1$; $b_3 = 4$

$$2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}} = [2; 3, 1, 4] = \frac{43}{19}.$$

Fracții de aproximare. Printr-o *fracție de aproximare* de *ordinul* k $(k < n)$ se înțelege o fracție continuă întreruptă la termenul de ordinul k. Din definiția fracției continue de ordinul

n și a fracției de aproximare rezultă că aceste fracții pot fi scrise ca fracții obișnuite. Se obține

$$[b_0; b_1] = b_0 + \frac{1}{b_1} = \frac{b_0 b_1 + 1}{b_1} = \frac{A_1}{B_1},$$

$$[b_0; b_1, b_2] = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2}} = \frac{b_2(b_0 b_1 + 1) + b_0}{b_1 b_2 + 1} = \frac{A_2}{B_2},$$

$$[b_0; b_1, b_2, b_3] = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3}}} = \frac{b_3[b_2(b_0 b_1 + 1) + b_0] + b_0 b_1 + 1}{b_3(b_1 b_2 + 1) + b_1} = \frac{A_3}{B_3}.$$

Dacă A_i și B_i sînt numere întregi, de exemplu pentru fracția continuă [2; 3, 1, 4, 2, 1, 2] fracția de aproximare de ordinul 2 este $[2; 3, 1] = 2 + \frac{1}{3 + 1} = \frac{9}{4}$ cu $A_2 = 9$, $B_2 = 4$. Notînd $A_0 = b_0$, $A_{-1} = 1$, $A_{-2} = 0$, $B_0 = 1$, $B_{-1} = 0$, $B_{-2} = 1$, atunci prin inducție se obțin următoarele formule de recurență :

Formule de recurență	$A_k = b_k A_{k-1} + A_{k-2}$; $B_k = b_k B_{k-1} + B_{k-2}$

Exemplu.

	k	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	valori
	b_k	—	—	2	3	1	4	2	1	2	date
din definiție	A_k	0	1	2	7	9	43	95	138	371	valori
	B_k	1	0	1	3	4	19	42	61	164	calcuate

Pe exemplul [2; 3, 1, 4, 2, 1, 2] se poate vedea că pentru a obține pe A_k (în mod analog pe B_k) se înmulțește b_k cu următorul număr din stînga A_{k-1} și se adună A_{k-2}; în ambele cazuri indicate în schemă cu săgeată se obține $2 \cdot 1 + 0 = 2$, respectiv $4 \cdot 9 + 7 = 43$. Ca fracții de aproximare se găsesc:

$$\frac{A_0}{B_0} = 2, \quad \frac{A_1}{B_1} = \frac{7}{3} = 2{,}33; \quad \frac{A_2}{B_2} = \frac{9}{4} = 2{,}25; \quad \frac{A_3}{B_3} = \frac{43}{19} = 2{,}2631;$$

$$\frac{A_4}{B_4} = \frac{95}{42} = 2{,}2619\ \ldots; \quad \frac{A_5}{B_5} = \frac{138}{61} = 2{,}2623\ \ldots;$$

$$\frac{A_6}{B_6} = \frac{371}{164} = 2{,}262195\ \ldots = [2; 3, 1, 4, 2, 1, 2].$$

O comparație între fracția rezultată și fracția de aproximare arată legitatea denumirii acestora.

Fracțiile de aproximare aproximează fracția finală alternativ în plus și în minus cu precizie din ce în ce mai mare.

Orice număr rațional se reprezintă ca o fracție continuă.

Exemplu. Pentru reprezentarea lui $r = \frac{964}{437}$ se obține $r = \frac{964}{437} = 2 + \frac{90}{437}$; $r = b_0 + \frac{1}{r_1}$; $b_0 = [r]$ cel mai mare întreg $\leqslant r$, iar $r_1 = \frac{437}{90} = 4 + \frac{77}{90}$; $r_1 = b_1 + \frac{1}{r_2}$; $r_1 > 1$, pentru r neîntreg, $b_1 = [r_1]$, cel mai mare întreg $\leqslant r_1$.

Repetînd procedeul se obține

$$r = \frac{964}{437} = 2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{12}}}}}$$

$r = [2; 4, 1, 5, 1, 12]$.

Exemplul $\frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}$, deci $[0; 2] = [0; 1, 1]$ arată că dezvoltarea sub formă de fracție continuă nu este unică. Această unicitate se poate realiza prin condiția suplimentară $b_n > 1$ care poate fi întotdeauna îndeplinită, deoarece $[b_0; b_1, b_2, ..., b_n, 1] = [b_0; b_1, b_2, ..., b_n + 1]$. Dezvoltarea în fracție continuă permite aproximarea unei fracții cu numărător și numitor foarte mari prin fracții cu numărător și numitor mai mici, ceea ce este foarte important în probleme tehnice.

Fracții continue infinite. În mod analog se consideră fracții continue infinite $[b_0; b_1, b_2, ...]$. Fracțiile de aproximare corespunzătoare converg către un număr real. Reciproc, orice număr real se poate reprezenta printr-o fracție continuă finită sau infinită.

Reprezentarea prin fracții continue a unui număr este finită dacă și numai dacă numărul este rațional.

Exemplu. Să se reprezinte ca fracție continuă numărul $\alpha = \sqrt{2}$. Pentru a obține termenii dezvoltării se scrie:

1. $\alpha = b_0 + (\alpha - [\alpha])$, $b_0 = [\alpha]$, $\alpha - [\alpha] = \frac{1}{\alpha_1}$.

2. $\alpha_1 = b_1 + (\alpha_1 - [\alpha_1])$, $b_1 = [\alpha_1]$, $\alpha_1 - [\alpha_1] = \frac{1}{\alpha_2}$.

3. $\alpha_2 = b_2 + (\alpha_2 - [\alpha_2])$, $b_2 = [\alpha_2]$, $\alpha_2 - [\alpha_2] = \frac{1}{\alpha_3}$.

....

Se folosește inegalitatea $1 < \sqrt{2} < 2$ și se transformă:

1. $\alpha = 1 + (\sqrt{2} - 1)$, $b_0 = 1$, $\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\alpha_1}$, $\alpha_1 = \frac{\sqrt{2} + 1}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = \sqrt{2} + 1$.

2. $\alpha_1 = 2 + (\sqrt{2} - 1)$, $b_1 = 2$, $\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\alpha_2}$, $\alpha_2 = \sqrt{2} + 1$.

3. $\alpha_2 = 2 + (\sqrt{2} - 1)$, $b_2 = 2$, $\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\alpha_3}$, $\alpha_3 = \sqrt{2} + 1$.

Continuînd procedeul se obține fracția continuă periodică $[1; 2, 2, ...]$ corespunzătoare cu $\sqrt{2}$.

Cu ajutorul schemelor pentru A_k și B_k se găsesc fracțiile de aproximare:

k	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
b_k	—	—	1	2	2	2	2	2	2
A_k	0	1	1	3	7	17	41	99	239
B_k	1	0	1	2	5	12	29	70	169

De exemplu, $\frac{A_6}{B_6} = \frac{239}{169} = 1{,}414201 \ldots$ pe cînd $\sqrt{2} \approx 1{,}414214$. Fracțiile de aproximare converg către $\sqrt{2}$.

Nu numai reprezentarea ca fracție continuă a lui $\sqrt{2}$ este periodică, în general, ci se obțin *fracții continue periodice* pentru toate iraționalele pătratice, adică numerele de forma $\frac{a + b\sqrt{D}}{c}$, unde a, $b \neq 0$, $c \neq 0$ și D nu este un pătrat perfect. Acest rezultat a fost demonstrat de Joseph Louis LAGRANGE (1736—1812). Reciproca afirmației a fost demonstrată de Leonhard EULER (1707—1783).

3.7. Numere complexe C

În mulțimea numerelor reale, adunarea, scăderea, înmulțirea și împărțirea se pot efectua fără restricții. Acest lucru nu mai este valabil pentru extragerea rădăcinii $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, pentru a negativ și n par; de exemplu, pentru $\sqrt{-4}$ nu există un număr real. Rădăcinile pătrate din numere negative se folosesc însă în mod frecvent (de exemplu la rezolvarea ecuației cubice prin formulele cardanice). Pentru a înlătura aceste restricții se procedează din nou la o extindere a domeniului numerelor.

Construcția noilor numere. Se consideră perechile ordonate de numere reale (a, b). Ca relație de echivalență se consideră de această dată identitatea obișnuită, adică (a, b) este echivalent cu (a', b') dacă $a = a'$ și $b = b'$; fiecare clasă se compune deci dintr-o singură pereche. Perechea (a, b) se numește *număr complex*. Operațiile algebrice adunare, scădere, înmulțire și împărțire se definesc astfel: dacă $z_1 = (a_1, b_1)$ $z_2 = (a_2, b_2)$, atunci

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2, b_1 \pm b_2), \quad z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2, \; a_1 b_2 + b_1 a_2)$$

$$z_1 : z_2 = \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \; \frac{b_1 a_2 - b_2 a_1}{a_2^2 + b_2^2} \right), \quad z_2 \neq (0, 0).$$

Se vede că scăderea și împărțirea sînt operații inverse ale adunării, respectiv înmulțirii. Adunarea și înmulțirea satisfac proprietatea de comutativitate, asociativitate și distributivitate. De exemplu, distributivitatea poate fi demonstrată astfel: fie trei numere complexe $z_i = (a_i, b_i)$ $(i = 1, 2, 3)$. Atunci

$$z_1(z_2 + z_3) = (a_1, b_1)(a_2 + a_3, \; b_2 + b_3) = (a_1 a_2 + a_1 a_3 - b_1 b_2 - b_1 b_3, \; a_1 b_2 + a_1 b_3 + b_1 a_2 + b_1 a_3).$$

$$z_1 z_2 + z_1 z_3 = (a_1 a_2 - b_1 b_2, \; a_1 b_2 + b_1 a_2) + (a_1 a_3 - b_1 b_3, \; a_1 b_3 + b_1 a_3) = (a_1 a_2 - b_1 b_2 + a_1 a_3 - b_1 b_3, \; a_1 b_2 + b_1 a_2 + a_1 b_3 + b_1 a_3).$$

Ambele expresii sînt identice.

Operațiile de mai sus au toate proprietățile operațiilor cu numere reale în afară de acelea în care intervin inegalități. În domeniul numerelor complexe nu s-a introdus o relație de ordine.

Numere complexe și numere reale. Mulțimea numerelor complexe **C** conține submulțimea perechilor de forma $(a, 0)$ care în mod evident este izomorfă cu mulțimea numerelor reale în raport cu operațiile introduse aici; $(a, 0) + (a', 0) = (a + a', 0)$ și $(a, 0) \cdot (a' \cdot 0) = (a \cdot a', 0)$. Aceste numere pot fi tratate la fel ca numerele reale; în loc de $(a, 0)$ se va scrie simplu a. Numerele $(0, b)$ se numesc numere *pur imaginare*. O notație specială se folosește pentru numărul complex imaginar $(0, 1) = \mathrm{i}$ numit *unitate imaginară*. Se poate acum renunța la paranteze, astfel încît să se scrie:

$$(0, b) = (b, 0) \cdot (0, 1) = b \cdot \mathrm{i} \text{ și } (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + b \cdot \mathrm{i}.$$

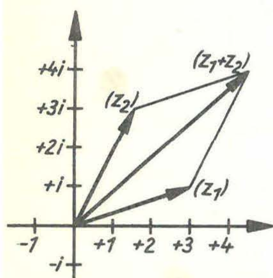
Se poate trage concluzia

Orice număr complex poate fi reprezentat ca suma unui număr real și a unui număr imaginar: $z = a + bi$, a se numește partea reală iar b partea imaginară a lui z, a și b fiind numere reale. Adunarea numerelor reale reprezintă un caz particular al adunării numerelor complexe.

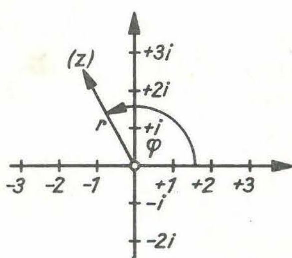
De asemenea $i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$.

Unitatea imaginară i	$i^2 = -1$

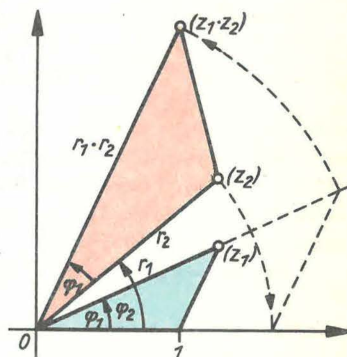
Reprezentarea numerelor complexe. Se consideră un sistem de coordonate carteziene rectangulare și se reprezintă pe axa Ox partea reală și pe axa Oy partea imaginară avînd ca unitate pe i. Numărului complex $z = a - bi$, i se pune în corespondență atunci punctul (z) cu coordonatele (a, b) sau vectorul $\vec{z} = \zeta$ care pornește din origine și are extremitatea în acest punct. Aceste corespondențe sînt univoce. Sumei $z_1 + z_2$ îi corespunde vectorul $\zeta_1 + \zeta_2$ obținut prin adunare vectorială (prin regula paralelogramului) a vectorilor ζ_1 și ζ_2 (fig. 3.7.1).



3.7.1. Adunarea numerelor complexe.



3.7.2. Modulul și argumentul unui număr complex.



3.7.3. Înmulțirea numerelor complexe.

Pentru a putea reprezenta geometric și produsul a două numere complexe se reprezintă $z = a + bi$ cu ajutorul lungimii r a vectorului z și al unghiului φ pe care-l face acest vector cu axa Ox pozitivă; r se numește *modulul numărului complex* iar φ *argumentul* lui z (fig. 3.7.2). La reprezentarea prin r și φ (reprezentarea trigonometrică) trebuie considerate valorile lui φ mai mici decît 2π în orientare pozitivă. Produsul $z_1 z_2 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ se transformă prin formulele pentru sumele de sinusuri și cosinusuri în $z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)]$.

Această reprezentare conduce la următoarea interpretare geometrică (fig. 3.7.3). Triunghiul determinat de punctele 0, (z_2) și $(z_1 \cdot z_2)$ este asemenea cu triunghiul determinat de punctele 0, (z_1) și (z_2) deoarece au unghiul φ_1 comun și raportul laturilor adiacente lui $r_1 r_2 : r_2 = r_1 : 1$. Astfel, produsul se obține printr-o construcție geometrică simplă.

Formule de transformare:	
$a = r \cos \varphi$	$r^2 = a^2 + b^2$, r real ≥ 0.
$b = r \sin \varphi$	$\cos \varphi = \dfrac{a}{r}$, $\sin \varphi = \dfrac{b}{r}$.
$z = a + bi$	$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Puteri și radicali. Dacă n este un număr natural, atunci z^n se definește prin $z^0 = 1$, $z^n = z^{n-1} \cdot z$. Folosind reprezentarea geometrică se găsește formula lui Moivre.

Prin $\sqrt[n]{z}$ se înțelege numărul complex w care ridicat la puterea n să dea z, adică soluția ecuației $w^n = z$. Fie

Formula lui Moivre	$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$

$w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$. Din formula lui Moivre rezultă pentru $w^n = z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$$\rho^n = r,\ \rho = \sqrt[n]{r},\ \psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{k\cdot 2\pi}{n},\ w = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left[\frac{\varphi}{n} + \frac{k\cdot 2\pi}{n}\right] + i\sin\left[\frac{\varphi}{n} + \frac{k\cdot 2\pi}{n}\right]\right).$$

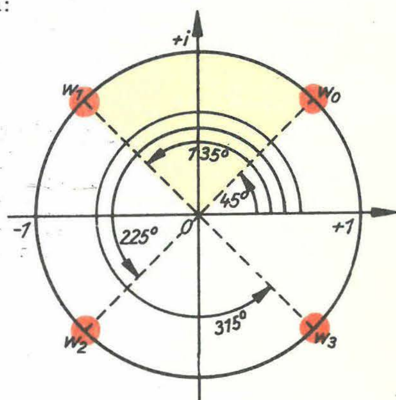
Pentru $k = 0, 1, 2, \ldots$ rezultă n valori diferite pentru w. În mulțimea numerelor complexe simbolul $\sqrt[n]{z}$ reprezintă mai multe numere. Dacă z este real și pozitiv, atunci unica rădăcină reală pozitivă de ordinul n a lui z se va numi valoare principală. În domeniul numerelor complexe se poate extrage rădăcina de orice ordin fără restricții:

Exemplu. Pentru a obține toate valorile lui $w = \sqrt[4]{-1}$ se scrie:

$z = 1[\cos(180° + k\cdot 360°) + i\sin(180° + k\cdot 360°)]$,

$$w = 1\left[\cos\left(\frac{180°}{4} + k\cdot 90°\right) + i\sin\left(\frac{180°}{4} + k\cdot 90°\right)\right],$$

pentru $k = 0$, $w_0 = \cos 45° + i\sin 45°$,
pentru $k = 1$, $w_1 = \cos 135° + i\sin 135°$,
pentru $k = 2$, $w_2 = \cos 225° + i\sin 225°$,
pentru $k = 3$, $w_3 = \cos 315° + i\sin 315°$.
Pentru $k = 4$, $w_4 = 405° = 360° + 45°$, deci $w_4 = w_0$, $w_5 = w_1, \ldots$ (fig. 3.7.4).



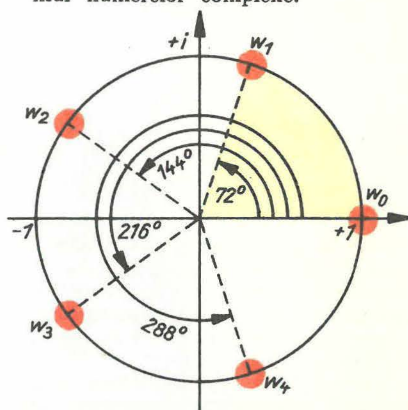
3.7.4. Valorile $w = \sqrt[4]{-1}$ în domeniul numerelor complexe.

Exemplu. Pentru a obține toate valorile lui $w = \sqrt[5]{+1}$ se scrie:

$z = 1[\cos(k\cdot 2\pi) + i\sin(k\cdot 2\pi)]$,

$$w = 1\left[\cos\frac{2k\cdot\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}\right],$$

$k = 0$ dă valoarea principală $w_0 = +1$.
$k = 1$, $w_1 = \cos 72° + i\sin 72°$.
$k = 2$, $w_2 = \cos 144° + i\sin 144°$.
$k = 3$, $w_3 = \cos 216° + i\sin 216°$.
$k = 4$, $w_4 = \cos 288° + i\sin 288°$.
Pentru $k = 5$, $\psi_5 = 360°$, deci $w_5 = w_0$, $w_6 = w_1, \ldots$ (fig. 3.7.5).



3.7.5. Valorile lui $w = \sqrt[5]{1}$ în domeniul numerelor complexe.

Rădăcinile de ordinul cinci ale unității se găsesc pe cercul unitate pe care îl împart în cinci părți egale.

În acest mod z^a este definit pentru orice a rațional, dacă pentru exponenți negativi puterea se definește ca în cazul numerelor raționale. De o deosebită importanță este următoarea teoremă fundamentală a algebrei, demonstrată prima dată de către Gauss.

Mulțimea numerelor complexe este algebric închisă, adică orice ecuație algebrică cu coeficienții complecși este rezolvabilă în mulțimea numerelor complexe.

Date istorice privind numerele complexe. Rădăcini pătrate din numere negative s-au folosit deja aproximativ de la jumătatea secolului al XVII-lea, de cînd datează și denumirea de număr imaginar. Matematicienii din secolul al XVII-lea se refereau la algebra scrisă de matematicianul din Bologna, Rafaele BOMBELLI, apărută în 1572, în care se construiește o teorie destul de consecventă a numerelor pur imaginare. Studiul numerelor complexe a fost mai tîrziu dezvoltat de către Johann BERNOULLI (1667—1748), Leonhard EULER (1707—1783) și în special de Carl Friedrich GAUSS (1777—1855). Lui GAUSS i se datorează reprezentarea plană a numerelor complexe (planul lui Gauss). Numerele complexe constituie baza *teoriei funcțiilor de o variabilă complexă.*

4. Ecuații algebrice

4.1. Noțiunea de ecuație

Istoric

După numere, egalitățile constituie una dintre primele cuceriri matematice ale științei. Ele apar deja în cele mai vechi scrieri matematice, de exemplu, în texte cuneiforme babiloniene care datează din secolul 3 i.e.n. și în papirusuri provenind din Egipt. din perioada Regatului Mijlociu, adică din jurul anului 1 800 înaintea erei noastre.

Structura societății babiloniene ridică probleme interesante de partajare a succesiunilor. Primul fiu născut primea partea cea mai mare, al doilea mai mult decît al treilea, ș.a.m.d. Una dintre aceste probleme se poate reda astfel:

„10 frați; $1\frac{2}{3}$ mine de argint. Frate după frate s-a ridicat (in favoarea părții lui). Cu cît s-a ridicat nu știu. Partea celui de-al optulea frate este de 6 seculi. Frate după frate cu cît s-a ridicat?"

Mina era o veche unitate de măsură orientală a greutății care conținea 60 de seculi. Problema se reduce la o progresie aritmetică; fratele cel mai mic a primit $2+\frac{48}{60}$ seculi și fiecare frate care urma cu $1+\frac{36}{60}$ seculi mai mult; primul născut, de exemplu, a primit $17+\frac{12}{60}$ seculi; toți la un loc 100 seculi, adică $1\frac{2}{3}$ mine.

În această problemă babiloniană, necunoscuta se exprimă destul de clar, pe cîtă vreme în papirusurile egiptene necunoscuta este desemnată prin hieroglifa folosită pentru „h", adică grămadă, mulțime, care probabil se pronunța „hau". Calculele cu „hau" apar destul de frecvent; ele

corespund, in general, ecuațiilor noastre liniare, după cum se poate ușor vedea din următoarea comparație a textului egiptean din papirusul aflat la Moscova cu modul de scriere modern:

Traducerea textuală	Modul de scriere modern
Forma socotelii unei grămezi socotită de $1\frac{1}{2}$ ori, împreună cu 4. A ajuns la 10. Cum se prezintă grămada?	$1\frac{1}{2}x + 4 = 10$
Calculează mărimea acestui 10 peste acest 4. Rezultă 6.	$10-4=6$
Socotește cu $1\frac{1}{2}$ ca să găsești 1. Rezultă $\frac{2}{3}$.	$1:\frac{3}{2}=\frac{2}{3}$
Socotește 2/3 din acest 6. Rezultă 4.	$6 \cdot 2/3 = 4$
Vezi: 4 este numărul. Ai găsit corect.	$x = 4$

Howbeit, for easie alteratiō of *equations*. I will propounde a fewe exāples, bicause the extraction of their rootes, maie the more aptly bee wroughte. And to auoide the tediouse repetition of these woordes: is equalle to: I will sette as I doe often in woorke vse, a paire of paralleles, or Gemowe lines of one lengthe, thus: =====, bicause noe .2. thynges, can be moare equalle. And now marke these nombers.

1. 14.ꝛ.—+—.15.ϑ=====71.ϑ.
2. 20.ꝛ.———.18.ϑ=====.102.ϑ.
3. 26.ȝ—+—10ꝛ=====9.ȝ—10ꝛ—+—213.ϑ.

4.1.1. Din lucrarea „Piatra spiritului" 1557, a englezului R. Recorde. Aici apare pentru prima dată semnul egalității.

Înainte de a se fi format un limbaj al semnelor algebrice, egalitățile se scriau cu cuvinte. Chiar François VIÈTE (numit mai mult VIETA (1540—1603)), care are multe merite în ce privește algebra, folosea verbul „aequare", a fi egal. Semnul egalității folosit azi „=" a fost propus de englezul Robert RECORDE (1510—1558), medic curant al regelui, dar a durat destul de mult pînă cînd s-a încetățenit. El a făcut această propunere într-un manual de algebră, scris sub formă de dialog, intitulat „The Whetstone of Witte" („Piatra Spiritului") (1557) motivînd-o prin afirmația că nimic nu este mai egal decît două drepte paralele (fig. 4.1.1).

Ecuații. Mulțimea soluțiilor

Se pornește de la o mulțime dată de numere, domeniu fundamental, și de la variabile sau necunoscute care pot fi înlocuite cu elemente din domeniul fundamental sau dintr-o submulțime a acestuia, domeniul de variație.

Cînd se specifică domeniul fundamental, se notează cu **N** mulțimea numerelor naturale, **Z** mulțimea numerelor întregi, **Q** mulțimea numerelor raționale, **R** mulțimea numerelor reale și **C** mulțimea numerelor complexe. În cele ce urmează dacă nu se va specifica altfel, **R** va fi considerat domeniul fundamental. Noțiunea de ecuație se va introduce în mod inductiv (v. cap. 15)

Expresii. Toate numerele și variabilele sînt expresii. Suma, diferența, produsul și cîtul a două expresii sînt de asemenea expresii, împărțirea cu zero fiind exclusă. La fel, ridicarea la putere și extragerea de rădăcină din expresii conduc tot la expresii. În cazul exponențierii și a extragerii de rădăcină, exponentul se consideră întreg pozitiv și indicele radicalului pozitiv.

Exemple de expresii: 5; $4/7$; a; $4x$; $b + 7$; $5(a + b)$; $(4x + 3)/y$; $x^4/2$; $\sqrt[3]{a}$.

Conceptul de expresie poate fi extins, astfel încît să includă de exemplu și $\sin x$, $\log_a x$, e^x.

O expresie E_1 se zice echivalentă cu E_2, dacă iau aceeași valoare pentru orice substituție a variabilelor cu același număr din domeniul de variație dat. De ex., expresiile $4a + 5a$ și $9a$ sînt expresii echivalente în raport cu mulțimea **R** a numerelor reale, pe cînd expresiile $(x^2 + x)/x$ și $x + 1$ nu sînt echivalente deoarece $(x^2 + x)/x$ nu este definit pentru $x = 0$, pe cînd $x + 1$ ia

valoarea 1 pentru $x = 0$. Cele două expresii sînt echivalente pentru mulțimea numerelor reale diferite de zero.

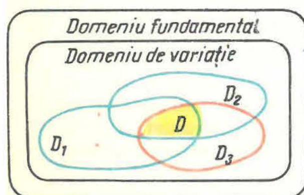
Următoarele afirmații sînt evidente:

1. Orice expresie E este echivalentă cu ea însăși.

2. Dacă E_1 este echivalentă cu E_2, atunci E_2 este echivalentă cu E_1.

3. Dacă E_1 este echivalentă cu E_2 și E_2 cu E_3, atunci E_1 este echivalentă cu E_3.

Domeniul de definiție al *unei expresii*, cuprinzînd o variabilă, este mulțimea tuturor numerelor din domeniul de variație pentru care expresia devine un număr din domeniul de variație; de exemplu, domeniul de definiție al expresiei $(4a - 5)/3$ se compune din toate numerele reale, pe cînd acela al lui $x/(x - 3)$ conține toate numerele reale diferite de 3. Domeniul de definiție al expresiilor cu mai multe variabile se definește în mod corespunzător.



4.1.2. Domeniul de definiție D al unei ecuații cu o variabilă ca rezultat al intersecției domeniilor de definiție D_i ale expresiilor E_i.

Ecuații. Dacă două expresii E_1 și E_2 sînt legate prin semnul egalității, apare o ecuație $E_1 = E_2$. E_1 se numește membrul întîi sau partea stîngă a ecuației și E_2 membrul al doilea sau partea dreaptă a ecuației.

Domeniul de definiție al unei ecuații este intersecția domeniilor de definiție ale tuturor expresiilor, cu variabile, ce intervin în ecuații (fig. 4.1.2). O ecuație ale cărei expresii nu conțin variabile este o propoziție în sensul logicii matematice care poate fi adevărată sau falsă, de ex. $3 + 2 = 5$ și $3(5 + 2) = 20 + 1$ sînt propoziții adevărate pe cînd $2 + 3 \times \times 4 = 15$ este o propoziție falsă. Dar dacă expresiile conțin variabile, atunci ecuația este un predicat, de ex. ecuațiile $3x = -12$, $4a + 3b = 1$ sau $x^2 = (6x + 24)/3$. Abia după substituirea variabilelor cu numere din domeniul de definiție al ecuației, predicatul devine o propoziție ce poate fi adevărată sau falsă.

Soluții. Orice număr din domeniul de definiție al unei ecuații cu o singură variabilă necunoscută, care fiind substituit acesteia, transformă ecuația într-o propoziție adevărată, se numește soluția ecuației. Se spune că numărul rezolvă sau satisface ecuația. Dacă ecuația conține două, trei sau n variabile, atunci o soluție este o pereche, triplet sau n-uplu de numere cu proprietatea: dacă variabilele se înlocuiesc, cu respectarea ordinii, cu elemente din această pereche, triplet, sau n-uplu, atunci ecuația se transformă într-o propoziție adevărată.

Exemplul 1. Ecuația $3x = -12$ este satisfăcută de numărul real -4, deoarece $3 \cdot (-4) = -12$ este o propoziție adevărată. Cum nu există alte soluții, -4 este soluția ecuației.

2. Ecuația $4a + 3b = 11$ este satisfăcută de ex. de perechea de numere $(2, 1)$ deoarece $4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 11$ este o propoziție adevărată. Dar mai există și alte soluții, infinit de multe; și $(2, 1)$ este o soluție a ecuației.

3. Dacă domeniul de variație al ecuației $x^2 = 2$ este mulțimea $\mathbf{Q}$ a numerelor raționale, atunci ecuația nu are soluții, deoarece nu există nici un număr rațional al cărui pătrat să fie egal cu 2.

Mulțimea soluțiilor. Mulțimea tuturor soluțiilor unei ecuații relativ la domeniul ei de definiție, se numește *mulțimea soluțiilor ecuației* S. O ecuație este inconsistentă sau consistentă după cum S este sau nu mulțimea vidă $\emptyset$.

Ecuații consistente	Ecuații inconsistente
$7x = -28$ pentru $x \in \mathbf{Z}$; $S = \{-4\}$	$7x = -28$ pentru $x \in \mathbf{N}$; $S = \emptyset$
$x^2 = 9$ pentru $x \in \mathbf{R}$; $S = \{-3; +3\}$	$x^2 = -9$ pentru $x \in \mathbf{R}$; $S = \emptyset$
$4a^2 = 1$ pentru $a \in \mathbf{Q}$; $S = \{-1/2; +1/2\}$	$4a^2 = 1$ pentru $a \in \mathbf{Z}$; $S = \emptyset$
$2x + x = 3x$ pentru $x \in \mathbf{C}$; $S = \mathbf{C}$	$3x = 3x + 1$ pentru $x \in \mathbf{C}$; $S = \emptyset$

O ecuaţie consistentă de o variabilă este o identitate dacă toate elementele din domeniul de definiţie sînt soluţii; de ex. $2x + x = 3x$ este o identitate în mulţimea numerelor complexe. O ecuaţie consistentă cu n variabile este o identitate dacă orice n-uplu ordonat de numere din domeniul de variaţie dat este o soluţie a ecuaţiei. De ex., $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ pentru $a, b \in \mathbf{R}$ este o identitate deoarece este satisfăcută de orice pereche (a, b) de numere reale. Orice transformare a unei expresii într-o expresie echivalentă comportă un şir de identităţi, de ex. transformarea $(4a + 7a) \cdot 2 = 11a \cdot 2 = 22a$ este o echivalenţă în raport cu mulţimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale. Dar transformarea

$$\frac{a^2 - 16a + 64}{5a - 5} \cdot \frac{a - 1}{a^2 - 64} = \frac{(a - 8)^2}{5(a - 1)} \cdot \frac{(a - 1)}{(a + 8)\,(a - 8)} = \frac{a - 8}{5(a + 8)}$$

este o echivalenţă numai relativ la mulţimile de numere reale ce nu conţin pe ± 8 şi 1, deoarece aceste numere nu aparţin domeniului de definiţie al expresiilor ce intervin.

Ecuaţii cu parametri. O ecuaţie cu mai multe variabile, de ex., $2a + b = 5$ pentru $a, b \in \mathbf{R}$ poate fi interpretată în două moduri.

În primul rînd cele două variabile pot fi privite în acelaşi mod şi se pot cere toate perechile de numere (a, b) care satisfac ecuaţia. Atunci $(2,1)$, $(1/2,4)$, $(-5,15)$ sînt trei dintre soluţii care în acest caz sînt în număr infinit.

În al doilea rînd una dintre variabile poate fi scoasă în evidenţă iar cealaltă considerată ca o variabilă auxiliară, sau parametru. Se cere soluţia ecuaţiei în raport cu parametrul. O astfel de soluţie conţine parametrul şi satisface ecuaţia pentru orice valoare admisă a parametrului. În exemplul de mai sus, dacă a este variabila şi b parametrul, atunci $a = (5 - b)/2$ şi $(5 - b)/2$ este expresia soluţiei ecuaţiei date, $2 \cdot (5 - b) / 2 + b = 5$ este o propoziţie adevărată pentru orice $b \in \mathbf{R}$. Dacă b este variabila şi a parametrul, atunci $b = 5 - 2a$ şi $5 - 2a$ este expresia soluţiei, deoarece $2a + (5 - 2a) = 5$ este adevărat pentru toţi $a \in \mathbf{R}$.

Într-o ecuaţie cu mai multe variabile trebuie întotdeauna stabilit care sînt variabilele adevărate şi care sînt parametrii. De exemplu, dacă în ecuaţia $3x - 2y = 5a + 1$ variabilele adevărate sînt x şi y, pe cînd a este parametru, atunci ecuaţia este ecuaţie în x şi y.

Dacă într-o ecuaţie cu n variabile nu există parametri, atunci soluţia ecuaţiei este un n-uplu de numere din domeniul de variaţie respectiv. Dacă există m variabile $(0 < m < n)$ şi $n - m$ parametri, atunci o soluţie este un m-uplu de expresii care, în general, conţin parametrul.

Ecuaţii algebrice. Într-o *ecuaţie algebrică* se fac cu variabilele şi cu elementele din domeniul de variaţie numai operaţii algebrice; ele se adună, se scad, se înmulţesc, se împart, se ridică la putere sau din ele se extrag radicali. Astfel, următoarele ecuaţii sînt ecuaţii algebrice în x: $x^3 - 5x^2 - 8x + 12 = 0$, $4(x + a)^2\,(x - b) = c \cdot \frac{1}{x}$. De asemenea $9x + 7 = 4\sqrt{5x - 31}$ poate fi privită tot ca o ecuaţie algebrică.

Coeficienţii (de ex. 5, 9, a, b, c) şi soluţiile pot să fie însă numere transcendente; astfel ecuaţia $\pi x^2 - 5 = 12$ este algebrică în x. Ecuaţia $\sin^2 x - \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} = 0$ nu este algebrică în x, însă este algebrică în $\sin x$.

Ecuaţii algebrice:

cu o variabilă		cu mai multe variabile	
liniare	neliniare	liniare	neliniare
$a + 5 = 12$	$x^3 = 27$	$x + y + z = 4$	$(x+4)^2 + y^2 = 16$
$3x - 4 = 27$	$x^2 + 3x - 4 = 0$	$4a + 3b - 6 = 0$	$x^2 + z^2 = y^3$

Forma generală a ecuaţiei algebrice cu o variabilă (necunoscută). Domeniul fundamental al variabilei x poate fi considerat cît mai larg posibil, mulţimea $\mathbf{C}$ a numerelor complexe, a_i, $i = 1,2, \ldots$ pot fi parametri reali sau complecşi; a_0 se numeşte *termen liber* sau *absolut*. Exponentul puterii celei mai mari a variabilei se numeşte *grad al ecuaţiei*. Dacă $a_n \neq 0$, atunci gradul ecuaţiei este n. Dacă ecuaţia conţine mai multe variabile, atunci se formează pentru fiecare termen suma

exponenților variabilelor și cea mai mare sumă astfel formată va fi gradul ecuației. De exemplu, ecuația $(1/6)x^5 + 4x - 6 = 0$ este de grad 5 și $a_5 = 1/6$, $a_4 = a_3 = a_2 = 0$, $a_1 = 4$, $a_0 = -6$; ecuația $x^2y - xy + 3x = 1$ este de gradul 3.

Forma generală a unei ecuații algebrice de gradul n	$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$, $x \in \mathbf{C}$; $a_i \in \mathbf{C}$ $i = 1, 2, \ldots, n$; $a_n \neq 0$.

Forma normală. O ecuație algebrică de gradul n cu o variabilă și cu coeficientul puterii celei mai mari $a_n = 1$ este în formă normală. Aceasta se obține din forma generală prin împărțire cu $a_n \neq 0$.

Ecuații transcendente. Toate ecuațiile care nu sînt algebrice se numesc transcendente. Ele își datoresc numele faptului că rezolvarea lor este mai dificilă decît cea a ecuațiilor algebrice. Ele necesită metode de rezolvare care depășesc puterea algebrei „quod algebrae vires transcendent" ca să cităm pe Leonhard EULER (1707—1783). Pe cînd pentru ecuațiile algebrice se pot obține forme generale ale soluțiilor și se pot stabili propoziții în legătură cu numărul lor, acest lucru nu mai este posibil pentru ecuațiile transcendente. Ecuațiie transcendente importante sînt: ecuațiile exponențiale, ecuațiile logaritmice și ecuațiile trigonometrice (v. cap. 10).

Ecuații echivalente

Două ecuații se zic *echivalente* dacă au același domeniu de definiție și aceeași mulțime de soluții. În caz contrar ecuațiile se zic neechivalente.

Exemple. 1. Ecuația $4a + 2 = 10$ și $6x = 12$ sînt echivalente relativ la mulțimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale, deoarece mulțimea soluțiilor pentru fiecare dintre ele îl conține numai pe 2.

2. Ecuațiile $a^2 = 9$ și $x^3 = 27$ nu sînt echivalente în raport cu mulțimea $\mathbf{Z}$ a numerelor întregi, deoarece mulțimea soluțiilor primei ecuații conține pe ± 3 iar a celei de a doua numai pe $+3$. Totuși aceste două ecuații sînt echivalente în raport cu mulțimea numerelor $\mathbf{N}$ naturale, deoarece mulțimea soluțiilor conține numai pe 3.

Exemplul 2 arată că noțiunea de „ecuații echivalente" are sens numai în raport cu un domeniu de variabile dat sau domeniul de definiție rezultat, același lucru fiind valabil pentru noțiunile de „consistență" și „inconsistență", „identitate". Relativ la domenii de definiție egale, identitățile cît și ecuațiile inconsistente sînt întodeauna echivalente.

Proprietăți privind ecuațiile echivalente:

1. Reflexivitatea: orice ecuație este echivalentă cu ea însăși.

2. Simetria: dacă o ecuație este echivalentă cu alta, atunci și cea de a doua ecuație este echivalentă cu prima.

3. Tranzitivitatea: dacă o ecuație este echivalentă cu alta și aceasta este echivalentă cu a treia ecuație, atunci prima și a treia ecuație sînt echivalente.

În consecință, echivalența ecuațiilor este o relație de echivalență (v. cap. 14).

Transformări echivalente. Printre transformările ecuațiilor se pot deosebi transformări echivalente și transformări neechivalente. Dacă ecuația (1) se transformă astfel încît să rezulte ecuația (2) echivalentă cu (1), atunci se spune că (2) se obține din (1) printr-o transformare echivalentă. Dacă S_1 și S_2 sînt mulțimile de soluții ale ecuațiilor (1) și (2), atunci o transformare echivalentă este caracterizată prin $S_1 = S_2$. În toate celelalte cazuri, transformarea se zice neechivalentă. În particular acest lucru se întîmplă atunci cînd $S_1 \subset S_2$, adică cînd prin transformare s-au obținut și alte soluții, sau cînd $S_1 \supset S_2$, adică cînd prin transformare se pierd soluții. În cazul în care $S_1 \subset S_2$, acele soluții ale ecuației (2) care nu sînt soluții ale ecuației (1) pot fi eliminate prin probă.

Exemple. 1. Trecerea de la (1) $4x = 20$, $x \in \mathbf{N}$ la (2) $x = 5$, $x \in \mathbf{N}$ este o transformare echivalentă deoarece $S_1 = S_2 = \{5\}$.

2. Transformarea ecuației (1) $x = 6$, $x \in \mathbf{Z}$ în (2) $x(x + 2) = 6(x+2)$, $x \in \mathbf{Z}$ este neechivalentă; în acest caz $S_1 = \{6\}$, $S_2 = \{-2; 6\}$ și deci $S_1 \subset S_2$.

3. Dacă se trece de la (1) $x^3 = x^2 + 12x$, $x \in \mathbf{Z}$ la (2) $x^2 = x + 12$; $x \in \mathbf{Z}$ prin împărțire cu x se obțin $S_1 = \{-3, 0, 4\}$, $S_2 = \{-3, 4\}$, $S_1 \supset S_2$ și deci transformarea este neechivalentă.

Transformări prin care se pierd soluții sînt de exemplu acelea la care se împarte o ecuație printr-o expresie ce conține variabile sau se extrag rădăcini. Atunci cînd soluția ecuației se obține prin transformări neechivalente, sînt necesare investigații suplimentare pentru găsirea soluțiilor pierdute sau adăugate. Astfel de complicații pot fi evitate prin folosirea transformărilor echivalente. De aceea este foarte important să se știe ce transformări ale unei ecuații sînt echivalente. Următoarele teoreme în care domeniul de definiție este **R** dau indicații importante în acest sens.

Propoziția 1. O ecuație $E_1 = E_2$ este echivalentă cu o ecuație $E'_1 = E'_2$ dacă perechile de expresii E_1 și E'_1, E_2 și E'_2 sînt echivalente.

Conform acestei propoziții sînt permise rotunjirea termenilor, simplificarea și amplificarea cu numere a fracțiilor, înmulțirea parantezelor; de ex., ecuațiile $4x + 7 - 2x + 15 = 8x - 6x + 13 - 3x$ și $2x + 22 = -x + 13$ sînt echivalente deoarece $S_1 = S_2 = \{-3\}$.

Propoziția 2. Ecuația $E_1 = E_2$ este echivalentă cu ecuația $E_2 = E_1$, adică prin schimbarea membrilor se obține o ecuație echivalentă.

Propoziția 3. Prin adunarea (scăderea) în ambii membri ai unei ecuații $E_1 = E_2$ a aceleiași expresii E_3, definite pentru întregul domeniu de definiție al ecuației $E_1 = E_2$, se obține ecuația echivalentă $E_1 + E_3 = E_2 + E_3$ $(E_1 - E_3 = E_2 - E_3)$.

Exemple:

(1) $8x - 29 = 4x + 31$	$+(29-4x)$	$E_1 = E_2 \quad \mid + E_3$
$8x - 29 + (29 - 4x) = 4x + 31 + (29 - 4x)$		$E_1 + E_3 = E_2 + E_3$
(2) $4x = 60$.		

Ținînd seama de propoziția 3, ecuațiile $8x - 29 = 4x + 31$ și $4x = 60$ sînt echivalente, $S_1 = S_2 = \{15\}$.

Exemplu din care rezultă necesitatea restrîngerii lui E_3:

(1) $x = 4 \quad \Big| + \dfrac{1}{x-4}$

(2) $x + \dfrac{1}{x-4} = 4 + \dfrac{1}{x-4}$

Pe cînd mulțimea soluțiilor lui (1) este $S_1 = \{4\}$, aceea a lui (2) este $S_2 = \emptyset$ deoarece $1/(x-4)$ nu este definit pentru 4. În consecință, deoarece $S_1 \neq S_2$, ecuațiile (1) și (2) sînt neechivalente.

Propoziția 4. Dacă se înmulțesc (împart) ambii membri ai unei ecuații, $E_1 = E_2$, prin aceeași expresie E_3, definită pe întreg domeniul de definiție al ecuației $E_1 = E_2$ și diferită de zero în acest domeniu, atunci ecuația $E_1 \cdot E_3 = E_2 \cdot E_3$ $(E_1/E_3 = E_2/E_3)$ este echivalentă cu ecuația inițială.

Exemple:

(1) $6a = -3$	$:6$	$E_1 = E_2 \quad \mid :E_3$
$6a/6 = -3/6$		$E_1/E_3 = E_2/E_3$
(2) $a = -1/2$		

Ecuațiile $6a = -3$ și $a = -1/2$ sînt echivalente după propoziția 4; $S_1 = S_2 = \{-1/2\}$.

(1) $\dfrac{a}{a+4} = \dfrac{-4}{a+4} \quad \Big| \cdot (a+4)$

(2) $a = -4$

Dimpotrivă trecerea de la (1) la (2) este o transformare neechivalentă, deoarece expresia $a + 4$ ia valoarea 0 pentru $a = -4$. Deoarece $S_1 = \emptyset$ și $S_2 = \{-4\}$, (1) și (2) sînt ecuații neechivalente.

Propoziția de mai sus necesită demonstrații ce vor fi omise aici. Nu există propoziții de echivalență analoage pentru ridicarea la putere sau extragerea rădăcinii, deoarece aceste operații pot duce la transformări neechivalente după cum se poate vedea din exemplele următoare.

Exemple: (1) $1 + x = \sqrt{1 - x}$	Ridicarea la putere	În raport cu mulțimea **R** a numerelor reale, ecuațiile (1) și (2) sînt neechivalente deoarece $S_1 = 0$ și $S_2 = \{-3,0\}$, adică $S_1 \neq S_2$. Numărul -3 este o soluție a ecuației (2), dar nu și a ecuației (1).
$(1 + x)^2 = (\sqrt{(1 - x)})^2$,		
$1 + 2x + x^2 = 1 - x$.		
(2) $x^2 + 3x = 0$.		

Rezolvarea ecuațiilor. A rezolva o ecuație înseamnă a găsi toate soluțiile ei relativ la domeniul de variație dat, cu alte cuvinte a găsi mulțimea soluțiilor ale cărei elemente pot fi numere, perechi de numere, n-upluri de numere, expresii cu parametri, perechi de n-upluri de altfel de expresii. În unele cazuri, rezolvarea unei ecuații se poate face prin încercări sistematice, în cele mai simple prin citirea directă a soluției iar pentru cele mai complicate prin elaborarea unor metode de rezolvare sau a unor algoritmi de rezolvare. Aceste metode constă în cele mai multe cazuri dintr-un șir de transformări echivalente succesive prin care ecuația se aduce la o formă din care soluția poate fi citită.

Model de rezolvare a unei ecuații liniare cu o variabilă folosind teoremele de echivalență. Scopul transformărilor este obținerea unei ecuații atît de simple încît soluțiile ei să poată fi citite direct.

Ecuație		Transformare
$7x - 2 - 5x$	$= -4x + 3 + 3x - 8$	Propoziția 1
$2x - 2$	$= -x - 5$	$\mid +2 + x$ Propoziția 3
$2x - 2 + 2 - x$	$= -x - 5 + 2 + x$	Propoziția 1
$3x$	$= -3$	$\mid : 3$ Propoziția 4
$3x/3$	$= -3/3$	Propoziția 1
x	$= -1$	

Acesta este un șir de ecuații echivalente. Cum echivalența este tranzitivă, ultima ecuație $x = -1$ este echivalentă cu ecuația inițială. Numărul -1 este evident unica soluție a ecuației $x = -1$ și deci unica soluție a ecuației inițiale. Toate ecuațiile din șir au mulțimea soluțiilor $S = \{-1\}$.

Probă. După găsirea soluțiilor este necesară verificarea acestora pentru a vedea dacă au fost corect găsite. Dacă toate transformările folosite sînt echivalente, atunci scopul probei este găsirea eventualelor erori și verificarea apartenenței soluției la domeniul de definiție; dacă s-au folosit și transformări neechivalente, atunci prin probă se elimină soluțiile ce apar în plus. Ea nu indică însă soluțiile pierdute.

Proba se face prin înlocuirea variabilelor din ecuația inițială cu numerele ce formează soluțiile găsite. De exemplu, pentru modelul de mai sus

$$7 \cdot (-1) - 2 - 5 \cdot (-1) = -4 \cdot (-1) + 3 + 3 \cdot (-1) - 8,$$
$$-7 - 2 + 5 = 4 + 3 - 3 - 8,$$
$$-4 = -4.$$

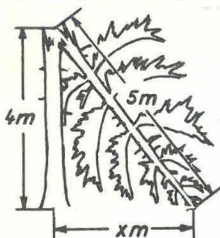
S-a obținut o propoziție adevărată, ceea ce confirmă corectitudinea calculelor. În a doua parte a probei se verifică apartenența soluției la domeniul de definiție, în cazul de față **R**. Deoarece $-1 \in \mathbf{R}$, mulțimea soluțiilor va fi de fapt $S = \{-1\}$. Dacă se presupune că domeniul de variație este **N**, atunci prima parte a probei este identică pe cînd în a doua parte $-1 \in \mathbf{N}$, astfel încît mulțimea soluțiilor este $S = \emptyset$.

Rezolvarea problemelor prin ecuații

Problemele respective se referă sau la o situație matematică exprimată în limbaj curent, sau o situație practică dintr-un domeniu aplicativ, ca de ex., științele naturii, tehnologie sau economie. În ambele cazuri, problema trebuie transpusă în limbaj matematic. Rezultă astfel ecuații. De exemplu, textul „Dacă 7 se adună la de trei ori un număr natural, se obține același rezultat ca atunci cînd se scade acest număr din 13" conduce la ecuația: $3x + 7 = 13 - x$, $x \in \mathbf{N}$, unde s-a introdus variabila în locul numărului cerut.

De regulă transpunerea problemei în limbaj matematic duce mai întîi la o ecuație între cantități și variabile cantitative și apoi, de aici, la ecuații cu numere și variabile numerice.

Exemplu. Un brad inalt de 9 m se rupe la o distanță de 4 m de la pămînt. Care este distanța dintre piciorul bradului și punctul unde vîrful atinge pămîntul?



4.1.3. Pom rupt.

1. *Fixarea variabilei:* vîrful pomului se găsește la x m de piciorul pomului.

2. *Stabilirea ecuației și a domeniului de variație:* partea rămasă în picioare are lungimea de 4 m iar cea ruptă 9 m − 4 m = 5 m. Rezultă un triunghi dreptunghic (v. fig. 4.1.3) în care aplicîndu-se teorema lui Pitagora, se obține ecuația $(4\text{ m})^2 + (x\text{m})^2 = (5\text{ m})^2$ și apoi ecuația cu numere și o variabilă $4^2 + x^2 = 5^2$ cu $x \in \mathbf{R}$ și $x > 0$.

3. *Rezolvarea ecuației:* soluțiile acestei ecuații sînt $x_1 = +3$ și $x_2 = -3$.

4. *Proba:* verificînd problema, rezultă că $x_2 = -3$ nu este acceptabilă.

5. *Răspuns:* vîrful pomului a căzut deci la o distanță de 3 m de piciorul lui.

4.2. Ecuații liniare

O ecuație este liniară sau de gradul întîi dacă necunoscuta apare numai la puterea întîi; de exemplu: $5x - 2 = 8$ este o ecuație de gradul întîi.

Denumirea de ecuație liniară derivă din aceea că soluția ei reprezintă geometric abscisa punctului de intersecție al unei linii drepte cu axa x-ilor (v. cap. „Geometria analitică a planului)". Ecuația $(x + 4)(x + 3) = (x + 1)(x + 7)$, $x \in \mathbf{R}$ este liniară deoarece poate fi adusă la forma $x - 5 = 0$. Ecuația $\frac{1}{x} = 4x$ nu este însă liniară pentru că ea se reduce la $4x^2 - 1 = 0$.

Ecuații liniare cu o variabilă

Forma generală	$ax + b = 0$	$x \in \mathbf{R}$; a, $b \in \mathbf{R}$

În forma generală, x este variabila, a și b parametrii reali, ax se numește termen liniar și b termen liber sau absolut. Cazul $a = 0$ va fi inclus în discuție deși $ax + b = 0$ cu $a = 0$ nu mai este propriu-zis liniară. Cu ajutorul transformărilor echivalente orice ecuație liniară cu o variabilă poate fi adusă la forma generală. La rezolvarea ecuației $ax + b = 0$ se pot deosebi trei cazuri:

Cazul	I. $a \neq 0$ b arbitrar	II. $a = 0$ $b \neq 0$	III. $a = 0$ $b = 0$
Rezolvarea	$ax + b = 0 \mid -b$ $ax = -b \mid :a$ $x = -b/a$	$0 \cdot x + b = 0 \mid -b$ $0 \cdot x = -b$	$0 \cdot x + 0 = 0$ $0 \cdot x = 0$
Numărul soluțiilor Mulțimea soluțiilor	exact una $S = \{-b/a\}$	nici una $S = \emptyset$	o infinitate $S = \mathbf{R}$
Proba	1. $a(-b/a) + b = 0$ $-b + b = 0$ $0 = 0$ 2. $-b/a \in \mathbf{R}$, pentru că $a, b \in \mathbf{R}$ și $a \neq 0$	deoarece $0 \cdot x = 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$, dar $b \neq 0$, nici un număr real nu satisface ecuația	orice număr real înmulțit cu zero dă zero, deci orice număr real este o soluție

Exemplul 1. Ecuații liniare fără parametru

$$\begin{array}{lll} 4a/3 + 1/2 - a & = -3/2 + 2a/3 + 5/2; \; a \in \mathbf{Q}, & \\ a/3 + 1/2 & = 2a/3 + 1 & \mid -1/2 - 2a/3; \\ -a/3 & = 1/2 & \mid :(-1/3) \\ a & = -3/2 & \end{array}$$

P r o b a: 1. $(4/3)\cdot(-3/2) + 1/2 - (-3/2) = -3/2 + (2/3)(-3/2) + 5/2$ 2. $-3/2 \in \mathbf{Q}$ – verifică

$$-2 + 1/2 + 3/2 = -3/2 - 1 + 5/2$$

$$0 = 0$$ – verifică

Mulțimea soluțiilor este deci: $S = \{-3/2\}$.

Exemplul 2. Ecuația cu variabila $x \in \mathbf{R}$ și cu parametrii $a, b \in \mathbf{R}$ conduce la o ecuație liniară în x:

$$\begin{array}{ll} (x + a)^2 - (x - b)^2 & = 2a(a + b); \\ x^2 + 2ax + a^2 - x^2 + 2bx - b^2 & = 2a^2 + 2ab \mid -a^2 + b^2 \\ 2ax + 2bx & = a^2 + 2ab + b^2 \\ 2x(a + b) & = (a + b)^2 \mid :2(a + b). \end{array}$$

Este necesar aici să se deosebească mai multe cazuri:

C a z u l î n t î i. Dacă $a + b \neq 0$, prin împărțire cu $x = (a + b)/2$, se obține $S = \{a + b)/2\}$

P r o b ă. 1. $[(a + b)/2 + a]^2 - [(a + b)/2 - b]^2 = 2a(a + b)$,

$[(3a + b)/2]^2 - [(a - b)/2]^2 = 2a^2 + 2ab$,

$[9a^2 + 6ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2]/4 = 2a^2 + 2ab$, $2a^2 + 2ab = 2a^2 + 2ab$.

Aceasta este o identitate valabilă pentru orice numere reale a și b.

2. $(a + b)/2 \in \mathbf{R}$ deoarece $a, b \in \mathbf{R}$.

C a z u l a l d o i l e a. Dacă $a + b = 0$, adică $b = -a$, ecuația dată devine $(x + a)^2 - (x + a)^2 = 2a(a - a)$. Ea este echivalentă cu $0 \cdot x = a$ și are mulțimea soluțiilor $S = \mathbf{R}$. P r o b ă. $(x + a)^2 - (x + a)^2 = 0$ este adevărată pentru orice număr real și pentru orcei parametru $a \in \mathbf{R}$.

În cazul ecuațiilor fracționare cel puțin una din variabile se găsește la numitorul unei fracții.

Exemplul 3. $\dfrac{2}{x - 2} + \dfrac{3}{x + 2} = \dfrac{5}{x}$.

Pentru orice numere reale $x \neq \pm 2$ și $x \neq 0$, înmulțirea cu numitorul comun $x(x - 2)(x + 2)$, este o transformare echivalentă care conduce la o ecuație liniară

$$\begin{array}{lll} 2x(x + 2) + 3x(x - 2) & = 5(x - 2)(x + 2), & \\ 2x^2 + 4x + 3x^2 - 6x & = 5x^2 - 20, & \mid -5x^2 \\ -2x & = -20, & \mid :(-2) \\ x & = 10. & \end{array}$$

P r o b a se face în ecuația inițială.

1. $\dfrac{2}{10 - 2} + \dfrac{3}{10 + 2} = \dfrac{5}{10}$ 2. $10 \in \mathbf{R}$, $10 \neq \pm 2$, $10 \neq 0$ – verifică

$$2/8 + 3/12 = 1/2$$

$$1/2 = 1/2$$ – verifică

$$S = \{10\}.$$

Exemplul 4. Ecuația cu parametru

$$\frac{x+2a}{2a-x}+\frac{x-2a}{2a+x}=\frac{4a^2}{4a^2-x^2}\quad\Big|\cdot(2a-x)(2a+x)\quad x\neq 2a,\ x\neq -2a$$

$$(x+2a)(x+2a)-(2a-x)(2a-x)=4a^2,$$

$$x^2+4ax+4a^2-4a^2+4ax-x^2=4a^2,$$

$$8ax=4a^2.$$

Cazul întîi: $a\neq 0$,

$x=a/2$,

$S=\{a/2\}$

Proba confirmă rezultatul.

Cazul al doilea: $a=0$.

$x/(-x)+x/x=0/(-x^2)\ |\cdot(-x^2)|x\neq 0.$

$+x^2-x^2\quad=0$

$0\cdot x^2\quad=0$

Toate numerele diferite de 0 sînt soluții.

Exemplul 5. $\sqrt[3]{x+2}=3$ este o ecuație irațională echivalentă cu o ecuație liniară

$\sqrt[3]{(x+2)}=3,\quad$ | la puterea a treia

$x+2=27\quad$ | -2

$x=25,$

$S=\{25\}$.

Proba

1. $\sqrt[3]{25+2}=3,$

$3=3$ – verifică

2. $25\in\mathbf{R}$ – verifică.

Exemplul 6. Atunci cînd apar mai mulți radicali, unul dintre ei se izolează înainte de ridicare la putere.

$$14=\sqrt{x-4}+\sqrt{x+24},$$

$\sqrt{x-4}=14-\sqrt{x+24}\quad$ | ridicare la putere

$$x-4=196-28\sqrt{x+24}+x+24,$$

$$28\sqrt{x+24}=224,$$

$$\sqrt{x+24}=8,$$

$$x+24=64,$$

$$x=40,$$

$$S=\{40\}.$$

Proba:

1. $14=\sqrt{40-4}+\sqrt{40+24}$

$14=6+8$

$14=14$ – verifică

2. $40\in\mathbf{R}$ – verifică

Următoarele exemple conțin probleme din practică care conduc la ecuații liniare cu o variabilă. Ele pot fi privite ca modele de tipuri ce se întîlnesc în mod frecvent.

Exemplul 7. Problema de amestec. Într-un cuptor Siemens-Martin se topesc 20 t de oțel cu un conținut de 0,5% carbon, cu 5 t de fontă cu 5% carbon. Ce procent de carbon are amestecul?

Fie x % carbon al amestecului, adică 25 t de amestec conțin $\frac{25\cdot x}{100}$ t carbon. Cele 20 t de oțel conțin $\frac{20\cdot 0{,}5}{100}$ t și cele 5 t de fontă $\frac{5\cdot 5}{100}$ t de carbon. Atunci $20\cdot\frac{0{,}5}{100}+5\cdot\frac{5}{100}=25\cdot\frac{x}{100}$, $x=1{,}4\%$.

Amestecul conține deci 1,4% carbon.

Exemplul 8. Trei excavatoare folosite într-o mină de lignit ridică zilnic împreună 31 000 m³ de reziduuri. Al doilea excavator ridică 1 000 m³ mai mult decît al treilea iar primul 4 000 m³ mai puțin decît dublul cantității ridicate de cel de al doilea. Ce cantitate de reziduuri înlătură zilnic fiecare excavator?

Al treilea excavator înlătură x m³ reziduuri, al doilea $(x + 1\,000)$ m³ reziduuri, primul $[2(x + 1\,000) - 4\,000]$ m³ reziduuri, toate trei 31 000 m³ $= \{x + (x + 1\,000) + [2(x + 1\,000) - 4\,000)\}$ m³. Se obține $x = 8\,000$. Al treilea excavator excavează 8 000 m³ reziduuri, al doilea 9 000 m³ reziduuri, primul 14 000 m³ reziduuri, toate împreună 31 000 m³ reziduuri.

Exemplul 9. Probleme simple de mișcare. Un tren lung de 250 m trece cu o viteză de 50 km/h printr-un tunel lung de 200 m. Cît a durat trecerea prin tunel?

Timpul de la intrarea locomotivei în tunel pînă la ieșirea din tunel a ultimului vagon este de x secunde. În acest timp, ultimul vagon parcurge $\frac{50\,000}{60 \cdot 60} x$ m; aceasta reprezintă lungimea trenului plus lungimea tunelului

$$200 + 250 = \frac{50\,000}{60 \cdot 60} x, \qquad x = 32{,}4 \text{ s}.$$

Trecerea prin tunel durează deci 32,4 secunde.

Exemplul 10. Probleme de mișcare mai complicate. Un șlep mergînd în sensul curentului apei ajunge la destinație în 2 ore. Mergînd contra curentului cu aceeași încărcare a mașinilor parcurge aceeași distanță în 3 ore. Viteza lui în apă stătătoare este de 250 m/min. Care este viteza curentului?

Fie x m/min viteza curentului. În sensul curentului viteza vaporului va fi $(250+x)$m/min și contra curentului $(250-x)$ m/min. Lungimea distanței parcurse va fi $(250 + x)\,120 = (250-x)\,180$. De unde rezultă viteza curentului: 50 m/min.

Ecuații liniare cu două variabile

Mulțimea soluțiilor unei ecuații liniare cu două variabile, de exemplu $4x + 3y - 10 = 0$, $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$ este formată din toate perechile ordonate de numere reale (x, y) care prin substituție transformă ecuația într-o propoziție ordonată, de exemplu $(1, 2)$ este o soluție deoarece $4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 10 = 0$ este o propoziție adevărată $(0; 10/3)$ și $(+3; 2/3)$ sînt de asemenea soluții. Dacă se postulează ca x și y să fie numere naturale, atunci soluțiile sînt perechi de numere naturale care satisfac ecuația; se pot considera și alte domenii de variabile.

Sisteme de două ecuații liniare. Algebra liniară dă metode de rezolvare a m ecuații liniare cu n variabile. Dacă se cere rezolvarea simultană a m ecuații cu n variabile, se spune că este vorba de un *sistem* de m ecuații cu n variabile. Orice soluție a unui astfel de sistem este un n-uplu de numere. Aici se va trata amănunțit numai cazul $m = n = 2$ (pentru m și n oarecare v. cap. 17). Orice soluție a unui astfel de sistem este o pereche ordonată de numere (x, y).

Forma generală a unui sistem de ecuații liniare	(1) $a_1x + b_1y = c_1$ (2) $a_2x + b_2y = c_2$	$x, y \in \mathbf{R}$ variabile necunoscute coeficienții $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbf{R}$

Rezolvarea unui sistem de două ecuații liniare. Prin rezolvarea unui sistem de două ecuații liniare cu două variabile se înțelege determinarea tuturor perechilor ordonate (x, y) care satisfac atît prima cît și a doua ecuație, cu alte cuvinte trebuie determinată intersecția S a mulțimii soluțiilor S_1 și mulțimii S_2 ale celor două ecuații. Singurele cazuri posibile sînt următoarele trei:

1. $S = S_1 \cap S_2 = \{(a, b)\}$. Sistemul are o soluție unică.
2. $S = S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Ecuațiile sistemului sînt inconsistente, incompatibile sau contradictorii.
3. $S = S_1 \cap S_2 = S_1$ sau S_2. Sistemul de ecuații nu are soluție unică. El are o infinitate de soluții,

Ultimul caz apare atunci și numai atunci cînd cele două ecuații sînt liniar dependente, adică atunci cînd o ecuație se obține din cealaltă prin înmulțire cu un număr real. Metodele elementare frecvent folosite pentru rezolvarea unui sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute sînt: metoda substituției, metoda comparației și metoda reducerii. Scopul acestor metode este eliminarea unei variabile astfel încît să rămînă de rezolvat două ecuații liniare cu cîte o variabilă.

Prin metoda substituției se rezolvă o ecuație în raport cu una din variabile și expresia obținută se substituie în cea de a doua.

Exemplul 1. (1) $x + y = -3$ → $x + (2x + 6) = -3$

(2) $-2x + y = 6$ → $y = 2x + 6$ → $3x + 9 = 0$

se elimină $x = -3$

$y = 2 \cdot (-3) + 6$

$y = 0$ se calculează

P r o b a se face în ambele ecuații ale sistemului.

(1) $-3 + 0 = -3$ verifică. $-3 \in \mathbf{R}$ verifică și $0 \in \mathbf{R}$ verifică.

(2) $0 - 2 \cdot (-3) = 6$ verifică.

Numerele perechi $(-3, 0)$ sînt soluții unice ale sistemului de ecuații. $S = \{(-3, 0)\}$.

Prin *metoda comparației* ambele ecuații se rezolvă în raport cu aceeași variabilă iar expresiile obținute se egalează; metoda se bazează pe proprietatea de tranzitivitate a echivalenței expresiilor.

Exemplul 2. (1) $x - 2y = 4$ → $x = 4 + 2y$

(2) $2x + 5y = 35$ → $x = (35 - 5y)/2$

$x - 2 \cdot 3 = 4$ $4 + 2y = (35 - 5y)/2$ se elimină x

$x = 10$ $y = 3$

$S = \{(10, 3)\}$.

Metoda reducerii. Înmulțind ambele ecuații cu un număr convenabil ales, se ajunge ca una dintre variabile în ambele ecuații să aibă drept coeficienți numere opuse. Prin adunarea celor două ecuații termenii respectivi se reduc și astfel variabila se elimină.

Exemplul 3. (1) $12x - 8y = 4 \mid \cdot 3$ → (1') $36x - 24y = 12$

(2) $18x - 15y = 3 \mid \cdot (-2)$ → (2') $-36x + 30y = -6$

$12x - 8 \cdot 1 = 4$ $0 \cdot x + 6y = 6$

$S = \{(1, 1)\}$. $x = 1$ $y = 1$

Pentru a obține o privire generală asupra soluțiilor unui sistem de două ecuații liniare cu două variabile x și y, se pot distinge două cazuri.

I. Pentru $a_1 = a_2 = b_2 = b_1 = 0$ în cazul $c_1 = c_2 = 0$ orice pereche de numere reale este o soluție a sistemului. Dacă însă unul din numerele c_1 și c_2 este diferit de zero, atunci nu există soluție.

(1) $a_1x + b_1y = c_1$

$x \in \mathbf{R},\ y \in \mathbf{R}$

(2) $a_2x + b_2y = c_2$

II. Dacă cel puţin unul dintre coeficienţii a_1, a_2, b_1, b_2 este diferit de zero, atunci sînt posibile trei cazuri.

	Primul caz	Al doilea caz	Al treilea caz
Ecuaţii	liniar independente şi consistente, de ex. (1) $4x + y = 12$ (2) $x + 2y = 10$	liniar dependente, de ex. (1) $4x + y = 12$ (2) $8x + 2y = 24$	inconsistente, de ex. (1) $4x + y = 12$ (2) $4x + y = 10$
Numărul soluţiilor	exact una (2, 4)	o infinitate, de exemplu: (1, 8), (2, 4) (3, 0), (4, −4), ...	nici una
Mulţimi de soluţii	$S = \{(2, 4)\}$	$S = \{(x, y) \mid 4x + y = 12\}$	$S = \emptyset$
Interpretare grafică	două drepte care se intersectează într-un punct	două drepte care coincid; o infinitate de puncte	două drepte paralele distincte; nici un punct comun

Exemplul 4.

$$(1)\ 4y(10x - 3) - 5x(8y + 7) + 165 = 0$$
$$(2)\ 9x(4y - 7) + 3y(5 - 12x) = -114$$

Înmulţind şi ordonînd

$$(1')\ -35x - 12y = -165 \quad \cdot 5$$
$$(2')\ -63x + 15y = -114 \quad \cdot 4$$

$$(1'')\ -175x - 60y = -825$$
$$(2'')\ -252x + 60y = -456$$

$$-427x = -1281 \mid : (-427)$$
$$x = 3.$$

Metoda reducerii

$$-35 \cdot 3 - 12y = -165$$
$$y = 5$$

P r o b a confirmă calculele.

Exemplul 5. Ecuaţiile se dau sub formă fracţionară. De observat că numitorii trebuie să fie diferiţi de zero.

$$(1)\ \frac{x + y + 1}{x + y - 1} = \frac{3}{2}; \quad (2)\ \frac{x - y + 1}{x + y + 1} = \frac{1}{3}$$

$$(1')\ x + y = 5$$
$$(2')\ 2x - 4y = -2$$

Exemplul 6. Variabilele sînt x şi y pe cînd a şi b sînt parametrii reali. Mulţimea soluţiilor este $S = \{(a + b,\ a - b)\}$.

Exemplul 7. A doua ecuaţie este un multiplu al celei dintîi; orice pereche ordonată de numere care o satisface pe prima o va satisface şi pe a doua. Există o infinitate de soluţii.

Exemplul 8. Ecuaţiile sînt incompatibile. Nu există soluţii: $S = \emptyset$.

Probleme care conduc la un sistem de ecuaţii liniare

Exemplul 9. Probleme de repartiţie. Un rezervor poate fi umplut cu apă de la un robinet de apă caldă şi de la un robinet cu apă rece. Dacă robinetul de apă caldă este deschis 3 min şi cel de apă rece 1 min, atunci în rezervor sînt 50 l. Dacă apa caldă curge un minut şi

apa rece 3 min, atunci în rezervor vor fi 40 l. Cîți litri de apă curg într-un minut din fiecare robinet?

Fie x l/min debitul robinetului de apă caldă și y l/min debitul robinetului de apă rece. Atunci:

(1) $3x + y = 50$
(2) $x + 2y = 40$

Prin rezolvarea sistemului se găsește că robinetul de apă caldă furnizează 12 l/min și robinetul de apă rece 14 l/min.

Exemplul 10. Probleme de amestec. Pentru a evita înghețarea apei în blocul motor și în sistemul de răcire al unui automobil se amestecă apa cu lichidul antigel cu densitatea 1,135 g/cm³. Dacă acesta are densitatea de 1,027 g/cm³, atunci se evită înghețul pînă la temperatura de −10°C. Cîți litri de antigel și cîți de apă sînt necesari la această temperatură pentru a obține 100 l de amestec?

Fie x cantitatea de antigel din amestec și y cantitatea de apă din amestec. Se poate scrie sistemul

$x + y = 100,$
$1,135x + y = 1,027 \cdot 100$

Prin rezolvarea lui se găsește că pentru a obține 100 l de amestec sînt necesari 20 l de antigel și 80 l de apă.

Rezolvarea grafică a ecuațiilor liniare și a sistemelor de ecuații liniare

Rezolvarea grafică a ecuațiilor se bazează pe corespondența biunivocă dintre soluții și punctele planului. Reprezentînd aceste puncte într-un sistem de coordonate, se pot obține soluții aproximative ale ecuațiilor. Sistemul de coordonate care se folosește este cartezian rectangular.

Rezolvarea grafică a unei ecuații liniare. Fiind dată ecuația liniară $ax + b = 0$ cu $a \neq 0$, se consideră funcția liniară $y = ax + b$. Reprezentarea grafică a acestei funcții este o dreaptă care taie axa absciselor. Coordonata punctului de intersecție este soluția ecuației $ax + b = 0$. Funcția $y = ax + b$ poate fi trasată cu ajutorul coeficientului unghiular $m = a$ și al ordonatei de origine $n = b$ (v. cap. „Geometria analitică a planului") sau calculînd pentru valori x_1 și x_2 valorile corespunzătoare y_1 și y_2 și unind punctele determinate prin coordonatele (x_1, y_1), (x_2, y_2). Abscisa punctului de intersecție a liniei trasate cu axa Ox este soluția căutată a ecuației liniare.

Exemplul 1. De la ecuația $2x - 6 = 0$ se trece la funcția $y = 2x - 6$. Graficul ei taie axa Ox în punctul $P(3, 0)$, 3 fiind soluția ecuației $2x-6 = 0$ (fig. 4.2.1).

Rezolvarea grafică a sistemelor de două ecuații liniare cu două variabile. Fiecare din cele două ecuații cu două necunoscute ale sistemului poate fi privită ca expresia analitică a unei funcții liniare. Ca reprezentări grafice a celor două ecuații într-un sistem de coordonate carteziene se obțin două drepte. Coordonatele punctelor de pe prima dreaptă satisfac prima ecuație și coordonatele punctelor de pe a doua dreaptă satisfac a doua ecuație. Coordonatele tuturor punctelor care se găsesc în același timp pe ambele drepte sînt soluțiile sistemului. În general există un singur punct comun al ambelor drepte.

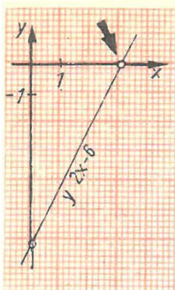
Într-un sistem de ecuații liniare trebuie ca cel puțin unul din coeficienții celor două necunoscute să fie diferit de zero. După poziția relativă a celor două drepte sistemul admite o soluție, nici o soluție sau o infinitate de soluții.

Exemplul 2. Cele două ecuații ale sistemului de ecuații reprezintă dreptele $4x - y = 2$ și $x - 2y = 3$ care trec prin cîte două puncte: (0, −2), (1, 2) pentru prima dreaptă și (−3, 0), (−1, 1) pentru a doua dreaptă. Se reprezintă cele două drepte într-un sistem de coordonate carteziene rectangulare. Coordonatele punctului de intersecție $x_s = 1$, $y_s = 2$ satisfac cele două ecuații.

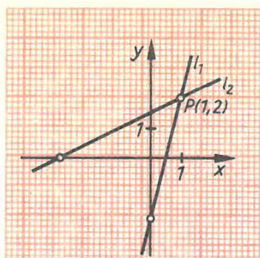
(1) $4x - y = 2$
(2) $x - 2y = -3$

Exemplul 3. Prin rezolvarea grafică a sistemului de ecuații se obțin două drepte care coincid (fig. 4.2.3). În consecință coordo-

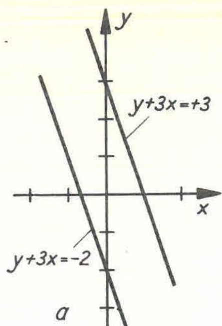
(1) $-x + y = 2$
(2) $-3x + 3y = 6$

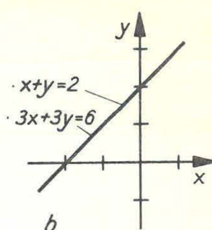


4.2.1. Soluția grafică a ecuației $2x - 6 = 0$



4.2.2. Soluția grafică a sistemului de ecuații $4x - y = 2,\ x - 2y = -3$





4.2.3. Sisteme de ecuații liniare.
a) fără soluție,
b) o infinitate de soluții

natele oricărui punct care se găsește pe dreapta dată de $-x + y = 2$ este o soluție a sistemului (fig).

Reprezentînd grafic ecuațiile (1) $y + 3x = +3$ și (2) $y + 3x = -2$, se obțin două drepte paralele, adică nu există punct de intersecție și deci mulțimea soluțiilor este $S = \emptyset$.

4.3. Ecuații de gradul doi

Într-o ecuație de gradul doi, necunoscuta apare la puterea a doua, de exemplu, $2x^2 + 5x = 16 - x$. Și ecuația $\frac{3}{x-2} + \frac{8}{x+3} = 2$, prin amplificare cu numitorul comun $(x-2)(x+3)$, se transformă în ecuația de gradul doi $2x^2 - 9x - 5 = 0$.

Forma generală a ecuației de gradul doi în x este:

Forma generală	$Ax^2 + Bx + C = 0,$	$x \in \mathbf{R};\ A, B, C \in \mathbf{R}, A \neq 0$

De exemplu în ecuația $2x^2 - 9x - 5 = 0$, $A = 2$, $B = -9$ și $C = -5$. Ax^2 se numește termen *pătratic*, Bx termen *liniar* și C termen *liber*.

Forma normală și cazuri particulare. A trebuie să fie diferit de zero, altfel ecuația devine liniară. În forma generală se poate împărți cu A:

$$Ax^2 + Bx + C = 0 : A$$

$$x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0.$$

În această ecuație, echivalentă cu cea inițială, se notează $\frac{B}{A} = p$ și $\frac{C}{A} = q$ și se obține forma normală:

Forma normală a ecuației de gradul doi	$x^2 + px + q = 0$	$x \in \mathbf{R}, p, q \in \mathbf{R}$

Această ecuație se deosebește prin aceea că coeficientul puterii celei mai mari a necunoscutei x este 1. Dacă ecuația conține toți termenii, adică $p \neq 0$ și $q \neq 0$, atunci se spune că ecuația este *completă* sub *forma normală*. Pot apărea însă și cazuri speciale cînd unul din coeficienții p, q sau amîndoi au valoarea 0.

Forma normală a ecuației de gradul doi și cazurile ei particulare

p	q	Ecuația	Denumirea ei
$\neq 0$	$\neq 0$	$x^2 + px + q = 0$	completă
0	$\neq 0$	$x^2 + q = 0$	incompletă pur pătratică
$\neq 0$	0	$x^2 + px = 0$	incompletă fără termen liber
0	0	$x^2 = 0$	incompletă pur pătratică fără termen liber

Rezolvarea numerică a ecuației de gradul doi

Rezolvarea cazurilor particulare este mai simplă și va fi tratată mai întîi.

Ecuația $x^2 = 0$ nu poate avea decît soluțiile $x_1 = x_2 = 0$, deoarece dacă $x < 0$ sau $x > 0$, atunci $x^2 > 0$.

Rezolvarea ecuației incomplete pur pătratice $x^2 + q = 0$; $q \neq 0$. Din $x^2 + q = 0$ se obține $x^2 + q = x^2 - (-q)^2 = (x - \sqrt{-q})(x + \sqrt{-q})$ și deci se ajunge la ecuația echivalentă

$$(x - \sqrt{-q})(x + \sqrt{-q}) = 0.$$

Deoarece un produs nu poate fi nul decît dacă cel puțin unul din factori este nul, rezultă $x - \sqrt{-q} = 0$ sau $x + \sqrt{-q} = 0$. De aici se obține $x_1 = \sqrt{-q}$ și $x_2 = -\sqrt{-q}$ sau prescurtat $x_{1,2} = \pm\sqrt{-q}$.

Proba. $(\pm\sqrt{-q})^2 + q \overset{?}{=} 0$, $\quad \pm\sqrt{-q}$ este real dacă $q < 0$.

$-q + q \overset{?}{=} 0$,

$0 = 0$ verifică

$x_{1,2} = \pm\sqrt{-q}$ sînt deci soluțiile ecuației $x^2 + q = 0$; ele sînt singurele soluții ale acestei ecuații deoarece pentru $|x| \neq \sqrt{-q}$ rezultă $x^2 \neq -q$; $S = \{\sqrt{-q}, -\sqrt{-q}\}$.

Dacă $q < 0$, adică numărul de sub radical este pozitiv, atunci ecuația admite două soluții reale, egale în valoare absolută.

Dacă însă $q > 0$, atunci numărul de sub radical este negativ și ecuația nu are soluții în mulțimea numerelor reale; în mulțimea numerelor complexe, însă, ecuația admite două soluții imaginare de semne opuse și egale în valoare absolută.

Exemple:

1. $x^2 - 4 = 0$, $x \in \mathbf{R}$. Ecuație pur pătratică

$x_{1,2} = \pm\sqrt{4}$ soluții

$x_{1,2} = \pm 2$, $S = \{-2, +2\}$.

2. $x^2 + 144 = 0$ Ecuație pur pătratică

$x_{1,2} = \pm\sqrt{-144} \notin \mathbf{R}$ $S = \emptyset$ soluții

$x_{1,2} = \pm 12i \in C$ $S = \{-12i, +12i)$

Ecuația din exemplul 1 are două soluții $x_1 = +2$ și $x_2 = -2$, aceea din exemplul 2 nu are în domeniul numerelor reale nici o soluție; însă în domeniul numerelor complexe are două soluții imaginare. În ambele exemple, soluțiile se verifică prin probă.

Rezolvarea ecuației incomplete fără termen liber $x^2 + px = 0$, $p \neq 0$, $x \in \mathbf{R}$, $p \in \mathbf{R}$

$x^2 + px = 0$ | x factor comun

$x(x + p) = 0$

$x_1 = 0$, $x_2 = -p$. $S = \{0, -p\}$

Acestea sînt unicele soluții, deoarece un produs se anulează atunci cînd se anulează unul din factori.

P r o b ă: pentru $x_1 = 0$, $0^2 + p \cdot 0 \stackrel{?}{=} 0$, pentru $x_2 = -p$; $(-p)^2 + p(-p) \stackrel{?}{=} 0$

$$p^2 - p^2 \stackrel{?}{=} 0$$

$$0 = 0 \qquad\qquad 0 = 0$$

S-au obținut în acest caz două soluții reale diferite dintre care una este nulă.

Exemplu. $7x^2 - 2x = 0$ $\quad : 7,$

$$x^2 - \frac{2}{7}x = 0 \qquad x \text{ factor comun,}$$

$$x\left(x - \frac{2}{7}\right) = 0,$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{2}{7} \cdot \qquad S = \{0, -p\}.$$

P r o b a arată că x_1 și x_2 sînt într-adevăr rădăcinile ecuației.

Rezolvarea ecuației complete $x^2 + px + q = 0$, $p \neq 0$, $q \neq 0$. Rezolvarea ecuației sub formă normală se face prin completarea părții stîngi a ecuației astfel încît să devină un pătrat perfect. În felul acesta ecuația se transformă într-o ecuație pur pătratică.

În ecuația $x^2 + 2x - 5 = 0$ sau $x^2 + 2x = 5$, $x^2 + 2x$ pot fi considerați primii doi termeni ai pătratului perfect $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$. Pentru a obține un pătrat perfect lipsește doar numărul 1 care se va adăuga în ambele părți ale ecuației. Astfel $x^2 + 2x + 1 = 5 + 1$ sau $(x + 1)^2 = 6$. Rezolvînd această ecuație, se rezolvă și ecuația inițială. Aici s-a adăugat un număr; în general se adaugă jumătate din valoarea coeficientului liniar în forma normală.

Modul de rezolvare

$x^2 + 2x - 5 = 0$	$+5$	$-q$	$x^2 + px + q = 0$
$x^2 + 2x = 5$	$+1$	$+\left(\frac{p}{q}\right)^2$	$x^2 + px = -q$
$x^2 + 2x + 1 = 5 + 1$			$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$
$(x + 1)^2 = 6$			$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$
$x_{1,2} + 1 = \pm\sqrt{6}$	-1	$-\frac{p}{2}$	$x_{1,2} + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
$x_1 = -1 + \sqrt{6}$			$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
$x_2 = -1 - \sqrt{6}$			$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Probă: $\left[-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right]^2 + p\left[-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right] + q \overset{?}{=} 0$

$$\frac{p^2}{4} \mp p\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q - \frac{p^2}{2} \pm p\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} + q \overset{?}{=} 0$$

$$\frac{p^2}{4} + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q - \frac{p^2}{2} + q \overset{?}{=} 0$$

$$-q + q \overset{?}{=} 0$$

$$0 = 0$$

Ecuația $x^2 + px + q = 0$, $x \in \mathbb{C}$	soluții $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Această formulă de rezolvare conține și soluțiile cazurilor speciale care se obțin prin înlocuirea lui p și q prin $p = 0$, sau $q = 0$ sau $p = 0$, $q = 0$. Formula este aplicabilă doar pentru forma normală.

Cazuri de rezolvare. Discriminanți. Cînd coeficienții ecuației de gradul doi $x^2 + px + q = 0$ sînt numere reale, apar trei cazuri în care ecuația este rezolvabilă. Soluțiile sînt sau reale și distincte, sau reale și confundate, sau complexe conjugate. În cel de-al treilea caz, ecuația nu admite soluții în domeniul numerelor reale. Natura rădăcinilor este determinată de numărul de sub semnul radicalului în formula de rezolvare a ecuației complete în forma normală $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$. Expresia de sub radical poartă numele de *discriminant* (de la latinescul discriminare = a separa, a decide) și se notează cu D.

Discriminantul formei normale	$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$

Cele trei cazuri sînt rezumate în următoarea tabelă:

Discriminant	radical	cele două soluții
$D > 0$	real	reale, diferite
$D = 0$	nul	reale, egale
$D < 0$	imaginar	complexe, conjugate

Modul de rezolvare și formula de rezolvare sînt aceleași cînd coeficienții ecuației în forma normală sînt numere complexe. Cele două soluții sînt în acest caz egale cînd discriminantul este nul; altfel se obțin două soluții diferite, nu neapărat conjugate.

Exemplul 1. $x^2 + 4x - 5 = 0, \quad x \in \mathbf{R}$.

$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2^2 + 5}$

$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{9}$

$x_{1,2} = -2 \pm 3$

$x_1 = 1$

$x_2 = -5$

Proba: $1 + 4 - 5 \stackrel{?}{=} 0$

$0 = 0$

$(-5)^2 + 4(-5) - 5 \stackrel{?}{=} 0$

$25 - 20 - 5 \stackrel{?}{=} 0$

$0 = 0$

Se găsesc două soluții reale diferite.

Exemplul 2.

$2x^2 - 16x + 36 = 0 \quad x \in \mathbf{R}$

$x^2 - 8x + 18 = 0$

$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{4^2 - 18}$

$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{-2}$

$x_{1,2} = 4 \pm i\sqrt{2}$

$x_1 = 4 + i\sqrt{2}$

$x_2 = 4 - i\sqrt{2}$

Proba:

$2(4 \pm i\sqrt{2})^2 - 16(4 \pm i\sqrt{2}) + 36 \stackrel{?}{=} 0$

$2(16 \pm 8i\sqrt{2} - 2) - 64 \mp 16i\sqrt{2} + 36 \stackrel{?}{=} 0$

$32 \pm 16i\sqrt{2} - 4 - 64 \mp 16i\sqrt{2} + 36 \stackrel{?}{=} 0$

$32 - 4 - 64 + 36 \stackrel{?}{=} 0$

$0 = 0$

Ecuația nu are soluții în domeniul numerelor reale. Are însă două soluții complexe.

Exemplul 3. $x^2 - 14x + 49 = 0 \quad x \in \mathbf{R}$

$x_{1,2} = 7 \pm \sqrt{7^2 - 49}$

$x_{1,2} = 7 \pm \sqrt{0}$

$x_{1,2} = 7$

$x_1 = 7$

$x_2 = 7$

Proba: $7^2 - 14 \cdot 7 + 49 \stackrel{?}{=} 0$

$49 - 98 + 49 \stackrel{?}{=} 0$

$0 = 0$

Ecuația are două rădăcini reale confundate.

Exemplul 4. Ecuația fracționară $\dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{4x-3}{5x-10} - \dfrac{7}{10}$ **pentru** $x \in \mathbf{R}$ **se transformă după înmulțirea cu** $10 \cdot (x+1) \cdot (x-2)$, pentru $x \neq -1$ și $x \neq 2$ **într-o ecuație de gradul** doi $9x^2 - 39x + 12 = 0$. Soluția ecuației este $S = \left\{\dfrac{1}{3}, 4\right\}$.

Exemplul 5.

$\sqrt{x + 2 + \sqrt{2x+7}} = 4$ | prin ridicare la pătrat

$x + 2 + \sqrt{2x+7} = 16$

$\sqrt{2x+7} = 14 - x$ | prin ridicare la pătrat

$2x + 7 = 196 - 28x + x^2,$

$x^2 - 30x + 189 = 0,$

$x_1 = 21,$

$x_2 = 9.$

Proba:

pentru x_1: $\sqrt{21 + 2 + \sqrt{2 \cdot 21 + 7}} = 4$

$\sqrt{30} = 4$ **nu verifică**

pentru x_2: $\sqrt{9 + 2 + \sqrt{2 \cdot 9 + 7}} = 4$

$4 = 4$ **verifică**

Ridicarea la pătrat a fost o transformare *neechivalentă*. După cum a arătat proba numai $x_2 = 9$ este soluția ecuației inițiale; deci $S = \{9\}$.

Nu orice ecuație avînd radicali de ordinul doi conduce la o ecuație de gradul doi. Înlăturarea radicalilor cu exponent întreg este întotdeauna posibilă; un exemplu este ecuația $\sqrt[3]{(x+7)^2} - \sqrt[3]{x+7} = 6$, care, pentru $x \in \mathbf{C}$ admite mulțimea soluțiilor $S = \{-15, 20\}$.

Probleme practice care conduc la ecuații de gradul doi

Ecolotul. Pentru măsurarea adîncimii mărilor se folosește ecoul. Emițătorul de sunet se găsește la o extremitate a unui vapor în punctul A și receptorul la cealaltă extremitate în punctul B (fig. 4.3.1). Lățimea vaporului este de 16 m. Sunetul se propagă în apă cu o viteză de 1 510 m/s. Vaporul stă cînd se măsoară timpul între emitere și recepție. Care este adîncimea apei cînd timpul între emitere și recepție este de 0,1 s?

Fie x m adîncimea apei. Sunetul străbate pînă la fundul mării distanța 1 510 · 0,1/2 m. După teorema lui Pitagora

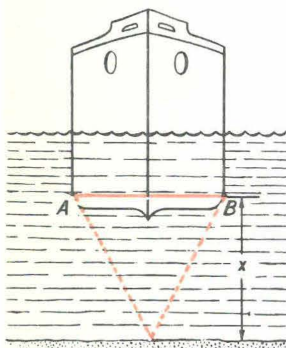
$$x^2 = \left(\frac{1\,510 \cdot 0,1}{2}\right)^2 - 8^2,$$

$$x^2 = 5\,636,25,$$

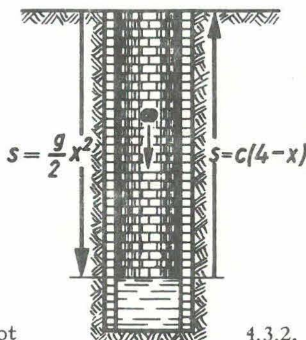
$$x_{1,2} = \pm\sqrt{5\,636,25} \approx \pm 75,1.$$

Adîncimea apei este deci de 75,1 m. A doua rădăcină $x_2 = -75,1$ nu are nici o însemnătate practică.

Adîncimea unei fîntîni. Pentru a măsura adîncimea unei fîntîni se lasă să cadă liber o piatră. Se măsoară timpul de la începutul căderii și pînă cînd se aude piatra căzînd în apa fîntînii. Acest timp este de 4 s (fig. 4.3.2). Se socotește viteza sunetului $c = 333$ m/s și accelerația gravitației $g = 9,81$ m/s². La ce adîncime de marginea fîntînii se găsește apa?



4.3.1. Ecolot



4.3.2. Adîncimea unei fîntîni

Fie x timpul de la începutul căderii și pînă ce piatra atinge suprafața apei. Distanța corespunzătoare va fi atunci $\frac{x^2}{2} \cdot g$ m. Sunetului îi trebuie $(4 - x)$ s ca să ajungă sus după ce s-a produs și parcurge o distanță de $(4 - x)c$ m. Cum cele două distanțe sînt egale,

$$\frac{g}{2}x^2 = c(4 - x) \quad \text{sau} \quad x^2 + \frac{2c}{g}x - \frac{8c}{g} = 0.$$

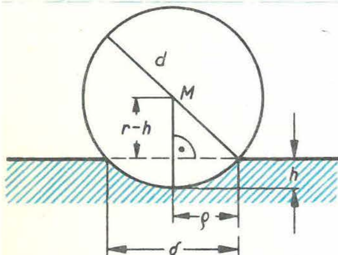
Pentru necunoscuta x se obțin valorile

$$x_{1,2} = -\frac{c}{g} \pm \frac{1}{g}\sqrt{c(c + 8g)}$$

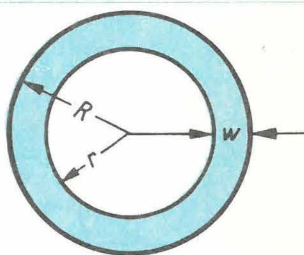
însă numai $x_1 = -\frac{c}{g} + \frac{1}{g}\sqrt{c(c+8g)}$ fiind pozitivă poate fi acceptată ca soluție a problemei. Dacă se introduc valorile date pentru c și g, se găsește adîncimea fîntînii 70 m.

Determinarea durității. Pentru a determina duritatea unui material se folosește proba sferei după BRINELL. Se consideră o sferă de oțel cu diametrul cunoscut, $d = 2r$, cu care se apasă materialul cercetat. Fie h adîncimea urmei lăsate de sferă în material și $\delta = 2\rho$ diametrul cercului de intersecție a sferei cu materialul respectiv (fig. 4.3.3). Se cere valoarea lui h pentru un diametru $d = 2r = 10$ mm și $\delta = 2\rho = 6$ mm.

Cu ajutorul teoremei lui Pitagora se obține $r^2 = (r-h)^2 + \rho^2$. În forma generală se obțin pentru h valorile $h_{1,2} = r \pm \sqrt{r^2 - \rho^2}$. Aici va fi utilizată numai valoarea $h_2 = r - \sqrt{r^2 - \rho^2}$ deoarece pentru valori h mai mari decît raza r, cercul de secțiune maximă are întotdeauna raza $\rho = r$ și procedeul nu este aplicabil. Dacă se introduc valorile numerice ale lui r și ρ, atunci se obține $h = 1$ mm.



4.3.3. Determinarea durității cu sfera Brinell



4.3.4. Secțiune într-o sferă goală

Problema stereometrică. O sferă goală de oțel are masa $M = 72\,900$ g. Grosimea pereților ei este $w = 6$ cm (fig. 4.3.4). Cît de mari sînt raza sferei interioare și raza sferei exterioare dacă densitatea $\rho = 7{,}8$ g/cm³?

Fie r raza sferei interioare exprimată în cm. Raza sferei exterioare va fi atunci $(x + 6)$ cm. Masa sferei goale va fi atunci $M = \frac{4\pi}{3}(R^3 - r^3)\,\rho$, adică $M = \frac{4\pi}{3}[(x+6)^3 - x^3]\,\rho$. De aici rezultă ecuația de gradul doi $x^2 + 6x = \frac{M}{24\pi\rho} - 12$ cu soluția

$$x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{\frac{M}{24\pi\rho} - 3}\,.$$

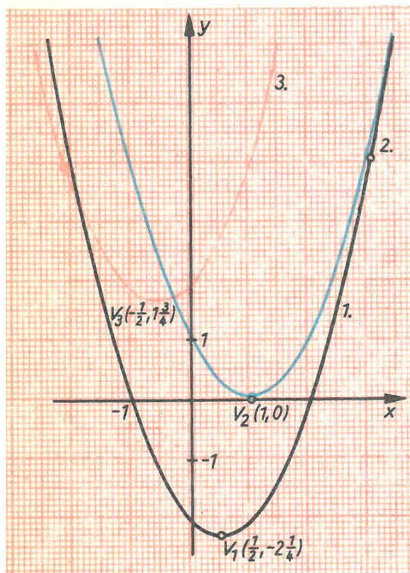
Numai valoarea $x_1 = -3 + \sqrt{\frac{M}{24\pi\rho} - 3}$ este soluție a problemei. Cele două raze vor fi $R = 14$ cm și $r = 8$ cm.

Rezolvarea grafică a ecuației de gradul doi

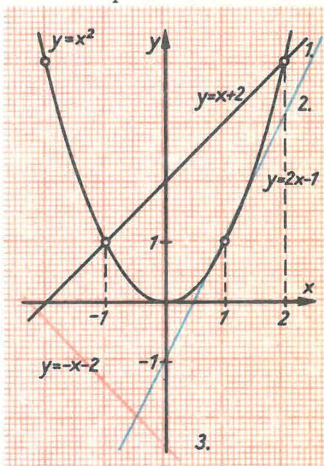
În locul ecuației $x^2 + px + q = 0$ se consideră funcția $y = x^2 + px + q$. Imaginea acestei funcții este o parabolă cu vîrful în punctul $S(x_s, y_s)$, $x_s = -\frac{p}{2}$, $y_s = q - \frac{p^2}{4}$.

Abscisele punctelor în care această parabolă se intersectează cu axa Ox sînt soluțiile ecuației $x^2 + px + q = 0$. În raport cu poziția vîrfului, parabola intersectează axa x-ilor în două puncte ($y_s < 0$), este tangentă la axa x-ilor ($y_s = 0$) sau nu are nici un punct comun cu axa Ox; se spune în aceste cazuri că ecuația de gradul doi are două rădăcini diferite, o rădăcină dublă sau nu are rădăcini.

Exemplul 1. De la ecuația $x^2 - x - 2 = 0$ (fig. 4.3.5) se trece la funcția $y = x^2 - x - 2$, $p = -1$, $q = -2$ și deci $-D = p - \frac{q^2}{4} = -2 - \frac{1}{4} = -2\frac{1}{4}$ și deci $D = 2\frac{1}{4} > 0$. Coordonatele vîrfului parabolei sînt $x_s = \frac{1}{2}$, $y_s = -2\frac{1}{4}$. Parabola reprezentată taie axa x-ilor în $x_1 = -1$ și $x_2 = 2$. Aceste valori sînt soluții ale ecuației date.



4.3.5. Rădăcinile unei ecuații de gradul doi ca puncte de intersecție ale unei parabole cu axa absciselor



4.3.6. Rezolvarea grafică a unei ecuații de gradul doi cînd vîrful parabolei este în origine

Exemplul 2. Din ecuația $x^2 - 2x + 1 = 0$ se trece la funcția $y = x^2 - 2x + 1$ și se obține $-D = q - \frac{p^2}{4} = +1 - 1 = 0$. Parabola atinge axa x-ilor în punctul $x_s = -\frac{p}{2} = +1$, $y_s = 0$. Ecuația are rădăcina dublă $x_1 = x_2 = +1$.

Exemplul 3. În cazul ecuației $x^2 + x + 2 = 0$ se obține pentru parabola $y = x^2 + x + 2$ vîrful $x_s = -\frac{p}{2} = -\frac{1}{2}$ și $y_s = q - \frac{p^2}{4} = 2 - \frac{1}{4} = +1\frac{3}{4}$; atunci $D = -1\frac{3}{4} < 0$. Parabola nu taie axa x-ilor și ecuația nu are soluții reale.

Altă metodă de rezolvare grafică. Ecuația $x^2 + px + q = 0$ se mai poate scrie $x^2 = -px - q$. Fie $f_1(x) = x^2$ și $f_2(x) = -px - q$. Rădăcinile ecuației inițiale pot fi determinate ca abscise ale punctelor de intersecție ale graficelor funcțiilor $f_1(x)$ și $f_2(x)$. Funcția $f_1(x) = x^2$ reprezintă o parabolă cu vîrful în origine iar $f_2(x) = -px - q$ reprezintă o dreaptă; $f_2(x)$ poate fi secantă sau tangentă a parabolei sau poate să nu o intersecteze, obținîndu-se astfel două rădăcini, o rădăcină, sau nici o rădăcină.

Exemplul 1. Pentru a rezolva grafic ecuația $x^2 - x - 2 = 0$ (fig. 4.3.6) sau $x^2 = x + 2$ trebuie intersectată parabola $f_1(x) = x^2$ cu dreapta $f_2(x) = x + 2$. Abscisele punctelor de intersecție $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ sînt rădăcini ale ecuației.

Exemplul 2. Pentru a rezolva grafic ecuația $x^2 - 2x + 1 = 0$ se intersectează parabola $f_1(x) = x^2$ cu dreapta $f_2(x) = 2x - 1$. Abscisa punctului de tangență $x_1 = x_2 = 1$ este rădăcina dublă a ecuației.

Istoric. Necesități de ordin practic, în special probleme de măsurători (teorema lui Pitagora) au dus destul de timpuriu la ecuații de gradul doi. Din matematica babiloniană ne-au rămas în scrierea cuneiformă un număr mare de astfel de probleme. În aceste scrieri pot fi întîlnite chiar sisteme de ecuații de gradul doi cu mai multe necunoscute. Una din aceste probleme datînd din anul 2000 î.e.n. poate fi formulată în scriere modernă prin ecuația $x^2 - 29x + 210 = 0$, datînd de ceva mai tîrziu a fost găsit sistemul

$$x^2 + y^2 = 1\,000, \quad y = \frac{2}{3}x - 10.$$

Matematica *greacă* s-a ocupat de probleme algebrice tratate geometric, adică prin construcții grafice. Cum rădăcina pătrată poate fi construită cu linia și compasul, matematicienii greci erau capabili să trateze o serie întreagă de ecuații de gradul doi rezolvabile în domeniul numerelor reale. Aceste metode au fost expuse în Cartea a X-a a „Elementelor" lui EUCLID (300 î.e.n.) avînd la bază lucrarea lui THEAITETUS (410 ? — 368 î.e.n.). Inginerul și matematicianul grec HERON din Alexandria (aproximativ 100 e.n.) a preluat tradiția babiloniană și egipteană în ce privește tratarea ecuațiilor de gradul doi, folosind pentru extragerea rădăcinii pătrate formule aproximative. Astfel de aproximări se găsesc și la ARHIMEDE (287—212 î.e.n.). Cercetări privind extragerea rădăcinii se datoresc matematicienilor *indieni*, în special lui BHÂSKARA (născut în 114 e.n.). Metodele lor au pătruns în Europa prin intermediul scrierilor învățaților arabi, care au contribuit de asemenea la perfecționarea acestor metode.

4.4. Ecuații de gradul trei și patru

În general ecuațiile algebrice sînt cu atît mai greu de rezolvat cu cît gradul lor este mai mare.

Pentru rezolvarea numerică a acestor ecuații s-au elaborat o serie de metode grafice și aproximative cu ajutorul cărora soluțiile pot fi obținute cu numărul dorit de zecimale.

Ecuația cubică

$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0, \quad A \neq 0,$	$x \in \mathbf{C}$ $A, B, C, D \in \mathbf{R}$

Ax^3 este termenul *cubic*, Bx^2 termenul *pătratic*, Cx termenul *liniar* și D termenul *liber*. Dacă se împart ambele părți ale ecuației cu A și se notează $\frac{B}{A} = r$, $\frac{C}{A} = s$, $\frac{D}{A} = t$, atunci se obține forma normală a ecuației cubice

$$x^3 + rx^2 + sx + t = 0.$$

Forma normală a ecuației cubice	$x^3 + rx^2 + sx + t = 0$	$x \in \mathbf{C}$ $r, s, t \in \mathbf{R}$

Cazuri de rezolvabilitate, cazuri particulare. În domeniul numerelor complexe orice ecuație cubică are trei rădăcini care pot fi și confundate. Cum orice polinom de putere impară

are o rădăcină reală, rezultă că orice ecuație de gradul trei are o rădăcină reală. Celelalte două sînt tot reale sau complexe conjugate; dacă x_1 este soluția reală, atunci primul membru al ecuației cubice se descompune într-un factor liniar și într-un polinom de gradul doi (v. cap. 5) Cum un produs este nul numai cînd se anulează unul din factori, celelalte soluții sînt rădăcini ale unei ecuații de gradul doi: de exemplu, ecuația cubică $x^3 - 5x^2 - 8x + 12 = 0$ are soluția $x_1 = +1$ și se descompune în produsul $(x - 1)(x^2 - 4x - 12) = 0$, ecuația de gradul doi $x^2 - 4x - 12 = 0$ are rădăcinile reale $x_2 = -2$, $x_3 = +6$.

După *teorema lui Vieta* produsul $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ al rădăcinilor este egal cu $-t$, t fiind termenul liber.

În cazul cînd termenul liber este nul, rezolvarea ecuației de gradul trei poate fi de asemenea redusă la rezolvarea unei ecuații de gradul doi; din ecuația $x^3 + rx^2 + sx = 0$, prin scoaterea lui x factor comun, se obține $x(x^2 + rx + s) = 0$. Pe lîngă valoarea reală $x_1 = 0$ ecuația mai admite ca soluții rădăcinile ecuației $x^2 + rx + s = 0$.

Se numește *ecuație cubică pură*, ecuația $x^3 + t = 0$ obținută cînd $r = 0$, $s = 0$. În afară de rădăcina $x_1 = \sqrt[3]{-t}$ ea mai admite rădăcinile $x_2 = \varepsilon_2\sqrt[3]{-t}$ și $x_3 = \varepsilon_3\sqrt[3]{-t}$ în care ε_2 și ε_3 sînt rădăcini de ordinul trei ale unității. Dacă și $t = 0$, atunci ecuația $x^3 = 0$ admite ca rădăcini doar $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, deoarece dacă $x \neq 0$ atunci și $x^3 \neq 0$.

Formule cardanice (Formulele lui Cardano). Aceste formule folosite pentru găsirea rădăcinilor ecuației cubice se obțin în două etape. Întîi se trece de la forma normală $x^3 + rx^2 + sx + t = 0$ prin substituția $x = y - \dfrac{r}{3}$ la *forma redusă* în care nu mai apare termenul pătratic.

Forma redusă a ecuației cubice	$y^3 + py + q = 0$

S-au folosit notațiile $p = s - \dfrac{r^2}{3}$, $q = 2\dfrac{r^3}{27} - \dfrac{sr}{3} + t$.

De exemplu, forma redusă a ecuației $x^3 - 9x^2 + 33x - 65 = 0$ este $y^3 + 6y - 20 = 0$. Apoi soluția căutată se descompune în două părți $y = u + v$ și se obține

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0 \text{ sau } u^3 + v^3 + q + (u + v)(3uv + p) = 0.$$

S-a ajuns astfel la o ecuație în care apar două necunoscute: u și v, deci este necesară încă o relație de legătură între u și v. Această relație se va alege astfel încît factorul $3uv + p$ să dispară, adică $3uv + p = 0$.

Se obține astfel pentru necunoscutele u și v sistemul de ecuații

$u^3 + v^3 = -q$	ridicat la pătrat	$u^6 + 2u^3v^3 + v^6 = q^2$	+
$uv = -\dfrac{p}{3}$	de 4 ori cu puterea a treia	$4u^3v^3 = -4\left(\dfrac{p}{3}\right)^3$	−

$$(u^3 - v^3)^2 = q^2 + 4\left(\frac{p}{3}\right)^3$$

$$(u^3 - v^3) = \pm\sqrt{q^2 + 4\left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Sistemul de ecuații

$$u^3 - v^3 = \pm\sqrt{q^2 + 4\left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

$$u^3 + v^3 = -q.$$

ne dă:

$$u^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \qquad v^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Prin schimbarea semnului rădăcinii pătrate u^3 se permută în v^3 și invers, prin schimbarea lui u cu v, însă ecuațiile $u^3 + v^3 + q = 0$ și $uv = -\frac{p}{3}$ rămîn neschimbate. Este suficient deci să se considere numai unul din cele două semne, de exemplu cel de sus. Orice rădăcină cubică dintr-un număr are trei valori, pe lîngă o rădăcină x_1 mai apar și rădăcinile $\varepsilon_2 x_1$ și $\varepsilon_3 x_1$, unde $\varepsilon_2 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$ și $\varepsilon_3 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}$ sînt rădăcini cubice ale unității. Astfel, se obțin pentru u și v valorile:

$$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}, \quad u_2 = u_1\varepsilon_2, \quad u_3 = u_1\varepsilon_3,$$

$$v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad v_2 = v_1\varepsilon_2, \quad v_3 = v_1\varepsilon_3.$$

Pentru $y = u_i + v_j$ se obțin 9 soluții ($i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3$) ale ecuației cubice. Numărul rădăcinilor se reduce însă la trei: $y_1 = u_1 + v_1$, $y_2 = u_2 + v_3$, $y_3 = u_3 + v_2$, condiția suplimentară $u_i v_j = -\frac{p}{3}$ nefiind îndeplinită decît de perechile u_1v_1, u_2v_3 și u_3v_2, deoarece

$$\varepsilon_2\varepsilon_3 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}\right)\left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

Cu condiția ca mărimea de sub radical $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ să nu fie negativă, soluția y_1 este reală pe cînd y_2 și y_3 sînt complexe conjugate, după cum se vede din următorul calcul:

$$y_2 = u_1\varepsilon_2 + v_1\varepsilon_3 = -\frac{u_1 + v_1}{2} + \frac{u_1 - v_1}{2} \cdot i\sqrt{3},$$

$$y_3 = u_1\varepsilon_3 + v_1\varepsilon_2 = -\frac{u_1 + v_1}{2} - \frac{u_1 - v_1}{2} \cdot i\sqrt{3}.$$

Forma redusă a ecuației de gradul trei: $y^3 + py + q = 0$	Formule cardanice: $y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$

Aceste celebre formule de calcul nu sînt datorate lui Geronimo CARDANO (1501—1576) ci lui Niccolo TARTAGLIA (apr. 1500—1557).

Exemplu. $y^3 - 15y - 126 = 0$. Ecuația este deja sub formă redusă, $p = -15$ și $q = -126$. Formulele lui Cardano ne dau:

$$y_1 = \sqrt[3]{63 + \sqrt{63^2 - 5^3}} + \sqrt[3]{63 - \sqrt{63^2 - 5^3}} = \sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{1} = 5 + 1 = 6$$

$$y_2 = -\frac{5+1}{2} + \frac{5-1}{2} \cdot i\sqrt{3} = -3 + 2i\sqrt{3}$$

$$y_3 = -\frac{5+1}{2} - \frac{5-1}{2} \cdot i\sqrt{3} = -3 - 2i\sqrt{3}$$

Cazul ireductibil (casus irreductibilis), rezolvare trigonometrică. Aparent, rezolvarea ecuației cubice devine deosebit de dificilă cînd mărimea de sub semnul radicalului $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ este negativă. Atunci trebuie extrasă rădăcina de ordinul trei dintr-un număr complex. Pe de altă parte, o ecuație cubică admite întotdeauna cel puțin o rădăcină reală. Matematicienii secolelor 15 și 16 nu au reușit mult timp să reprezinte această soluție și au denumit această situație „caz ireductibil" (casus irreductibilis). Soluția a găsit-o prima dată F. Vieta în jurul anului 1600, folosind metode trigonometrice. S-a putut dovedi că în acest caz, aparent atît de complicat, toate *trei soluții sînt reale.*

Deoarece $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$, va fi și $p < 0$; fie $p = -p'$, atunci p' este pozitiv și ecuația redusă $y^3 + py + q = 0$ se transformă în $y^3 - p'y + q = 0$ pentru care $\frac{p'^3}{27} - \frac{q^2}{4} > 0$. Mărimea de sub radicalul de ordinul trei din soluția u_1, respectiv v_1, va fi

$$-\frac{q}{2} \pm \sqrt{-\frac{p'^3}{27} + \frac{q^2}{4}} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{-\left[\frac{p'^3}{27} - \frac{q^2}{4}\right]} =$$

$$= -\frac{q}{2} \pm i\sqrt{\frac{p'^3}{27} - \frac{q^2}{4}}.$$

Această valoare complexă poate fi scrisă sub formă trigonometrică:

$$-\frac{q}{2} \pm i\sqrt{\frac{p'^3}{27} - \frac{q^2}{4}} = r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi),$$

unde

$$r = \sqrt{\frac{p'^3}{27}}, \quad \cos\varphi = -\frac{q}{2} : \sqrt{\frac{p'^3}{27}}, \quad \sin\varphi = \sqrt{\frac{p'^3}{27} - \frac{q^2}{4}} : \sqrt{\frac{p'^3}{27}}.$$

Folosind formula lui Moivre, se obține pentru u_1, respectiv v_1, $\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{3} \pm i\sin\frac{\varphi}{3}\right)$ și cu aceasta $y_1 = u_1 + v_1 = \sqrt[3]{r}\left[\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3} + \cos\frac{\varphi}{3} - i\sin\frac{\varphi}{3}\right] = 2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi}{3}$.

Cum unghiul φ, datorită periodicității funcției cosinus, poate lua și valorile $\varphi + 360°$ sau $\varphi + 720°$, celelalte rădăcini vor fi $y_2 = 2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 120°\right)$ și $y_3 = 2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 240°\right)$.

Ecuația cubică	$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$	$x \in \mathbf{C}$; $A, B, C, D \in \mathbf{R}$; $A \neq 0$
Forma normală	$x^3 + rx^2 + sx + t = 0$	$r = \frac{B}{A}$, $s = \frac{C}{A}$, $t = \frac{D}{A}$
Forma redusă	$y^3 + py + q = 0$	$p = s - \frac{r^2}{3}$, $q = \frac{2r^3}{27} - \frac{rs}{3} + t$
Formulele lui Cardano	$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \geqslant 0$ O rădăcină reală și două complexe conjugate care pentru $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \geqslant 0$ devin o rădăcină reală dublă	$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$ $v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$ $y_1 = u_1 + v_1$ $y_{2.3} = -\frac{u_1 + v_1}{2} \pm \frac{u_1 - v_1}{2} \cdot i\sqrt{3}$
Cazul ireductibil (casus irreducibilis)	$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$ Trei rădăcini reale	$r = \sqrt{\frac{-p^3}{27}}$, $\cos\varphi = \frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{\frac{-p^3}{27}}}$ $y_1 = 2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi}{3}$, $y_2 = 2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 120°\right)$
		$y_3 = 2\sqrt[3]{r}\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 240°\right)$

Exemplul 1. În ecuația $y^3 - 981\,y - 11\,340 = 0$ sînt îndeplinite condițiile cazului ireductibil; se obține

$$r = \sqrt{327^3}, \qquad \cos\varphi = \frac{5\,670}{\sqrt{327^3}}.$$

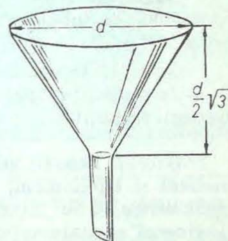
Prin calcul logaritmic se obține valoarea (rotunjită)

$$\varphi = 16°30', \text{ deci } \frac{\varphi}{3} = 5°30'.$$

Folosind logaritmul in formulele pentru y_1, y_2, y_3 se găsește $y_1 \approx 36$, $y_2 \approx -21$, $y_3 \approx -15$.

Valorile găsite verifică ecuația, după cum se poate vedea la efectuarea probei.

Exemplul 2. Secțiunea longitudinală într-o pîlnie de sticlă este un triunghi echilateral. Se cere diametrul cercului de bază d (fig. 4.4.1), cînd capacitatea pîlniei este $V = 765$ cm³.



4.4.1. Pîlnie normată

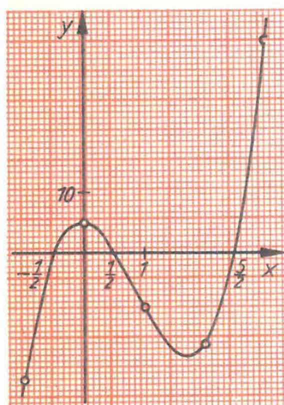
d este o latură a triunghiului echilateral. Înălţimea pîlniei este atunci $h = \frac{d}{2}\sqrt{3}$ şi raza cercului de bază $r = \frac{d}{2}$. Pîlnia are forma unui con al cărui volum este dat de formula $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Rezultă deci $765 \text{ cm}^3 = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 \frac{d}{2}\sqrt{3}$ sau $d^3 = \frac{765 \cdot 24}{\pi\sqrt{3}} \text{ cm}^3$.

Dintre cele trei rădăcini ale ecuaţiei numai cea reală este soluţie a problemei: $d = 15$ cm.

Rezolvarea grafică a unei ecuaţii cubice. De la ecuaţia cubică $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ se trece la funcţia de gradul trei $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. Abscisele punctelor de intersecţie ale acestei funcţii cu axa x-ilor sînt soluţiile ecuaţiei cubice date. Aceste puncte se obţin trasînd graficul funcţiei. Se obţin soluţii aproximative care se îmbunătăţesc cu ajutorul procedeului lui Newton. De obicei, se găseşte grafic o singură soluţie x_1, iar apoi se împarte polinomul de gradul trei prin factorul liniar $x - x_1$, obţinîndu-se o ecuaţie de gradul doi care se rezolvă imediat.

Exemplul 1. De la ecuaţia $8x^3 - 20x^2 - 2x + 5 = 0$ se trece la funcţia $y = 8x^3 - 20x^2 - 2x + 5$ (fig. 4.4.2). Graficul ei poate fi trasat foarte uşor cu ajutorul tabloului de valori:

x	...	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	-135	-21	5	-9	-15	35	...



4.4.2. Rezolvarea grafică a ecuaţiei cubice $8x^3 - 20x^2 - 2x + 5 = 0$.

astfel încît rădăcinile pot fi presupuse a fi $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = +\frac{1}{2}$, $x_3 = +\frac{5}{2}$. Pentru a aprecia poziţia rădăcinilor nu are nici o importanţă că pe cele două axe s-au folosit unităţi de măsură diferite. Din tablou se poate observa fără a trasa curba că rădăcinile se găsesc în intervalele $(-1, 0)$, $(0, 1)$ şi $(2, 3)$. Introducînd valorile presupuse în ecuaţia dată, se vede că ele sînt într-adevăr rădăcini. Este suficient însă să se facă proba numai cu $x_2 = \frac{1}{2}$; se efectuează împărţirea $(8x^3 - 20x^2 - 2x + 5) : \left(x - \frac{1}{2}\right) = 8x^2 - 16x - 10$ şi apoi se rezolvă ecuaţia de gradul doi $8x^2 - 16x - 10 = 0$ ale cărei soluţii sînt $x_{3,1} = 1 \pm \frac{3}{2}$. Astfel, se verifică rădăcinile obţinute grafic

$$x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = +\frac{5}{2}.$$

Exemplul 2. Se caută zerourile funcţiei $y = -x^3 + 3x^2 - x - 1$. Zerourile (abscisele punctelor de intersecţie cu axa Ox) se găsesc rezolvînd ecuaţia de gradul trei $-x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0$.

Aplicînd teorema lui Vieta se obţin $x_1 = 1$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$, $x_3 = 1 - \sqrt{2}$.

Zerourile funcţiei $y = -x^3 + 3x^2 - x - 1$ vor fi $x_1 = 1$; $x_2 = 2{,}4142$, $x_3 = -0{,}4142$ (valori rotunjite).

Istoric. Ecuaţii cubice simple s-au întîlnit şi în scrieri ale matematicienilor greci antici, indieni şi babilonieni. Deoarece matematicienii greci tratau problemele algebrei prin metode geometrice, ei au întîmpinat mari greutăţi de principiu în tratarea ecuaţiilor de gradul trei. Inginerul şi matematicianul grec HERON din Alexandria (aproximativ 100 e.n.) a realizat un important progres în această direcţie. Ocupîndu-se de procedee mai vechi de extragere a rădăcinii, rămase de la babilonieni şi egipteni, el a reuşit rezolvarea numerică a ecuaţiei pur cubice.

Primul progres efectiv în tratarea numerică şi în algebrizarea procedeelor de calcul este datorat în primul rînd matematicienilor arabi şi apoi celor indieni. Cu toate că ei erau în

stare să rezolve ecuațiile de gradul doi și unele tipuri mai simple de ecuații de gradul trei, nu au reușit însă rezolvarea formelor generale. Matematicienii europeni au pornit în cercetările lor de la rezultatele obținute de matematica arabă.

Italianul Luca PACIOLI (1445—1514), deși are merite deosebite în dezvoltarea algebrei, considera imposibilă rezolvarea ecuației generale de gradul trei.

Se pare că Magister Scipione del FARRO din Bologna a reușit să obțină formule de rezolvare pentru ecuația generală de gradul trei, dar lucrările lui au rămas nepublicate. Independent de acesta, profesorul de aritmetică și consilierul tehnico-științific Niccolo TARTAGLIA (aproximativ 1500—1557) a găsit formulele care astăzi poartă numele lui CARDANO și a dobîndit o faimă considerabilă cu rezultatele astfel obținute, strălucind în concursurile publice de calcul care se obișnuiau în acea vreme.

Orgoliosul profesor venețian Geronimo CARDANO (1501—1576) nereușind să descopere aceste formule, le-a obținut după presiuni îndelungate în anul 1539 de la TARTAGLIA, obligîndu-se sub jurămînt solemn să păstreze secrete aceste rezultate. CARDANO însă nu și-a ținut promisiunea și a publicat aceste rezultate în lucrarea sa „Ars magna" („Marea artă") în anul 1545. Și deoarece formulele de rezolvare au apărut pentru prima dată într-o lucrare a lui Cardano au căpătat denumirea de „formule cardanice". Protestul lui TARTAGLIA, terminat cu un mare scandal, nu a mai putut schimba nimic.

Ecuații de gradul patru

Forma generală	$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$ $A \neq 0$	$x \in \mathbb{C}$ $A, B, C, D, E \in \mathbf{R}$

Și pentru această ecuație există o formulă generală de rezolvare. Ea este mult mai complicată decît cea pentru ecuația cubică și din această cauză este foarte puțin aplicată la determinarea numerică a rădăcinilor. Se va schița aici o metodă de rezolvare lăsîndu-se la o parte calculele intermediare. Prin substituția $x = y - \frac{a}{4}$ se obține din forma normală $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ forma redusă cu coeficienții p, q, r:

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0.$$

Cele patru rădăcini

$$2y_1 = \sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}, \qquad 2y_2 = \sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3},$$

$$2y_3 = -\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}, \qquad 2y_4 = -\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}$$

se obțin cu ajutorul rădăcinilor z_1, z_2, z_3 ale rezolventei cubice a ecuației date de gradul patru

$$z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4r)z - q^2 = 0.$$

În plus este necesară condiția suplimentară $z_1 z_2 z_3 = q^2 > 0$. Se deosebesc următoarele trei cazuri de rezolvabilitate:

Rădăcini z_1, z_2, z_3	soluții y_1, y_2, y_3, y_4
1. toate reale și pozitive	patru rădăcini reale
2. una pozitivă, două negative	patru rădăcini, două cîte două conjugate
3. două complexe conjugate	două rădăcini reale, două complexe conjugate

Ecuația bipătrată. Un caz special de ecuație de gradul patru care apare destul de des și se rezolvă elegant este ecuația bipătrată $x^4 + px^2 + q = 0$. Ea se caracterizează prin aceea că necunoscuta apare numai la puteri pare și de aceea poate fi privită ca o ecuație de gradul doi în x^2. Pentru $y = x^2$ se obține $y^2 + py + q = 0$. Se rezolvă ecuația de gradul doi în y și apoi ecuațiile $x^2 = y$, unde y se înlocuiește cu soluțiile obținute.

Exemplu. $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$, $y_1 = 25$, $y_2 = 4$; $x_1 = +5$, $x_2 = -5$, $x_3 = 2$, $x_4 = -2$.

Istoric. Formulele de rezolvare pentru ecuaţia generală de gradul patru au fost găsite de italianul L. FERRARI (1522—1565), fost elev şi colaborator al lui G. CARDANO.

4.5. Teoreme generale

Teorema fundamentală a algebrei. Presupunerea că orice ecuaţie de gradul n admite in mulţimea numerelor complexe n rădăcini a fost prima dată formulată de matematicianul olandez Albert GIRARD (1595—1632). Au incercat să demonstreze această afirmaţie René DESCARTES (1596—1650), Jean d'ALEMBERT (1717—1783) şi alţii. Primul care a dat o demonstraţie completă a teoremei fundamentala a algebrei a fost însă GAUSS (1777—1855), in disertaţia sa din anul 1799; mai tîrziu, Gauss a găsit şi alte demonstraţii, complet diferite, pentru afirmaţia că o ecuaţie algebrică are întotdeauna o rădăcină.

Teorema fundamentală a algebrei. Orice ecuaţie de gradul n $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots$ $\ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$, în care a_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) sînt numere reale sau complexe, admite cel puţin o soluţie în mulţimea numerelor complexe.

Descompunerea în factori a ecuaţiei de gradul n (factorizarea ecuaţiei)

Dacă se notează cu x_1 soluţia ecuaţiei $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ a cărei existenţă este asigurată de teorema fundamentală a algebrei şi se scade din respectiva ecuaţie valoarea obţinută prin înlocuirea lui x în primul membru cu x_1, $x_1^n + a_1x_1^{n-1} + a_2x_1^{n-1} + \ldots$ $\ldots + a_{n-1}x_1 + a_n = 0$, se obţine $(x^n - x_1^n) + a_1(x^{n-1} - x_1^{n-1}) + \ldots + a_{n-1}(x - x_1) = 0$. Fiecare termen conţine factorul $(x - x_1)$. Dînd factor comun, se obţine:

$$(x - x_1)\,[x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}] = 0.$$

Expresia din parantezele drepte este membrul stîng al unei ecuaţii de grad $n - 1$. După teorema fundamentală, această ecuaţie are la rîndul ei o soluţie x_2 astfel încît se poate da factor şi $x - x_2$. Se obţine astfel

$$(x - x_1)\,(x - x_2)\,[x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}] = 0.$$

Continuînd procedeul se obţine reprezentarea sub forma unui produs de factori liniari.

Reprezentarea ecuaţiei de gradul n ca produs de factori liniari
$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = (x - x_1)\,(x - x_2) \ldots (x - x_n) = 0.$

Numărul rădăcinilor. Din reprezentarea sub formă de produs rezultă următoarea propoziţie importantă:

O ecuaţie de gradul n cu o necunoscută are întotdeauna n rădăcini.

Aceste rădăcini nu trebuie să fie toate diferite. Dacă o rădăcină se repetă de 2, 3, ... ,k ori, se zice că ea este o rădăcină dublă, triplă, multiplă de ordinul k. Dacă coeficienţii sînt numere reale şi dacă ecuaţia are o rădăcină complexă $a + ib$, atunci ecuaţia admite o rădăcină şi valoarea complexă conjugată $a - ib$.

Relaţiile între rădăcini şi coeficienţi numite formulele lui Vieta. Dacă se efectuează înmulţirea în membrul drept al reprezentării sub formă de produs şi se identifică coeficienţii puterilor lui x, se obţin relaţiile între rădăcini şi coeficienţi date de Vieta. Din aceste relaţii rezultă:

relaţiile între rădăcini şi coeficienţi ale lui Vieta	$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -a_1$ $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = a_2$ $x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -a_3$ . . . . $x_1x_2x_3 \ldots x_n = (-1)^n a_n$

Dacă o ecuaţie de gradul n sub formă normală, cu coeficienţi întregi, admite o rădăcină întreagă, atunci aceasta este un divizor al termenului liber.

Pentru ecuațiile de gradul doi și trei formulele lui Vieta au forma:

$x^2 + px + q = 0$	$x_1 + x_2 = -p$ $x_1x_2 = q$	$x^3 + rx^2 + sx + t = 0$	$x_1 + x_2 + x_3 = -r$ $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = s$ $x_1x_2x_3 = -t$

Pentru orice exponent n există cel puțin o rădăcină primitivă egală cu $\varphi(n)$, unde $\varphi(n)$ este funcția euleriană din teoria numerelor (v. cap. 31).

Exemplu. Rădăcinile primitive de ordinul 3 ale unității sînt soluții ale ecuației $x^3 - 1 = 0$. Deoarece $\varepsilon_1 = 1$, atunci $(x^3 - 1):(x - 1) = x^2 + x + 1$; soluțiile ecuației de gradul doi $x^2 + x + 1 = 0$ sînt $\varepsilon_2 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$ și $\varepsilon_3 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$. Atît ε_2 cît și ε_3 sînt rădăcini primitive de ordinul trei ale unității. Se poate verifica prin calcul că $\varepsilon_1^3 = \varepsilon_2^3 = \varepsilon_3^3 = 1$, $\varepsilon_2^2 = \varepsilon_3$, $\varepsilon_3^2 = \varepsilon_2$.

Rezolvabilitatea prin radicali. Teorema fundamentală a algebrei garantează existența rădăcinilor ecuației

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

pentru toate gradele. Pentru $n = 2, 3, 4$ se pot da formule generale de rezolvare. Pentru $n = 3$ aceste formule sînt o suprapunere de radicali, iar soluția este de tipul $\sqrt[3]{a + \sqrt{b}}$; pentru $n = 4$ soluția este de tipul $\sqrt{a + \sqrt[3]{b + \sqrt{c + \sqrt{d}}}}$.

Prin *radical* înțelegem o astfel de expresie care este o suprapunere de rădăcini cu exponenți naturali. Folosind această noțiune, se poate enunța:

Ecuațiile algebrice pînă la gradul patru inclusiv sînt rezolvabile prin radicali.

Evident, există o infinitate de astfel de radicali și se poate presupune că și ecuația de gradul cinci ar putea fi rezolvată printr-o astfel de combinație de radicali suprapuși. S-a demonstrat însă că este imposibilă rezolvarea prin radicali a ecuațiilor algebrice de grad mai mare decît patru. Soluțiile ecuațiilor de gradul patru au deja o structură destul de complicată. Soluțiile ecuațiilor de grad superior sînt în general și mai complicate, ele aparținînd unei categorii mai largi de numere.

Istoric. După ce în perioada Renașterii s-au găsit formulele de rezolvare pentru ecuațiile de gradul trei și patru, matematicienii secolelor 17 și 18 s-au preocupat foarte insistent de găsirea soluțiilor generale pentru ecuația de grad 5 și mai mare. Matematicianul german Ehrenfried Walter von Tschirnhaus (1651 – 1708) a crezut chiar că a demonstrat posibilitatea de a rezolva astfel de ecuații prin radicali. Foarte încet s-a ajuns la a recunoaște că rezolvarea ecuației algebrice de grad superior prin radicali este imposibilă; la aceasta au contribuit Joseph-Louis Lagrange (1736 – 1813) și Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855). În anul 1924 genialul matematician norvegian Niels Henrik Abel (1802 – 1829) (care moare din păcate prea timpuriu de tuberculoză) reușește să demonstreze că ecuația de gradul cinci (și deci și cele de grad mai mare) nu este rezolvabilă prin radicali, după ce în 1799 Paolo Ruffini dăduse o demonstrație incompletă a acestei afirmații. Recunoașterea și acceptarea acestui fapt a fost cu atît mai dificilă cu cît marea majoritate a cazurilor speciale de ecuații algebrice de grad superior pot fi rezolvate prin radicali.

4.6. Sisteme de ecuații neliniare

În geometria analitică și în teoria ecuațiilor diferențiale ordinare se întîlnesc frecvent anumite tipuri de sisteme de ecuații neliniare. Vom prezenta aici cîteva exemple, deși o prezentare sistematică a acestora nu este posibilă.

Sisteme cu o ecuație liniară și una de gradul doi. Prin metoda substituției, acest gen de sistem poate fi ușor rezolvat. Un astfel de sistem apare la determinarea punctelor de intersecție ale unor conice cu o dreaptă.

Exemplu.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 4x - 1 &= 0 \\ x + y &= -1 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad x = -y - 1 \rightarrow (-y-1)^2 + y^2 + 4(-y-1) - 1 = 0$$

$$y^2 - y - 2 = 0$$

$$y_1 = 2;\ y_2 = -1 \quad \rightarrow \quad x_1 = -3;\ x_2 = 0$$

Rădăcinile găsite se verifică prin probă. $S = \{(-3, 2), (0, -1)\}$.

Sistemul cu două ecuații de gradul doi. Aceste tipuri de sisteme apar cind se studiază intersecția a două conice. Dacă nu apar termeni in xy, și coeficienții lui x^2 și y^2 in ambele ecuații sint proporționali, atunci prin multiplicare cu un factor și scădere se elimină termenii cu x^2 și y^2, obținindu-se o ecuație liniară, astfel incit folosind metoda substituției sistemul poate fi rezolvat.

Exemplul 1.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 18x - 18y + 112 &= 0 \\ \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 11x + 5y - 52 &= 0 \quad \cdot 2 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 - 18x - 18y + 112 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 22x + 10y - 104 &= 0 \end{aligned}$$

$$4x - 28y + 216 = 0$$

$$x = 7y - 54$$

$$y^2 - 18y + 80 = 0$$

$$y_1 = 10; \quad y_2 = 8 \quad \rightarrow \quad x_1 = 16;\ x_2 = 2$$

Rădăcinile se verifică prin probă. $S = \{(2, 8), (16, 10)\}$.

Exemplul 2.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a \\ x \cdot y &= b \end{aligned}$$

Metoda I.

$$\begin{aligned} (x + y)^2 &= a + 2b \\ (x - y)^2 &= a - 2b \end{aligned}$$

$$x + y = \pm \sqrt{a + 2b}$$

$$x - y = \pm \sqrt{a - 2b}$$

$$y_{1,2} = \pm \frac{1}{2}(\sqrt{a + 2b} - \sqrt{a - 2b})$$

$$x_{1,2} = \pm \frac{1}{2}(\sqrt{a + 2b} + \sqrt{a - 2b})$$

$$(y_{1,2})^2 = \frac{1}{4}(a + 2b + a - 2b \pm 2\sqrt{a^2 - 4b^2}) \leftrightarrow (y_{1,2})^2 = \frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b^2}$$

$$(x_{1,2})^2 = \frac{1}{4}(a + 2b + a - 2b \pm 2\sqrt{a^2 - 4b^2}) \leftrightarrow (x_{1,2})^2 = \frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b^2}$$

Metoda II.

$$x = \frac{b}{y}$$

$$\frac{b^2}{y^2} + y^2 = a$$

$$y^4 - ay^2 + b^2 = 0$$

Ecuație bipătrată

Ambele metode duc la același rezultat.

Trei ecuații de gradul doi cu trei necunoscute. În geometria analitică, atunci cind se determină ecuația unui cerc prin trei puncte date, trebuie rezolvat un sistem de trei ecuații de gradul doi cu trei necunoscute. De exemplu, fie de scris ecuația cercului ce trece prin punctele $P_1(-8; 12)$, $P_2(-4; 4)$, $P_3(9; -5)$. Se caută coordonatele centrului $M(c, d)$ și raza r. Acestea se determină din sistemul de ecuații:

$$\left.\begin{aligned} (-8 - c)^2 + (12 - d)^2 &= r^2 \\ (-4 - c)^2 + (4 - d)^2 &= r^2 \\ (9 - c)^2 + (-5 - d)^2 &= r^2 \end{aligned}\right\}$$

Dezvoltînd pătratele și scăzînd din prima ecuație pe cea de a doua și apoi din a doua pe cea de a treia, se obține un sistem de două ecuații liniare cu necunoscutele c și d. Rezolvînd acest sistem, se obține $c = 16$ și $d = 19$. Înlocuind aceste valori într-una din ecuațiile sistemului inițial se obține o ecuație pur pătratică în r. Soluția pozitivă a acestei ecuații reprezintă mărimea razei căutate $r = 25$.

4.7. Inegalități algebrice

La fel ca noțiunea de ecuație, noțiunea de inegalitate se definește tot cu ajutorul conceptului de expresie. Dacă două expresii E_1 și E_2 sînt legate prin unul din simbolurile „mai mare ca" „mai mare sau egal" „mai mic" „mai mic sau egal", „diferit de", atunci se formează inegalitățile $E_1 > E_2$, $E_1 \geqslant E_2$, $E_1 < E_2$, $E_1 \leqslant E_2$ sau $E_1 \neq E_2$; de exemplu $3x < 5$, $a^2 \geqslant 9$, $2 \leqslant 8$, $x + y > 6$, $1/2 \neq 1/3$ sînt inegalități. În cele ce urmează se vor trata inegalitățile de forma $E_1 > E_2$ și $E_1 < E_2$.

Ca și pentru ecuații se va face distincție între inegalitățile fără variabile, care sînt propoziții asupra inegalității ce pot fi adevărate sau false și acelea care sînt predicate asupra inegalității; de ex. $2 < 8$ și $1/2 > 1/3$ sînt propoziții pe cînd $a^2 < 9$ și $x + 1 > 6$ sînt predicate.

Mulțimea soluțiilor și soluțiile unei inegalități. Orice număr din domeniul de definiție care substituit variabilei transformă o inegalitate cu o variabilă într-o propoziție adevărată se numește *soluție a inegalității*. Domeniul de definiție al unei inegalități se definește prin analogie cu cel al unei ecuații. Dacă inegalitatea conține două, trei, ..., n variabile, atunci soluția este o pereche, un triplet ... un n-uplu de numere. Mulțimea soluțiilor S este mulțimea tuturor soluțiilor unei inegalități relativ la domeniul ei de definiție. De exemplu, inegalitatea $x < 4$ pentru mulțimea $\mathbf{N}$ a numerelor naturale are soluțiile 0, 1, 2, 3, adică $s = \{0, 1, 2, 3\}$, pentru $x \in \mathbf{Z}$, $S = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Pentru inegalitatea $x + y < 2$, $x \in \mathbf{N}$, $y \in \mathbf{N}$, mulțimea soluțiilor $S = \{(0,0), (1,0), (0,1)\}$, pentru $x \in \mathbf{Z}$, $y \in \mathbf{Z}$, mulțimea soluțiilor este formată dintr-o infinitate de soluții și anume mulțimea perechilor ordonate pentru care $x + y < 2$, de exemplu, $(-5, 1)$ sau $(1, -4)$.

Inegalități consistente, inconsistente și universal valabile. O inegalitate este consistentă respectiv inconsistentă după cum are sau nu are soluții relativ la domeniul ei de definiție.

Inegalități consistente	Inegalități inconsistente
$x < 0$ pentru $x \in \mathbf{Z}$: $S = \{\ldots; -3, -2, -1\}$	$x < 0$ pentru $x \in \mathbf{N}$: $S = \emptyset$
$a^2 > 0$ pentru $a \in \mathbf{N}$: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$	$a^2 < 0$ pentru $a \in \mathbf{N}$: $S = \emptyset$
$2x > 3x$ pentru $x \in \mathbf{R}$: $S = \{x \mid x \in \mathbf{R}$ și $x < 0\}$	$2x > 3x$ pentru $x \in \mathbf{N}$: $S = \emptyset$
$y + 3 < y + 4$ pentru $y \in \mathbf{R}$: $S = \mathbf{R}$	$y + 3 < y + 3$ pentru $y \in \mathbf{R}$: $S = \emptyset$

Aici inegalitatea $y + 3 < y + 4$ pentru $y \in \mathbf{R}$ nu este numai consistentă ci chiar universal valabilă, deoarece orice $y \in \mathbf{R}$ este soluție. O inegalitate consistentă cu n variabile este universal valabilă dacă orice n-uplu ordonat de numere din domeniul de definiție sînt soluții ale inegalității; de ex. așa-numita inegalitate a triunghiului $|a + b| \leqslant |a| + |b|$ este satisfăcută pentru orice pereche de numere reale, deci este universal valabilă în $\mathbf{R}$.

Inegalități echivalente. Două inegalități cu variabile sînt echivalente dacă au același domeniu de definiție și aceeași mulțime a soluțiilor; în caz contrar se zic neechivalente. De exemplu $x + 4 < 7$ și $x < 3$ sînt echivalente relativ la mulțimea numerelor naturale $\mathbf{N}$, deoarece mulțimea soluțiilor ambelor ecuații este $S_1 = \{0, 1, 2\}$. La fel $-2a > 4$ și $a < -2$ pentru $a \in \mathbf{Z}$ sînt echivalente deoarece $S_1 = S_2 = \{\ldots, -6, -5 - 4, -3\} = S$. Inegalitățile $y > 0$ și $y > -2$ sînt echivalente relativ la $\mathbf{N}$, nu însă și relativ la $\mathbf{Z}$. Transformările care transformă o inegalitate într-una echivalentă se numesc *transformări echivalente*. Ele au de regulă la bază operațiile aritmetice fundamentale și proprietățile de monotonie ale funcțiilor reale.

Propoziţii privind transformările echivalente ale inegalităţilor cu variabile. Următoarele inegalităţi sînt echivalente cu $E_1 < E_2$.

1. $E_1' < E_2'$, unde E_1 şi E_1' cît şi E_2 şi E_2' sînt expresii echivalente.

2. $E_2 > E_1$.

3. $E_1 \pm E_3 < E_2 \pm E_3$ cu condiţia ca E_3 să fie definită în domeniul fundamental de variaţie.

4. $E_1 \cdot E_3 < E_2 \cdot E_3$, şi $E_1/E_3 < E_2/E_3$ dacă E_3 este definită şi pozitivă în tot domeniul fundamental de variaţie.

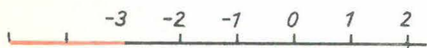
5. $E_1 \cdot E_3 > E_2 \cdot E_3$ şi $E_1/E_3 > E_2/E_3$ dacă E_3 este definită şi negativă în tot domeniul de variaţie.

Rezolvarea inegalităţilor. A rezolva o inegalitate înseamnă a-i găsi toate soluţiile relativ la domeniul fundamental de variaţie dat, cu alte cuvinte a-i găsi mulţimea soluţiilor. La fel ca pentru ecuaţii, rezolvarea inegalităţilor se reduce la găsirea unui şir de transformări echivalente adecvate astfel încît să se ajungă la o inegalitate destul de simplă spre a se putea citi soluţiile. Pentru rezolvarea unei inegalităţi liniare cu o variabilă există o metodă de rezolvare cu ajutorul teoremelor de transformare care se exemplifică pe modelul alăturat.

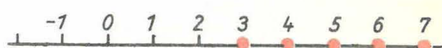
$2x + 2 + 3x < 3x - 8 + 4; \quad x \in \mathbf{R}$	Propoziţia 1
$5x + 2 < 3x - 4$	$\mid -3x - 2$ Propoziţia 3
$5x + 2 - 3x - 2 < 3x - 4 - 3x - 2$	Propoziţia 1
$2x < -6$	Propoziţia 4 $\mid :2$
$2x/2 < -6/2$	Propoziţia 1
$x < -3$	

Mulţimea soluţiilor se compune din toate numerele reale mai mici decît 3; $S = \{x \mid x \in \mathbf{R}$ şi $x < -3\}$. Mulţimea soluţiilor se poate reprezenta grafic pe axa numerelor (fig. 4.7.1).

P r o b ă. La inegalităţi este în general posibilă verificarea soluţiilor prin substituirea lor în variabilele. Se recomandă însă a se face proba pentru unele elemente ale mulţimii soluţiilor,



4.7.1. Reprezentarea grafică a mulţimii soluţiilor $S = \{x \mid x \in \mathbf{R}$ şi $x < -3\}$



4.7.2. Reprezentarea grafică a mulţimii soluţiilor $S = \{a \mid a \in \mathbf{N}$ şi $a > 2\}$

ca de ex. pentru $-5 \in \mathbf{R}$. Proba se face complet scriind elementele lui S sub forma $x = -3 - h$ $(h > 0)$, substituind în inegalitatea dată, verificînd dacă propoziţia ce rezultă din inegalitate este adevărată pentru toţi $h > 0$.

Exemplul 1. $25 - 3a < 22 - 2a;\ a \in \mathbf{N} \quad \mid +2a - 25$

$25 - 3a + 2a - 25 < 22 - 2a + 2a - 25$

$-a < -2 \quad \mid \cdot(-1)$

$a > 2$

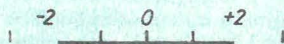
Mulţimea soluţiilor conţine toate numerele naturale mai mari decît 2 (fig. 4.7.2).

Exemplul 2. $y + x < 4;\ x \in \mathbf{N},\ y \in \mathbf{N} \quad \mid -x$

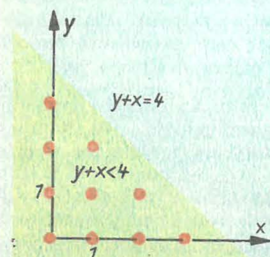
$y < -x + 4$

Mulţimea soluţiilor este $S = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (3, 0)\}$ (fig. 4.7.3).

Dacă domeniul de variaţie a lui x şi y este $\mathbf{R}$, atunci coordonatele punctelor care se găsesc în semiplanul de sub dreapta determinată de ecuaţia $y = -x + 4$ sînt soluţii ale inegalităţii.



4.7.4. Reprezentarea grafică a mulţimii soluţiilor inecuaţiei $x^2 - 4 > 0;\ x \in \mathbf{R}$.



4.7.3. Reprezentarea grafică a mulţimii soluţiilor inecuaţiei $x + y < 4$ pentru $x \in \mathbf{N}$ $y \in \mathbf{N}$, şi pentru $x \in \mathbf{R}$ şi $y \in \mathbf{R}$.

Exemplul 3.

$x^2 - 4 > 0$; $x \in \mathbf{R}$
$(x - 2)(x + 2) > 0$
(fig. 4.7.4).

Un produs este pozitiv dacă și numai dacă ambii factori au același semn. Se obțin două cazuri:

Cazul 1	*Cazul 2*
$x - 2 > 0$ și $x + 2 > 0$	$x - 2 < 0$ și $x + 2 < 0$
$x > 2$ și $x > -2$	$x < 2$ și $x < -2$
$x > 2$	$x < -2$

Mulțimea soluțiilor va fi formată din toate numerele reale mai mari ca 2 și mai mici ca -2.

Exemplul 4. $x^2 - 4 < 0$: $x \in \mathbf{R}$,
$(x - 2)(x + 2) < 0$.

Produsul a doi factori este negativ dacă și numai dacă factorii sînt de semne opuse. Aceasta conduce la două cazuri:

Cazul 1	*Cazul 2*
$x - 2 < 0$ și $x + 2 > 0$	$x - 2 > 0$ și $x + 2 < 0$
$x < 2$ și $x > -2$	$x > 2$ și $x < -2$ inconsistent
$-2 < x < 2$	

Deci mulțimea soluțiilor conține toate numerele reale din intervalul -2 și $+2$: $S = \{x \mid x \in \mathbf{R}$ și $-2 < x < 2\}$.

Exemplul 5. $(x + 2)/(x - 1) > 4$; $x \in \mathbf{R}$. Domeniul de definiție al inegalității este mulțimea tuturor numerelor reale $x \neq 1$.

Cazul 1	*Cazul 2*
$(x + 2)/(x - 1) > 4$ și $x - 1 > 0$	$(x + 2)/(x - 1) > 4$ și $x - 1 < 0$
$x + 2 > 4(x - 1)$ și $x > 1$	$x + 2 < 4(x - 1)$ și $x < 1$
$x + 2 > 4x - 4$ și $x > 1$	$x + 2 < 4x - 4$ și $x < 1$
$6 > 3x$ și $x > 1$	$6 < 3x$ și $x < 1$
$x < 2$ și $x > 1$	$x > 2$ și $x < 1$
$S_1 = \{x \mid x \in \mathbf{R}$ și $1 < x < 2\}$	Inconsistent $S_2 = \emptyset$.

Mulțimea soluțiilor inegalității date este $S = S_1 \cup S_2 = S_1$ și se compune din toate numerele reale x din intervalul $1 < x < 2$.

Exemplul 6. $|a + 5| < 2$; $a \in \mathbf{Z}$. Din definiția valorii absolute $|a + 5| = a + 5$ pentru $a + 5 \geqslant 0$ sau $|a + 5| = -(a + 5)$ pentru $a + 5 \leqslant 0$.
Se deosebesc două cazuri:

Cazul 1	*Cazul 2*
$a + 5 < 2$ și $a + 5 \geqslant 0$	$-(a + 5) < 2$ și $a + 5 \leqslant 0$
$a < -3$ și $a \geqslant -5$	$-a - 5 < 2$ și $a \leqslant -5$
$S_1 = \{-5, -4\}$	$-a < 7 \mid \cdot (-1)$ și $a \leqslant -5$
	$a > -7$ și $a \leqslant -5$
	$S_2 = \{-6, -5\}$

Mulțimea soluțiilor ecuației inițiale este $S = S_1 \cup S_2 = \{-6, -5, -4\}$. Proba se poate face ușor prin înlocuire.

Exemplul 7. Se cere eroarea maximă a raportului a/b, unde a și b sînt valorile adevărate ale unor mărimi fizice. Se dau valorile măsurate α și β și erorile ε_1 și ε_2 ale lui a și b respectiv.

Prin ipoteză $|a - \alpha| < \varepsilon_1$ și $|b - \beta| < \varepsilon_2$. Atunci $a/b - \alpha/\beta = (a\beta - b\alpha)/(b\beta) = [\beta(a - \alpha) - \alpha(b - \beta)]/(b\beta) = |[\beta(a - \alpha) - \alpha(b - \beta)]/|b\beta| \leqslant [|\beta||a - \alpha| + |\alpha||b - \beta|]/(|b||\beta| \leqslant [|\beta|\varepsilon_1 + |\alpha|\varepsilon_2]/(|b||\beta|)$.
Dar $|\beta| > \varepsilon_2$ și $|b| < \varepsilon_2 + |\beta|$ și deci
$|a/b - \alpha/\beta] \leqslant [|\beta|\varepsilon_1 + |\alpha|\varepsilon_2]/[|\beta|(|\beta| + \varepsilon_2)]$
este eroarea maximă a raportului.

Inegalități speciale

1. $||a| - |b|| \leqslant |a + b|$.
2. *Inegalitatea triunghiului:* $|a + b| \leqslant |a| + |b|$, de unde prin inducție completă
3. $|a_1 + a_2 + ... + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|$
4. Pentru $n = 0, 1, 2, ..., 2^n > n$ (demonstrația se face prin inducție completă).
5. Din dezvoltarea binomului rezultă pentru $a > 0$, $b > 0$ și n natural
$$a^n + b^n \leqslant (a + b)^n.$$
6. *Inegalitatea lui Bernoulli* $(1 + a)^n > 1 + na$ pentru $n \geqslant 2$ și $a \neq 0$, $a > -1$.
7. Dacă $a \geqslant 0$ și $b \geqslant 0$ atunci $ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ sau $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$.
8. $\sqrt[n]{a_1a_2...a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$ pentru n natural $a_1 \geqslant 0, ..., a_n \geqslant 0$.
9. *Inegalitatea Cauchy-Schwartz*
$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$
sau
$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2).$$

Unele dintre aceste inegalități exprimă pe scurt enunțul unor cunoscute propoziții ca de exemplu:

Valoarea absolută a unei sume este cel mult egală cu suma valorilor absolute ale termenilor. Media geometrică a două numere nenegative nu depășește niciodată media lor aritmetică.

5. Funcții

5.1. Noțiuni de bază

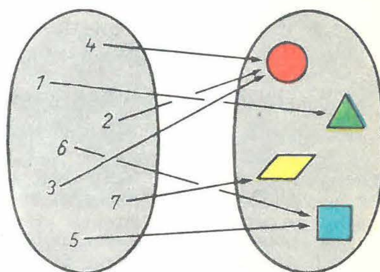
Noțiunea de funcție

Într-o expunere făcută de EULER în anul 1749 se menționează de mai multe ori funcția ca o mărime variabilă care depinde de altă mărime variabilă. Pentru unele scopuri, o astfel de definiție a funcției este suficientă. În dezvoltarea ulterioară a matematicii s-a impus necesitatea de a se da noțiunii de funcție un conținut mai general și mai abstract. Nu dependența variabilelor (prin care de obicei se înțeleg numere care pot fi comparate în ce privește mărimea) este esențială în conținutul noțiunii de funcție, ci corespondența prin care anumitor obiecte li se atașează alte obiecte. În felul acesta, noțiunea de funcție se fundamentează pe noțiuni ale teoriei mulțimilor.

Corespondențe. Orice bară metalică prin încălzire își modifică lungimea; de exemplu, o bară de cupru de lungime $l_0 = 200$ cm la temperatura de 0°C, va avea la o temperatură de t°C lungimea $l = 200(l_0 + 0{,}000016\, t)$. Această formulă pune în corespondență fiecărei valori a lui t cuprinse între 0°C și 100°C o anumită valoare l, care se găsește între 200 cm și 200,32 cm. În mod analog fiecărei cantități dintr-o anumită marfă îi corespunde o anumită sumă de bani, prețul de vînzare, fiecărui număr de pagină din prezenta carte i se poate pune în corespondență un număr care reprezintă cîte litere se găsesc pe respectiva pagină ș.a.m.d.

În felul acesta, pot fi puse în corespondență nu numai mulțimi de numere ci mulțimi generale astfel încît elementelor a din mulțimea A le corespund elemente b din mulțimea B. La un teatru fiecărui loc din sală îi corespunde un bilet de intrare sau un anume spectator.

Astfel corespondența este determinată de o relație F definită pe $A \cup B$ (vezi cap. 14) cu domeniul de definiție $D(F) \subseteq A$ și domeniul valorilor $R(F) \subseteq B$. Dacă prin această relație fiecărui element a din domeniul $D(F)$ îi corespunde un element b din domeniul de definiție $R(F)$ și numai unul, atunci relația se zice univalentă și este vorba de o funcție sau aplicație a mulțimii A în mulțimea B (fig. 5.1.1).



5.1.1. Graficul unei funcții

Elementul b din domeniul valorilor care corespund unui element original a din domeniul de definiție se numește *imagine a lui a*.

În consecință, funcția F este o mulțime de perechi ordonate (a, b), unde primul element aparține domeniului de definiție $D(F)$ iar al doilea element domeniului valorilor $R(F)$. Pentru o aplicație a lui A în B, $D(F) = A$, adică orice element $a \in A$ apare ca element original, și pentru o aplicație a lui A în B, în plus, orice element $b \in B$ apare ca imagine.

Elementul y care corespunde elementului x prin funcția f se notează în general prin $f(x)$ și corespondența se scrie în acest caz $x \to y = f(x)$, sau pe scurt $y = f(x)$. Elementul x se numește *argument* și elementul y *valoarea funcției* $f(x)$ în punctul x. De fapt, notația $y = f(x)$ este cea mai frecventă. Este mult mai corect a spune în loc de „y este o funcție de x" — „elementului x îi corespunde prin funcția f elementul y". Acest lucru apare mai clar cînd se scrie $x \to y = f(x)$. Domeniul de definiție (sau pe scurt domeniul) funcției $x \to y = f(x)$ se notează cu X iar domeniul valorilor (codomeniul) cu Y. Dacă f este o funcție din A în B, atunci, evident $X \subseteq A$ și $Y \subseteq B$.

O funcție f este o aplicație a mulțimii A în mulțimea B, adică o mulțime nevidă de perechi ordonate $(x, y) \in f$ cu $x \in X \subseteq A$, $y \in Y \subseteq B$ și cu proprietatea că oricărui $x \in X$ îi corespunde exact un $y \in Y$.

Reprezentarea funcțiilor

Pentru a descrie o funcție trebuie stabilite domeniul de definiție, domeniul valorilor și corespondența dintre acestea.

Graful. O funcție poate fi reprezentată grafic printr-un graf în care domeniul de definiție și domeniul valorilor sînt reprezentate prin desene iar corespondența se indică prin săgeți. Cum funcția se definește ca aplicație univocă de la fiecare element al domeniului de definiție, trebuie să pornească o singură săgeată pe cînd la fiecare element al domeniului valorilor pot ajunge mai multe săgeți.

Domeniul de definiție	1	2	3	4	5	6	7
Domeniul valorilor	▲	●	●	●	■	■	▱

5.1.2. Tabloul de valori ale unei funcții

Tabloul de valori. În loc de graf se mai poate folosi pentru reprezentarea unei funcții un tablou de valori (fig. 5.1.2). Pe rîndul de sus al tabloului se trec elementele domeniului de definiție iar pe rîndul de jos elementele domeniului valorilor.

Exprimarea prin text. Se poate întîmpla ca domeniul de definiție și domeniul valorilor să fie de așa natură încît nu pot fi reprezentate printr-un graf sau printr-o tabelă de valori. În acest caz pentru a defini funcția este suficientă o *descriere exactă* a celor două domenii și specificarea corespondenței prin care fiecărui element al domeniului de definiție îi corespunde un element din domeniul valorilor. Această specificare diferă de la caz la caz. Se poate defini o funcție fără nici o simbolizare matematică, expunînd corespondența printr-o propoziție; de exemplu, dacă fiecărui joc în cadrul diviziei A la fotbal i se pune în corespondență raportul dintre numărul de *bilete de intrare* vîndute și numărul *locuitorilor* din localitatea unde se dispută, s-a definit astfel o *funcție*. Această funcție poate da o idee asupra interesului publicului pentru un anumit joc. Se mai pot da multe exemple de corespondențe formulate prin propoziții.

Exemplul 1. Fiecărui număr real i se pune în corespondență valoarea 0 sau 1 după cum x este irațional sau rațional, de exemplu $\sqrt{2} \to 0$, $\frac{3}{4} \to 1$.

Exemplul 2. $g(x) = [x]$, unde x este un număr real și $[x]$ este cel mai mare întreg, mai mic sau egal cu x.

Diagrama. O funcție mai poate fi reprezentată printr-o diagramă, considerîndu-se axa orizontală domeniu de definiție, axa verticală domeniul valorilor iar punctele de pe curba diagramei pot fi considerate ca definind corespondența. Curba trebuie să fie însă astfel încît fiecărui punct al axei orizontale să-i corespundă cel mult un punct al curbei. Din acest motiv, nu orice curbă reprezentată într-un sistem de coordonate poate fi privită ca reprezentare a unei funcții. Doar cînd corespondența realizată prin curbă este univocă, se poate vorbi despre o funcție.

Noțiunea de formulă. Cea mai frecventă reprezentare a unei funcții în matematică este printr-o formulă. În acest caz, elementele domeniului de definiție și ale domeniului valorilor nu pot fi decît *numere* sau „obiecte matematice" pentru care s-au introdus reguli de calcul corespunzătoare, de exemplu

(1) $y = 7x + 2$;

(2) $y = \sqrt{x - 4}$;

(3) $y = \sin x$.

Cînd asupra domeniului de definiție nu s-au făcut ipoteze speciale, se consideră ca făcînd parte din acesta toate numerele reale, cărora prin formula respectivă li se pune în corespondență o anumită valoare. În cazurile (1) și (3), domeniul de definiție este alcătuit de mulțimea tuturor numerelor reale, în cazul (2) din toate numerele reale mai mari sau egale cu 4. Dome-

niul valorilor va fi atunci: în cazul (1) $-\infty < y < +\infty$; în cazul (2) $0 \leqslant y \leqslant +\infty$ și în cazul (3) $-1 \leqslant y \leqslant +1$.

Restrîngerea domeniului de definiție. Domeniul de definiție poate fi restrîns și în mod arbitrar; de exemplu, (1)* $y = 7x + 2$ (pentru $-3 \leqslant x < 5$) sau (1)** $y = 7x + 2$ (pentru $-8 < x < 0$) etc. Domeniul valorilor va fi: în cazul (1)* : $-19 \leqslant y < 37$; în cazul (1)** $-54 < y < 2$.

Evident, ținînd seama de definiția conceptului de funcție, rezultă că (1), (1)* și (1)** reprezintă funcții diferite. Cum două mulțimi sînt egale cînd coincid element cu element, rezultă că două funcții f_1 și f_2 sînt egale, cînd fiecare pereche $[x; y]$ aparținînd lui f_1, $(x; y) \in f_1$ aparține și lui f_2, $(x; y) \in f_2$ și invers, ceea ce nu este cazul funcțiilor (1), (1)* și (1)**.

Exemplul 1. Fie P notația pentru preț, p prețul unei cantități de 100 g dintr-o anumită marfă și m simbolul pentru cantitatea de marfă în grame. Atunci $P = p \cdot \frac{m}{100}$ exprimă legătura dintre preț, cantitate și prețul unitar. Dacă p este 0,72, atunci pentru m, egal cu 100 g, 200 g, 300 g, ... se obțin pentru P valorile 0,72; 1,44; 2,16, ...

Exemplul 2. În formula pentru alungirea unei bare de cupru la încălzire $l = l_0(1 + 0{,}000016\,t)$, l reprezintă numere care exprimă lungimea iar t temperatura. Formula este valabilă pentru valori ale lui t cuprinse între 0°C și 100°C.

Exemplul 3. Calculul ariei pătratului se face cu formula $A = a^2$, unde a este lungimea laturii și A aria.

Din aceste exemple se pot trage următoarele concluzii:

1. Pentru elementele domeniului de definiție și ale domeniului valorilor se introduce denumirea de *variabilă*. În exemplele date acestea sînt m, t, a, respectiv P, l, A. În matematică se folosesc frecvent simbolurile x, respectiv y ca variabile iar simbolurile f, g, φ etc. pentru desemnarea funcției.

2. Corespondența se exprimă cu ajutorul variabilelor printr-o *ecuație*. Se obține astfel, pentru fiecare element (x) al domeniului de definiție un element (y) al domeniului valorilor, calculat înlocuind în ecuația de definiție valoarea lui x; de exemplu, dacă funcția este dată de ecuația $y = -2x^2 + 4x - \sqrt{x}$ cu domeniul de definiție $0 \leqslant x < +\infty$, atunci se găsește valoarea corespunzătoare lui $x = 9$, $y = -2 \cdot 9^2 + 4 \cdot 9 - \sqrt{9} = -129$. Funcția de mai sus pune astfel în corespondență numărului 9 numărul -129. În mod analog, se găsește pentru fiecare număr din domeniul de definiție, valoarea corespunzătoare din domeniul valorilor. Simbolul folosit pentru elementele domeniului de definiție este denumit variabilă independentă și simbolul folosit pentru elementele domeniului valorilor este denumit *variabilă dependentă*. O ecuație prin care se desemnează corespondența dintre variabilele funcției se numește *egalitate funcțională*.

Reprezentarea grafică. Fiind dată o ecuație care definește o funcție, se poate ajunge cu ajutorul unei tabele de valori la o reprezentare grafică a funcției. Folosind un sistem de coordonate în plan (v. cap. 13) se atașează fiecărei perechi de valori (x, y) un punct P al planului iar totalitatea acestor puncte reprezintă imaginea funcției.

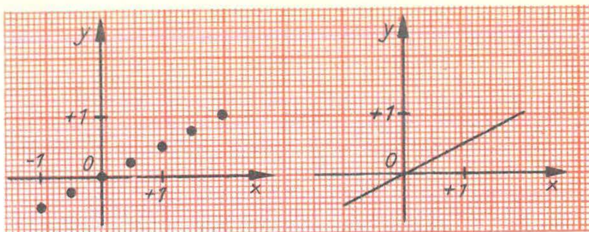
După proprietățile domeniului de definiție și ale egalității funcționale se obține un șir de puncte izolate, porțiuni de curbă sau uneori o *curbă întreagă*.

Exemplu. Fie x o variabilă dependentă în domeniul de definiție $-1 \leqslant x \leqslant +2$; atunci egalitatea funcțională $y = \frac{1}{2}x$ determină pentru y domeniul valorilor $-\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant +1$. Pentru valori particulare ale lui x se obține tabloul de valori

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$+\frac{1}{2}$	$+1$	$+\frac{3}{2}$	$+2$
y	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$+\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{3}{4}$	$+1$

Cu valorile din acest tablou pot fi reprezentate puncte cu abscise în intervalul $-1 \leqslant x \leqslant 2$. Calculînd apoi valorile y pentru valori intermediare, se ajunge la un şir de puncte destul de apropiate care se găsesc pe o porţiune de linie dreaptă (fig. 5.1.3).

În mod frecvent, variabila independentă se reprezintă pe axa orizontală a unui sistem de coordonate carteziene rectangulare iar variabila dependentă pe axa verticală.



5.1.3. Reprezentarea funcţiei $y = \frac{1}{2} x$

Formă explicită. Forma $y = A(x)$ a unei egalităţi funcţionale în care $A(x)$ este o expresie oarecare, care în afară de variabila x nu mai conţine altă variabilă, se numeşte *formă explicită*.

Formă implicită. Spre deosebire de *forma explicită*, în forma implicită variabilele nu sînt izolate; de exemplu (1) $4x - 2y = 6$, (2) $xy = 1$, (3) $y = \sin x \sin y + x^2$, (4) $x^2 + y^2 = 16$, (5) $x^2 + xy + y^x = \sqrt{xy}$. Cînd o egalitate funcţională se dă sub forma explicită, atunci variabila izolată se consideră dependentă şi cealaltă independentă, indiferent dacă acestea sînt notate cu x, y; u, v; s, t sau cu alte litere. Pentru forma implicită nu mai este totodeauna clar care este variabila independentă şi care este cea dependentă. De obicei însă, cînd se foloseşte notaţia cu x şi y, y este considerată variabilă dependentă iar cînd se folosesc alte litere, este nevoie de o indicaţie specială în acest sens. Este de remarcat că nu totdeauna o egalitate funcţională scrisă sub formă implicită poate fi adusă la forma explicită. În exemplele (1) şi (2) acest lucru se face uşor şi se obţine (1) $y = 2x - 3$ şi (2) $y = \frac{1}{x}$. În exemplele (3) şi (5) este însă imposibil de izolat una din variabile.

Pe exemplul (4) $x^2 + y^2 = 16$ se mai poate face încă o observaţie importantă. Această ecuaţie reprezintă ecuaţia unui cerc cu centrul în origine şi cu raza 4. Aici fiecărei valori a lui x îi corespund două valori ale lui y care satisfac ecuaţia. Deci, dacă y se consideră variabilă dependentă, atunci se obţine o corespondenţă care nu mai este univocă. Din acest motiv, ecuaţia (4) nu poate fi privită ca o egalitate funcţională. În schimb, forma explicită $y = +\sqrt{16 - x^2}$ reprezintă o egalitate funcţională. Imaginea ei este semicercul situat deasupra axei orizontale. Semicercul inferior acestei axe are ecuaţia $y = -\sqrt{16 - x^2}$. Uneori ambele funcţii se scriu sub forma $y = \pm\sqrt{16 - x^2}$. Ar fi însă o greşeală să se considere această formă ca o egalitate care defineşte o funcţie, deoarece nu este univocă, funcţiile fiind prin definiţie univoce. Toate ecuaţiile sub formă implicită cu două variabile determină o mulţime de perechi ordonate şi anume mulţimea tuturor perechilor y şi x care satisfac ecuaţia. Asta nu înseamnă altceva decît că printr-o astfel de ecuaţie se defineşte aplicaţia. Că această aplicaţie este univocă, adică reprezintă o funcţie, trebuie verificat de la caz la caz.

Reprezentarea parametrică. Reprezentarea parametrică constă din două egalităţi funcţionale explicite care fiecare reprezintă o funcţie cu acelaşi domeniu de definiţie. Forma generală a reprezentării perametrice este $t \to x = f_1(t)$ şi $t \to y = f_2(t)$. Dacă fiecărui $x_0 = f_1(t_0)$ i se pune în corespondenţă valoarea $y_0 = f_2(t_0)$, atunci s-a definit o aplicaţie a domeniului valorilor lui f_1 pe domeniul valorilor lui f_2, care nu este însă totdeauna univocă.

Exemplul 1. Fie $x = 2t$ şi $y = \frac{t}{2}$ cu $-\infty < t < +\infty$; atunci tabloul valorilor pentru ambele egalităţi funcţionale este

t	−10	−8	−6	−4	−2	0	2	4	6	8	10
x	−20	−16	−12	−8	−4	0	4	8	12	16	20
y	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5

Funcţiei $x = 2t$ îi corespund prima şi a doua linie, iar funcţiei $y = \frac{t}{2}$ prima şi a treia linie. Valorile lui x şi y corespunzătoare aceluiaşi t stabilesc o nouă corespondenţă definită prin relaţia funcţională $y = \frac{x}{4}$, după cum se vede din tabloul de valori. Această relaţie funcţională putea fi găsită şi fără tabloul de valori. Din $x = 2t$, rezultă $t = \frac{x}{2}$, dar $y = \frac{t}{2}$, astfel încît se obţine $y = \frac{x}{4}$, unde parametrul t a fost eliminat.

Exemplul 2. Fie $x = t^2$ şi $y = \frac{t}{2}$ cu domeniul de definiţie $-\infty < t < +\infty$, astfel încît se obţine tabloul de valori

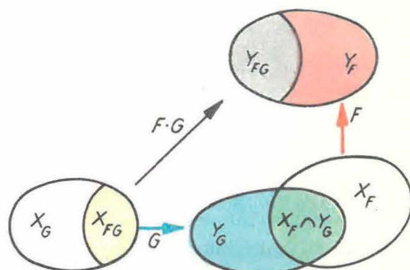
t	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10
x	100	64	36	16	4	0	4	16	36	64	100
y	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5

Aici însă, corespondenţa $x \to y$ nu mai este univocă. Fiecărei valori x îi corespund cel mult două valori ale lui y. Se poate realiza unicitatea prin restrîngerea domeniului de definiţie, la intervalul $0 \leqslant t < +\infty$. Atunci corespondenţa $x \to y$ este o funcţie definită prin $y = \frac{\sqrt{x}}{2}$.

Exemplul 3. Fie $x = \cos t$ şi $y = 2t$ (domeniul de definiţie $-\infty < t < +\infty$). Funcţia $x = \cos t$ este periodică. Pe cînd valorile lui t sînt arbitrare, valorile pentru x se repetă mereu, rămînînd între -1 şi 1 $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$. Pentru $y = 2t$ domeniul valorilor este $-\infty < y < +\infty$. Considerînd corespondenţa $x \to y$, se observă că unei valori a lui x îi corespund o infinitate de valori ale lui y. Este suficient de explicat acest lucru pentru o singură valoare. Astfel, pentru $t = 0$, $t = \pm 2$, $t = \pm 4$ etc., se obţine $x = 1$ şi deci lui $x = 1$ îi corespund valorile $y = 0$, $y = \pm 4\pi$, $y = \pm 8\pi$ etc. Se poate realiza şi aici o corespondenţă biunivocă prin limitarea domeniului de definiţie la $0 \leqslant t \leqslant \pi$. Funcţia considerată se exprimă atunci prin relaţia $y = 2 \arccos x$ cu domeniul de definiţie $-1 \leqslant x \leqslant 1$ şi cu domeniul valorilor $0 \leqslant y \leqslant 2\pi$.

Cînd o funcţie $x \to y = f(x)$ este reprezentată prin două funcţii separate $x = f_1(t)$ şi $y = f_2(t)$, variabila t poartă numele de parametru. Printr-o astfel de parametrizare se poate exprima o relaţie implicită între x şi y, prin două funcţii explicite univoce. De exemplu, $x^2 + y^2 = 1$ poate fi exprimat prin $x = \cos t$, $y = \sin t$ cu $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Pentru a realiza univocitatea, trebuie impuse limitări convenabile ale domeniului de definiţie.

Funcţii compuse. Dacă prin aplicaţia G elementul a corespunde elementului b, şi prin aplicaţia F elementul b corespunde elementului c, atunci, prin aplicarea succesivă a lui F şi G, se obţine o aplicaţie prin care elementul a corespunde elementului c. Aplicaţia definită astfel se numeşte *produs* (sau compoziţie) a celor două aplicaţii F şi G; astfel $(a, c) \in F \cdot G$ dacă şi numai dacă există un element b, astfel încît $(a, b) \in G$ şi $(b, c) \in F$. Evident, elementul b trebuie să aparţină domeniului de definiţie al lui F, X_F cît şi domeniului valorilor aplicaţiei G, X_G (fig. 5.1.9). De aici rezultă că $F \cdot G$ există numai atunci cînd $X_F \cap Y_G \neq \emptyset$. De asemenea ordinea în care se consideră aplicaţiile este importantă deoarece, în general, $F \cdot G \neq G \cdot F$.



5.1.4. Compunerea $F \cdot G$ a aplicaţiilor G şi F; domeniul de definiţie X_{FG} (galben) conţine punctele din X_G a căror imagine prin G aparţine mulţimii $X_F \cap Y_G$ (verde); domeniul Y_{FG} (gri) conţine imaginile punctelor din $X_F \cap Y_G$ prin F

Dacă $X_F, X_G, X_{F \cdot G}$ sînt domeniile de definiţie $Y_F, Y_G, Y_{F \cdot G}$, respectiv domeniile valorilor ale aplicaţiilor $F, G, F \cdot G$, atunci cînd $X_F \cap X_G \neq \emptyset$; $X_{F \cdot G} \subseteq X_G$, $Y_{F \cdot G} \subseteq Y_F$. Mai precis, $X_{F \cdot G}$ conţine acele elemente ale lui Y_F al căror argument în raport cu G se găseşte în $X_F \cap Y_G$ şi $Y_{F \cdot G}$ conţine exact acele elemente ale lui Y_F ale căror argumente în raport cu F se găsesc în $X_F \cap Y_G$. Compoziţia $f \cdot g$ a două funcţii f şi g cu ecuaţiile $y = f(x)$ şi $y = g(x)$ se scrie deseori ca $y = f[g(x)]$ şi se numeşte *funcţia compusă* a celor două funcţii g şi f în ordinea specificată.

Exemplu. Domeniile de definiţie şi domeniile valorilor pentru funcţiile $g(x) = x^2 - 2$ şi $f(x) = \sqrt{x}$ sînt $X_g = (-\infty, +\infty)$, $Y_g = [-2, \infty)$ şi $X_f = [0, \infty)$, $Y_f = [0, \infty)$. Funcţia compusă $f \cdot g$ are ecuaţia $f[g(x)] = \sqrt{x^2 - 2}$ şi domeniul ei de definiţie $X_{f \cdot g}$ se compune din acele elemente ale lui X_g, ale căror valori prin g se găsesc în $X_f \cap X_g = [0, \infty)$. Acestea vor fi punctele x cu proprietatea $x^2 \geqslant 2$, adică mulţimea tuturor numerelor reale cu excepţia intervalului $(-\sqrt{2} + \sqrt{2})$. Funcţia compusă $f \cdot g$ are ecuaţia $g[f(x)] = (\sqrt{x})^2 - 2 = x - 2$ cu domeniul de definiţie $X_{g \cdot f} = [0, \infty)$.

Tipuri speciale de funcţii

În consideraţiile ce urmează se consideră numai funcţii ale căror domenii de definiţie şi domenii ale valorilor sînt cuprinse în mulţimea numerelor reale. Astfel de funcţii sînt în general denumite funcţii reale. După cum satisfac anumite proprietăţi, funcţiile reale pot fi împărţite în anumite categorii de funcţii, de exemplu, monotone, mărginite, pare, impare sau periodice.

Funcţii monotone. O funcţie $x \to y = f(x)$ se zice *monoton crescătoare* în intervalul $a < x < b$, dacă pentru două valori arbitrare x_1 şi x_2 din acest interval, $x_1 < x_2$, rezultă că şi $f(x_1) < f(x_2)$.

Exemplul 1. Funcţia $y = 2^x$ cu domeniul de definiţie $-\infty < x < +\infty$ este o funcţie monoton crescătoare în tot intervalul de definiţie.

Exemplul 2. Funcţia $y = \sin x$ cu domeniul de definiţie $-\infty < x < +\infty$ este monoton crescătoare numai în intervalele $-\frac{5}{2}\pi < x < -\frac{3}{2}\pi$; $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$; $\frac{3}{2}\pi < x < \frac{5}{2}\pi$ etc., privită pe întreg domeniul de definiţie, funcţia nu este monoton crescătoare.

O funcţie se zice *monoton descrescătoare* în intervalul $a < x < b$, dacă din $x_1 < x_2$ (x_1 şi x_2 din intervalul (a, b)) rezultă $f(x_1) > f(x_2)$.

Exemplul 1. Funcţia $y = 1/x$ este monoton descrescătoare pentru $-\infty < x \leqslant 0$ şi $0 < x < +\infty$ şi nu este definită pentru valoarea $x = 0$.

Exemplul 2. Funcţia $y = x^2$ este monoton descrescătoare pentru $-\infty < x \leqslant 0$. Pentru $x \geqslant 0$, funcţia este dimpotrivă monoton crescătoare.

Exemplul 3. Funcţia $y = -3x + 5$ este monoton descrescătoare în tot intervalul ei de definiţie.

Uneori, o funcţie definită pe un interval este numită monotonă dacă din $x_1 < x_2$ rezultă $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, respectiv $f(x_1) \geqslant f(x_2)$. Mai precis, aceste funcţii trebuie denumite nedescrescătoare respectiv necrescătoare iar cele definite mai înainte se vor numi strict monotone (crescătoare, respectiv descrescătoare).

Funcţii mărginite. O funcţie $x \to y = f(x)$ se zice mărginită într-un interval (deschis sau închis) dacă există un număr $B > 0$ cu proprietatea că $|f(x)| \leqslant B$ pentru orice valoare x din intervalul considerat. Dacă $|f(x)| \leqslant B$ pentru orice x din intervalul de definiţie, atunci funcţia se numeşte *mărginită*.

Exemplul 1. Funcţia $y = x^3$ este mărginită în orice interval închis. Fie, de exemplu, $0 \leqslant x \leqslant a$ un astfel de interval; atunci în orice caz $|f(x)| \leqslant B = a^3$. Funcţia nu este însă mărginită pentru că nu există un număr B astfel încît $|f(x)| \leqslant B$ pentru orice x, $-\infty < x < +\infty$.

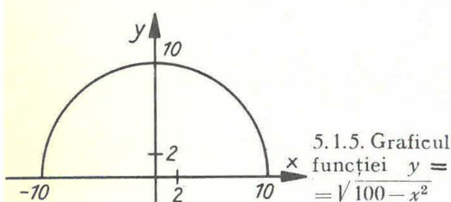
Exemplul 2. Funcția $y = x^{-2}$ este mărginită în orice interval de forma $a \leqslant x < +\infty$ cu $a > 0$. Nu este însă mărginită în intervalul $0 < x \leqslant b$.

Exemplul 3. Funcția $y = \sqrt{100 - x^2}$ este mărginită în tot intervalul de definiție, deoarece $|\sqrt{100 - x^2}| \leqslant 10$ (fig. 5.1.5).

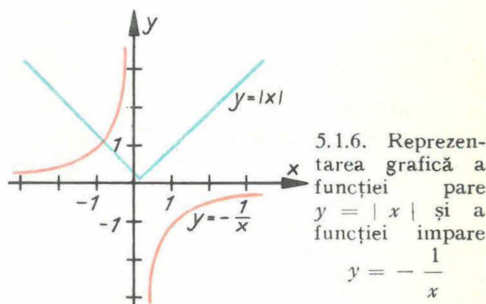
Exemplul 4. Funcția $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ este mărginită în întreg intervalul de definiție. Acest lucru se poate verifica punînd-o sub forma $y = 1 - \dfrac{2}{x^2 + 1}$. Pentru orice x avem $\left|1 - \dfrac{2}{x^2 + 1}\right| \leqslant 1$.

Graficul unei funcții mărginite este totdeauna cuprins între două paralele la axa Ox.

Funcții pare și impare. O funcție $x \to y = f(x)$ se zice *pară* dacă pentru orice valoare x din domeniul ei de definiție $f(-x) = f(x)$.



5.1.5. Graficul funcției $y = \sqrt{100 - x^2}$



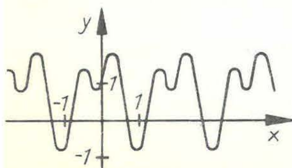
5.1.6. Reprezentarea grafică a funcției pare $y = |x|$ și a funcției impare $y = -\dfrac{1}{x}$

funcții pare	funcții impare
$y = -\frac{1}{2}x^2$	$y = x^3$
$y = \|x\|$	$y = -\frac{1}{x}$
$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$	$y = \frac{1}{2}x$
$y = a \cdot x^{2n}$	$y = a \cdot x^{2n+1}$
$a \neq 0,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$	
$y = \cos x$	$y = \sin x$

O funcție $x \to y = f(x)$ se numește *impară* dacă pentru orice valoare x, $f(-x) = -f(x)$.

Graficul unei funcții pare este *simetric* în raport cu axa Oy. Graficul unei funcții impare este *simetric față de origine*. Printr-o rotație de 180° în jurul originii graficul se transformă în el însuși (fig. 5.1.6).

Funcții periodice. O funcție $x \to y = f(x)$ se numește periodică dacă există un număr $a > 0$ cu proprietatea $f(x) = f(x + a)$ pentru orice valoare posibilă a lui x. Este evident că $f(x) = f(x + 2a) = f(x + 3a)$ ș.a.m.d. și la fel $f(x) = f(x - a) = f(x - 2a)$ ș.a.m.d. atîta timp cît valorile $x \pm a$ rămîn în domeniul de definiție al funcției. Se numește *perioadă* a unei funcții periodice cel mai mic număr $k > 0$ pentru care $f(x) = f(x + k)$. Graficul unei funcții periodice este invariant la translațiile de lungime k sau nk de-a lungul axei Ox (fig. 5.1.7) Cele mai cunoscute funcții periodice sînt funcțiile trigonometrice. Cu ajutorul lor se pot construi și alte funcții periodice: de exemplu, funcțiile $y = b \sin(ax)$ cu $b \neq 0$ și $a \neq 0$ sînt periodice de perioadă $\dfrac{2\pi}{a}$.



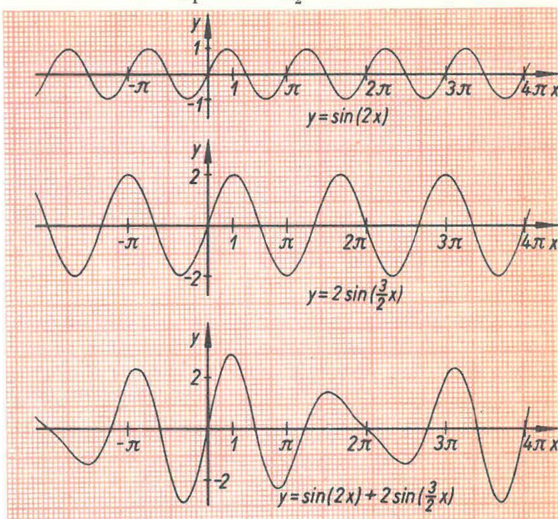
5.1.7. Graficul unei funcții periodice cu perioada $k = 2$

Funcțiile de forma $y = b_1 \sin(a_1 x) + b_2 \sin(a_2 x)$ sînt periodice atîta timp cît $a_1 : a_2 = m : n$, unde m și n sînt două numere întregi prime între ele. Perioada primei funcții este $\dfrac{2\pi}{a_1}$, a celei de a doua este $\dfrac{2\pi}{a_2}$, raportul perioadelor

$\frac{2\pi}{a_1} : \frac{2\pi}{a_2} = a_2 : a_1 = n : m$. Deci n perioade ale primei funcții coincid cu m perioade ale celei de-a doua funcții. Perioada funcției f va fi atunci $m \cdot \frac{2\pi}{a_1} = n \cdot \frac{2\pi}{a_2}$.

Exemplu. Perioadele fiecărui termen al funcției:

$y = \sin 2x + 2 \sin \frac{3}{2} x$ sînt π și $\frac{4}{3}\pi$; raportul lor este $\pi : \frac{4\pi}{3} = 3:4$. Perioada funcției este deci 4π (fig. 5.1.8).



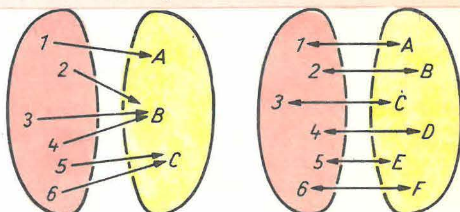
5.1.8. Reprezentarea grafică a funcțiilor $y = \sin 2x$, $y = 2 \sin \frac{3}{2} x$ și $y = \sin 2x + 2 \sin \frac{3}{2} x$.

Inversarea funcțiilor

Funcții inversabile. Corespondența univocă determinată de o funcție între elementele domeniului de definiție și elementele domeniului valorilor poate fi privită uneori și invers ca o corespondență care face să corespundă fiecărui element din domeniul valorilor unul sau mai multe elemente din domeniul de definiție. În această ordine de idei au o deosebită importanță funcțiile pentru care și această aplicație inversă este univocă și anume funcțiile care pun în corespondență fiecărui element din domeniul valorilor un singur element din domeniul de definiție. Pentru astfel de funcții, domeniul valorilor poate fi privit ca domeniu de definiție al unei noi funcții. Dacă funcția dată f realizează corespondența $a \to x = f(a)$, atunci funcția nou definită realizează corespondența $x \to a = \varphi(x)$. Funcțiile pentru care corespondența dintre domeniul de definiție și domeniul valorilor poate fi inversată, în sensul de mai sus, se numesc *inversabile* sau *biunivoce* (fig. 5.1.9).

Mulțimea funcțiilor monotone este conținută în mulțimea funcțiilor inversabile. O funcție monotonă este inversabilă, pe cînd o funcție inversabilă nu este neapărat monotonă.

Domeniul de definiție și domeniul valorilor unei funcții inversabile pot fi mulțimi oarecare, în care nu s-a introdus o relație de ordine și deci pentru care noțiunea de monotonie nu are sens; pot fi inversabile și funcții nemonotone după cum se poate vedea din următorul exemplu în care domeniul de definiție și domeniul valorilor sînt mulțimi finite:



5.1.9. Graficul unei funcții univoce (stînga) și graficul unei funcții biunivoce (dreapta)

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	0	2	4	6	8	1	3	5	7	9

O funcție inversă este la rîndul ei o funcție inversabilă. Se poate ușor vedea că inversa inversei unei funcții f este chiar funcția f.

Funcția inversă. Cînd se consideră domeniul valorilor B al unei funcții inversabile, ca domeniu de definiție al unei noi funcții φ al cărei domeniu al valorilor este domeniul de definiție al funcției f iar corespondența între ele, corespondență inversă corespondenței lui f, se obține funcția inversă a funcției f.

Exemplu

Funcția f						Funcția inversă φ a lui f					
Domeniul de definiție	1	2	3	4	5	Domeniu de definiție	a	b	c	d	e
Domeniul valorilor	a	b	c	d	e	Domeniul valorilor	1	2	3	4	5

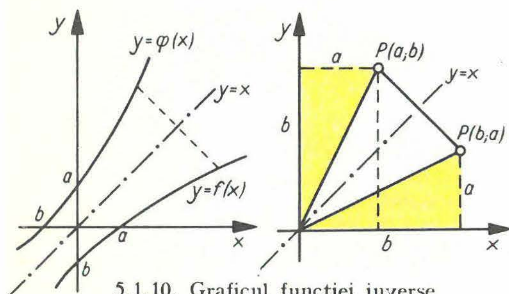
Dacă o funcție inversabilă este dată prin ecuația $y = f(x)$, atunci din această ecuație se poate deduce ecuația funcției inverse, astfel:

1. $y = f(x)$.
2. Se rezolvă ecuația în raport cu x, $x = \varphi(y)$.
3. Se notează variabila dependentă cu y și variabila independentă cu $x : y = \varphi(x)$.

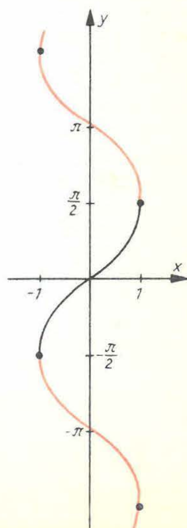
Exemplu. 1. Fie dată funcția inversabilă $y = \frac{1}{2} x$.
2. Rezolvînd ecuația în raport cu x, se obține $x = 2y$.
3. Se schimbă notația folosită pentru variabila $y = 2x$.

Funcția $y = \frac{1}{2} x$ cu domeniul de definiție $-1 \leqslant x \leqslant 2$ și domeniul valorilor $-\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant +1$ are funcția inversă $y = 2x$, cu domeniul de definiție $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant +1$ și domeniul valorilor $-1 \leqslant y \leqslant 2$

Reprezentarea grafică a funcției inverse. Deoarece aplicația realizată printr-o funcție este univocă, graficul unei funcții este intersectat de orice paralelă la axa Oy într-un singur punct. Dacă funcția $f(x)$ admite o inversă $\varphi(x)$, adică este biunivocă, atunci și orice paralelă la axa Ox intersectează graficul într-un singur punct. Imaginea funcției reflectă corespondența $x \rightarrow y$ cît și corespondența $y \rightarrow x$. Datorită schimbării de variabile la funcția inversă oricărei perechi de numere (a, b) definite de funcția f îi corespunde o pereche de numere (b, a) legată de funcția φ. Punctele corespunzătoare acestor perechi de numere (a, b) și (b, a) sînt simetrice față de prima bisectoare (bisectoarea cadranelor I și III) a sistemului de coordonate. Astfel graficul funcției inverse se obține din graficul funcției date, prin simetrie față de prima bisectoare (fig. 5.1.10).



5.1.10. Graficul funcției inverse



5.1.11. Reprezentarea grafică a funcției $y = \arcsin x$

Inversarea unei funcții într-un interval. Cînd s-a vorbit despre funcții monotone s-a arătat că funcții nemonotone în intervalul lor de definiție pot fi monotone pe anumite intervale cuprinse în acest domeniu. Pe aceste intervale funcția este inversabilă.

Exemplul 1. Funcția $y = x^2$ este în intervalul $0 \leqslant x < \infty$ monotonă și inversabilă. Funcția inversă în acest interval este $y = \sqrt{x}$. Desigur această funcție este și în intervalul $-\infty < x \leqslant 0$ monotonă și inversabilă. Funcția inversă în acest interval este $y = -\sqrt{x}$.

Exemplul 2. Pentru funcţia $y = \sin x$ se pot pune în evidenţă mai multe intervale de monotonie. În fiecare interval de monotonie funcţia este inversabilă. Această funcţie inversă se notează $y = \arcsin x$ şi de fiecare dată trebuie specificate domeniul de definiţie şi domeniul valorilor pentru această funcţie, adică trebuie specificat pe ce interval de monotonie s-a făcut inversarea. Dacă $y = \sin x$ s-a inversat în intervalul $\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{2}$, atunci funcţia inversă se va nota $y = \arcsin x \left(\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{2}\right)$. Cînd nu se face o astfel de specificare, se consideră valorile principale ale acestei funcţii, adică $-\frac{\pi}{2} \leqslant \text{Arcsin } x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Exemplul 3. Celelalte funcţii trigonometrice admit intervale de monotonie în care pot fi inversate. De exemplu, funcţia $y = \cos x$ descreşte monoton în intervalul $0 \leqslant x \leqslant \pi$ de la valoarea $y = +1$ pînă la $y = -1$ şi îşi atinge fiecare valoare din domeniul valorilor o singură dată. Din acest motiv ea are o inversă în acest interval, care se notează prin $y = \arccos x$. Domeniul de definiţie al inversei este $-1 \leqslant x \leqslant +1$ iar domeniul valorilor este $\pi \geqslant y \geqslant 0$. Dacă funcţia $y = \cos x$ se inversează în alt interval de monotonie şi anume în intervalul $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$, atunci funcţia $y = \arccos x$ are domeniul valorilor $\pi \leqslant y \leqslant 2\pi$. Pentru a şti despre care funcţie inversă este vorba trebuie dat domeniul valorilor. Cînd acesta nu este specificat, atunci prin $\arccos x$ se înţelege valoarea principală $0 \leqslant \arccos x < \pi$ şi se notează Arccos x. În mod analog, se defineşte funcţia inversă $y = \text{arctg } x$ în intervalul $-\frac{\pi}{2} < \text{Arctg } x < \frac{\pi}{2}$ şi pentru arccotg x în intervalul $0 < \text{Arccotg } x < \pi$ (v. cap. „Trigometrie").

5.2. Polinoame şi funcţii raţionale

Noţiunea de funcţie raţională

Funcţiile a căror corespondenţă se defineşte prin expresii algebrice, pot fi împărţite, ţinînd seama de natura acestor expresii, în funcţii raţionale şi funcţii neraţionale.

O funcţie se zice *raţională* cînd corespondenţa ei se realizează într-o formă explicită în care variabila independentă este supusă unui număr finit de operaţii raţionale (adunare, scădere, înmulţire, împărţire).

Exemple de funcţii raţionale. 1. $y = 8x - 3$. 2. $y = \frac{4x^2 + 1}{x(x^3 - 2)}$. 3. $y = \sqrt{10}\,x^2 - \frac{\ln 5}{x}$, 4. $y = \frac{1}{x^4}$

Exemple de funcţii neraţionale. 1. $y = \sqrt{x^3}$. 2. $y = \cos^2 x$. 3. $y = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

O funcţie raţională reprezentată ca un polinom cu coeficienţii constanţi se numeşte *funcţie raţională întreagă.*

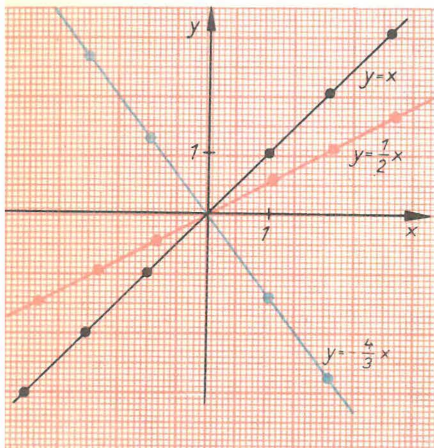
O funcţie exprimată printr-un cît de polinoame în x se numeşte *fracţie raţională.* Cînd nu există o specificare contrară, se ia ca domeniu de definiţie al polinoamelor întreaga axă reală. Din domeniul de definiţie al unei fracţii raţionale trebuie excluse valorile pentru care se anulează numitorul. Se poate demonstra că o fracţie raţională este în domeniul ei de definiţie continuă şi nelimitat derivabilă. În cele ce urmează se vor considera la început polinoamele şi apoi fracţiile raţionale. Inainte de a stabili unele proprietăţi generale, se studiază la început cazuri speciale care apar mai frecvent.

Funcţii liniare

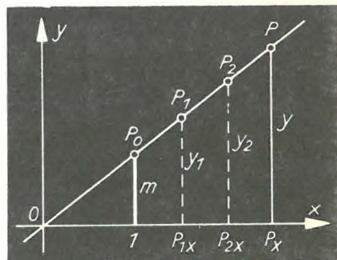
Funcţia $y = mx$. Din tablourile de valori ale funcţiilor $y = x$, $y = \frac{1}{2}x$ şi $y = -\frac{4}{3}x$ rezultă perechi de numere (x, y) care, reprezentate ca puncte într-un sistem de coordonate carteziene, ne dau graficele acestor funcţii (fig. 5.2.1).

$y = x$	x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
	y	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$y = \frac{1}{2}x$	x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
	y	...	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	0,5	1	1,5	...
$y = -\frac{4}{3}x$	x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
	y	...	4	$\frac{8}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{3}{8}$	-4	...

Datorită perechii (0, 0) care apare în tablou la toate funcțiile, rezultă că graficele acestor funcții trec toate prin origine. Aceste grafice sînt linii drepte deoarece pentru diferite puncte $P_1, P_2, ..., P$ (fig. 5.2.2) de pe grafic $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = ... = \frac{y}{x} = m$, unde m este pentru fiecare funcție o constantă.



5.2.1. Funcțiile $y = x$, $y = x/2$, $y = -4x/3$; $m = 1$, $m = 1/2$, $m = -4/3$



5.2.2. $y = mx$ reprezintă o dreaptă

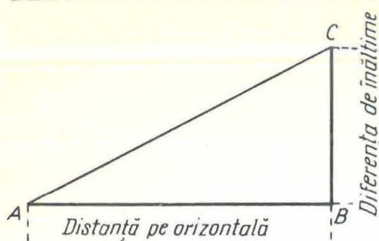
Dacă $P_{1x}, P_{2x}, ..., P_x$ sînt proiecțiile punctelor $P_1, P_2, ..., P$ pe axa Ox, atunci triunghiurile $OP_1P_{1x}, OP_2P_{2x}, ..., OPP_x$ sînt asemenea. Deoarece $P_{1x}, P_{2x}, ..., P_x$ se găsesc pe aceeași dreaptă, rezultă că și $P_1, P_2, ..., P$ sînt coliniare. Între coordonatele punctelor unei drepte există proporționalitatea $y_1 : x_1 = y_2 : x_2$. Variabila y este direct proporțională cu variabila x, iar constanta m este factorul de proporționalitate. Dacă retribuția L este proporțională cu timpul de muncă t, calculat în ore, atunci legătura dintre cele două mărimi este reprezentată printr-o funcție liniară $L = mt$. Factorul de proporționalitate reprezintă aici retribuția pe oră.



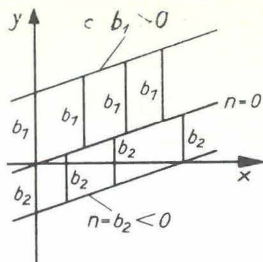
5.2.3. Indicator de pantă

Din reprezentarea grafică a funcției liniare $y = mx$ și din tabloul de valori al funcțiilor speciale $y = x$, $y = \frac{1}{2}x$ și $y = -\frac{4}{3}x$ se poate vedea că funcția este monotonă și anume monoton crescătoare pentru m pozitiv și monoton descrescătoare pentru m negativ.

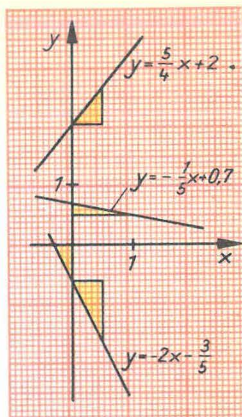
Constanta m se numește coeficient unghiular sau pantă (denumire inspirată din „panta drumului sau a șoselelor“ (fig. 5.2.3). În matematică panta se definește ca raportul dintre diferența de nivel BC și distanța orizontală AB. (fig. 5.2.4).



5.2.4. Pantă



5.2.5. Funcția $y = mx + c$



5.2.6. Alte funcții de tipul $y = mx + c$

Funcțiile $y = mx + n$. Dacă în ecuația dreptei $y = mx$ pentru orice x se adună sau se scade ordonatei y o valoare fixă n, înseamnă că s-a procedat la o translație paralelă a dreptei $y = mx$ cu distanța n, măsurată pe axa Oy. Ecuația $y = mx + n$ reprezintă deci o dreaptă cu panta m și n ordonata intersecției cu dreapta Oy (v. cap. „Geometria analitică a planului, forma carteziană normală"). Cînd se trasează graficul unei astfel de drepte, nu este necesar să se efectueze translația paralelă; se reprezintă întîi punctul $(0, n)$ și apoi se consideră panta în raport cu o paralelă la axa Ox dusă prin acest punct (fig.5.2.5.)

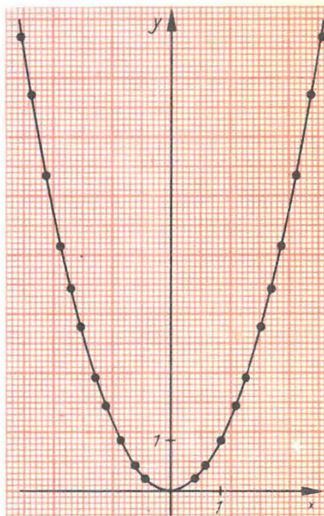
Forma implicită a funcției liniare. În geometria analitică s-a arătat că funcția liniară generală $Ax + By + C = 0$ reprezintă o dreaptă atunci cînd coeficienții A și B nu sînt simultan nuli. Dacă numai unul din coeficienții A și B este nul, atunci dreapta este paralelă la una din axe. Dacă $B \neq 0$, atunci ecuația se poate explicita $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} = mx + n$ (fig. 5.2.6) cu $m = -\frac{A}{B}$ și $n = -\frac{C}{B}$.

Funcții de gradul doi

Funcția $y = x^2$. Funcția dată prin ecuația $y = x^2$ nu mai reprezintă o dreaptă ci o curbă numită *parabolă normală*. (fig. 5.2.7).

Tabloul de valori pentru $y = x^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9



5.2.7. Parabola normală ca grafic al funcției $y = x^2$

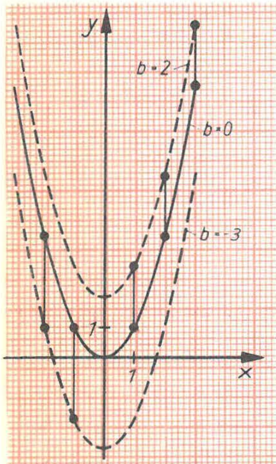
Proprietăți. Pentru orice x, $x^2 \geq 0$, graficul acestei curbe se găsește întotdeauna deasupra axei Ox, cu alte cuvinte domeniul de definiție al acestei funcții este $-\infty < x < +\infty$ și domeniul valorilor $0 \leq y < +\infty$. Parabola normală este simetrică în raport cu axa Oy. Punctul invariant în raport cu această simetrie (originea sistemului de coordonate) se numește vîrf. Spre deosebire de linia dreaptă, curba considerată admite o curbură. Această curbură se explică prin aceea că la o creștere uniformă a lui x corespunde o creștere din ce în ce mai mare a lui y. În tabloul de mai jos se dau aceste creșteri notate cu Δx și Δy cît și creșterile lui Δy care s-au notat cu $\Delta^2 y$. Se poate observa că Δy crește pentru Δx constant pe cînd $\Delta^2 y$ rămîne constant

Δx	...		1		1		1		1		1		1		1		1		...	
x	...	-2		-1		0		1		2		3		4		5		6	...	
y	...	$+4$		$+1$		0		$+1$		$+4$		$+9$		$+16$		$+25$		$+36$	...	
Δy			-3		-1		$+1$		$+3$		$+5$		$+7$		$+9$		$+11$		...	
$\Delta^2 y$	...			2		2		2		2		2		2		2				

Pentru a avea o imagine intuitivă asupra noțiunii de curbură să ne închipuim că o mașină merge pe curbă în sensul crescător al x-ilor. Dacă trebuie să întoarcă roțile din față către stînga pentru a rămîne pe curbă, atunci curba are curbură pozitivă; la o întoarcere a roților către dreapta, curbura este negativă.

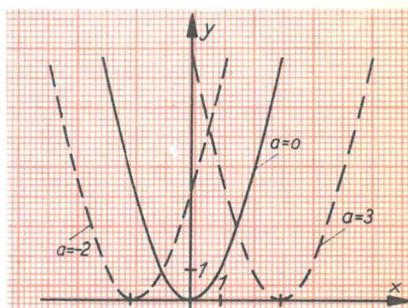
Funcțiile $y = x^2 + px + q$. Prin completarea primilor doi termeni ai acestui trinom de gradul doi pînă la pătrat perfect se obține o funcție de forma $y = (x - a)^2 + b$;

$$y = x^2 + px + q = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right).$$



5.2.8. Funcția $y = x^2 + b$

5.2.9. Funcția $y = (x - a)^2$



Dacă se pune $a = -\frac{p}{2}$, $b = q - \frac{p^2}{4}$, atunci se obține $y = (x - a)^2 + b$ sau $y - b = (x - a)^2$ respectiv $\eta = \xi^2$, dacă $y - b = \eta$, $x - a = \xi$; sistemul de coordonate (ξ, η) se obține printr-o translație (fig. 5.2.9). din sistemul (x, y) realizată prin transformarea de coordonate $x - a = \xi$, $y - b = \eta$. În sistemul de coordonate (x, y) vîrful V al parabolei normale $\eta = \xi^2$ are coordonatele $V(a, b)$ sau exprimate prin coeficienții p și q ai funcției $y = x^2 + px + q$, $V\left(-\frac{p}{2}, q - \frac{p^2}{4}\right)$.

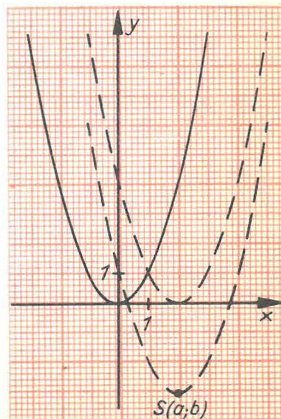
Exemplu. Pentru a obține prin intermediul unui tablou de valori puncte ale graficului funcției $y = x^2 + 6x + 11$, aceasta se poate transforma în $y = (x^2 + 6x + 9) - 9 + 11$ sau $y = (x + 3)^2 + 2$ (fig. 5.2.10). Este deci vorba de o parabolă normală translatată cu vîrful $S(-3, 2)$.

Funcția de gradul doi generală $y = Ax^2 + Bx + C$. În acest caz se presupune că A este diferit de zero, astfel încît poate fi dat în factor

$y = A\left(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}\right) = AY$, unde Y este o funcție de gradul doi a cărei comportare este cunoscută

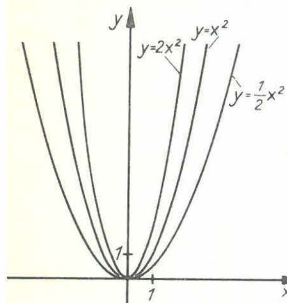
$$Y = x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = x^2 + px + q,$$

$$Y = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) = \left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + \left(\frac{C}{A} - \frac{B^2}{4A^2}\right).$$



5.2.10. Funcția $y = (x - a)^2 + b$

unde $p = \frac{B}{A}$, $q = \frac{C}{A}$. Valorile Y se obțin deci prin adunarea pătratului ordonatei $\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2$ punctelor de pe parabola normală cu vîrful deplasat printr-o translație de distanță $\frac{p}{2} = -\frac{B}{2A}$, în direcția axei Ox, cu valoarea $b = q - \frac{p^2}{4} = \frac{C}{A} - \frac{B^2}{4A^2}$. Relația $y = AY$ arată însă că fiecare dintre aceste valori Y se înmulțesc cu numărul A. Pentru valori A mai mari decît 1, toate ordonatele parabolei normale se întind față de $\frac{C}{A} - \frac{B^2}{4A^2}$ în raportul $A:1$; pentru valori A între 0 și 1 acestea se turtesc în același raport, iar pentru valori A negative această întindere ($|A| > 1$), respectiv turtire ($|A| < 1$) este însoțită cu o simetrie în raport cu axa Ox.



5.2.11. Reprezentarea grafică a funcțiilor $y = x^2/2$ și $y = 2x^2$

Exemplul 1. Graficul funcției $y = -x^2$ se obține din graficul parabolei normale printr-o simetrie față de axa Ox.

Exemplul 2. Graficul funcției $y = \frac{1}{4}x^2$ se obține prin turtirea parabolei normale în raportul $\frac{1}{4}:1 = 1:4$. (fig. 5.2.11).

Exemplul 3. Funcția de gradul 2, $y = 3x^2 - 4x - \frac{1}{6}$ poate fi transformată în

$$y = 3\left[x^2 - \frac{4}{3}x + \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{18}\right)\right] = 3\left[\left(x - \frac{2}{3}\right)^3 - \frac{1}{2}\right].$$

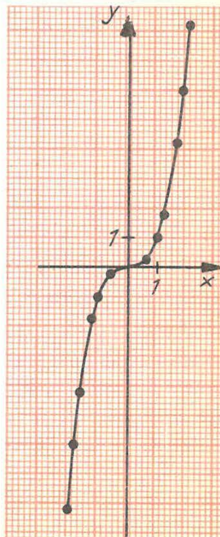
Graficul acestei funcții se obține prin întinderea în raportul 3 : 1 a parabolei normale cu vîrful în punctul $\left(\frac{2}{3};\ -\frac{3}{2}\right)$.

Funcții de gradul trei

Funcția $y = x^3$. Cu ajutorul valorilor dintr-un tabel de cuburi (cuburile numerelor întregi) se pot obține puncte care dau o idee despre graficul funcției $y = x^3$ (fig. 5.2.12) care este o parabolă cubică.

Proprietăți. Parabola cubică este pentru $|x| > \frac{2}{3}$ mai abruptă decît funcția pătratică; numai șirul diferențelor de ordinul trei este constant, unde $\Delta^3 y = \Delta(\Delta^2 y)$.

Δx	...		1		1		1		1		1		1		1		1		...
x	...	−4		−3		−2		−1		0		1		2		3		4...	
y	...	−64		−27		−8		−1		0		1		8		27		64...	
Δy	...		37		19		7		1		1		7		19		37		...
$\Delta^2 y$	...			−18		−12		−6		0		6		12		18			...
$\Delta^3 y$	...				6		6		6		6		6		6				...



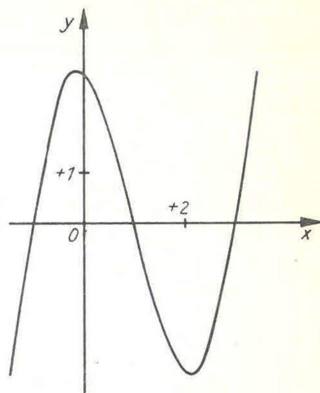
5.2.12. Parabola cubică $y = x^3$

Funcția $y = x^3$ este monoton crescătoare în întreg domeniul de definiție $-\infty < x < +\infty$. Ea este o funcție impară și prezintă simetrie față de origine. Curbura parabolei cubice se schimbă, ea este

negativă pentru $x < 0$ și pozitivă pentru $x > 0$. In origine, parabola cubică are un punct de inflexiune care este totodată centru de simetrie al curbei.

Alte funcții cubice. Funcția $y = -x^3$ are drept grafic, simetrica parabolei cubice față de axa Ox. Funcția $y = kx^3$ reprezintă o parabolă cubică întinsă ($k > 1$) sau turtită ($0 < k < 1$). Funcția $y = (x - a)^3 + b$ reprezintă o parabolă cubică translatată cu centrul de simetrie în punctul $Z(a, b)$.

Funcția cubică generală de gradul trei. $y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ are trei zerouri (rădăcini) dintre care două pot fi în anumite condiții complexe conjugate. Se poate arăta că atunci cînd această funcție admite trei zerouri egale, ea admite două puncte de extrem, un maxim (relativ) și un minim (relativ). Pe exemplul următor, se vede diferența dintre o parabolă cubică și o astfel de funcție.



5.2.13. Graficul funcției $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$

Exemplu. $y = x^3 - 3x^2 - x + 3$ (fig. 5.2.13). Tabloul de valori:

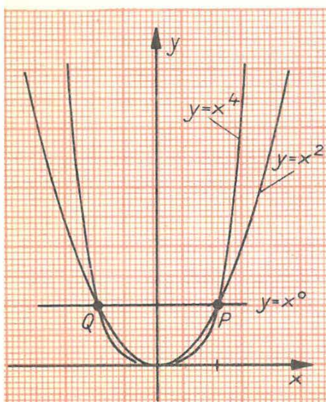
x	-2	-1	$-0,15$	0	$+1$	$2,15$	$+3$
y	-15	0	$+3,08$	$+3$	0	$-3,08$	0

Funcții putere cu exponent pozitiv

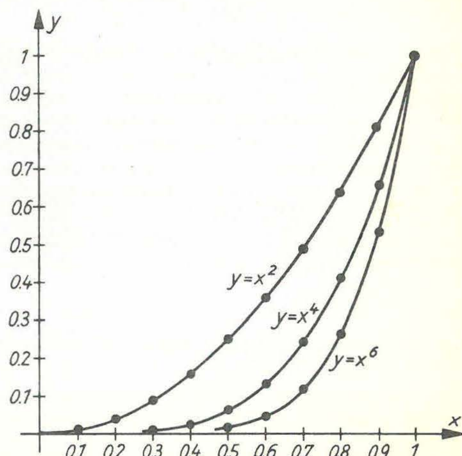
Noțiunea de funcție putere. O funcție $y = x^n$, unde n este un număr întreg, este numită funcție putere; dacă n este pozitiv, atunci funcția este o funcție întreagă, dacă $n = -\nu$ ($\nu > 0$ și întreg), atunci funcția devine $y = \frac{1}{x^\nu}$ și este o funcție (fracție) rațională.

Funcțiile $y = x^n$ cu $n > 0$ sînt pare cînd n este un număr par ($n = 2m$) și impare cînd n este un număr impar ($n = 2m + 1$). Graficele lor trec prin originea sistemului de coordonate.

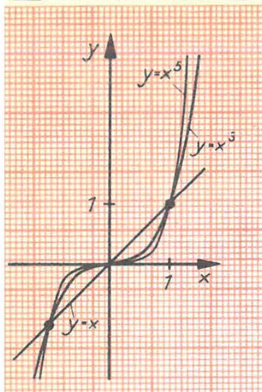
Funcții putere cu exponent întreg par $y = x^{2m}$. Graficele acestor funcții sînt simetrice față de axa Oy și au curbura pozitivă (fig. 5.2.14). Fiecare dintre ele conține originea și punctele $Q(-1, +1)$ și $P(+1, +1)$. În vecinătatea vîrfului inclinarea tangentelor scade cînd m crește, pe cînd în vecinătatea punctelor P și Q tangentele sînt cu atît mai înclinate cu cît m este mai mare. Pentru orice punct (x_1, y_1) pe curba $y = x^{2m_1}$ se poate găsi un punct (x_2, y_2) pe curba $y = x^{2m_2}$ (fig. 5.2.15) ($m_2 > m_1$), astfel încît tangentele în aceste puncte să fie paralele. Aceste curbe se numesc parabole de ordinul $2m$.



5.2.14. Funcțiile $y = x^{2m}$ pentru $m = 0, 1, 2, \ldots$; $y = x^0$ nu este definită pentru $x = 0$.



5.2.15. Porțiuni din parabolele de ordinul $2m$ ca grafice ale funcțiilor $y = x^{2m}$.



5.2.16. Funcțiile $y = x^{2m+1}$ pentru $m = 0, 1, 2, ...$

Funcții putere cu exponent întreg, impar $y = x^{2m+1}$. Graficele prezintă o simetrie centrală față de originea coordonatelor. Sub bisectoarea întîi ($y = x$) aceste curbe admit pentru valorile negative ale domeniului de definițe ($-\infty < x < 0$) o curbură negativă și pentru valorile pozitive ($0 < x < +\infty$) o curbură pozitivă; în origine, admit un punct de inflexiune. Fiecare dintre aceste parabole de ordinul $2m + 1$ conțin punctele $(+1, +1)$ și $(-1, -1)$; panta tangentelor în vecinătatea acestor puncte crește odată cu m, iar în vecinătatea originii ea descrește odată cu m (fig. 5.2.16).

Polinoame

Expresia

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

în care n este un număr întreg și coeficienții a_ν numere reale, $a_n \neq 0$, se numește polinom de gradul n. O funcție rațională $y = f(x)$, unde $f(x)$ este un polinom se numește funcție întreagă rațională sau funcție polinom.

Exemplu. $y = 2(x^2 - 1)^2 + (x + 2)(x^3 - 2) - 2x + x^2 - 1 =$

$$= 2x^4 - 4x^2 + 2 + x^4 - 2x + 2x^3 - 4 - 2x + x^2 - 1$$

sau

$$y = 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x - 3$$

este un polinom de gradul 4 cu coeficienții

$$a_4 = 3, \quad a_3 = 2, \quad a_2 = -3, \quad a_1 = -4, \; a_0 = -3.$$

Unicitatea reprezentării polinoamelor. Presupunerea că două polinoame diferite pot reprezenta aceeași funcție duce la o contradicție. Fie

$$y_a = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

și

$$y_b = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0,$$

unde $n \neq m$ sau dacă $n = m$, cel puțin pentru o pereche de coeficienți $a_i \neq b_i$.

Diferența

$$(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0) - (b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0)$$

poate fi ordonată după puterile lui x și este tot un polinom care are cel puțin un coeficient diferit de zero și al cărui grad este cel mult egal cu cel mai mare dintre m și n. Acest polinom are un număr finit de zerouri. Dar, deoarece s-a presupus că y_a și y_b exprimă aceeași funcție, diferența $y_a - y_b$ este identic nulă, ajungîndu-se la o contradicție. Deci $m = n$ și $a_\nu = b_\nu$, pentru orice ν, pentru că numai astfel diferența polinoamelor este identic nulă.

În acest sens, se spune că reprezentarea unei funcții printr-un polinom este unică. Egalitatea coeficienților va fi deseori folosită, de exemplu, în descompunerea în fracții simple și la rezolvarea ecuațiilor diferențiale (metoda identificării coeficienților).

Descompunerea în factori a polinoamelor

Un polinom $P(x)$ de gradul $n \geqslant 1$ se numește reductibil dacă poate fi reprezentat ca produs de polinoame de grad inferior. Un polinom care nu admite o astfel de reprezentare se numește *ireductibil.*

Dacă polinomul $P(x)$ de gradul n este reductibil, adică poate fi descompus într-un produs $P(x) = p_1(x) \cdot p_2(x)$, atunci polinoamele $p_1(x)$ și $p_2(x)$ sînt cel puțin de gradul 1 și cel mult de gradul $n - 1$. Dacă $p_1(x)$ și $p_2(x)$ sînt reductibile, descompunerea poate fi continuată, după cel mult n pași polinomul $P(x)$ se prezintă ca un produs $P(x) = g(x)\,h(x)\,k(x)$ ... Folosind rezul-

tatul care afirmă că dacă un polinom ireductibil divide un produs de polinoame, atunci el divide cel puțin unul din factorii produsului, se poate arăta că reprezentarea sub formă de produs este unică, abstracție făcînd de un factor constant. Într-adevăr, dacă $P(x) = g_1(x)\,h_1(x)\,k_1(x)\ldots$ și $P(x) = g(x)\,h(x)\,k(x)\ldots$ sînt două astfel de reprezentări, atunci $g_1(x)$ trebuie să dividă unul din polinoamele $g(x)$, $h(x)$, $k(x)$, ... dar cum acestea sînt ireductibile, rezultă că pot să difere cel mult printr-un factor constant c_1. Se poate presupune, fără a restrînge generalitatea, că $g(x)$ este acest polinom. Atunci, $g_1(x) = c_1 g(x)$. Împărțind $P(x)$ prin $g(x)$, se obține

$$c_1 h_1(x)\,k_1(x)\ldots = h(x)\,k(x)\ldots$$

și în același mod, se obține $h_1(x) = c_2 h(x)$ și $c_1 c_2 k_1(x)\ldots = k(x)\ldots$ Deci, ambele descompuneri coincid, abstracție făcînd de un factor numeric.

Problema reductibilității unei funcții depinde în mod semnificativ de mulțimea numerelor din care sînt luați coeficienții ei și coeficienții factorilor ireductibili.

Dacă se presupune că coeficienții polinomului sînt *numere complexe*, atunci din teorema fundamentală a algebrei rezultă că orice funcție rațională întreagă de gradul n se descompune în n factori liniari $x - \alpha_k$, $k = 1, \ldots, n$. Valorile α_k sînt zerourile (rădăcinile) polinomului. Dacă una dintre aceste valori este complexă, $\alpha = a + bi$, atunci în cazul polinoamelor cu coeficienți reali, rezultă că polinomul admite ca rădăcină și valoarea complexă conjugată $\bar{\alpha} = a - bi$. Produsul factorilor corespunzători este atunci $(x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) = (x - a - bi)(x - a + bi) = (x - a)^2 + b^2 = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$, adică un polinom de gradul doi cu coeficienți reali: dacă coeficienții polinomului sînt reali, atunci toate polinoamele ireductibile sînt în acest caz cel mult de gradul doi. Dacă însă se presupune că coeficienții polinomului și coeficienții factorilor ireductibili sînt raționali, atunci teorema nu mai este valabilă, de exemplu $x^4 - 5 = (x^2 + \sqrt{5})(x^2 - \sqrt{5})$.

Rădăcini

Un număr α este *rădăcină* a funcției (*zero* al funcției) $x \to y = f(x)$, atunci cînd numărului α îi corespunde prin funcția f valoarea 0. În cazul funcției polinomiale f, $f(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha + a_0 = 0$.

Pe graficul unei funcții, zerourile reale apar ca puncte de intersecție sau puncte de tangență ale curbei cu axa Ox.

Dacă α este o rădăcină a polinomului $f(x)$, atunci $f(x)$ este divizibil prin $x - \alpha$, adică există un polinom $g(x)$ astfel încît $f(x) = (x - \alpha)\,g(x)$.

În orice caz, funcția $f(x)$ poate fi împărțită prin $x - \alpha$. Prin această împărțire se obține o funcție $g(x)$ de grad mai mic decît $f(x)$ și restul r de grad mai mic decît $x - \alpha$, adică o constantă: $f(x) = (x - \alpha)\,g(x) + r$. Cum α este o rădăcină, pentru $x = \alpha$ se obține $0 = 0 \cdot g(x) + r$ și deci $r = 0$, astfel încît funcția $f(x)$ este divizibilă cu factorul liniar $x - \alpha$, $f(x) = (x - \alpha)\,g(x)$.

Prin inducție se poate demonstra o generalizare a acestei teoreme.

Dacă $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sînt rădăcini ale polinomului $f(x)$, atunci produsul $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_k)$ este divizor al lui $f(x)$, adică $f(x)$ se poate reprezenta ca $f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_k)\,g(x)$.

Exemplu. Polinomul $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ admite rădăcina $x = 3$. Prin împărțire cu $x - 3$ se obține $x^2 - 2x + 1$, astfel încît polinomul se poate reprezenta ca $f(x) = (x - 3)(x^2 - 2x + 1)$.

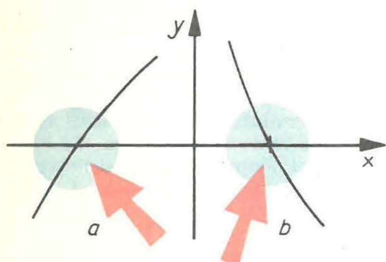
Un polinom $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ are cel mult n rădăcini diferite.

Demonstrație prin inducție matematică. 1) Pentru $n = 1$, adică pentru polinomul $a_1x + a_0$ cu $a_1 \neq 0$ (altfel polinomul n-ar mai fi de gradul întîi) teorema este valabilă, deoarece acest polinom admite ca rădăcină pe $x = -\dfrac{a_0}{a_1}$.

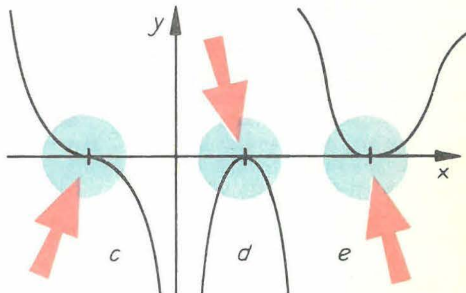
2. Fie $f(x)$ un polinom de grad $n + 1$ și α o rădăcină a acestui polinom. Ținînd seama de teorema precedentă, $f(x)$ este de gradul n. Produsul $(x - \alpha)g(x)$ se anulează cînd cel puțin un factor este nul. Primul factor se anulează pentru $x = \alpha$, al doilea factor $g(x)$, conform ipotezei de inducție are cel mult n rădăcini. Deci produsul și deci și $f(x)$ se anulează pentru cel mult $n + 1$ rădăcini diferite. Teorema este astfel demonstrată.

Rădăcini multiple. Se poate întîmpla ca pentru o rădăcină α un polinom să fie divizibil nu numai prin $x - \alpha$ dar cu $(x - \alpha)^2$, $(x - \alpha)^3$ sau cu altă putere a lui $x - \alpha$. Dacă $f(x)$ este divizibil cu $(x - \alpha)^k$ dar nu cu $(x - \alpha)^{k+1}$, atunci α se numește *rădăcină multiplă de ordinul* k a lui $f(x)$ ($k \geqslant 1$, întreg) sau rădăcină de multiplicitate k.

Exemplu. Polinomul $x^4 - 9x^3 + 27x^2 - 31x + 12$ are $x = 1$ o rădăcină dublă; adică el este divizibil cu $(x - 1)^2$ dar nu și cu $(x - 1)^3$. Rezultă că $f(x) = (x - 1)^2 (x^2 - 7x + 12) = (x - 1)^2(x - 3)(x - 4)$ (fig. 5.2.17).



5.2.17. Grafice în vecinătatea rădăcinilor simple



5.2.18. Grafice în vecinătatea rădăcinilor multiple în c, de ordin impar, în d și c de ordin par

Rădăcini simple și multiple. Multiplicitatea unei rădăcini se reflectă în reprezentarea grafică a funcției. Comportarea curbei în vecinătatea rădăcinilor diferă cu multiplicitatea acesteia. Pentru rădăcini simple, tangenta la curbă în punctul respectiv are o pantă diferită de zero, pe cînd în cazul rădăcinilor multiple, tangenta la curbă în aceste puncte coincide cu axa Ox (fig. 5.2.18).

Rădăcini de ordin par și impar. Aspectul curbei diferă și cu paritatea ordinului rădăcinii. Fie α o rădăcină de ordinul k a lui $f(x)$. Atunci $f(x)$ se scrie $f(x) = (x - \alpha)^k g(x)$, unde $g(x)$ este diferită de zero într-o vecinătate a lui α (din motive de continuitate) și nu-și schimbă semnul în această vecinătate, aceasta însemnînd că există un $\varepsilon > 0$ astfel încît pentru orice x cu proprietatea $|x - \alpha| < \varepsilon$ rezultă $g(x) \neq 0$. Factorul liniar $x - \alpha$ își schimbă însă semnul la trecerea de la $x < \alpha$ la $x > \alpha$.

Polinomul $f(x) = (x - \alpha)^k g(x)$ își schimbă deci semnul la această trecere, cînd k este impar. Pentru k par $f(x)$ își păstrează semnul. Comportarea graficului în vecinătatea unei rădăcini prezintă posibilitățile reprezentate schematic în figură (rădăcini de ordin impar a, b, c, rădăcini de ordin par d, e).

Rădăcini și reprezentare sub formă de produs. Orice funcție rațională întreagă poate fi scrisă ca produs de factori ireductibili sub forma

$$f(x) = c(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \ldots (x - \alpha_r)^{k_l}(x^2 + p_1x + q_1)^{s_1}(x^2 + p_2x + q_2)^{s_2} \ldots (x^2 + p_rx + q_r)^{s_r}$$

Aici c este un polinom de grad zero, adică o constantă diferită de zero, α, p_μ și q_μ sînt numere reale. Exponenții k_ν și s_μ sînt numere naturale legate prin relația $n = \sum_{\nu=1}^{l} k_\nu + 2 \sum_{\mu=1}^{r} s_\mu$. Se observă imediat că α_ν sînt rădăcini ale funcției și că nu mai există alte rădăcini. Pentru orice valori ale lui x diferite de $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ fiecare factor liniar $x - \alpha_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, l$ este diferit de zero. Dacă

unul din factorii pătratici $x^2 + p_\mu x + q_\mu$ ar fi nul pentru $x = \alpha$, s-ar contrazice afirmația că factorii pătratici sînt ireductibili. Un polinom de gradul doi ireductibil este diferit de zero pentru orice x real, deoarece el admite două rădăcini complexe conjugate. Ca o consecință a acestor considerații se obține teorema:

Numărul rădăcinilor reale diferite sau egale între ele ale unui polinom este par sau impar după cum gradul polinomului este par, respectiv impar. Cînd un polinom are gradul impar, atunci el admite cel puțin o rădăcină reală.

Teorema lui Sturm. Cînd se cunoaște o valoare a lui x apropiată de o rădăcină, se pot găsi prin procedee de aproximare (de exemplu metoda lui NEWTON) valori oricît de apropiate de rădăcină. Chiar René DESCARTES (1596—1650), FOURIER și NEWTON (1643—1727) s-au străduit să găsească criterii prin care să se poată stabili dacă într-un anumit interval al domeniului de definiție se găsesc rădăcini ale unui polinom.

Regula semnelor a lui R. Descartes. DESCARTES a considerat semnele coeficienților polinomului $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, adică semnele șirului $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ în care se presupune că a_n și a_0 nu sînt nuli. Ceilalți coeficienți nuli nu sînt luați în considerație. Dacă doi coeficienți vecini (în șir) au semne diferite, se spune că avem o schimbare de semn.

DESCARTES a descoperit că numărul rădăcinilor pozitive este egal cu numărul schimbărilor de semn sau cu un număr obținut din numărul schimbărilor de semn prin scăderea unui număr par. Numărul rădăcinilor negative se găsește în același mod, considerîndu-se schimbările de semn în șirul coeficienților polinomului $f(-x)$.

Exemplu. Polinomul $f(x) = x^5 - x^4 + 2x^3 + x^2 - 3x + 2$ are patru, două sau nici o rădăcină pozitivă, deoarece șirul coeficienților $1; -1; 2; 1; -3; 2$ are patru schimbări de semn. $f(-x) = -x^5 - x^4 - 2x^3 + x^2 + 3x + 2$, se vede că $f(x)$ are o singură rădăcină negativă, deoarece șirul coeficienților prezintă o singură schimbare de semn.

Numărul exact al rădăcinilor este dat de o teoremă a matematicianului francez Jacques-Charles-François STURM (1803—1855). Acest rezultat se obține din reprezentarea sub formă de produs a polinomului

$$f(x) = c(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\ldots(x-\alpha_l)^{k_l}(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}(x^2+p_2x+q_2)^{s_2}\ldots(x^2+p_rx+q_r)^{s_r}$$

Dacă unii factori ireductibili apar de mai multe ori, este suficient să se considere polinomul $\varphi(x) = (x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_l)(x^2+p_1x+q_1)\ldots(x^2+p_rx+q_r)$, în care acești factori apar o singură dată, deoarece $\varphi(x)$ are în acest caz aceleași rădăcini ca $f(x)$ însă simple.

Derivata $\varphi'(x)$ obținîndu-se din regula de derivare a unui produs, apare ca o sumă; în fiecare termen al acestei sume se derivează cîte unul din termenii ireductibili, astfel încît din fiecare termen lipsește cîte un factor din reprezentarea inițială. Suma nu se poate divide prin nici unul din acești factori, astfel încît $\varphi(x)$ și $\varphi'(x)$, abstracție făcînd de o constantă, sînt polinoame prime între ele.

Dacă se împarte $\varphi(x)$ la $\varphi'(x)$, se obține un polinom $q_1(x)$ și un rest $-\varphi_2(x)$ care este un polinom de grad mai mic decît $\varphi'(x)$, $\varphi(x) = q_1(x)\,\varphi'(x) - \varphi_2(x)$. Prin împărțirea lui $\varphi'(x)$ cu $\varphi_2(x)$ se obține un nou rest $-\varphi_3(x)$; $\varphi'(x) = q_2(x)\,\varphi_2(x) - \varphi_3(x)$. Acest procedeu se sfîrșește după un număr finit de pași, obținîndu-se astfel schema de alături. Din ultima egalitate și apoi din aproape în aproape, din toate celelalte pînă la prima, se poate observa că φ_r este un divizor al lui φ_{r-1}, al lui φ_{r-2} ș.a.m.d. un divizor al lui φ și chiar al lui φ'. Dar cum φ și φ' sînt prime între ele, φ_r nu poate fi decît o constantă.

$$\begin{aligned}
\varphi &= q_1\varphi - \varphi_2\\
\varphi' &= q_2\varphi_2 - \varphi_3\\
\varphi_2 &= q_3\varphi_3 - \varphi_4\\
\varphi_3 &= q_4\varphi_4 - \varphi_5\\
\varphi_4 &= q_5\varphi_5 - \varphi_6\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varphi_{r-2} &= q_{r-1}\varphi_{r-1} - \varphi_r\\
\varphi_{r-1} &= q_r\varphi_r
\end{aligned}$$

Șirul de funcții $\varphi, \varphi', \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_r$ se numește șirul lui Sturm. Dacă în polinomul șirului lui Sturm se înlocuiește x printr-o valoare a, atunci se obține un șir de numere $\varphi(a), \varphi'(a)\ \varphi_2(a), \ldots, \varphi_r(a)$. Dacă două numere vecine $\varphi_\nu(a)$ și $\varphi_{\nu+1}(a)$ au semne diferite se spune că, șirul are o schimbare de semn. Fie $W(x)$ numărul schimbărilor de semn, în șirul lui Sturm, pentru valoarea a. Dacă pentru un anumit argument $x = a$ unul din termenii interni ai șirului lui Strum este nul, termenii vecini

acestuia au semne diferite. Cînd această rădăcină variază, numărul schimbărilor de semn $W(x)$ nu se schimbă. Nici la sfîrșitul șirului acest lucru nu se poate întîmpla, deoarece φ_r este o constantă. Numărul $W(x)$ se modifică numai cînd x este o rădăcină a funcției $\varphi(x)$. Evident $W(x)$ scade cu o unitate atunci cînd $\varphi'(x)$ este pozitiv cît și cînd $\varphi'(x)$ este negativ, pentru această rădăcină. Cînd x parcurge intervalul $[a, b]$, atunci variația lui $W(x)$ reprezintă numărul exact al rădăcinilor.

Teorema lui Sturm. Cînd $a < b$ și $\varphi(a) \neq 0$, $\varphi(b) \neq 0$, atunci $W(a) - W(b)$ reprezintă numărul rădăcinilor polinomului $\varphi(x)$, care nu are rădăcini multiple, în intervalul închis $[a, b]$.

Pentru a putea determina cu ajutorul acestei teoreme numărul rădăcinilor polinomului $\varphi(x)$ se aleg pentru x_1, respectiv $x_2 > x_1$, valorile $-M$, respectiv M care în valoare absolută să fie mai mari decît valoarea absolută a rădăcinilor, adică

$M > \max(|\alpha_1|, |\alpha_2| \ldots |\alpha_l|)$, unde $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_l$ sînt rădăcinile lui $\varphi(x)$. Deci M trebuie să fie determinat fără cunoașterea rădăcinilor polinomului. Acest lucru este posibil, deoarece pentru un polinom $\varphi(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ are loc inegalitatea

$$\max(|\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, |\alpha_l|) < 1 + |a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \ldots + |a_1| + |a_0|.$$

Orice polinom cu $a_n \neq 1$ poate fi ușor normat prin împărțire cu a_n. Prin aceasta, rădăcinile se păstrează. Atunci, se poate lua $M = 1 + |a_{n-1}| + \ldots + |a_1| + |a_0|$ și în mod sigur, toate rădăcinile polinomului se vor găsi în intervalul $[-M; M]$. Demonstrația acestei afirmații depășește cadrul acestei lucrări. Pentru a argumenta plauzibilitatea ei să considerăm cazul particular al polinomului $f(x) = x^2 + px + q$ și să examinăm legăturile dintre rădăcinile x_1 și x_2 presupuse reale și coeficienții p și q. Se știe că $x_1 + x_2 = -p$ și $x_1x_2 = q$, de unde se poate observa că $|x_1|$, respectiv $|x_2|$ nu pot fi foarte mari în timp ce $|p|$ și $|q|$ sînt foarte mici. Cu alte cuvinte pentru valorile absolute ale rădăcinilor pot fi găsite anumite margini care se deduc din valorile absolute ale coeficienților.

Exemplu. Pentru a deduce numărul rădăcinilor reale ale polinomului $\varphi(x) = x^5 - 2x^4 - x + 2$ trebuie determinat șirul lui Sturm. Cum însă pentru mărimile $W(a)$ și $W(b)$ contează numai semnele numerelor $\varphi(a), \varphi'(a), \ldots, \varphi_m(a)$, respectiv $\varphi(b), \varphi'(b), \ldots, \varphi_m(b)$, $W(a)$ și $W(b)$ nu se schimbă la efectuarea împărțirilor, cînd deîmpărțitul și împărțitorul se multiplică cu un număr pozitiv. În acest fel, calculele se simplifică. Pentru polinomul dat, se obține următoarea schemă de calcul

Șirul lui Sturm	mod de calcul	schema	semnele la marginile intervalului	
$\varphi(x) = x^5 - 2x^4 - x + 2$			$\varphi(-6) = -10\,360$	$\varphi(+6) = +5\,180$
$\varphi'(x) = 5x^4 - 8x^3 - 1$	$5\varphi : \varphi'$	$\varphi = q_1\varphi' - \varphi_2$	$\varphi'(-6) = +8\,207$	$\varphi'(+6) = +4\,751$
$\varphi_2(x) = \frac{16}{5}x^3 + 4x - \frac{48}{5}$	$4\varphi' : \frac{5}{4}\varphi_2$	$\varphi' = q_2\varphi_2 - \varphi_3$	$\varphi_2(-6) = -724\frac{4}{5}$	$\varphi_2(+6) = +705\frac{3}{5}$
$\varphi_3(x) = 25x^2 - 100x + 100$	$\frac{5}{4}\varphi_2 : \frac{1}{25}\varphi_3$	$\varphi_2 = q_3\varphi_3 - \varphi_4$	$\varphi_3(-6) = +1\,600$	$\varphi_3(+6) = +400$
$\varphi_4(x) = -53x + 76$	$\frac{53}{25}\varphi_3 : \varphi_4$	$\varphi_3 = q_4\varphi_4 - \varphi_5$	$\varphi_4(-6) = +394$	$\varphi_4(+6) = -242$
$\varphi_5(x) = -16\frac{52}{53}$			$\varphi_5(-6) = -16\frac{52}{53}$	$\varphi_5(+6) = -16\frac{52}{53}$

Mărimea M are pentru polinomul $\varphi(x) = x^5 - 2x^4 - x + 2$ valoarea $1 + |-2| + |-1| + |+2| = 6$, adică toate rădăcinile polinomului se găsesc în intervalul $[-6, 6]$. În schema de calcul sînt date valorile $\varphi(-6)$; $\varphi'(-6)$, $\varphi_2(-6)$, $\varphi_3(-6)$, $\varphi_4(-6)$, $\varphi_5(-6)$ și $\varphi(6)$, $\varphi'(6)$ $\varphi_2(6)$, $\varphi_3(6)$, $\varphi_4(6)$, $\varphi_5(6)$. Se găsește $W(-6) = 4$ și $W(6) = 1$; polinomul are $4 - 1 = 3$ rădăcini.

Separarea rădăcinilor. Prin *separarea rădăcinilor* se înțelege determinarea unor intervale în care să se găsească exact cîte o rădăcină a polinomului. Se va arăta pe exemplul examinat mai sus cum se realizează acest lucru cu ajutorul teoremei lui Sturm. Dacă se înlocuiește în șirul lui Sturm al polinomului $\varphi(x) = x^5 - 2x^4 - x + 2$, întîi x cu $x = 0$, atunci diferența $W(-6) - W(0)$ indică numărul rădăcinilor în intervalul $[-6, 0]$. Cum însă $\varphi(0) = +2$, $\varphi'(0) = -1$, $\varphi_2(0) = -9\frac{3}{5}$, $\varphi_3(0) = +100$, $\varphi_4(0) = +76$, $\varphi_5(0) = -16\frac{52}{53}$, se obține $W(0) = 3$ și $W(-6) = 4$ și deci $W(-6) - W(0) = 1$. Celelalte două rădăcini trebuie să se găsească atunci în intervalul $[0, 6]$. Pentru a le separa se consideră mijlocul acestui interval $x = 3$ și se construiește șirul lui Sturm pentru această valoare. Se obține $W(3) = 1$. Cum $W(0) - W(3) = 2$, ambele rădăcini trebuie să se găsească în intervalul $[0,3]$ deci nu sînt încă separate. Se consideră apoi mijlocul intervalului $[0,3]$, $x = 1{,}5$ și se obține $W(1{,}5) = 2$; $W(6) - W(1{,}5) = 1$ și $W(1{,}5) - W(3) = 1$, ceea ce înseamnă că în fiecare interval $[0;\ 1{,}5]$ și $[1{,}5;\ 3]$ se găsește cîte o rădăcină. Cele trei rădăcini sînt astfel separate.

Generalizarea teoremei lui Sturm. Teorema lui Sturm este valabilă în ipoteza că reprezentarea ca produs a polinomului nu conține factori multipli. Pentru un polinom oarecare, nu se poate însă imediat decide dacă această condiție este îndeplinită. Totuși, procedeul lui Sturm poate fi aplicat și în acest caz, procedîndu-se astfel: cu ajutorul algoritmului lui Euclid se determină cel mai mare divizor comun al polinoamelor $f(x)$ și $f'(x)$. Există două posibilități: a) $f(x)$ satisface condiția menționată atunci cînd cel mai mare divizor comun este o constantă diferită de zero și teorema lui Sturm se poate aplica direct. b) $f(x)$ nu satisface această condiție și deci în reprezentarea sub formă de produs există factori de forma $(x - \alpha_\nu)^{k_\nu}$ sau de forma $(x^2 + p_\mu x + q_\mu)^{s_\mu}$ cu $k_\nu > 1$, respectiv $s_\mu > 1$. Atunci în reprezentarea lui $f(x)$ se poate da factor comun $(x - \alpha_\nu)^{k_\nu - 1}$, respectiv $(x^2 + p_\mu x + q_\mu)^{s_\mu - 1}$. Produsul acestor factori, eventual multiplicat printr-o constantă $c(c \neq 0,\ c \neq 1)$, va fi atunci cel mai mare divizor comun al polinoamelor $f(x)$ și $f'(x)$. Împărțind pe $f(x)$ prin acest cel mai mare divizor comun, cîtul obținut satisface condiția necesară pentru a se aplica teorema lui Sturm. Rădăcinile celui mai mare divizor comun nu mai trebuie considerate, ele fiind în același timp și rădăcini ale polinomului.

Comportarea polinoamelor la infinit

Pe lîngă rădăcini, în studiul funcțiilor raționale întregi (polinomiale), mai prezintă interes și alte proprietăți ale acestora ca de exemplu: extreme, puncte de inflexiune, panta tangentei în aceste puncte etc. Studiul acestor proprietăți se face cu ajutorul calculului diferențial și nu face obiectul capitolului de față. Cea ce trebuie însă remarcat este că toate aceste considerații sînt valabile doar într-un interval mărginit în ambele părți, conținut în domeniul de definiție. Se pune însă problema cum se comportă funcțiile raționale întregi în afara unui astfel de interval, ce valori pot lua acestea cînd $|x|$ este mai mare decît valorile absolute ale tuturor rădăcinilor, extremele, punctele de inflexiune etc., corespunzătoare funcției respective. Acest gen de probleme sînt desemnate în general, prin termenul „comportarea la infinit a funcției". Dacă în $fx) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ se scoate în factor termenul $a_n x^n$ se obține

$$f(x) = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \frac{a_{n-2}}{a_n x^2} + \ldots + \frac{a_0}{a_n x^n}\right)$$

Din această reprezentare se poate vedea că atunci cînd $|x|$ crește nemărginit și $f(x)$ crește în același mod, deoarece expresia din paranteze, tinde în acest caz către 1, pe cînd $a_n x^n$ crește nemărginit, Simbolic acest lucru se exprimă sub forma $\lim_{|x| \to \infty} |f(x)| = \infty$.

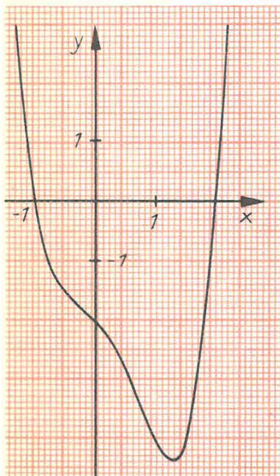
Semnul funcției $f(x)$ pentru $|x| \to \infty$ depinde numai de $a_n x^n$, deoarece expresia din paranteză este întotdeauna pozitivă pentru $|x| > x_p$, unde x_p este o anumită valoare fixă. Există numai posibilitățile din tabelul alăturat:

a_n	n	$x \to$	$f(x) \to$
>0	par	$+\infty$	$+\infty$
		$-\infty$	$+\infty$
	impar	$+\infty$	$+\infty$
		$-\infty$	$-\infty$
<0	par	$+\infty$	$-\infty$
		$-\infty$	$-\infty$
	impar	$+\infty$	$-\infty$
		$-\infty$	$+\infty$

Exemplul 1. Funcţia $y = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$ are rădăcinile reale $x = -1$ şi $x = 2$ Valoarea $x \approx 1,3$ este un punct de minim al funcţiei şi $x = -0,23$ este un punct de inflexiune. În ce priveşte comportarea funcţiei la infinit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ şi $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ Alegin-du-se cîteva valori se obţine următorul tablou de valori:

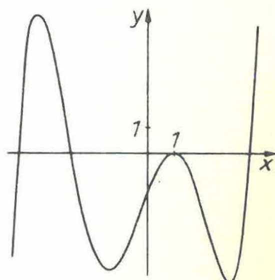
x	−2	−1,6	−1,3	−1	−0,7	−0,23	0	0,3	0,73	1	1,3	1,6	2	2,3	3
y	20	7,6	2,6	0	−1,2	−1,8	−2	−2,4	−3,4	−4	−4,3	−3,7	0	6,2	40

cu ajutorul căruia funcţia poate fi reprezentată grafic (fig. 5.2.19).



5.2.19. Reprezentarea grafică a funcţiei $y = x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$

5.2.20. Reprezentarea grafică a funcţiei $y = 0,025x^5 + 0,05x^4 - 0,6x^3 - 0,55x^2 + 2,575x - 1,5$



Exemplul 2. Funcţia $y = 0,025x^5 + 0,05x^4 - 0,6x^3 - 0,55x^2 + 2,575x - 1,5$ are ca rădăcini simple valorile $x = -5$, $x = -3$, $x = 4$ şi $x = 1$ rădăcină dublă; $x = -1,53$ şi $x = 3,16$ sînt minime ale funcţiei; $x = -4,24$ şi $x = 1$ sînt maxime. Puncte de inflexiune se obţin pentru $x = -3,22$, $x = -0,3$ şi $x = 2,32$ (valori aproximative). Comportarea funcţiilor la infinit este dată de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ şi $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. Pentru reprezentarea grafică a funcţiei se foloseşte următoarea tabelă de valori (fig. 5.2.20).

x	−5,3	−5	−4,7	−4,24	−3,8	−3,22	−3	−2,3	−1,53	−1	−0,3
y	−6,4	0	3,6	5,3	4,3	1,25	0	−3,25	−4,5	−4	−2,3
x	0	0,5	1	1,5	2	2,32	3	3,16	3,7	4	4,3
y	−1,5	−0,42	0	−0,45	−1,75	−2,9	−4,8	−3	−3,2	0	5,6

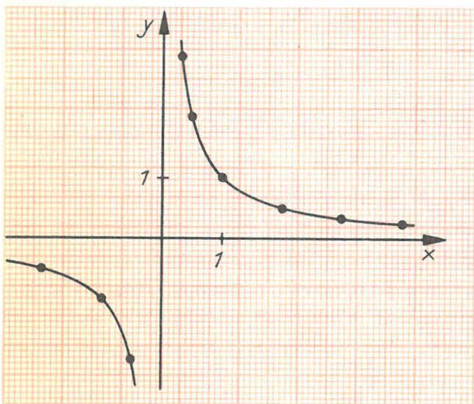
Funcţii putere cu exponent negativ

Cele mai simple funcţii *raţionale* sînt cele exprimate sub forma $y = \frac{1}{x^n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Acestea se mai numesc funcţii putere *cu exponent negativ* care pot fi scrise ca $\frac{1}{x^n}$ sau x^{-n}. În cele ce urmează se vor studia aceste funcţii.

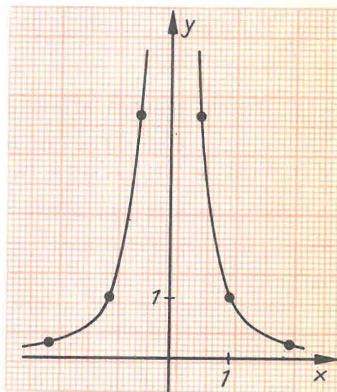
Funcţia $y = \frac{1}{x}$. Această funcţie este impară şi deci simetrică faţă de origine (fig. 5.2.21).

Tablou de valori pentru $y = \frac{1}{x}$:

x	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1\,000}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{5}$	1
y	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-100	1000	50	5	1



5.2.21. Graficul funcției $y = 1/x$



5.2.22. Graficul funcției $y = 1/x^2$

Pentru $|x| > 1$ ordonatele curbei se apropie din ce în ce de valoarea zero odată cu creșterea lui $|x|$, pe cînd în domeniul $-1 < x < +1$ ordonatele cresc nemărginit cînd $|x|$ se apropie de zero. Curba se apropie de părțile pozitive și negative ale axelor x-ilor și y-ilor fără să le atingă însă. Funcția $y = \frac{1}{x}$ nu este definită pentru $x = 0$. Graficul ei are două ramuri, el este o hiperbolă echilaterală.

Funcțiile $y = \frac{1}{x^{2m+1}}$. Curbele care reprezintă aceste funcții se aseamănă cu hiperbolele $y = \frac{1}{x}$. Funcțiile sînt tot impare. Ele nu sînt definite pentru $x = 0$, au două ramuri, una în cadranul I și una în cadranul III și trec toate prin punctele $P(1, 1)$ și $R(-1, -1)$. Ele cresc, respectiv descresc, în intervalul $-1 < x < +1$ cu atît mai repede cu cît m este mai mare și pentru $|x| > 1$ se apropie de axa x-ilor cu atît mai repede cu cît m este mai mare. Axele sînt asimptote și pentru aceste curbe.

Funcția $y = \frac{1}{x^2}$. Această funcție este pară și graficul ei prezintă o simetrie față de axa y-ilor (fig. 5.2.22). În $x = 0$ funcția nu este definită și are două ramuri. Axa x-ilor este asimptotă atît în direcția ei negativă cît și în direcția ei pozitivă, iar axa y-ilor este asimtotă în direcția pozitivă.

Funcțiile $y = \frac{1}{x^{2m}}$. Aceste curbe sînt asemănătoare cu cele obținute în cazul $y = \frac{1}{x^2}$. În ce privește panta acestor curbe, se pot face aceleași considerații ca în cazul funcțiilor putere cu exponent negativ impar. Toate curbele reprezentînd funcții de acest tip au în comun punctele $P(1, 1)$ și $Q(-1, 1)$.

Funcții de forma $y = \frac{k}{x^n}$. Pentru un șir de valori corespondente ale funcției $y = kx^n$ se verifică $\frac{y_1}{x_1^n} = \frac{y_2}{x_2^n} = \ldots = \frac{y}{x^n} = k$, adică puterea a n-a a lui x este proporțională cu y.

În corespondență $y = k/x$, cu cît y este mai mic, cu atît x este mai mare și reciproc. O astfel de relație se numește proporționalitate inversă și indică constanța produsului variabilelor $xy = k$; k se numește în ambele cazuri factor de proporționalitate. În căderea liberă distanța s este proporțională cu pătratul timpului; puterea de atracție F a două mase este invers proporțională cu pătratul distanței lor. Aceste legi se pot exprima deci prin $s = kt^2$, respectiv $F = \frac{m}{r^2}$, unde factorul de proporționalitate poate fi calculat pentru fiecare caz, dîndu-se o pereche de valori $(s; t)$, respectiv (r, F).

Forma generală a funcțiilor raționale

La fel ca pentru funcțiile întregi raționale (polinoame) există și pentru funcțiile raționale o reprezentare care poate fi numită normală.

Corespondența realizată de o funcție rațională $f(x)$ se exprimă ca un cît de două polinoame prime între ele, $p(x)$ și $q(x)$, adică $x \to f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$.

Dacă polinomul $q(x)$ are la numitor un polinom de grad 0, adică o constantă, atunci se obține cazul particular al unei funcții raționale intregi. În cele ce urmează se va presupune că $q(x)$ are cel puțin gradul 1.

Rădăcinile și polii funcțiilor raționale

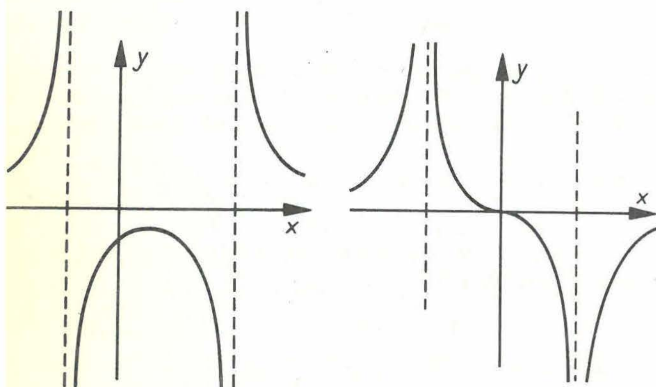
Rădăcini. O funcție rațională poate să se anuleze numai pentru valori ale lui x, pentru care $p(x)$ se anulează și $q(x)$ este diferit de zero, $\frac{p(x)}{q(x)}$ fiind forma normală a funcției; un număr α este deci rădăcină, cînd $p(\alpha) = 0$ și $q(\alpha) \neq 0$. Pentru o funcție rațională oarecare $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ în care $g(x)$ și $h(x)$ sînt polinoame se poate însă întîmpla ca $g(\alpha) = 0$ și $h(\alpha) = 0$. În acest caz, valoarea $f(\alpha)$ nu este determinată. Explicația acestui fapt constă în aceea că $f(x)$ nu este reprezentat sub forma normală, adică $g(x)$ și $h(x)$ nu sînt prime între ele. Atunci $g(x)$ se poate scrie $g(x) = (x - \alpha)^k g_1(x)$ și $h(x) = (x - \alpha)^l h_1(x)$ cu $k, l \geqslant 1$ numere întregi; $g(x)$ și $h(x)$ au un factor comun $(x - \alpha)^m$, m fiind cel mai mic număr dintre k și l, astfel încît fracția $\frac{g(x)}{h(x)}$ poate fi simplificată. Există trei posibilități: 1) $k > l$, atunci $\lim_{x\to\alpha} f(x) = 0$; 2) $k = l$, atunci $\lim_{x\to\alpha} f(x) = c \neq 0$; 3) $k < l$, atunci $f(x)$ nu este definit și acest caz se va studia mai în amănunt. Dacă $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ este forma normală, atunci problema rădăcinilor funcției raționale se reduce la problema rădăcinilor polinomului $p(x)$.

Poli. Se numesc *poli ai funcției* $\frac{p(x)}{q(x)}$ valorile $x = \alpha$ pentru care numitorul $q(x)$ se anulează și $q(\alpha) = 0$ cînd $p(\alpha) \neq 0$. Dacă factorul $x - \alpha$ apare la puterea ν în descompunerea $q(x) = (x - \alpha)^\nu q_1(x)$, atunci se spune că α este un *pol de ordinul* ν. În vecinătatea acestui pol funcția $f(x)$ se reprezintă prin $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{1}{(x-\alpha)^\nu} \cdot \frac{p(x)}{q_1(x)}$.

Dacă $p(x)$ și $q_1(x)$ sînt prime între ele, atunci într-o vecinătate a lui $x = \alpha$, $p(x)$ și $q_1(x)$ nu au nici o rădăcină și deci nu își schimbă semnul și în acest caz raportul lor are o valoare diferită de zero, pozitivă sau negativă. Funcția $\frac{1}{(x-\alpha)^\nu}$ crește însă nemărginit pentru

$x \to \alpha$. Cînd x tinde către α prin valori mai mici decît acesta ($x < \alpha$), atunci $x - \alpha$ este negativ; pentru valori ν impare ($\nu = 1, 3, 5, \ldots$), $\dfrac{1}{(x-\alpha)^{\nu}}$ tinde către $-\infty$, și pentru valori ν pare ($\nu = 2, 4, \ldots$), $\dfrac{1}{(x-\alpha)^{\nu}}$ tinde către $+\infty$.

Dacă x tinde către pol prin valori mai mari decît acesta ($x > \alpha$), $x - \alpha$ este pozitiv și $\dfrac{1}{(x-\alpha)^{\nu}}$ tinde deci către $+\infty$. Această comportare a funcției $\dfrac{1}{(x-\alpha)^{\nu}}$ este modificată de factorul $\dfrac{p(x)}{q_1(x)}$ numai prin schimbarea semnului, atunci cînd acest factor este negativ (fig. 5.2.23). Dreapta $x = \alpha$ este asimptotă a funcției (fig. 5.2.24).



5.2.23. Graficul unei funcții cu poli de ordin impar

5.2.24. Graficul unei funcții cu poli de ordin par

Comportarea la infinit a funcțiilor raționale

Pornind de la forma generală $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$ se pot considera trei cazuri: $m > n$, $m = n$, $m < n$. În cazurile $m = n$, $m > n$, funcția este o „funcție rațională falsă" deoarece împărțind numărătorul prin numitor, se pune în evidență o funcție rațională întreagă $f(x)$ de grad $m - n$:

$$f(x) = p(x) : q(x) = g(x) + r(x).$$

În cazul $m = n$, $g(x)$ este constanta $\dfrac{a_m}{b_n}$ · Restul $r(x)$ este însă o funcție rațională veritabilă, adică în care gradul numărătorului este mai mic decît gradul numitorului. Comportarea la infinit a unui polinom este cunoscută și deci rămîne de examinat numai cazul $m < n$. Dacă se împarte atît la numărător cît și la numitor prin x^m ($m < n$), se obține

$$f(x) = \frac{a_m + \dfrac{a_{m-1}}{x} + \ldots + \dfrac{a_1}{x^{m-1}} + \dfrac{a_0}{x^m}}{b_n x^{n-m} + \ldots + \dfrac{b_1}{x^{m-1}} + \dfrac{b_0}{x^m}}.$$

Pentru $|x| \to \infty$ numărătorul converge către valoarea a_m pe cind valoarea absolută a numitorului poate lua valori oricît de mari, adică $|f(x)| \to 0$ pentru $|x| \to \infty$. Axa x-ilor este atunci asimptotă a funcției $f(x)$. În funcție de semnele coeficienților a_m și b_n și de gradul $n - m$,

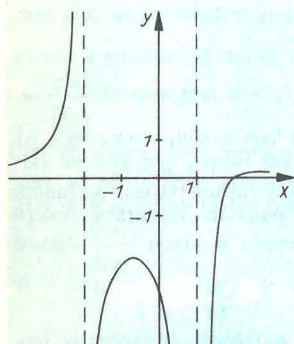
graficul funcției tinde asimptotic către axa x-ilor, de sus sau de jos, către valorile pozitive sau negative; de exemplu: dacă $a_m > 0$, $b_n > 0$ și $n - m$ este impar, atunci $f(x)$ este pozitivă pentru $x \to +\infty$ și negativă pentru $x \to -\infty$.

Aceleași considerații sînt valabile pentru restul $r(x)$ care rămîne după separarea polinomului $g(x)$ în „funcția rațională falsă" $f(x)$. Funcția $f(x)$ tinde asimptotic pentru $|x| \to \infty$ către $g(x)$ și anume de sus, cînd $r(x)$ ia valori mici dar pozitive și de jos cînd se tinde la zero prin valori negative; graficul funcției $g(x)$ se zice „curbă limită". În cazul particular $m = n$, $r(x) = \frac{a_m}{b_n}$, asimptota funcției $f(x)$ pentru $|x| \to \infty$ este o paralelă la axa x-ilor la distanța $\frac{a_m}{b_n}$.

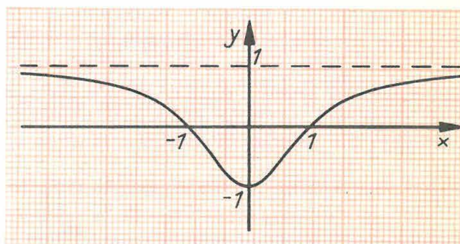
Exemplul 1. Funcția $y = \frac{3x - 6}{x^3 - 3x + 2}$ are pentru $x = 2$ o rădăcină, pentru $x = -2$ un pol de ordinul întîi și pentru $x = 1$ un pol de ordinul 2. Două extreme – ambele maxime – se găsesc pentru $x \approx -0,74$ și $x \approx 2,74$. Comportarea funcției la infinit este dată de $\lim\limits_{|x| \to \infty} y = 0$. Axa x-ilor este asimptotă a graficului funcției date. În scopul studierii semnului funcției în întreg domeniul de definiție, y se exprimă sub forma $y = \frac{3(x - 2)}{(x - 1)^2 (x + 2)}$. Se poate vedea astfel că pentru $-\infty < x < -2$, y este pozitiv, pentru $-2 < x < 1$ și $1 < x < 2$, y este negativ și pentru $x > 2$ din nou pozitiv (fig.5.2.25.). Pentru reprezentarea grafică este necesar următorul tablou de valori:

x	−5	−4	−3	−2,5	−2,2	−1,8	−1,5	−1	−0,74	−0,3	0
y	0,2	0,36	0,94	2,20	6,15	−7,27	−3,36	−2,25	−2,14	−2,4	−3

x	0,5	1,3	1,5	1,8	2	2,74	3
y	−7,2	−7,1	−1,72	−0,25	0	0,16	0,15

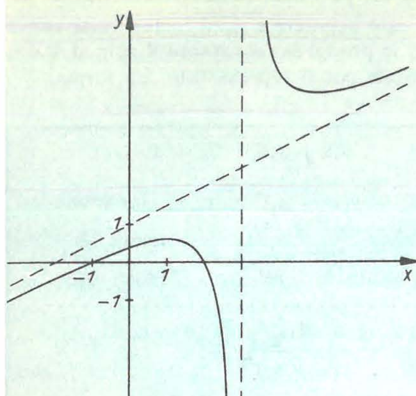


5.2.25. Reprezentarea grafică a funcției $y = \frac{3x - 6}{(x - 1)^2(x + 2)}$



5.2.26. Reprezentarea grafică a funcției $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

Exemplul 2. Funcția $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ are rădăcinile $x = -1$ și $x = 1$ dar nu are poli. Admite un extrem (minim) pentru $x = 0$ și puncte de inflexiune în $x \approx -0,57$ și $x \approx 0,57$. Prin împărțire se obține reprezentarea $y = 1 - \frac{2}{x^2 + 1}$. Deoarece $\lim\limits_{|x| \to \infty} y = 1$, dreapta $y = 1$ este o asimptotă a graficului funcției. Se poate observa că graficul se găsește în întregime sub această asimptotă (fig. 5.2.26).



5.2.27. Reprezentarea grafică a funcției $y = \frac{x^2 - x - 2}{2x - 6}$

Tablou de valori:

x	0	$\pm 0,3$	$\pm 0,5$	± 1	$\pm 1,5$	± 2	± 3	± 5
y	-1	$-0,84$	$-0,6$	0	0,38	0,6	0,8	0,92

Exemplul 3. Funcția $y = \frac{x^2 - x - 2}{2x - 6}$ are rădăcinile $x = -1$ și $x = 2$, un pol pentru $x = 3$ și extreme în $x = 1$ (maxim) și $x = 5$ (minim). Separînd partea rațională întreagă, se obține reprezentarea $y = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{4}{2x - 6}$. Deci $y = \frac{1}{2}x + 1$ este o asimptotă a graficului funcției. Apropierea de asimptotă se face pentru $x \to -\infty$ de jos și pentru $x \to +\infty$ de sus (fig. 5.2.27).

Tablou de valori:

x	-5	-3	-2	-1	0	1	1,5	2	2,5	2,8	3,5	4	5	6	7
y	$-1,75$	$-0,83$	$-0,4$	0	0,33	0,5	0,42	0	$-1,75$	$-7,6$	6,75	5	4,5	4,67	5

Exemplul 4. Pentru funcția $y = f(x) = \frac{x^3 + 2}{2x}$ funcția $y = \frac{1}{2}x^2$ este curba limită, deoarece $\frac{x^3 + 2}{2x} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x}$ și

$$\lim_{|x| \to +\infty} \left(\frac{x^3 + 2}{2x} - \frac{1}{2}x^2 \right) = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Descompunerea în fracții simple

În special pentru integrarea funcțiilor raționale este necesar ca acestea să fie descompuse în fracții simple. În forma normală $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, unde $p(x)$ este numărătorul și $q(x)$ numitorul, primi între ei. Dacă gradul numărătorului $p(x)$ este mai mare sau egal cu gradul numitorului, atunci prin împărțire se poate separa partea rațională întreagă $f(x) = g(x) + \frac{p_1(x)}{q(x)}$. Numitorul $q(x)$ se poate la rîndul lui descompune într-un produs de factori liniari:

$$q(x) = (x - \alpha_1)^{r_1} (x - \alpha_2)^{r_2} \dots (x - \alpha_k)^{r_k} (x - \beta_1)^{s_1} (x - \bar{\beta}_1)^{s_1} \dots (x - \beta_l)^{s_l} (x - \bar{\beta}_l)^{s_l}$$

în care apar cele k rădăcini reale α_i ca și cele l perechi de rădăcini complexe conjugate β_j și $\bar{\beta}_j$ cu ordinele de multiplicitate r_i, respectiv s_j. Produsul a doi factori liniari complecși conjugați este un factor de gradul doi $(x - \beta)(x - \bar{\beta}) = x^2 - (\beta + \bar{\beta})x + \beta\bar{\beta} = x^2 + ax + b$, unde $a = -(\beta + \bar{\beta})$ și $b = \beta\bar{\beta}$. Atunci $q(x)$ se descompune în următorii factori ireductibili în domeniul numerelor reale:

$$q(x) = (x - \alpha_1)^{r_1}(x - \alpha_2)^{r_2} \dots (x - \alpha_k)^{r_k} (x^2 + a_1x + b_1)^{s_1} \dots (x^2 + a_lx + b_l)^{s_l}.$$

Se numesc fracții simple, fracții al căror numitor este o putere a unui factor liniar sau a unui polinom ireductibil de gradul doi; numărătorii sînt în primul caz constante A și în al doilea caz funcții liniare $B + Cx$. Funcțiile raționale ireductibile pot fi reprezentate sub forma:

Descompunerea în fracții simple	$\frac{p_1(x)}{q(x)} = \frac{A_{11}}{x-\alpha_1} + \frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1r_1}}{(x-\alpha_1)^{r_1}} +$ $+ \frac{A_{21}}{x-\alpha_2} + \frac{A_{22}}{(x-\alpha_2)^2} + \ldots + \frac{A_{2r_2}}{(x-\alpha_2)^{r_2}} +$ .... $+ \frac{A_{k1}}{x-\alpha_k} + \frac{A_{k2}}{(x-\alpha_k)^2} + \ldots + \frac{A_{kr_k}}{(x-\alpha_k)^{r_k}} +$ $+ \frac{B_{11}+C_{11}x}{x^2+a_1x+b_1} + \frac{B_{12}+C_{12}x}{(x^2+a_1x+b_1)^2} + \ldots + \frac{B_{1s_1}+C_{1s_1}x}{(x^2+a_1x+b_1)^{s_1}} +$ $+ \frac{B_{21}+C_{21}x}{x^2+a_2x+b_2} + \frac{B_{22}+C_{22}x}{(x^2+a_2x+b_2)} + \ldots + \frac{B_{2s_2}+C_{2s_2}x}{(x^2+a_2x+b_2)^{s_2}} +$ .... $+ \frac{B_{l1}+C_{l1}x}{x^2+a_lx+b_l} + \frac{B_{l2}+C_{l2}x}{(x^2+a_lx+b_l)^2} + \ldots + \frac{B_{ls_l}+C_{ls_l}x}{(x^2+a_lx+b_l)^{s_l}}$

unde A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} sint constante reale. Pentru a vedea că o astfel de descompunere este posibilă, fie α o rădăcină de multiplicitate r a numitorului $q(x)$, adică $q(x) = (x-\alpha)^r q_1(x)$, unde α nu mai poate fi rădăcină a lui $q_1(x)$. Separînd fracția simplă $\frac{A}{(x-\alpha)^r}$, se obține

$$\frac{p_1(x)}{(x-\alpha)^r q_1(x)} - \frac{A}{(x-\alpha)^r} = \frac{p_1(x) - Aq_1(x)}{(x-\alpha)^r q_1(x)} = \frac{\Phi(x)}{(x-\alpha)^r q_1(x)}.$$

Cum $p_1(x)$ și $q_1(x)$ nu se anulează pentru $x = \alpha$, se poate alege pentru constanta A valoarea $\frac{p_1(\alpha)}{q_1(\alpha)} = A$. Se obține astfel că $\Phi(x) = p_1(x) - Aq_1(x)$ are o rădăcină pentru $x=\alpha$, astfel încît din $\Phi(x) = (x-\alpha)\,\varphi(x)$ prin simplificare se obține

$$\frac{p_1(x)}{(x-\alpha)^r q_1(x)} - \frac{A}{(x-\alpha)^r} = \frac{\varphi(x)}{(x-\alpha)^{r-1} q_1(x)}.$$

Această funcție rațională este „veritabilă" deoarece gradul lui $\varphi(x)$ este cu o unitate mai mic decît al lui $\Phi(x)$, al cărui grad este cel mult egal cu gradul lui $q_1(x)$ sau cu gradul lui $p_1(x)$ și deci in orice caz mai mic decit gradul lui $q(x) = (x-\alpha)^r q_1(x)$. Prin același procedeu se poate separa din funcția $\frac{\varphi(x)}{(x-\alpha)^{r-1} q_1(x)}$ fracția simplă $A_1/(x-\alpha)^{r-1}$ și așa mai departe pentru toate rădăcinile reale.

Acceptînd și valori complexe, aceleași considerații se pot face și pentru rădăcinile β și $\bar{\beta}$ ale numitorului $q(x)$. Prin înlocuirea valorilor complexe $\bar{\beta}$ și β în funcțiile $p_1(x)$, respectiv $q_1(x)$ care au coeficienți reali, se vor obține valori complexe conjugate, adică:

$$A_1 = \frac{p_1(\bar{\beta})}{q_1(\bar{\beta})} = \frac{\bar{p}_1(\beta)}{\bar{q}_1(\beta)} = \bar{A}_1.$$

Odată cu fiecare fracție simplă $A/(x-\beta)^r$ apare și fracția simplă $\bar{A}/(x-\bar{\beta})^r$; suma acestor fracții este

$$\frac{A(x-\bar{\beta})^r + \bar{A}(x-\beta)^r}{(x^2 - [\beta+\bar{\beta}]x + \beta\bar{\beta})^r}$$

și ținînd seama de proprietățile numerelor complexe conjugate, această sumă trebuie să fie reală, adică de forma $\dfrac{h(x)}{(x^2+ax+b)^r}$, unde $h(x)$ este cel mult de grad r. Dacă gradul lui $h(x)$ este mai mare decît 1, atunci $h(x)$ se divide prin (x^2+ax+b):

$$h(x) = h_1(x)\,(x^2+ax+b) + (Bx+C)$$

respectiv

$$\frac{h(x)}{(x^2+ax+b)^r} = \frac{Bx+C}{(x^2+ax+b)^r} + \frac{h_1(x)}{(x^2+ax+b)^{r-1}}.$$

Dacă gradul lui $h_1(x)$ este iarăși mai mare decît 1, el poate fi din nou împărțit prin x^2+ax+b. Această descompunere în factori este unică după cum se poate vedea prin înmulțire cu $(x-\alpha_\lambda)^{r_\lambda}$ și compararea coeficienților.

Metode practice de descompunere în fracții simple. Pentru efectuarea practică a unei astfel de descompuneri există diferite posibilități. De exemplu, se poate urma pas cu pas procedeul folosit în demonstrația existenței acestei descompuneri descrisă mai sus. De regulă, însă, se aplică un alt procedeu mai comod care va fi expus în exemplele ce urmează. Este vorba de metoda coeficienților nedeterminați.

Exemplul 1. Fie de descompus în fracții simple funcția $y = \dfrac{2x-1}{(x+2)^2(x-1)}$ După teorema generală funcția admite o descompunere de forma

$$\frac{2x-1}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{A_1}{(x+2)^2} + \frac{A_2}{x+2} + \frac{A_3}{x-1}.$$

Înmulțind egalitatea cu numitorul $(x+2)^2(x-1)$, se obține $2x-1 = A_1(x-1) + A_2(x+2)(x-1) + A_3(x+2)^2$. Desfăcînd parantezele și ordonînd după puterile lui x, se obține $(2x-1) = (A_2+A_3)x^2 + (A_1+A_2+4A_3)x + (-A_1-2A_2+4A_3)$. Identificînd coeficienții (egalînd coeficienții acelorași puteri) se obține pentru A_1, A_2, A_3 următorul sistem de ecuații: I. $A_2+A_3=0$; II. $A_1+A_2+4A_3=2$; III. $-A_1-2A_2+4A_3=-1$. Soluția acestui sistem este $A_1=\dfrac{5}{3}$, $A_2=-\dfrac{1}{9}$ și $A_3=\dfrac{1}{9}$. Astfel, descompunerea căutată este

$$\frac{2x-1}{(x+2)^2(x-1)} = \frac{5}{3(x+2)^2} - \frac{1}{9(x+2)} + \frac{1}{9(x-1)}.$$

Exemplul 2. Pentru a obține descompunerea funcției $y = \dfrac{x^2+5x}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}$ se pornește de la forma $y = \dfrac{x^2+5x}{(x-1)^2(x^2+1)}$. Se caută o descompunere de forma

$$\frac{x^2+5x}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A_1}{(x-1)^2} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{B+Cx}{x^2+1}.$$

Prin înmulțire cu numitorul comun se obține $x^2 + 5x = A_1(x^2 + 1) + A_2(x^2 + 1)(x - 1) + (B + Cx)(x - 1)^2$ și mai departe $x^2 + 5x = (A_2 + C)x^3 + (A_1 - A_2 + B - 2C)x^2 + (A_2 - 2B + C)x + (A_1 - A_2 + B)$. Coeficienții A_1, A_2, B și C trebuie să satisfacă sistemul: I. $A_2 + C = 0$; II. $A_1 - A_2 + B - 2C = 1$; III. $A_2 - 2B + C = 5$; IV. $A_1 - A_2 + B = 0$. Se obține $A_1 = 3$, $A_2 = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{5}{2}$ și $C = -\frac{1}{2}$. Descompunerea căutată este deci

$$\frac{x^2 + 5x}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} = \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{5 + x}{2(x^2 + 1)}.$$

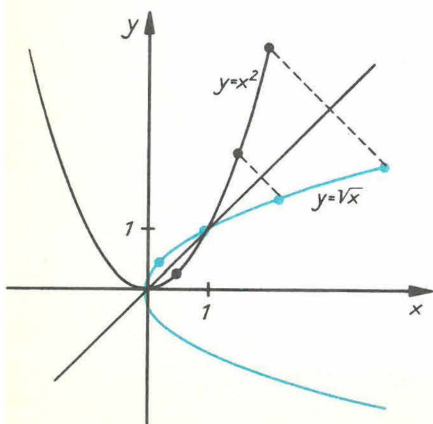
5.3. Funcții iraționale

Definiția funcțiilor iraționale rezultă din însăși denumirea lor, adică acestea sînt funcții care nu sînt raționale, deci a căror corespondență nu poate fi exprimată printr-un număr finit de operații raționale. Pe cînd funcțiile raționale admit o formă normală, nu același lucru se poate spune despre funcțiile iraționale. Astfel, lipsește posibilitatea de a trata proprietățile acestor funcții într-un mod general, unitar. În cele ce urmează se vor considera funcțiile iraționale care apar mai frecvent.

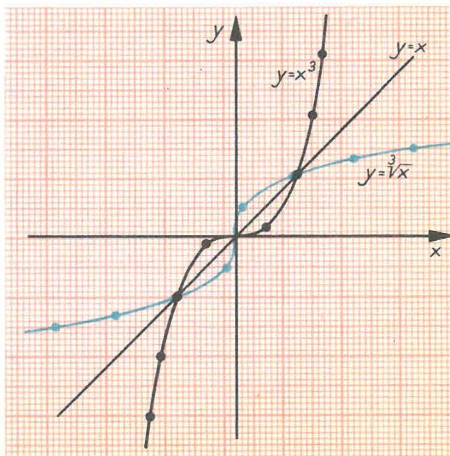
Funcții radical

Funcția $y = \sqrt{x}$. Funcția $y = x^2$ este monotonă în intervalele $0 \leqslant x < \infty$, respectiv $-\infty < x \leqslant 0$ și prin urmare admite două funcții inverse $y = \sqrt{x}$ și $y = -\sqrt{x}$, fiecare cu domeniul de definiție $0 \leqslant x < +\infty$ și cu domeniile valorilor $0 \leqslant y < +\infty$, respectiv $-\infty < y \leqslant 0$. Graficele acestor funcții se obțin din parabola normală prin simetrie față de bisectoarele cadranelor I și III. Ca tabelă de valori poate fi folosită o tabelă de rădăcini pătrate (fig. 5.3.1).

Funcția $y = \sqrt[3]{x}$. Funcția $y = x^3$ (fig. 5.3.2) este monoton crescătoare în tot intervalul de definiție $-\infty < x < +\infty$. Inversa ei este $y^3 = x$, a cărei formă explicită este $y = \sqrt[3]{x}$ pentru $x \geqslant 0$, și $y = -\sqrt[3]{-x}$ pentru $x \leqslant 0$. Domeniul de definiție al funcției $y^3 = x$ este $-\infty < x < +\infty$ iar domeniul valorilor $-\infty < y < +\infty$. Graficul ei se obține din parabola cubică, prin simetrie față de bisectoarea cadranelor I și III și are un punct de inflexiune în origine, tangenta în acest punct fiind axa Ox.



5.3.1. $y = \sqrt{x}$ ca simetrică a curbei $y = x^2$

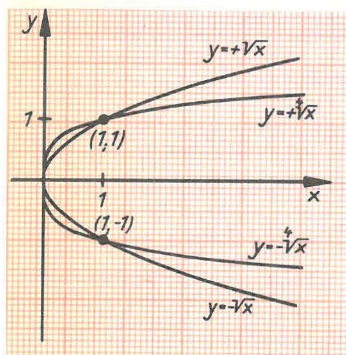


5.3.2. Inversa funcției $y = x^3$

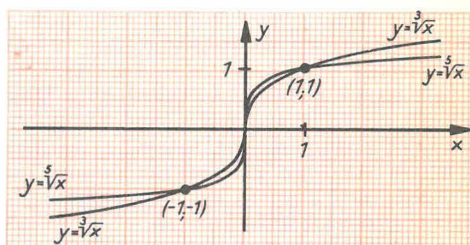
Funcțiile $y = \sqrt[n]{x}$ (fig. 5.3.3). Aceste funcții sînt funcții inverse ale funcțiilor putere $y = x^n$, n pozitiv întreg; pentru n par funcția $y = x^n$ se consideră în intervalele de monotonie $-\infty < x \leqslant 0$ și $0 \leqslant x < +\infty$ și are două funcții inverse $y = -\sqrt[n]{x}$, respectiv $y = +\sqrt[n]{x}$ cu același domeniu de definiție $0 \leqslant x < +\infty$ și cu domeniul valorilor $-\infty < y < 0$, respectiv $0 \leqslant y < +\infty$. Punctul $x = 0$, $y = 0$ aparține ambelor funcții.

Pentru n impar funcția $y = x^n$ cu domeniul de definiție $-\infty < x < +\infty$ admite o inversă $y = \sqrt[n]{x}$ definită pentru $x \geqslant 0$, respectiv $y = -\sqrt[n]{-x}$ pentru $x \leqslant 0$, definită pe $-\infty < x \leqslant 0$ (fig. 5.3.4).

	n impar		n par	
Funcția inversă	$y = \{-\sqrt[n]{-x};\ \sqrt[n]{x}\}$		$y = +\sqrt[n]{x}$	$y = -\sqrt[n]{x}$
Domeniul de definiție	$-\infty < x < +\infty$		$0 \leqslant x < +\infty$	$0 \leqslant x < +\infty$
Domeniul valorilor	$-\infty < y < +\infty$		$0 \leqslant y < +\infty$	$-\infty < y \leqslant 0$
Curbură	$-\infty < x \leqslant 0$	$0 \leqslant x < +\infty$		
	pozitiv	negativ	negativ	pozitiv



5.3.3. $y = \sqrt{x}$, $y = -\sqrt{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$ și $y = -\sqrt[4]{x}$



5.3.4. $y = \sqrt[3]{x}$, $y = -\sqrt[3]{-x}$, $y = \sqrt[5]{x}$ și $y = -\sqrt[5]{-x}$

Funcții exponențiale

Funcția $y = e^x$. Corespondența realizată de o funcție poate fi exprimată și printr-o expresie în care intervin operații raționale în număr infinit. Cum se arată în capitolul șiruri de funcții, prin înlocuirea lui x în termenii șirului care rezultă se poate obține valoarea funcției cu precizia dorită:

$$y = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

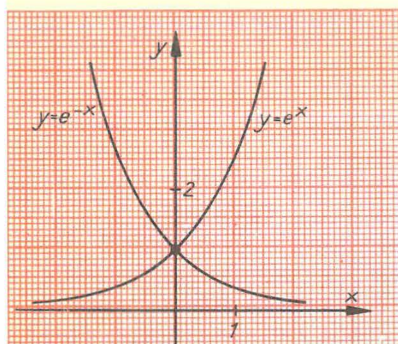
Pentru valoarea particulară $x = 1$ se obține valoarea numărului transcendent $e = 2{,}71828\,1828\,459\ldots$ Unele tabele de logaritmi conțin valori rotunjite ale acestei funcții.

Tablou de valori ale funcției $y = e^x$.

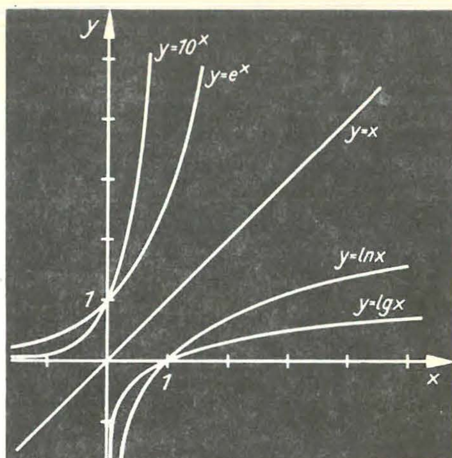
x	...	-3	-2	-1	0	1/3	1/2	1	2	3	...
y	...	0,05	0,14	0,37	1	1,4	1,65	2,72	7,39	20,09	...

Ținind seama de proprietățile puterii, $e^0 = 1$ și $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$. Cum funcția $y = e^x$ ia pentru valori pozitive numai valori pozitive și pentru $x \to +\infty$ crește monoton și nemărginit, rezultă că și funcția $y = e^{-x}$ ia numai valori pozitive și descrește monoton, apropiindu-se asimptotic de axa Ox cînd $x \to +\infty$ (fig. 5.3.5).

Funcția exponențială se folosește deseori ca funcție de creștere pentru a ilustra anumite fenomene din natură; de exemplu, cînd un anumit număr de obiecte considerat ca funcție de



5.3.5. Funcțiile $y = e^x$ și $y = e^{-x}$



5.3.6. Funcțiile exponențiale și logaritmice

timp are o creștere sau descreștere $\pm \dfrac{dN(t)}{dt}$ care depinde de numărul de obiecte la acel moment $N(t)$. Dacă $\pm \dfrac{dN}{dt} = Nk$ (k fiind un factor de proporționalitate), atunci $\dfrac{dN}{N} = \pm k\, dt$ sau $e^{\pm kt} = N(t)$; această funcție ilustrează fenomene ca: creșterea capacității pădurilor creșterea populației globului sau fisiunea radioactivă.

Funcția $y = a^x$. Se știe că $a = e^{\ln a}$, atunci $y = a^x = e^{x \ln a}$, adică funcția exponențială, generală poate fi adusă la forma $y = e^{kx}$, unde $k = \ln a$.

Se poate observa că dacă argumentul x crește cu 1, atunci argumentul $x \ln 2$ al funcției $e^{x \ln 2} = 2^x$ crește doar cu 0,693, iar cel al funcției $y = 10^x = e^{x \ln 10}$ crește cu 2,30. Astfel, funcția $y = 2^x$ crește mai încet decît e^x iar $y = 10^x$ mult mai repede.

$$y = a^x = e^{x \ln a}$$

Tablou de valori ale funcțiilor $y_1 = 2^x$ și $y_2 = 10^x$:

x	...	−3	−2	−1	0	1/3	1/2	1	2	3	...
y_1	...	0,125	0,25	0,5	1	1,26	1,41	2	4	8	...
y_2	...	0,001	0,01	0,1	1	2,15	3,16	10	100	1000	...

În domeniul numerelor reale logaritmul nu este definit pentru $a = 0$ și nici pentru valori negative; din acest motiv funcția exponențială generală $y = a^x = e^{x \ln a}$ există numai pentru valori pozitive ale bazei a. Cu cît baza se apropie de 1, cu atît curba exponențială este mai întinsă; pentru $a = 1$, oricare ar fi x, $y = 1$. Graficul este in acest caz o paralelă la axa x-ilor.

Funcțiile $y = ka^x$. Datorită factorului constant pozitiv k, ordonatele y ale funcției se *lungesc* ($k > 1$) respectiv se scurtează ($k < 1$) in raportul $1:k$. Deoarece $k = e^{\ln k}$, $y = ka^n = e^{\ln k} \cdot e^{x \ln a} = e^{x \ln a + \ln k}$. Graficul se obține din cel al funcției $y = a^x$ (fig. 5.3.6), printr-o translație de distanță $c = -\ln k$ in direcția pozitivă a axei Ox. Dacă $0 < a < 1$, $y = a^x = \left(\dfrac{1}{a}\right)^{-x}$, deci graficul lui $y = a^x$ se obține din graficul funcției $y = b^x$ cu $b = \dfrac{1}{a} > 1$ prin simetrie față de axa Oy.

Funcții logaritmice

Funcția $y = \log_a x$. Această funcție este inversa funcției exponențiale $y = a^x$, care este monotonă in domeniul ei de definiție. Cum domeniul valorilor funcției exponențiale este $0 < y < +\infty$, funcția logaritmică poate fi considerată numai pentru argumente pozitive și deci are ca

domeniu de definiție $0 < x < +\infty$. Funcții logaritmice speciale sînt $y = \ln x$, inversa lui $y = e^x$ și $y = \lg x$, inversa lui $y = 10^x$. Graficele lor se obțin ca simetrice ale graficelor funcțiilor $y = e^x$ și $y = 10^x$ față de dreapta $y = x$ (fig. 5.3.6). Particularități privind funcția $y = \lg x$ și rigla de calcul se găsesc în capitolul „Operații de grad superior".

Funcția $y = \log_a x^k$. Deoarece $y = k \log_a x$, această funcție se obține din $\log_a x$ prin înmulțire cu factorul k. Valoarea ei poate fi și negativă în cazul cînd $k' = -k$, $y = \log_a x^{-k} = \log_a \frac{1}{x^k} = -\log_a x^k = -k \log_a x$; funcția $y = -\log_a x = \log_a x^{-1} = \log_a \frac{1}{x}$ este inversa funcției $y = a^{-x}$.

Funcția $y = \log_a (kx)$. Pentru valori pozitive ale constantelor k, $y = \log_a (kx) = \log_a k + \log_a x$ și deci graficul acestei funcții se obține din cel al funcției $y = \log_a x$ printr-o translație paralelă de distanță $d = +\log_a k$ în direcția pozitivă a axei y-ilor. Pentru valori negative $k' = -k$, funcția este definită numai pentru argumente x negative deoarece în acest caz $k'x = |kx|$ și valorile funcției sînt aceleași ca pentru $y = \log_a (kx)$ cu $0 < x < +\infty$.

Funcții trigonometrice și inversele lor

Funcțiile trigonometrice și *inversele* lor reprezintă un tip de funcții iraționale. Ele fac obiectul trigonometriei (vezi cap. 10). Din modul lor de definiție rezultă următoarele relații: $\sin(\arcsin x) = x$; $\cos(\arccos x) = x$ etc. De asemenea din $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ rezultă pentru x pozitiv $\operatorname{Arccotg} x = \operatorname{Arctg} \frac{1}{x}$ considerînd în ambele părți ale egalităților valorile principale ale acestor funcții. Interesante mai sînt și relațiile următoare:

$$\sin(\operatorname{Arccos} x) = \sqrt{1 - x^2},\quad \sin(\operatorname{Arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}},\quad \cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1 - x^2},$$
$$\cos(\operatorname{Arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}},\quad \operatorname{tg}(\operatorname{Arcsin} x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}},\quad \operatorname{tg}(\operatorname{Arccos} x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$$

Este suficient să demonstrăm prima relație, deoarece celelalte se demonstrează în mod analog. Din $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ rezultă $\sin y = \pm\sqrt{1 - \cos^2 y}$ sau $\sin(\operatorname{Arccos} x) = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Valoarea principală a lui $\arccos x$ se găsește în intervalul $0 \leqslant \operatorname{Arccos} x \leqslant \pi$. În acest interval funcția sin nu ia valori negative, $\sin(\operatorname{Arccos} x) \geqslant 0$; rădăcina pătrată se ia deci cu semnul pozitiv, $\sin(\operatorname{Arccos} x) = +\sqrt{1 - x^2}$. În mod corespunzător $-\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{Arcsin} x \leqslant +\frac{\pi}{2}$ și deci $\cos(\operatorname{Arcsin} x) = +\sqrt{1 - x^2}$ deoarece funcția cosinus nu poate lua în acest interval valori negative.

Folosind relațiile găsite de LEONHARD EULER (1707–1783), între funcțiile trigonometrice și funcția exponențială, se pot găsi relațiile corespunzătoare între funcțiile trigonometrice și funcțiile logaritmice. Aceste relații sînt valabile în domeniul numerelor complexe.

Ținînd seama de valorile introduse mai sus, pentru $\sin \varphi = x$ și valoarea principală a lui $\operatorname{Arcsin} x = \varphi$, se obține prima formulă a lui Euler $e^{i\varphi} = ix + \sqrt{1 - x^2}$. Prin logaritmare aceasta devine $i\varphi = i \operatorname{Arcsin} x = \ln(ix + \sqrt{1 - x^2})$. Folosind unele transformări se obține:

Formulele lui Euler	$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$
$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$	$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$
$\operatorname{tg}\varphi = -i\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}$	$\operatorname{cotg}\varphi = +i\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}$

$$\text{Arcsin}\, x = -\text{i} \ln (x\text{i} + \sqrt{1 - x^2}), \qquad \text{Arccos}\, x = -\text{i} \ln (x + \text{i}\sqrt{1 - x^2})$$

$$\text{Arctg}\, x = -\text{i} \ln \sqrt{\frac{1 + x\text{i}}{1 - x\text{i}}}, \qquad \text{Arccotg}\, x = -\text{i} \ln \sqrt{\frac{x\text{i} - 1}{x\text{i} + 1}}$$

Funcții hiperbolice

Se numesc *funcții hiperbolice* funcțiile definite astfel:

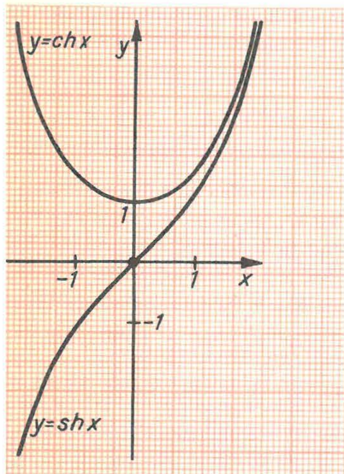
1. *Sinus hiperbolic:* $y = \text{sh}\, x = \frac{1}{2}(\text{e}^x - \text{e}^{-x})$; 2. Cosinus hiperbolic: $\text{ch}\, x = \frac{1}{2}(\text{e}^x + \text{e}^{-x})$.

3. *Tangentă hiperbolică* $y = \text{th}\, x = \frac{\text{e}^n - \text{e}^{-x}}{\text{e}^x + \text{e}^{-x}}$; 4. Cotangentă hiperbolică $y = \text{cth}\, x = \frac{\text{e}^x + \text{e}^{-x}}{\text{e}^x - \text{e}^{-x}}$.

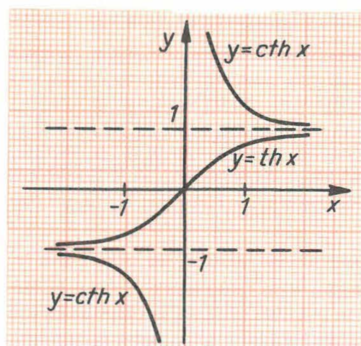
Funcția $y = \text{sh}\, x$. Din definiție, rezultă că $y = \frac{\text{e}^x - \text{e}^{-x}}{2}$ este definită pentru toate valorile lui x. Funcția are o rădăcină $x = 0$. Cînd $x \to +\infty$, e^{-x} devine oricît de mică. Cum în același timp e^x crește nemărginit, rezultă că $y \to \infty$ cînd $x \to \infty$. Pentru $x \to -\infty$, e^{-x} crește nemărginit pe cînd e^x se apropie de zero, adică valorile funcției tind către $-\infty$. Tot din relația de definiție se observă că $\text{sh}\, x = -\text{sh}\,(-x)$, funcția fiind deci impară. Graficul ei prezintă o simetrie față de origine. Domeniul valorilor acestei funcții este $-\infty < y < +\infty$ (fig. 5.3.7).

Funcția $y = \text{ch}\, x$. Și această funcție este definită pentru toate valorile lui x. Cu ajutorul relației de definiție $y = \frac{\text{e}^x + \text{e}^{-x}}{2}$ se observă că domeniul valorilor este $1 \leqslant y < +\infty$. Funcția este pară și deci graficul ei este simetric față de axa Oy (fig. 5.3.7).

Funcțiile $y = \text{th}\, x$, $y = \text{cth}\, x$. Prima dintre aceste funcții este definită pentru toate valorile lui x, pe cînd cea de a doua nu este definită pentru $x = 0$. Domeniul valorilor funcției $y = \text{th}\, x$ este mărginit $-1 < y < +1$. Domeniul valorilor funcției $y = \text{cth}\, x$ este $-\infty < y < -1$ și $1 < y < \infty$. Ambele funcții sînt impare (fig. 5.3.8).



5.3.7. Reprezentarea grafică a funcțiilor $y = \text{sh}\, x$, $y = \text{ch}\, x$



5.3.8. Reprezentarea grafică a funcțiilor $y = \text{th}\, x$, $y = \text{cth}\, x$

Relațiile între funcțiile hiperbolice. Din egalitățile de definiție, rezultă

$$\text{th}\, x = \frac{\text{sh}\, x}{\text{ch}\, x}, \quad \text{cth}\, x = \frac{1}{\text{th}\, x}, \quad \text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1.$$

Tocmai asemănarea dintre aceste relații și relațiile corespunzătoare privind funcțiile trigonometrice au sugerat denumirile de sinus hiperbolic, cosinus hiperbolic etc. Denumirea de funcții hiperbolice a fost inspirată de ultima relație. Dacă se notează $X = \operatorname{ch} x$, $Y = \operatorname{sh} x$, atunci $X^2 - Y^2 = 1$. Aceasta este însă ecuația unei hiperbole în planul X, Y, mai precis, deoarece $\operatorname{ch} x \geqslant 1$, această ecuație reprezintă numai ramura din dreapta a hiperbolei.

Funcții hiperbolice inverse

După cum se poate vedea din graficul funcțiilor hiperbolice, toate cu excepția lui $y = \operatorname{ch} x$ sînt monotone și deci inversabile în întreg domeniul de definiție. În cazul funcției $y = \operatorname{ch} x$ se poate construi o inversă în fiecare din cele două intervale de monotonie.

Funcția $y = \operatorname{arg\,sh} x$. Aceasta este inversa funcției $y = \operatorname{sh} x$. Dacă se rezolvă în raport cu x ecuația $y = (e^x - e^{-x})/2$, se obține $2y = e^x - e^{-x}$ sau prin amplificarecu e^x, $2ye^x = e^{2x} - 1$, respectiv $e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$. S-a obținut astfel o ecuație de gradul 2 în e^x. Dintre soluții poate fi reținută doar $e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$, cealaltă $y - \sqrt{y^2 + 1}$ fiind negativă. Prin logaritmare se obține $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$. Notînd variabila independentă cu x și pe cea dependentă cu y, se obține *expresia explicită a funcției*, $y = \operatorname{arg\,sh} x$, $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. Graficul acestei funcții se obține prin simetrie față de dreapta $y = x$ din graficul funcției $y = \operatorname{sh} x$

Funcția $y = \operatorname{arg\,ch} x$. Pentru inversarea funcției $y = \operatorname{ch} x$, procedind ca și în cazul $y = \operatorname{sh} x$, se ajunge la ecuația $e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$, care are soluțiile $e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$. De aici, rezultă forma explicită a funcției $\operatorname{arg\,ch} x$, $y = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$. Inversei în intervalul $-\infty < x \leqslant 0$ îi corespunde $y = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$ și inversei în intervalul $0 \leqslant x < \infty$ îi corespunde $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$. Graficul acestei funcții se obține din graficul funcției de definiție printr-o simetrie față de dreapta $y = x$. Domeniul de definiție este $1 \leqslant x < +\infty$ și domeniul valorilor $-\infty < y \leqslant 0$, respectiv $0 \leqslant y < +\infty$.

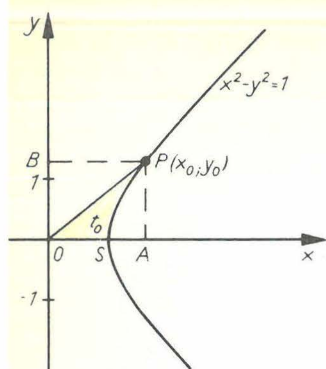
Funcția $y = \operatorname{arg\,th} x$. Din egalitatea funcțională $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ se obține prin amplificare cu e^x, $y = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$, adică $ye^{2x} + y = e^{2x} - 1$ sau $ye^{2x} - e^{2x} = -y - 1$; scoțînd în factor pe e^{2x}, se obține $e^{2x}(1 - y) = 1 + y$ sau $e^{2x} = \dfrac{1 + y}{1 - y}$, respectiv $e^x = \sqrt{\dfrac{1 + y}{1 - y}}$. Logaritmînd și schimbînd notația, se obține pentru $y = \operatorname{arg\,th} x$:

$$y = \ln\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} \quad \text{sau} \quad y = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x}.$$

Domeniul de definiție este $-1 < x < +1$ iar domeniul valorilor intreaga axă reală.

La fel se obține pentru $y = \operatorname{arg\,cth} x$; $y = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x + 1}{x - 1}$ cu domeniul de definiție $-\infty < x < -1$ și $1 < x < +\infty$.

Interpretarea grafică a funcțiilor hiperbolice inverse. Inversele funcțiilor trigonometrice pot fi interpretate ca lungimea arcului y, pentru care funcțiile sinus, cosinus, tangentă, respectiv cotangentă iau valoarea x. Considerînd lungimea acestui arc ca un parametru t, $x = \cos t$ și $y = \sin t$ reprezintă pe cercul unitate un punct din planul xy ($\cos^2 t + \sin^2 t = x^2 + y^2 = 1$). Se poate proceda analog cu funcțiile hiperbolice $x = \operatorname{ch} t$ și $y = \operatorname{sh} t$. Ținînd seama de relația $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$, punctul (x, y) se va găsi pe hiperbola $x^2 - y^2 = 1$. Se poate demonstra că în acest caz parametrul t reprezintă dublul ariei cuprinse între segmentul OV (V fiind inter-



5.3.9. Interpretarea geometrică a funcțiilor hiperbolice inverse

secția hiperbolei cu axa Ox), arcul de hiperbolă VP (P fiind punctul P ($x = y$)) și segmentul de legătură OP (fig. 5.3.9).

Folosind rezultate cunoscute din calculul integral, aria acestei suprafețe se obține astfel:

— pentru porțiunea de suprafața VAP:

$$\text{aria } VAP = \int_1^{x_0} \sqrt{x^2 - 1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} x_0 \sqrt{x_0^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln |x_0 + \sqrt{x_0^2 - 1}|,$$

— pentru porțiunea de suprafața $OVPB$:

$$\text{aria } OVPB = \int_0^{y_0} \sqrt{y^2 + 1}\,dy =$$

$$= \frac{1}{2} y_0 \sqrt{y_0^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln |y_0 + \sqrt{y_0^2 + 1}|.$$

De aici se poate calcula $\frac{t_0}{2}$ = aria OVP în două moduri:

1. $$\text{aria } OVP = \text{aria } OAP - \text{aria } VAP = \frac{1}{2} x_0 y_0 - \text{aria } VAP =$$

$$= \frac{1}{2} x_0 \sqrt{x_0^2 - 1} - \frac{1}{2} x_0 \sqrt{x_0^2 - 1} + \frac{1}{2} \ln |x_0 + \sqrt{x_0^2 - 1}| =$$

$$= \frac{1}{2} \ln |x_0 + \sqrt{x_0^2 - 1}|$$

2. $$\text{aria } OVP = \text{aria } OVPB - \text{aria } OPB =$$

$$= \frac{1}{2} y_0 \sqrt{y_0^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln |y_0 + \sqrt{y_0^2 + 1}| - \frac{1}{2} y_0 \sqrt{y_0^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln |y_0 + \sqrt{y_0^2 + 1}|.$$

Dar după cum s-a dedus mai sus $\frac{1}{2} \ln |x_0 + \sqrt{x_0^2 - 1}| = \frac{1}{2} \arg \text{ch}\, x_0$ și deci $t_0 = \arg \text{ch}\, x_0$.

Considerind funcția $\arg \text{sh}\, x$, se găsește că $\frac{1}{2} \ln |y_0 + \sqrt{y_0^2 + 1}| = \frac{1}{2} \arg \text{sh}\, y_0$ și deci $t_0 = \arg \text{sh}\, y_0$.

5.4. Funcții de mai multe variabile independente

Definiția generală

Fiind date mulțimile $M_1, M_2, \ldots, M_n$ nevide, care pot să nu fie diferite, se poate extrage cite un element $x_1 \in M_1, x_2 \in M_2, \ldots, x_n \in M_n$, păstrîndu-se ordinea inițială. Totalitatea acestor valori este denumită valoare vectorială n-dimensională. Dacă fiecărei astfel de valori i se pune în corespondență o valoare a unui anumit domeniu al valorilor, spunem că s-a definit o funcție cu n variabile independente $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

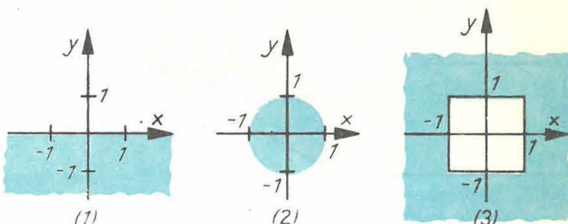
Funcții reale de două variabile independente

Pentru astfel de funcții domeniul de definiție este format din perechi ordonate de numere reale iar domeniul valorilor este cuprins în mulțimea numerelor reale. În general aceste funcții se scriu $z = f(x, y)$, unde z este variabila dependentă iar x și y variabilele independente.

Reprezentarea domeniului de definiție în plan. Domeniul de definiție al unei funcții reale cu două variabile poate fi reprezentat geometric: cum fiecărei perechi ordonate de numere reale îi corespunde un punct într-un sistem de coordonate carteziene în plan, domeniul de definiție poate fi reprezentat printr-un domeniu din plan sau chiar prin puncte izolate.

Exemplul 1. Dacă domeniul de definiție este dat prin $-\infty < x < +\infty$ și $0 \leqslant y < +\infty$, atunci el se reprezintă prin semiplanul superior al planului xy (fig. 5.4.1–(1)).

Exemplul 2. Prin relația $x^2 + y^2 < 1$, domeniul de definiție reprezintă interiorul cercului unitate (fig. 5.4.1–(2)).



5.4.1. Reprezentarea domeniilor din exemplele date.

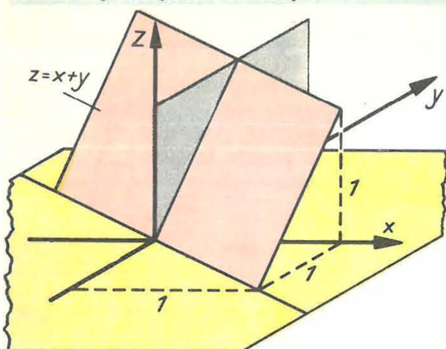
Exemplul 3. Prin $-\infty < x \leqslant -1$, respectiv $1 \leqslant x < +\infty$ și $-\infty < y < +\infty$ ca și prin $-1 < x < 1$ și $1 \leqslant y < \infty$, respectiv $-\infty < y \leqslant -1$ se înțelege întreg planul cu excepția interiorului unui pătrat (fig. 5.4.1–(3)).

Reprezentarea funcțiilor în spațiu. În cazul a trei variabile se folosește pentru reprezentarea grafică un *sistem de coordonate în spațiul cu trei axe*, de regulă rectangulare. Fiecărui *triplet* ordonat de numere reale îi corespunde exact un punct în sistemul de coordonate în spațiu și invers. Pe baza acestei corespondențe, aici funcția reală de două variabile poate fi reprezentată geometric. Prin funcția $z = f(x, y)$, fiecărei perechi (x_0, y_0) îi corespunde numărul z_0. În reprezentarea geometrică tripletului (x_0, y_0, z_0) îi corespunde în spațiu un punct cu coordonatele (x_0, y_0, z_0). Imaginea funcției în spațiul cu trei dimensiuni este o *suprafață*.

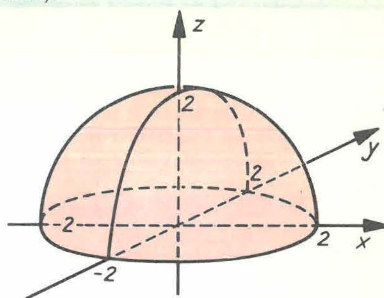
Se pune problema cum se poate stabili natura acestei suprafețe. În principiu ar fi posibilă alcătuirea unei tabele de valori și pe baza acesteia de reprezentat suprafața printr-un desen. Pe această cale însă, pentru a putea obține o imagine cît de cît edificatoare, tabela de valori ar trebui să cuprindă un număr foarte mare de valori. Din acest motiv, în practică, se folosesc alte metode pentru reprezentarea suprafețelor; cu ajutorul *calculului diferențial* se determină valorile extreme, punctele șa și alte caracteristici ale suprafeței respective. Nu se va insista aici asupra acestor metode. Alte informații privind forma suprafeței se obțin dînd uneia din cele trei variabile o valoare constantă. De exemplu, se aleg din domeniul de definiție acele perechi $(x; y)$ pentru care x este egal cu o constantă c. Din $z = f(x, y)$ rezultă $z = f(c, y)$ pe submulțimea extrasă din domeniul de definiție, adică o funcție care conține numai o singură variabilă independentă. Graficul acestei funcții este o curbă, curba de intersecție a suprafeței $z = f(x, y)$ cu planul $x = c$. Pentru diferite valori fixe ale lui x se obține o familie de curbe care dau o imagine asupra suprafeței considerate. Desigur, același procedeu se poate aplica și variabilei y. Lucrurile se schimbă însă cînd variabila z este ținută constantă. Fiecare valoare fixată a lui z duce la ecuația cu două necunoscute; din $z = f(x, y)$ rezultă $c = f(x, y)$. Mulțimea soluțiilor (x, y) care satisfac această ecuație au ca interpretare geometrică o mulțime de puncte în planul $z = c$. Dacă se presupune că c aparține domeniului valorilor, atunci această mulțime nu este vidă. În general, aceste mulțimi reprezintă curbe. Deoarece în mod obișnuit axa Oz este considerată verticală, aceste curbe se numesc *linii de nivel*. În principiu, ele se aseamănă cu liniile de nivel din hărți. În ambele cazuri pe aceste linii se găsesc toate punctele situate la același nivel, deasupra sau dedesubtul unui nivel de reper (pe hărți nivelul de reper este nivelul mării, în cazul nostru planul xOy).

Exemplul 1. Funcția $z = x + y$ este definită în întreg planul xy. Domeniul valorilor ei este $-\infty < z < +\infty$. Dacă se menține x constant, atunci pentru fiecare valoare fixată a lui x se obține o funcție de forma $z = y + c$. Prin reprezentarea grafică a acestei funcții se obține o rețea de drepte paralele.

Liniile de nivel rezultate din $x + y = c$ formează tot o familie de drepte paralele. Funcţia $z = x + y$ nu poate deci reprezenta decît un plan (fig. 5.4.2).



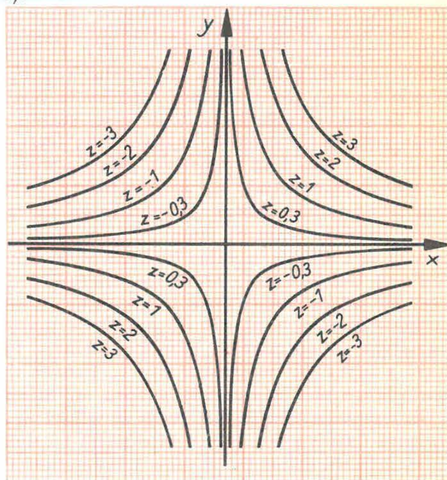
5.4.2. Reprezentarea grafică a funcţiei $z = x + y$



5.4.3. Reprezentarea grafică a funcţiei $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

Exemplul 2. Funcţia $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ este definită numai în domeniul $x^2 + y^2 \leqslant 4$, adică *domeniul de definiţie* este un cerc cu raza 2 şi centrul în origine. Domeniul valorilor ei este mărginit: $0 \leqslant z \leqslant 2$. Ţinînd pe x constant, se obţin ecuaţii de forma $z = \sqrt{(4 - c^2) - y^2}$. Reprezentarea grafică a acestor funcţii ne dă semicercuri. Acelaşi lucru se obţine făcînd pe y constant. Liniile de nivel se obţin din $c = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Reprezentarea grafică a funcţiei $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ este deci o emisferă (fig. 5.4.3).

Exemplul 3. Funcţia $z = xy$ este definită în tot planul xy. Domeniul valorilor ei este $-\infty < z < +\infty$. Dacă se ţine aici x constant, se obţin funcţiile $z = cy$ ale căror grafice sînt linii drepte care nu mai sînt însă paralele ca în exemplul 1. Acelaşi lucru se obţine pentru y constant. Ca linii de nivel se obţin aici hiperbolele cu ecuaţia $xy = c$ ($c \neq 0$). Pentru $c = 0$ se obţin ca linii de nivel axa x-ilor şi axa y-ilor (fig. 5.4.4). Dacă suprafaţa se intersectează cu plane perpendiculare pe planul xy, se obţin întotdeauna parabole, cînd planele de intersecţie nu sînt paralele cu planul xz sau cu planul yz. În aceste cazuri extreme se obţin drept *curbe de intersecţie* dreptele găsite mai sus. Acest lucru poate fi arătat astfel: planele de secţiune au ecuaţii de forma $Ax + By + C = 0$ care pot fi transformate în $y = ax + b$. Dacă se înlocuieşte y prin $ax + b$ în $z = xy$, se obţine $z = ax^2 + bx$. Aceste ecuaţii reprezintă însă parabole. *Vîrfurile* lor se găsesc în planul $x = y$ sau $x = -y$. Reprezentarea grafică a funcţiei $z = xy$ este deci o suprafaţă denumită *paraboloid hiperbolic*.



5.4.4. Liniile de nivel ale funcţiei $z = xy$

Aplicaţii în alte domenii. Funcţii reale cu două variabile se folosesc nu numai pentru a exprima relaţii matematice ci şi relaţii din fizică, tehnică şi alte domenii. Ca exemple se pot da: formule care exprimă arii $A = ab$ şi $A = \frac{gh}{2}$, formule care exprimă volume $V = \pi r^2 h$ sau $V = \frac{1}{3} a^2 h$, formule de rezolvare pentru ecuaţii $x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, legea lui Ohm

$I = \frac{V}{R}$, relația dintre distanță, viteză și timp $s = vt$, formula pentru viteza de rotație a mașinilor rotative $v = \frac{\pi dn}{1\,000}$ ș.a. Cazuri speciale sînt funcțiile sub formă implicită în care nu se specifică care variabile sînt dependente și care sînt independente. Un exemplu de astfel de ecuație este ecuația stării pentru gaze ideale: $pV_m = RT$ care exprimă dependența dintre presiunea p, volumul V_m și temperatura Kelvin T, R fiind constanta absolută a gazelor. Fiecare din aceste trei variabile poate fi considerată ca variabilă dependentă, cu condiția însă ca aceste variabile să ia numai valori pozitive. Curbele rezultate din menținerea lui T constant se numesc *izoterme* și se aseamănă cu liniile de nivel ale funcției $z = xy$ pentru valori pozitive ale lui x și y.

Un exemplu ceva mai complicat ar fi ecuația de stare a lui van der Waalsch pentru gaze reale $\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$ în care a și b sînt constante care depind de natura gazului.

Funcții reale de n variabile independente

În cele ce urmează se vor considera cîteva proprietăți generale și unele cazuri particulare ale acestor funcții fără însă a le trata în mod sistematic și complet.

Domeniul de definiție și reprezentarea funcțiilor. Dacă domeniul de definiție este alcătuit din triplete ordonate de numere naturale, atunci el mai poate fi încă reprezentat geometric. În general el poate fi considerat în acest caz ca un domeniu în spațiu, reprezentat într-un sistem de coordonate carteziene x, y, z. Funcția apare atunci ca o corespondență care atașează fiecărui punct al domeniului de definiție din spațiul cu trei dimensiuni o valoare numerică. Astfel de funcții apar, de exemplu, în fizică, la descrierea cîmpurilor electrice, magnetice sau gravitaționale. Valorile atașate punctelor din spațiu sînt denumite în acest caz potențiale. Punctele cu același potențial sînt situate pe așa-zisele suprafețe potențiale, analoage liniilor de nivel atașate funcțiilor cu două variabile. Pentru funcțiile cu mai mult de trei variabile, o reprezentare geometrică în același sens — adică urmată de reprezentarea funcției printr-o imagine — nu mai este posibilă.

Funcții simetrice. O funcție reală cu n variabile se numește simetrică, cînd variabilele independente pot fi permutate fără ca valoarea funcției să se modifice. Cele mai importante sînt funcțiile raționale simetrice și polinoamele simetrice. Un polinom $y = f(x_1, ..., x_n)$ se zice simetric cînd pentru orice permutare $\begin{pmatrix} x_1, x_2, ..., x_n \\ x_{\nu_1}, x_{\nu_2}, ..., x_{\nu_n} \end{pmatrix}$ a variabilelor $x_1, ..., x_n$, $f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_{\nu_1}, x_{\nu_2}, ..., x_{\nu_n})$.

Exemple de funcții raționale întregi simetrice:

1. $y = x_1 + x_2 + ... + x_n$, caz particular $z = x + y$.
2. $y = x_1x_2 ... x_n$, caz particular $z = xy$.
3. $y = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.
4. $y = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$.

Un rol special îl joacă *funcțiile simetrice elementare*. Pentru cazul $n = 4$ acestea au forma:

Funcții elementare simetrice	$\sigma_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$. $\sigma_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$. $\sigma_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4$. $\sigma_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2x_3x_4$.

Cu ajutorul acestor funcții simetrice elementare, ținînd seama de formulele lui Vieta, se obțin din rădăcinile polinoamelor coeficienții: de exemplu, pentru polinomul $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 și x_4:

$$a = -\sigma_1(x_1, x_2, x_3, x_4); \quad b = +\sigma_2(x_1, x_2, x_3, x_4);$$
$$c = -\sigma_3(x_1, x_2, x_3, x_4); \quad d = +\sigma_4(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Referitor la funcțiile elementare simetrice este valabil următorul rezultat:

Orice funcție rațională întreagă, simetrică, cu n variabile independente, poate fi reprezentată ca un polinom de funcțiile simetrice elementare.

În locul unei demonstrații, care necesită unele considerații relativ dificile, se va ilustra enunțul acestei teoreme printr-un exemplu simplu: funcția simetrică $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$ poate fi reprezentată ca $g(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1^2 - 3\sigma_2$ după cum se poate vedea înlocuind $\sigma_1^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ și $3\sigma_2 = 3x_1x_2$ în $\sigma_1^2 - 3\sigma_2 = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$.

Orice funcție rațională simetrică poate fi reprezentată ca un cît de două polinoame simetrice.

Mai trebuie remarcat că în cazul în care o funcție simetrică poate fi reprezentată printr-o figură geometrică, aceasta se bucură de proprietăți de simetrie; de exemplu, graficele funcțiilor $z = x + y$ și $z = xy$ admit planul $x = y$ ca plan de simetrie.

Funcții omogene. O funcție omogenă de n variabile se zice *omogenă de gradul* m, dacă prin înmulțirea fiecărei variabile independente cu t, valoarea funcției se amplifică cu t^m, adică $f(tx_1, tx_2, ..., tx_n) = t^m f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Polinoamele omogene prezintă un deosebit interes. Un polinom omogen de gradul m se mai zice și „formă de gradul m". Dacă $m = 2$, atunci polinomul se numește formă pătratică, pentru $m = 3$ formă cubică. În cazul $m = 1$ polinomul respectiv este o *formă liniară.*

Exemple de polinoame omogene:

1. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$;
2. $f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_1^3x_2 + x_1^2x_2^2$;
3. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 - x_3 - x_4$.

Pentru polinoamele omogene este valabilă următoarea propoziție:

Produsul unor polinoame omogene diferite de polinomul nul este un polinom omogen, al cărui grad este suma gradelor factorilor.

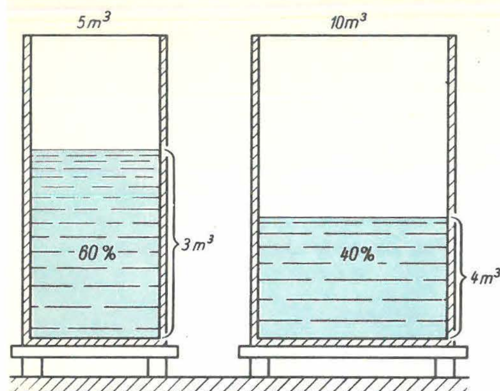
Demonstrația acestei propoziții rezultă direct din regula de înmulțire a polinoamelor.

Funcțiile omogene — în special polinoamele omogene — joacă un rol deosebit în diferite domenii ale matematicii. Astfel, de exemplu, un determinant de ordinul n este o funcție omogenă de gradul n cu n^2 variabile. Forme pătratice ca: $F(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$, adică funcții omogene de gradul doi cu două variabile apar în teoria corpurilor pătratice de numere. Anumite forme pătratice apar și în geometria analitică.

6. Procente, dobînzi și plăți eșalonate

6.1. Procente

De foarte multe ori în viața cotidiană ne întîlnim cu noțiunea de procent. De exemplu, se obișnuiește a se spune că, într-un anumit interval de timp, producția a crescut sau costul a scăzut cu atîtea procente, că atîtea procente din totalul populației îl reprezintă femeile sau bărbații etc. În fiecare din aceste afirmații se face o comparație. Mărimile cu



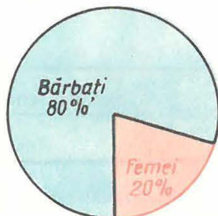
6.1.1. Folosirea capacității vaselor

care se compară se numesc valori de bază, de exemplu: producția, costul, populația totală la un anumit moment, și vor fi asemuite în această comparație cu 100. Mărimile care se compară vor fi numite valori procentuale, iar mărimea p obținută ca al patrulea proporțional din proporția $b/a = p/100$, a fiind valoarea de bază și b valoarea procentuală, se numește procent $p = \frac{100 \cdot b}{a}$. În scriere se însoțește p cu semnul %.

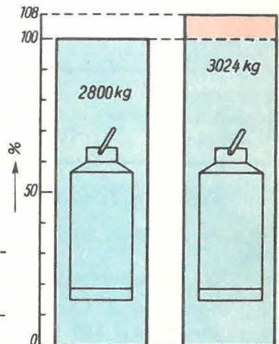
$$\frac{p}{100} = \frac{b}{a} = \frac{\text{procent}}{100} = \frac{\text{valoare procentuală}}{\text{valoare de bază}}$$

Dacă două vase au capacitatea de 5 m³, respectiv 10 m³ și conțin fiecare 3 m³, respectiv 4 m³ de lichid, atunci vasul de 10 m³ conține mai mult lichid decît cel de 5 m³, dar în raport cu capacitatea sa, el este mai prost folosit și anume în raportul 4 : 10 spre deosebire de celălalt vas care este folosit în raportul 3 : 5. Exprimat în procente, se obține $4 : 10 = x_1 : 100$ sau $x_1 = \frac{4 \cdot 100}{10} = 40\%$ și $3 : 5 = x_2 : 100$ sau $x_2 = \frac{3 \cdot 100}{5} = 60\%$. Astfel este folosită 40% din capacitatea vasului de 10 m³ și 60% din capacitatea celui de 5 m³ (fig. 6.1.1).

Exemplul 1. Într-o întreprindere cu 1 500 de lucrători, lucrează 300 de femei. Deci la 100 de lucrători sînt în medie 300 : 15 = 20 femei. Deși este evident că procentul femeilor din totalul lucrătorilor este de 20%, vom găsi acest lucru aplicînd formula: $a = 1500$, $b = 300$ și deci $p = \frac{300 \cdot 100}{1\,500} = 20$, adică 20% din totalul lucrătorilor sînt femei (fig. 6.1.2).



6.1.2. Repartizarea personalului pe sexe



6.1.3. Creșterea producției de lapte

Exemplul 2. Cîte kilograme de titan sînt în 275 kg de aliaj de oțel, dacă conținutul de titan este de 4%? În această problemă se caută valoarea procentuală, b, cunoscîndu-se valoarea de bază $a = 275$ și procentul $p = 4$. Formula de mai sus se va rezolva în raport cu b. Se obține $b = \frac{p \cdot a}{100} = \frac{4 \cdot 275}{100} = 11$. Aliajul conține deci 11 kg de titan.

Exemplul 3. Producția medie anuală de lapte pe cap de vacă este la un anumit moment de 2 800 kg. Cît va fi această producție după ce va crește cu 8%? Din $b = \frac{p \cdot a}{100}$ se obține $b = \frac{8 \cdot 2\,800}{100} = 224$. Producția de lapte crește cu 224 kg, deci devine 3 024 kg pe cap de vacă pe an (fig. 6.1.3).

Exemplul 4. Printr-o mai bună planificare, pe un șantier, cheltuielile de transport pentru cărămizi pot fi reduse cu 48 000 lei sau 12%. La cîți lei s-au ridicat aceste cheltuieli înainte? Aici este necunoscută valoarea de bază a, ea poate fi calculată din $a = \frac{b \cdot 100}{p}$. Se găseș-

te $a = \frac{48\,000 \times 100}{12} = 400\,000$. Înainte cheltuielile de transport erau de 400 000 lei iar ulterior au scăzut la 352 000 lei.

Exemplul 5. Într-un an s-au fabricat 3 600 bucăți dintr-un anumit produs. În decursul anului producția a crescut cu 20%. Cîte bucăți din acel produs s-au fabricat în anul precedent? Din valoarea procentuală $b = 3\,600$ și procentul $p = 120$ se poate calcula valoarea de bază a: $a = \frac{3\,600 \cdot 100}{120} = 3\,000$. În anul precedent s-au fabricat 3 000 bucăți.

6.2. Dobînda simplă

În circulația banilor se obișnuiește ca pentru o sumă de bani depusă sub formă de împrumut să se plătească o sumă majorată. Această majorare, numită dobîndă, depinde de perioada cît suma a fost depusă și de mărimea sumei depuse. De exemplu, pentru unele depuneri la CEC se acordă o dobîndă de 3,5% din suma depusă pe an. Casele de economii folosesc la rîndul lor sumele ce le-au fost temporar încredințate în circuitul economic, sau acordă la rîndul lor împrumuturi (de exemplu pentru construcția de locuințe proprietate personală) pentru care percep dobîndă.

Procentul de dobîndă. Procentul de dobîndă arată că pentru suma de 100 lei într-un an se acordă r lei dobîndă. O depunere de P lei aduce într-un an o dobîndă de $\frac{P}{100} \cdot r$ lei iar în n ani I lei, $I = \frac{P \cdot r \cdot n}{100}$ lei.

Formula dobînzii simple	$I = \frac{P \cdot r \cdot n}{100}$	dobînda $= \frac{\text{suma depusă} \times \text{procentul de dobîndă} \times \text{nr. de ani}}{100}$

Exemplul 1. Ce dobîndă aduc 20 000 lei cu un procent de dobîndă de 3,5% în 5 ani? În acest caz $P = 20\,000$, $r = 3{,}5\%$ și $n = 5$. După formula dobînzii $I = \frac{20\,000 \cdot 3{,}5 \cdot 5}{100} = 3500$. Suma depusă aduce în 5 ani o dobîndă de 3 500 lei.

Exemplul 2. Care este procentul de dobîndă, dacă o sumă de 12 000 lei aduce în 6 ani o dobîndă de 2 880 lei? În acest caz $P = 12\,000$, $I = 2\,880$ și $n = 6$. Din formula dobînzii se obține $r = \frac{100\,I}{P \cdot n}$, din care, înlocuind valorile din exemplul dat, se obține $r = \frac{100 \cdot 2\,880}{12\,000 \cdot 6} = 4$, deci procentul de dobîndă este 4%.

Formula dobînzii pentru:	n ani	m luni	d zile
dobîndă	$I = \frac{P \cdot r \cdot n}{100}$	$I = \frac{P \cdot r \cdot m}{12 \cdot 100}$	$I = \frac{P \cdot r \cdot d}{360 \cdot 100}$
depunere	$P = \frac{100 \cdot I}{r \cdot n}$	$P = \frac{1\,200 \cdot I}{r \cdot m}$	$P = \frac{36\,000 \cdot I}{r \cdot d}$
dobîndă	$r = \frac{100 \cdot I}{P \cdot n}$	$r = \frac{1\,200 \cdot I}{P \cdot m}$	$r = \frac{36\,000 \cdot I}{P \cdot d}$
depunere	$n = \frac{100 \cdot I}{P \cdot r}$	$m = \frac{1\,200 \cdot I}{P \cdot r}$	$d = \frac{36\,000 \cdot I}{P \cdot r}$

Divizori ficși. Dacă în formula care ne dă expresia dobînzii se consideră anul împărțit în l părți egale (trimestre, luni, zile), atunci formula dobînzii pentru m astfel de părți devine

$$I = \frac{P \cdot r \cdot m}{l \cdot 100} \text{ (v. tabelul).}$$

Formula dobînzii pentru un număr de d zile se poate astfel descompune în factorul $I_1 = \frac{P \cdot d}{100}$ și $t = \frac{360}{r}$ (în cazul acesta $l = 360$) $\cdot l$ poartă numele de divizor fix. Aceste valori pot fi citite din tabele și atunci dobînda se calculează direct prin împărțirea lui I_1 la t: $I = I_1/t$.

Tabel de divizori ficși

Procent r	divizor fix t	procent r	divizor fix t	procent r	divizor fix t
1/4	1 440	$1\,{}^1/_2$	240	$3\,{}^1/_2$	102,86
1/2	720	2	180	4	90
3/4	480	$2\,{}^1/_2$	144	$4\,{}^1/_2$	80
1	360	3	120	5	72

Exemplu. Să se calculeze dobînda produsă de o depunere de 400 lei în 5 luni cu procente de dobîndă de 4% sau $4\,{}^1/_2$%. Cum în calculul dobînzii se socotește luna de 30 zile, $d = 150$ și $I_1 = \frac{400 \cdot 150}{100} = 600$.

Pentru un procent de dobîndă de 4%, $d = 90$ și deci $I_1 : d = 6{,}67$, pentru $r = 4\,{}^1/_2\%$, $t = 80$ și deci $I_1 : t = 7{,}50$ · 400 lei produc în 5 luni o dobîndă de 6,67 lei, cu un procent de dobîndă de 4% și 7,50 lei cu un procent de dobîndă de $4\,{}^1/_2$%.

6.3. Dobîndă compusă

La sfîrșitul fiecărui an, casele de economii înscriu dobînda pe libretele de economii, apoi în anul următor dobînda se calculează la depunerea inițială mărită cu dobînda anului precedent. Această dobîndă se numește dobîndă compusă. Rentele și ratele de amortizare ale împrumuturilor se calculează tot cu ajutorul dobînzii compuse. Rentele sînt sume plătibile la intervale de timp fixate, de exemplu, anual. În asigurări, plătirea rentelor are loc în caz de supraviețuire unui moment fixat, de exemplu, rentele viagere, sau, dacă se produc anumite evenimente, de exemplu, rentele de boală sau invaliditate.

O sumă P_0 depusă cu un procent de dobîndă r produce într-un an o dobîndă $\frac{P_0 \cdot r}{100}$. În al doilea an suma depusă va fi $P_1 = P_0 + P_0 \cdot \frac{r}{100} = P_0\left(1 + \frac{r}{100}\right) = P_0R$, unde $R = 1 + \frac{r}{100}$.

Într-un an această sumă se majorează cu $\frac{P_1 \cdot r}{100}$ și devine $P_2 = P_1 + P_1\frac{r}{100} = P_1R = P_0R^2$.

Aceleași considerente sînt valabile pentru anii 3, 4, ..., n. La sfîrșitul celui de al n-lea an suma P_0 a crescut prin adăugarea dobînzilor la $P_n = P_0R^n$, unde $R = 1 + \frac{r}{100}$ poartă numele de factor de fructificare.

Dobînda compusă $P_n = P_0R^n$

Exemplu. O depunere de 1 500 lei depusă cu 3% crește în 5 ani la 1 738,91 lei. Depunerile și dobînzile pentru fiecare an sînt trecute în următoarea tabelă

anul	depunerea în lei la începutul anului	dobînda în lei la sfîrșitul anului	depunerea în lei la sfîrșitul anului
1	1 500,00	45,00	1 545,00
2	1 545,00	46,35	1 591,35
3	1 591,35	47,74	1 639,09
4	1 639,09	49,17	1 688,26
5	1 688,26	50,65	1 738,91

Dacă depunerea s-ar fi majorat după regula dobînzii simple, atunci după 5 ani depunerea ajunge la 1 725 lei.

Figura 6.3.1 arată creșterea depunerii unitate $P_0 = 1$ după regula dobînzii simple și după o dobîndă compusă. Din formula dobînzii compuse pot fi calculate atît numărul n al anilor cît și procentul r. Prin logaritmare se obține în formula dobînzii compuse $\lg P_n = \lg P_0 + n \lg R$ sau $n = \dfrac{\lg P_n - \lg P_0}{\lg R}$; astfel se poate calcula numărul anilor n. Pentru obținerea factorului de fructificare, în ambele părți ale formulei dobînzii compuse se extrage rădăcina de ordinul n $R = \sqrt[n]{\dfrac{P_n}{P_0}} = 1 + r/100$. Procentul de dobîndă va fi în acest caz

$$r = 100\left(\sqrt[n]{\frac{P_n}{P_0}} - 1\right).$$

Exemplu. După cîți ani se dublează o depunere de 500 lei depusă cu un procent de dobîndă de 3%? În afară de depunerea inițială $P_0 = 500$ lei și depunerea finală $P_n = 1\,000$, se mai cunoaște procentul de fructificare $R = 1{,}03$. Se obține astfel numărul anilor cît suma a stat depusă:

$$n = \frac{\lg 1\,000 - \lg 500}{\lg 1{,}03} = 23{,}516.$$

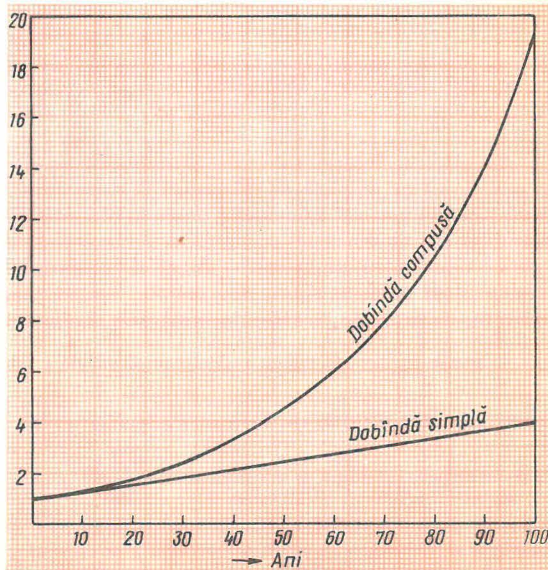
Deci, după 24 de ani suma se dublează.

Actualizare. Cunoscînd depunerea finală P_n și factorul de fructificare R, cu ajutorul formulei dobînzii compuse se poate calcula depunerea inițială

$$P_0 = \frac{P_n}{R^n} = P_n \cdot V^n,$$

$V = 1/r$ poartă numele de factor de actualizare. Operația de determinare a valorii lui P_0 se numește actualizare sau aflarea valorii actuale a sumei P_n după n ani.

Exemplu. Doi soți hotărăsc ca după 5 ani să dispună de o sumă de 7 500 lei. Ce sumă trebuie să depună astăzi la CEC (dobîndă compusă 3% pe an) astfel încît peste 5 ani să dispună de suma de mai sus (fig. 6.3.1)? În această



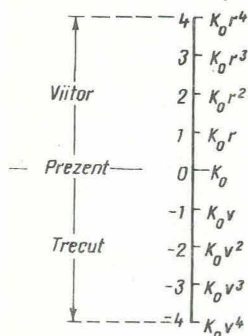
6.3.1. Creșterea sumei unitate $P_0 = 1$ după formula dobînzii simple și după formula dobînzii compuse după 50 de ani cu un procent de dobîndă de 6%

problemă se cunoaște $P_5 = 7\,500$, $r = 3\%$ și $n = 5$. Pe o tabelă de factori de actualizare se citește valoarea lui V, pentru $n = 5$ și $r = 3$, $V^5 = 0{,}8626$ și se calculează $P_0 = 7\,500 \cdot 0{,}8626 = 6\,469{,}50$. Deci soții trebuie să depună acum la CEC suma de 6 469,50 lei.

Factori de dobîndă

ani	factori de fructificare R^n			factori de actualizare V^n			ani
	procent de dobîndă			procent de dobîndă			
	3%	3,5%	4%	3%	3,5%	4%	
1	1,03	1,035	1,04	0,9709	0,9662	0,9615	1
2	1,0609	1,0712	1,0816	0,9426	0,9335	0,9246	2
3	1,0927	1,1082	1,1249	0,9151	0,9019	0,8890	3
4	1,1255	1,1475	1,1699	0,8885	0,8714	0,8548	4
5	1,1593	1,1877	1,2167	0,8626	0,8420	0,8219	5
6	1,1941	1,2293	1,2653	0,8375	0,8135	0,7903	6
7	1,2299	1,2723	1,3159	0,8131	0,7860	0,7599	7
8	1,2668	1,3181	1,3686	0,7894	0,7594	0,7307	8
9	1,3048	1,3629	1,4233	0,7664	0,7337	0,7026	9
10	1,3439	1,4106	1,4802	0,7441	0,7089	0,6756	10
11	1,3842	1,4500	1,5395	0,7224	0,6850	0,6496	11
12	1,4258	1,5111	1,6010	0,7014	0,6618	0,6246	12
13	1,4685	1,5640	1,6651	0,6810	0,6394	0,6006	13
14	1,5126	1,6187	1,7317	0,6611	0,6178	0,5775	14
15	1,5580	1,6754	1,8009	0,6419	0,5969	0,5553	15

Tabele de dobîndă compusă. Casele de economii și băncile folosesc pentru calculul valorii finale sau valorii actuale a funcțiilor, P_0, așa-numite tabele de dobînzi în care pentru diferite valori ale procentului de dobîndă și diferite valori pentru numărul anilor se dau factorii de fructificare, respectiv de actualizare. Actualizarea și finalizarea unei sume P_0 cu factorul de fructificare R și factorul de actualizare V poate fi reprezentată grafic cu ajutorul unei diagrame temporale (fig. 6.3.2).



6.3.2. Reprezentarea operațiilor privind calculul dobînzii compuse cu ajutorul unei diagrame temporale

Exemplu. Cît este procentul de dobîndă r, dacă o depunere de 400 lei crește în 10 ani la 592 lei?

Sînt cunoscute deci $P_0 = 400$, $P_n = 592$ și numărul anilor $n = 10$. Se va folosi o tabelă de dobînzi cu

$$R^{10} = \frac{592}{400} = 1{,}48.$$

În tabelă lui 1,48 îi corespunde $r = 4$. Aplicînd formula $r = 100\left(\sqrt[10]{\frac{592}{400}} - 1\right) = 4$, procentul de dobîndă este 4%.

6.4. Plăți eșalonate

Prin plăți eșalonate înțelegem un șir de plăți efectuate la momente de timp dinainte stabilite, într-un anumit număr de ani. Sumele astfel eșalonate poartă numele de rate; ele se plătesc de regulă la sfîrșitul intervalului considerat (posticipat sau postnumerando) și foarte rar la începutul acestui interval (anticipat sau praenumerando). Prin valoare finală a unor plăți eșalonate se înțelege suma la care s-a ridicat totalul ratelor depuse, la sfîrșitul intervalului,

dacă procentul de dobîndă este $p\%$. Dimpotrivă, valoarea actuală reprezintă suma ce trebuie plătită la începutul intervalului o singură dată, care să fie echivalentă cu totalul plăților eșalonate.

Plăți eșalonate posticipate. Ratele b, plătite la sfîrșitul fiecărui an cresc după regula dobînzii compuse. După n ani prima rată are valoarea bR^{n-1}, a doua bR^{n-2}, ș.a.m.d. pînă la ultima (b). Valoarea finală totală s_n este atunci suma unei progresii geometrice

$$s_n = b + bR + \dots + bR^{n-1} = b\sum_{i=0}^{n-1} R^i = b\,\frac{R^n - 1}{R - 1}.$$

Valoarea finală a unei plăți eșalonate posticipate	$s_n = b\,\dfrac{R^n - 1}{R - 1}$
Valoarea actuală a unei plăți eșalonate posticipate	$a = \dfrac{b}{R^n}\cdot\dfrac{R^n - 1}{R - 1}$

O plată posticipată de 150 lei cu 3% are după 5 ani valoarea finală $s_5 = 150(1{,}03^4 + 1{,}03^3 + 1{,}03^2 + 1{,}03^1 + 1) = 796{,}5$ lei. Valoarea actuală se obține din formula $a = s_5V^5$, unde V este factorul de actualizare $V = \dfrac{1}{1{,}03} = 0{,}9709$, $a = s_5 \cdot 0{,}8626 = 687{,}06$. În cazul general $a = s_nV^n = \dfrac{b(R^n - 1)}{R^n(R - 1)}$.

Exemplul 1. Timp de 11 ani se plătește o sumă anuală de 2000 lei. Care este valoarea ei finală dacă procentul de dobîndă este 3%? Pentru factorul de fructificare $R = 1{,}03$ se citește din tabelă $R^{11} = 1{,}384$. Atunci $s_{11} = 2\,000 \cdot \dfrac{1{,}384 - 1}{1{,}03 - 1} = 25\,600$. După 11 ani valoarea finală va fi de 25 600 lei.

Exemplul 2. Prin ce sumă plătibilă odată la momentul inițial pot fi înlocuite plățile eșalonate din exemplul de mai sus? În formula valorii actuale, înlocuind valorile corespunzătoare prin cele citite în tabel se obține

$$a = 2\,000 \cdot 0{,}7224 \cdot \frac{1{,}384 - 1}{1{,}03 - 1} = 18\,493{,}4.$$

Valoarea actuală a plăților eșalonate este deci 18 500 lei.

Exemplul 3. După cîți ani are o plată eșalonată posticipată cu rata de 100 lei valoarea finală de 1 800 lei dacă procentul de dobîndă este 3%?

Din formula $s_n = b\,\dfrac{R^n - 1}{R - 1}$ se obține $\dfrac{s_n(R - 1)}{b} = R^n - 1$ și $R^n = \dfrac{s_n(R - 1)}{b} + 1$

și deci $n = \dfrac{\lg\left(\dfrac{s_n(R - 1)}{b} + 1\right)}{\lg R}$.

Pentru valorile $s_n = 1\,800$ și $R = 1{,}03$ se obține $n = \dfrac{\lg 1{,}54}{\lg 1{,}03} = 14{,}603$. Valoarea finală se obține după 15 ani.

Plăți eșalonate anticipate. Pentru plățile anticipate fiecare rată b produce dobîndă un an mai mult decît în cazul plăților posticipate. După formula dobînzii compuse valoarea finală $\bar{s}_n$ va fi $\bar{s}_n = Rb\,\dfrac{R^n - 1}{R - 1}$, adică se obține din valoarea finală pentru plățile posticipate prin multiplicare cu R.

Valoarea finală a plăților eșalonate anticipate	$\bar{s}_n = Rb\cdot\dfrac{R^n - 1}{R - 1}$

Valoarea actuală $\bar{a}$, pentru astfel de plăți se obține prin actualizarea valorii finale astfel obținute:

$$\bar{a} = \bar{s}_n V^n = Rb\frac{R^n - 1}{R - 1}\cdot\frac{1}{R^n} = b\frac{1 - V^n}{1 - V}.$$

Valoarea actuală a plăților eșalonate anticipate	$\bar{a} = \frac{b}{R^{n-1}}\cdot\frac{R^n - 1}{R - 1}$

Exemplul 1. Reluînd exemplul considerat mai sus în cazul în care plata eșalonată se face anticipat, se obține valoarea finală $\bar{s}_{11} = 2000\cdot 1{,}03\cdot\frac{1{,}384 - 1}{0{,}03} = 26\ 368$. Deci după 11 ani valoarea finală a unei plăți eșalonate anticipate cu rata anuală de 2000 lei este de 26 368 lei.

Exemplul 2. În cazul plății anticipate în exemplul 2 considerat mai sus $\bar{a} = 2000\cdot 0{,}7441\times$ $\times\frac{1{,}384 - 1}{1{,}03 - 1} = 19\ 049$. Prin depunerea unei sume de 19 049 lei se asigură plata eșalonată anticipată cu rata de 2000 lei timp de 11 ani.

Exemplul 3. Reluînd exemplul 3 de mai sus, în cazul plății eșalonate anticipate se obține

$$n = \frac{\lg\left(\frac{1\ 800}{100}\cdot\frac{0{,}03}{1{,}03} + 1\right)}{\lg 1{,}03} = 14{,}26.$$

Deci valoarea finală respectivă se obține în 14 ani.

Amortizarea împrumuturilor. De obicei, amortizarea creditelor și ipotecilor (de exemplu pentru construirea de locuințe proprietate personală) se face astfel încît în fiecare an să se plătească aceeași sumă — o anuitate — pe toată perioada împrumutului. Această sumă se calculează ținînd seama de amortizare și de dobîndă. Modul de amortizare a unui credit de 8 000 lei, cu procentul de dobîndă de $3^1/_2$ % poate fi văzut din următorul *tablou de amortizare*, în care s-a fixat o anuitate de 500 lei.

Anul	datoria la începutul anului	anuitatea	dobînda	amortisment	datoria la sfîrșitul anului
1	8000,00	500,00	280,00	220,00	7780,00
2	7780,00	500,00	272,30	227,70	7552,30
3	7552,30	500,00	264,33	235,67	7316,63
4	7316,63	500,00	256,08	243,92	7072,71
5	7072,71	500,00	247,54	252,46	6820,25
.	...	...	...	...	...

Se poate observa că cu timpul dobînda scade și amortismentul crește. La baza acestui plan de amortizare stau următoarele reguli. La sfîrșitul primului an pentru datoria S se plătește dobînda $S\frac{r}{100}$; din anuitatea A rămîne amortismentul $T_1 = A - S\frac{r}{100}$. La sfîrșitul celui de-al doilea an pentru suma rămasă $S_1 = S - T_1$ trebuie plătită dobînda $S_1\frac{r}{100}$; din anuitatea A rămîne amortismentul $T_2 = A - S_1\frac{r}{100} = A - S\frac{r}{100} + T_1\frac{r}{100} = T_1 + T_1\frac{r}{100} = T_1R$. Mai rămîne de amortizat $S_2 = S_1 - T_2$. La sfîrșitul celui de al treilea an, dobînzile sînt

$S_2 \frac{r}{100}$ amortismentul $T_3 = A - S_2 \frac{r}{100} = A - S_1 \frac{r}{100} + T_2 \frac{r}{100} = T_2 R$. La sfîrşitul celui de-al n-lea an amortismentul este $T_n = T_{n-1}R = T_{n-2}R^2 = ... = T_1 R^{n-1}$.

Formula de amortizare	$s = T_1 \frac{R^n - 1}{R - 1}$

În exemplul dat amortismentul in cel de al 11-lea an este $T_{11} = 220$ lei $\cdot$ $1{,}035^{10} = 310{,}33$ lei. Suma s_n a amortismentelor corespunde valorii finale a unei plăţi eşalonate posticipate după n ani, $s_n = T_1 \frac{R^n - 1}{R - 1}$. În exemplul dat în 11 ani s-au plătit $s_{11} = 220 \cdot \frac{1{,}035^{11} - 1}{1{,}035 - 1}$ lei $= 2\,891{,}24$ lei. Împrumutul este plătit cind suma tuturor amortismentelor egalează împrumutul, adică dacă $s_n = S$ sau $T_1 \frac{R^n - 1}{R - 1} = S$. De aici se poate calcula numărul n al anilor in care imprumutul se amortizează: $n = \frac{\lg \frac{S}{T_1}(R - 1) + 1}{\lg R}$; pentru $n = 23{,}87$, adică în 24 de ani împrumutul se amortizează.

Asigurări de persoane. Un alt domeniu în care se aplică dobînda compusă şi calculul plăţilor eşalonate este acela al asigurărilor de persoane. Dintre acestea se pot menţiona asigurările de deces, de supravieţuire, de invaliditate, de bătrîneţe sau asigurare mixtă (în caz de deces cît şi de supravieţuire a unei anumite date). La fiecare dintre aceste asigurări între asigurat şi societatea de asigurări se încheie un contract de asigurare. Între plăţile efectuate de cele două părţi trebuie să existe o echivalenţă în sensul că nici una din părţi să nu fie în pierdere. Desigur, echivalenţa nu trebuie înţeleasă în ce priveşte un singur asigurat ci la întreaga mulţime a asiguraţilor. În formularea matematică a principiilor de echivalenţă, pe lîngă regulile operaţiilor menţionate mai sus, un rol important îl joacă consideraţiile de ordin demografic.

Tabele de mortalitate. Cel mai important rezultat al demografiei utilizat în asigurări, sînt tabelele de mortalitate. Acestea se construiesc pe baza recensămintelor cît şi pe baza unei experienţe actuariale îndelungate. Tabelele de mortalitate pornesc de la numărul persoanelor de o anumită vîrstă n, l_n şi cuprind numărul celor dintre acestea care supravieţuiesc anului x. Numărul acestor persoane se notează cu l_x — numărul supravieţuitorilor de vîrstă x.

Tabelele de mortalitate cuprind:

$l_x - l_{x+1} = d_x$ — numărul decedaţilor de vîrstă x;

$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$ — probabilitatea de supravieţuire a vîrstei x;

$q_x = \frac{d_n}{l_n}$ — probabilitatea de deces la vîrsta x;

$e_x^0 = \frac{l}{l_x} \sum_{k=0}^{\infty} l_{x+k} - \frac{l}{2}$ — durata medie a vieţii la vîrsta x.

În tabelul de mai jos s-a dat un extras din tabela generală de mortalitate 1955/58. Se poate citi aici, că din 100 000 bărbaţi născuţi în acelaşi an, supravieţuiesc vîrstei de 50 de ani 85 778 şi fiecare supravieţuitor mai are în medie de trăit 23,67 ani.

Extras din tabela generală (R.D.G.) de mortalitate 1955/58

vîrsta	bărbați					femei				
	la 100 000 născuți vii în același an		probabilitatea de deces	durata medie de viață		la 100 000 născuți vii în același an		probabilitatea de deces	durata medie de viață	
	supraviețuitori	decedați		a tuturor supraviețuitorilor	a unui supraviețuitor	supraviețuitori	decedați		a tuturor supraviețuitoarelor	a unei supraviețuitoare
x	l_x	d_x	q_x	$e_x^0 l_n$	e_x^0	l_x	d_x	q_x	$e_x^0 l_n$	e_x^0
41	89 251	288	0,003 222	2 819 634	31,59	91 954	240	0,002 609	3 198 828	34,79
42	88 963	294	0,003 312	2 730 527	30,69	91 714	252	0,002 753	3 106 994	33,88
43	88 669	312	0,003 517	2 641 711	29,79	91 462	266	0,002 904	3 015 406	32,97
44	88 357	340	0,003 846	2 553 198	28,90	91 196	278	0,003 054	2 924 077	32,06
45	88 017	373	0,004 242	2 465 011	28,01	90 918	294	0,003 228	2 833 020	31,16
46	87 644	409	0,004 661	2 377 180	27,12	90 624	315	0,003 474	2 742 249	30,26
47	87 235	439	0,005 033	2 289 740	26,25	90 309	343	0,003 804	2 651 782	29,36
48	86 796	478	0,005 505	2 202 724	25,38	89 966	376	0,004 174	2 561 644	28,47
49	86 318	540	0,006 256	2 116 167	24,52	89 590	401	0,004 478	2 471 866	27,59
50	85 778	605	0,007 053	2 030 119	23,67	89 189	430	0,004 824	2 382 476	26,71
51	85 173	674	0,007 911	1 944 643	22,83	88 759	458	0,005 159	2 293 502	25,84
52	84 499	742	0,008 787	1 859 807	22,01	88 301	488	0,005 522	2 204 972	24,97

7. Geometrie plană

Geometria plană (planimetria, în grecește „măsurarea suprafețelor plane") este o ramură a geometriei (în grecește „măsurarea pămîntului"). Deși obiectele realității au trei dimensiuni (în latinește „dimensio" înseamnă întindere), planimetria ca geometrie a planului realizează o descriere destul de fidelă a relațiilor spațiale din lumea înconjurătoare. La fel ca în cazul noțiunii de număr, noțiunile geometriei s-au format de-a lungul veacurilor prin abstractizarea unor realități obiective. S-a convenit ca obiectele să nu se deosebească în ce privește masa, culoarea, forma și prin neglijarea neregularităților corpurilor s-a ajuns la forme spațiale care se întind în trei dimensiuni: lungime, lățime și înălțime. Astfel, un corp în spațiu are trei dimensiuni, o suprafață plană are numai două dimensiuni, o dreaptă o singură dimensiune iar dimensiunea unui punct este zero.

În geometria plană se presupune dinainte dat un plan și toate considerațiile geometrice au loc în raport cu acest plan. Uneori, în anumite cazuri speciale, se plasează problemele în *„planul euclidian"* (EUCLID-matematician grec, anul 300 î.e.n) care reprezintă un cadru geometric fundamental mai larg.

7.1. Punct, dreaptă, semidreaptă, segment

Punct și dreaptă

Punctul și dreapta sînt noțiuni fundamentale ale geometriei elementare în plan. Intuitiv, *dreapta* se introduce ca urmă a unui punct care se mișcă în plan urmînd *drumul cel mai scurt* dintre două puncte, fără să-și schimbe direcția. *Punctul* apare ca intersecție a două drepte. La o examinare mai atentă se observă că nu există definiții pentru aceste noțiuni; legăturile dintre aceste elemente geometrice sînt reglementate de axiome (v. cap. 41).

Numărul punctelor în care se intersectează mai multe drepte. Două drepte în plan, atunci cînd nu coincid, au cel mult *un punct* comun. Două drepte din plan care nu au nici un punct comun se numesc *drepte paralele*, pe scurt *paralele*.

Trei drepte în plan care nu trec toate printr-un punct comun și sînt astfel încît printre ele să nu fie două drepte paralele sau confundate determină exact *trei* puncte de intersecție.

Patru drepte care sînt diferite și neparalele două cîte două și sînt astfel încît printre ele nu există trei drepte care trec prin același punct determină exact *șase* puncte de intersecție (patrulater complet).

Fiind date n drepte în plan, despre care se presupune că sînt diferite și neparalele două cîte două, iar printre ele nu există trei drepte care trec prin același punct, fiecare dreaptă se intersectează cu fiecare din cele $n - 1$ drepte rămase într-un punct și deci cele n drepte determină exact $\frac{n(n-1)}{2}$ *puncte de intersecție.*

Numărul dreptelor prin mai multe puncte. Prin două puncte diferite trece exact *o dreaptă.* Prin trei puncte diferite care nu se află pe aceeași dreaptă trec exact *trei* drepte care unesc fie-

care cîte două puncte. Cele trei puncte, sau două din cele trei drepte, sau o dreaptă și punctul care nu se află pe ea, determină un *plan*. Fiind date în plan n puncte diferite, astfel încît printre ele nu există trei puncte în linie dreaptă fiecare din cele n puncte determină cu fiecare din cele $n-1$ puncte rămase cîte o dreaptă; deoarece fiecare dreaptă apare de două ori, rezultă că cele n puncte determină $\frac{n(n-1)}{2}$ drepte. De exemplu, patru puncte determină *șase* drepte (patrulater complet).

Fascicul de drepte. Printr-un punct se pot duce în plan oricîte drepte. Mulțimea tuturor dreptelor din plan, care au numai un singur punct comun, constituie un *fascicul de drepte*. Punctul comun (P) se numește *suport* al fasciculului iar fasciculul se notează cu (P'). În mod analog totalitatea dreptelor din plan paralele cu aceeași dreaptă se numește *fascicul de drepte paralele*.

Dacă dreptele unui fascicul oarecare (P) sau ale unui fascicul de drepte paralele se intersectează cu două drepte l și l', care nu fac parte din fascicul, dreptele fasciculului realizează o aplicație perspectivă a punctelor dreptei l pe punctele dreptei l'.

Semidreaptă și segment

Semidreaptă. *Semidreapta* conține mulțimea tuturor punctelor unei drepte, care se găsesc de aceeași parte a unui punct O de pe această dreaptă, inclusiv punctul O. Deci semidreptei aparțin numai punctele care pot fi atinse din O printr-o mișcare rectilinie fără nici o schimbare de sens.

Noțiunea de segment a apărut, ca de altfel toate noțiunile matematice, prin abstractizare. Pentru înțelegerea ei, trebuie făcută analogia cu raza solară care pornește de la Soare în linie dreaptă sau cu raza vizuală care pornește de la ochi în linie dreaptă (Soarele și ochiul sînt considerate în aceste exemple ca fiind puncte).

Segment. Segmentul $\overline{AB}$ conține exact mulțimea tuturor punctelor unei drepte care se găsesc între punctele A și B, inclusiv aceste puncte segmentul este cea mai scurtă legătură dintre punctele A și B din plan. Cînd se ia în considerare sensul segmentului, atunci se notează prin $\overrightarrow{AB}$ segmentul care începe în A și se termină în B. Renunțînd la această notație, se convine în general, ca primul punct să reprezinte începutul segmentului. De asemenea s-a mai stabilit ca semnul minus și schimbarea sensului săgeții să indice schimbarea sensului, astfel încît $\overrightarrow{AB} = \overleftarrow{BA}$, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$. Lungimea segmentului $\overline{AB}$ reprezintă distanța dintre punctele A și B. Mărimea acestui segment se stabilește comparînd lungimea segmentului dat cu cea a unui alt segment considerat segment unitate. Lungimea segmentului unitate servește ca unitate de măsură pentru lungimi

Unități de măsură pentru lungimi. Unitatea principală de măsură pentru lungimi este metrul. El a fost definit ca media distanței, la temperatura de 0°C și presiunea de o atmosferă, dintre axele paralelelor trasate pe prototipurile internaționale.

Multiplii și submultiplii metrului

unitate	simbol	relație
kilometru	km	1 km $= 10^3$ m
decimetru	dm	1 dm $= 10^{-1}$ m
centimetru	cm	1 cm $= 10^{-2}$ m
milimetru	mm	1 mm $= 10^{-3}$ m
micrometru	µm	1 µm $= 10^{-6}$ m
nanometru	nm	1 nm $= 10^{-9}$ m
pikometru	pm	1 pm $= 10^{-12}$ m
femtometru	fm	1 fm $= 10^{-15}$ m
attometru	am	1 am $= 10^{-18}$ m

La cea de-a XI-a Conferință generală a Convenției metrului din 1960 s-a hotărît schimbarea definiției metrului pe baza lungimii unei anumite unde luminoase. S-a stabilit astfel ca metrul să fie egal cu de 1 650 763,73 ori lungimea de undă în vid a radiației care corespunde tranziției atomului de kripton 86 între nivelele energetice $2p_{10}$ și $5d_5$.

Pentru unitățile derivate din metru, ca de exemplu, decametrul = 10 m (notat cu dam) și hectometrul = 100 m (notat cu hm) nu au fost stabilite încă definiții bazate pe fenomene fizice.

Unităţi de măsură care nu derivă din metru

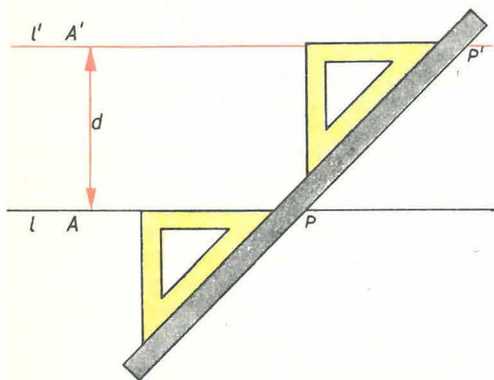
Astronomie	
An lumină	1 an lumină (al) ≈ 9 460 500 000 000 km = $9{,}4605 \cdot 10^{15}$ m
Secundă paralaxică	1 pc ≈ 30 857 000 000 000 km = $30{,}857 \cdot 10^{15}$ m
Unitate astronomică	1 AE ≈ 149 600 000 km = $1{,}496 \cdot 10^{11}$ m
Măsuri germane	
Mila geografică	1 milă ≃ 1/15 ecuatorgrad = 7421,5 m
Mila marină	1 sm ≃ 1/60 meridiangrad = 1852 m
Măsuri vechi ruseşti	
— Sajena	1 sajena ≈ 2,1335 m
— Versta	1 verstă ≈ 500 sajene ≈ 1,067 km
USA şi Marea Britanie	
Mila engleză	1 mi ≈ 1609,344 m
Yardul	1 yd = 3′ ≈ 0,9144 m
Piciorul	1 ft = 12″ ≈ 0,3048 m
Ţolul englez (inch)	1 in = 1″ ≈ 0,0254 m

Drepte paralele şi ortogonale

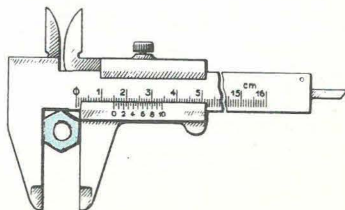
Drepte paralele. Două paralele nu au nici un punct comun. Dacă dreapta l este paralelă cu dreapta l', se foloseşte notaţia $l \parallel l'$, ceea ce reprezintă intuitiv că l şi l' au aceeaşi direcţie. Dreapta l' poate fi obţinută din l translatînd toate punctele lui l cu o distanţă $\overrightarrow{PP'}$ în aceeaşi direcţie (translaţie). Construcţia dreptelor paralele poate fi astfel făcută cu linia şi echerul (fig. 7.1.1).

Dacă se uneşte un punct comun al unei drepte l_1 cu toate punctele dreptei l_2 paralele cu l_1, printre aceste segmente de legătură există unul care este cel mai scurt. Acest segment reprezintă distanţa dintre paralelele l_1 şi l_2. Această distanţă este egală pentru toate punctele, ceea ce înseamnă că dreptele paralele nici nu se apropie şi nici nu se depărtează, ci rămîn mereu la aceeaşi depărtare.

De exemplu, distanţa dintre şinele căilor ferate este de obicei 1,435 m (ecartament normal), în Uniunea Sovietică 1,524 m iar în Spania şi Portugalia 1,670 m. Distanţa dintre cele două muchii ale unui şubler poate fi schimbată; de aceea şublerul poate fi folosit la măsurarea grosimii pieselor cu feţe paralele (fig. 7.1.2).



7.1.1. Paralela l' dusă la l la distanţa d



7.1.2. Distanţa dintre feţele paralele ale unei piese (măsurarea grosimii)

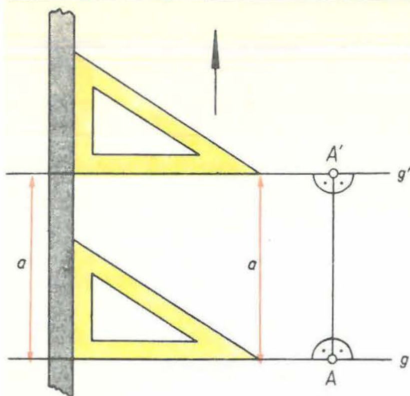


Fig. 7.1.3. Paralela *g'* dusă la *g* la distanța *a*

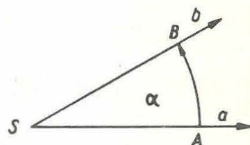
Pentru fiecare dreaptă de o anumită parte a acesteia, *l*, există în plan exact o paralelă *l'* care se găsește la distanța *a* de aceasta. În figură se arată construcția dreptei *l'* cu ajutorul liniei și echerului. La fel prin orice punct *P* din același plan cu *l*, dar care nu se găsește pe *l*, se poate duce o singură paralelă *l'* la *l*. Această enunțare a existenței și unicității paralelei *l'* dusă prin *P* la *l* reprezintă în geometria euclidiană conținutul axiomei paralelelor.

Drepte ortogonale. Distanța dintre dreptele paralele *g* și *g'* se măsoară pe un segment de legătură *AA'* care formează atît cu *g* în *A* cît și cu *g'* în *A'* cîte o pereche de unghiuri egale. Aceste unghiuri se numesc unghiuri drepte. Două drepte sînt ortogonale dacă formează în punctul de intersecție unghiuri drepte; ele sînt perpendiculare una pe alta. Ortogonalitatea a două drepte este, ca și paralelismul, o precizare a poziției reciproce a celor două drepte.

7.2. Unghiuri

Două semidrepte *a* și *b* care pornesc din același punct *S* se pot suprapune printr-o rotație, definind astfel unghiul (*a*, *b*) sau ∢ (*a*, *b*).

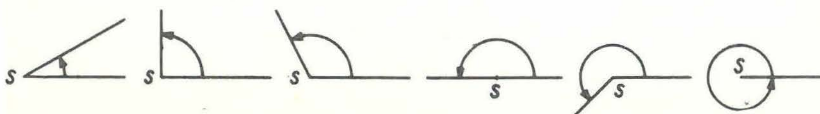
Pentru orientarea planului în care se găsesc cele două semidrepte *a* și *b* se stabilește ca sens pozitiv al acestei rotații în matematică, sensul invers acelor de ceasornic și în geodezie sensul acelor de ceasornic. Astfel, trebuie făcută o deosebire între unghiurile (*a*, *b*) și (*b*, *a*); între ele există relația ∢ (*a*, *b*) = − ∢ (*b*, *a*). Fiind dat un punct *A* pe semidreapta *a* și un punct *B* pe semidreapta *b*, unghiul determinat de cele două semidrepte se mai notează prin ∢ *ASB*, respectiv ∢ *BSA*. Punctul *S* se numește vîrful unghiului și semidreptele *a* și *b* laturile unghiului (*a*, *b*). Fiecare latură determină o direcție; mărimea unghiului apare astfel ca diferența dintre cele două direcții (fig. 7.2.1) într-un plan orientat.



7.2.1. Definiția unghiului

Clasificarea unghiurilor

Unghiurile se clasifică prin compararea lor cu unghiul drept. Dacă unghiul corespunde unui sfert de cerc, el se numește unghi drept. Dacă deschiderea laturilor este mai mică decît în cazul unghiului drept, unghiul se zice ascuțit, iar cînd este mai mare obtuz. Dacă laturile unghiului sînt în prelungire pe aceeași dreaptă, unghiul se zice *plin*. Un unghi mai mare decît un unghi plin se numește *supraobtuze*. Un unghi supraobtuz u laturile suprapuse se numește unghi *complet* (fig. 7.2.2).

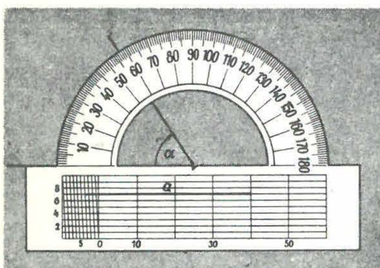


7.2.2. Unghiuri. Unghi ascuțit, unghi drept, unghi obtuz, unghi plin, unghi supraobtuz, unghi complet

Măsurarea unghiurilor

Toate unitățile de măsură pentru unghiuri se bazează pe diviziuni ale cercului. Se pot deosebi grade și unități de arc.

Gradul. Dacă un cerc se împarte în 360 de părți egale, diferența dintre direcțiile a două raze duse din centru în două puncte de diviziune învecinate (fig. 7.2.3) definește un unghi de 1 grad sexagesimal (vechi) și se notează 1°. Astfel, gradul sexagesimal reprezintă a 360-a parte a unghiului complet, respectiv a 90-a parte a unghiului drept. A 60-a parte a unui grad sexagesinal se numește minut și se notează 1′. A 60-a parte a unui minut este secunda sexagesimală și se notează 1″.



7.2.3. Măsurarea unghiului cu raportorul ; $\alpha = 57°$, $a = 43{,}7$ mm

$$1° = 60' = 3\,600''; \quad 1\text{ h} = 60\text{ min} = 3\,600\text{ s}$$

Deoarece diviziunile gradului au aceleași denumiri, ca diviziunile unității de măsură pentru timp, ora (h), nu trebuie să se folosească aceleași simboluri pentru desemnarea lor.

Prin împărțirea cercului în 400 de părți egale, respectiv a unghiului drept în 100 părți egale, se obține 1 grad centezimal sau 1 gon, care se notează 1^g. Un gon are 100 de minute centezimale, notate prin ^{c}, iar un minut centezimal are 100 de secunde noi, notate cu ^{cc}:

$$1^g = 100^c = 10\,000^{cc}$$

Dacă se notează unghiul drept prin 1^L, au loc relațiile: $1^L = 90° = 5\,400' = 324\,000''$; $1^L = 100^g = 10\,000^c = 1\,000\,000^{cc}$.

Exemplul 1. Să se transforme 62°48′15″ în grade, minute, secunde centezimale:

$$48' = \frac{48°}{60} = 0{,}8°; \quad 15'' = \frac{15°}{3\,600} = 0{,}004167°;$$

$$62°48'15'' = 62{,}804167° = \frac{62{,}804167 \cdot 100^g}{90} = 69{,}7824^g = 69^g78^c24^{cc}.$$

Exemplul 2. Să se exprime $135^g\,46^c\,82^{cc}$ în grade, minute și secunde sexagesimale:

$$135^g\,46^c\,82^{cc} = 100^g + 35{,}4682^g = 90° + 35{,}4682 \cdot \frac{90°}{100} = 121{,}92138°;$$

$$0{,}92138° = 0{,}92138 \cdot 60' = 55{,}2828'; \quad 0{,}2828' = 0{,}2828 \cdot 60'' = 16{,}968'';$$

$$135^g\,46^c\,82^{cc} \approx 121°55'17''$$

Formule de transformare

$$90° = 100^g \qquad\qquad 100^g = 90°$$

$$1° = \frac{10^g}{9} = 1{,}111111\ldots^g \qquad\qquad 1^g = \frac{9°}{10} = 54'$$

$$1' = \frac{1}{60} \cdot \frac{10^g}{9} = 0{,}018519\ldots^g \qquad\qquad 1^c = 0{,}01^g = \frac{54'}{100} = 32{,}4''$$

$$1'' = \frac{1}{3\,600} \cdot \frac{10^g}{9} = 0{,}000309\ldots^g \qquad\qquad 1^{cc} = 0{,}0001^g = \frac{324''}{1000} = 0{,}324''$$

Unități pentru măsurarea arcelor. Într-un cerc lungimea unui arc b este proporțională cu unghiul la centru corespunzător și cu raza arcului r. Se poate scrie proporția:

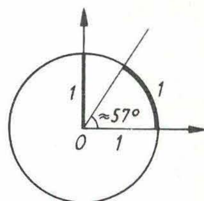
Lungimea cercului : lungimea arcului = = unghiul complet: unghiul la centru	$2\pi r : b = 360° : \alpha°$

De aici rezultă că raportul dintre lungimea arcului și rază depinde numai de mărimea unghiului la centru corespunzător arcului respectiv:

$$b : r = \frac{\alpha°}{360°} 2\pi = \frac{\alpha \cdot 1°}{360 \cdot 1°} 2\pi = \frac{2\pi\alpha}{360} = \frac{\pi}{180}\alpha.$$

Astfel, pentru măsurarea unghiurilor la centru într-un cerc cu raza cunoscută se poate folosi măsurarea arcelor (arc) $b : r = \frac{\alpha°}{180°} \cdot \pi = \frac{\pi}{180}\alpha = \widehat{\alpha} = \text{arc}\,\alpha.$

$b : r = \frac{\alpha°}{180°} \cdot \pi = \widehat{\alpha} = \text{arc}\,\alpha$	$\alpha° = \frac{\widehat{\alpha} \cdot 180°}{\pi}$



7.2.4. Definiția radianului

Unitatea pentru măsurarea unghiurilor este în acest caz *radianul* notat rad; 1 rad este unghiul pentru care raportul dintre lungimea arcului și rază este egal cu 1; astfel 1 rad = 57,29578° = 57° 17′44,8″ ≈ ≈ 57° 17′45″ (fig. 7.2.4).

1 rad = 57° 17′45″ = 63,6620^g

$1° = \frac{\pi}{180}$ rad ≈ 0,017453 rad, $1^g = \frac{\pi}{200}$ rad ≈ 0,0157078 rad

În cercul unitate raza este egală cu 1 și de aceea măsura arcului unui unghi este în acest caz egală cu lungimea lui.

Măsura unor unghiuri mai importante în unități de grad și arc

Grade	30°	45°	60°	90°	180°	360°	57° 17′45″
Radiani	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{\pi}{2}$ rad	π rad	2π rad	1 rad

În tehnica miltară unghiurile se măsoară în miimi, α_s. Pentru aceasta cercul se împarte în 6000 părți egale care se notează de la 0—01 pînă la 60—00*). Un unghi se notează cu α_s, $\alpha°$, α^g sau $\hat{\alpha}$ după cum se măsoară în miimi, grade sexagesimale, centezimale sau radiani; se obțin astfel din proporțiile: $\alpha_s : \alpha° = 6\,000 : 360°$, $\alpha_s : \alpha^g = 6\,000 : 400^g$ și $\alpha_s : \hat{\alpha} = 6\,000 : 2\pi$, formulele de transformare sînt:

Formule de transformare	$\alpha_s = \frac{100}{6} \cdot \alpha° = 15\,\alpha^g = \frac{3\,000}{\pi}\hat{\alpha}$ $\alpha° = \frac{6\,\alpha_s}{100}$, $\alpha^g = \frac{\alpha_s}{15}$, $\hat{\alpha} = \frac{\pi\alpha_s}{3\,000}$

* Model de notare utilizat pentru miimi în tehnica militară.

Din aceste formule rezultă:

$$0\text{-}01 = \frac{6}{100} \text{ grade sexagesimale} = 3{,}6'.$$

și

$$0\text{-}01 = \frac{1}{15} \text{ grade centezimale} \approx 0{,}07^g.$$

În miimi se obțin simplu valori aproximative pentru evaluarea distanțelor. Dacă unghiului α_s îi corespunde arcul b al unui cerc cu raza r, atunci $2\pi r : b = 6\,000 : \alpha_s$, adică $b = \frac{2\pi r \cdot \alpha_s}{6\,000} \approx \frac{r\alpha_s}{1\,000}$. Din cauza lipsei de precizie a aprecierii distanțelor s-a considerat $2\pi \approx 6$, dar valoarea de aproximare 6 este prea mică. În artilerie pentru unghiuri de peste 0-10 se corectează eroarea cu 5%; $6 + \frac{5 \cdot 6}{100} = 6{,}30$; $2\pi \approx 6{,}283$. Această corecție de 5% trebuie adăugată la calculul arcului b și scăzută la calculul lui α_s sau a distanței r.

Felul unghiurilor

Unghiul	grade sexagesimale	grade centezimale	radiani	miimi
Ascuțit	$0° < \alpha < 90°$	$0^g < \alpha < 100^g$	$0 \text{ rad} < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ rad}$	$0\text{-}00 < \alpha < 15\text{-}00$
Drept	$90°$	100^g	$\frac{\pi}{2} \text{ rad}$	15-00
Obtuz	$90° < \alpha < 180°$	$100^g < \alpha < 200^g$	$\frac{\pi}{2} \text{ rad} < \alpha < \pi \text{rad}$	$15\text{-}00 < \alpha < 30\text{-}00$
Plin (cu laturile în prelungire)	$180°$	200^g	π rad	30-00
Supraobtuz	$180° < \alpha < 360$	$200^g < \alpha < 400^g$	$\pi \text{rad} < \alpha < 2\,\pi \text{rad}$	$30\text{-}00 < \alpha < 60\text{-}00$
Complet	$360°$	400^g	$2\,\pi$ rad	60-00

Dacă se alege $r = 1$ km $= 1\,000$ m și $\alpha_s = 0\text{-}01$, atunci se obține valoarea aproximativă $b = \frac{r \cdot (0\text{-}01)}{1\,000} = 1$. Aceasta înseamnă că la o depărtare de 1 km unei miimi îi corespunde un arc de aproximativ un metru. Cum la acest ordin de mărime arcul și coarda pot fi considerate egale, se poate spune că coarda văzută sub un unghi de 0-01 la distanța de 1 km are un metru.

Scala circulară a unui sextant este împărțită în 60 părți. Unei miimi îi corespund atunci la o distanță de 1 km un arc de 100 m.

Unghiuri determinate de două drepte concurente

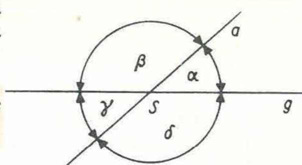
Cind două drepte se intersectează (sînt secante), rezultă patru unghiuri. Perechile de unghiuri astfel formate sînt perechi de unghiuri alăturate (adiacente) sau perechi de unghiuri opuse la vîrf.

Unghiuri alăturate (adiacente). Unghiurile, determinate de două drepte secante, care au un vîrf și o latură comună, se numesc unghiuri alăturate. Laturile care nu coincid se găsesc pe aceeași dreaptă, însă pe semidrepte diferite care pornesc din vîrf; în figura 7.2.5 se vede că de exemplu: $\alpha + \beta = \beta + \gamma = \gamma + \delta = \delta + \alpha = 180°$.

Cele două unghiuri ale unei perechi de unghiuri alăturate au de obicei mărimi diferite, de exemplu α și β sînt în general diferite; dacă sînt egale, suma lor trebuie să fie 180° și deci fiecare

unghi va fi de 180° : 2 = 90°, deci un unghi drept. Acest fapt a fost deja folosit la definirea dreptelor ortogonale și stă la baza următoarei afirmații fundamentale:

Unghi drept este oricare din cele patru unghiuri determinate de două secante care formează unghiuri alăturate egale.



7.2.5. Unghiuri alăturate (α și β) și unghiuri opuse la vîrf (α și γ)

Nu orice pereche de unghiuri care au laolaltă 180° este o pereche de unghiuri alăturate; astfel de unghiuri se numesc *suplimentare* iar două unghiuri care au împreună 90° se numesc *complementare*. Unghiurile alăturate sînt deci un caz special de unghiuri suplimentare.

Unghiuri opuse la vîrf. Unghiurile, determinate de două drepte secante, care au vîrful comun dar nu au laturi comune se numesc *opuse la vîrf*. Cum unghiurile opuse la vîrf se formează prin intersecția a două drepte, rezultă că pe fiecare din aceste drepte se găsește exact cîte o latură a fiecărui unghi. Pe figură, α și γ ca și β și δ sînt unghiuri opuse la vîrf.

Două unghiuri opuse la vîrf sînt egale, deoarece ele sînt suplimentare unghiurilor alăturate.

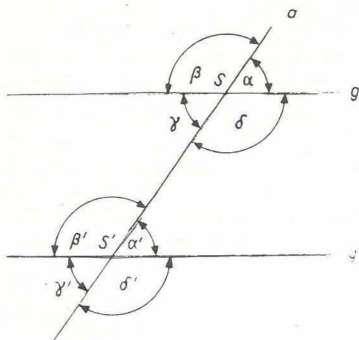
Perechi de unghiuri determinate de două drepte paralele tăiate de o secantă

Intersectînd două drepte paralele cu o a treia dreaptă, rezultă opt unghiuri care sînt notate în figură prin α, β, γ, δ și α′, β′, γ′, δ′ (fig. 7.2.6).

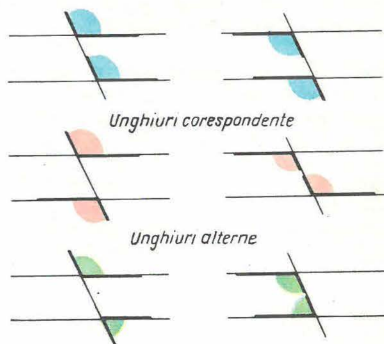
Dintre cele opt unghiuri astfel determinate deosebim perechi de unghiuri de următoarele tipuri:

a) Unghiuri care au vîrful comun; acestea pot fi:
   1. unghiuri opuse la vîrf, cînd laturile lor sînt așezate în sens opus; de exemplu α, γ, respectiv β′, δ′;
   2. unghiuri alăturate (adiacente) în cazul în care două laturi se găsesc pe aceeași semidreaptă iar celelalte două au sensuri opuse; de exemplu α, β, respectiv γ, δ.

b) Perechi de unghiuri cu vîrfuri diferite:
   1. unghiuri corespondente care au laturile orientate la fel; de exemplu α și α′, respectiv γ și γ′;
   2. unghiuri alterne ale căror laturi sînt două cîte două orientate diferit; de exemplu α și γ′, respectiv γ și α′.
   3. Unghiuri de aceeași parte a secantei care au cîte o latură cu același sens și cîte o latură de sens opus, externe α și δ′, respectiv interne γ și β′ (fig. 7.2.7).



7.2.6. Unghiuri formate de două paralele tăiate de o secantă



7.2.7. Exemple de unghiuri formate de două drepte paralele tăiate de o secantă

Acest mod de a defini diferitele perechi de unghiuri, ținînd seama de orientarea laturilor, este valabil numai pentru cazul dreptelor paralele tăiate de o secantă. În cazul a două drepte oarecare tăiate de o secantă aceste unghiuri trebuie definite, ținîndu-se seama de poziția lor față de secantă.

1) *Unghiurile corespondente* se definesc ca fiind cele situate de aceeaşi parte a secantei, unul de partea interioară a uneia din drepte, iar celălalt pe partea exterioară a celeilalte drepte.

2) *Unghiurile alterne* se găsesc pe părţi diferite ale secantei, ambele în interiorul sau în exteriorul dreptelor considerate.

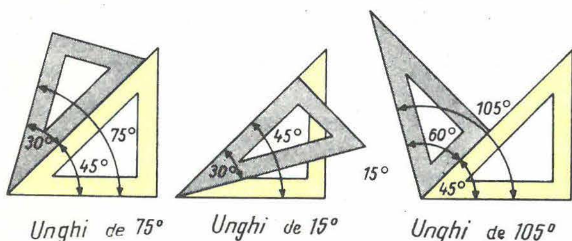
3) *Unghiurile de aceeaşi parte a secantei* se găsesc după cum le arată numele, de aceeaşi parte a dreptei de intersecţie, o pereche de unghiuri interne între cele două drepte paralele şi o pereche de unghiuri externe în afara celor două drepte.

Folosind o translaţie paralelă, din proprietăţile unghiurilor adiacente şi din proprietăţile unghiurilor opuse la vîrf, se pot deduce propoziţiile următoare:

În cazul dreptelor paralele tăiate de o secantă: Unghiurile corespondente sînt egale. Unghiurile alterne sînt egale. Perechile de unghiuri interne, respectiv externe de aceeaşi parte a secantei sînt suplimentare.

Construcţia unghiurilor

Echerul. Cu ajutorul echerelor care se găsesc în comerţ se pot construi unghiuri de 90°, 75°, 60°, 45° şi 30°, unele direct, altele prin suprapunere (fig. 7.2.8).



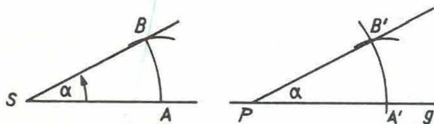
7.2.8. Construcţia unor unghiuri cu ajutorul echerului:

$\varphi_1 = 75°$, $\varphi_2 = 15°$, $\varphi_3 = 105°$

Prin construirea jumătăţii unui unghi cu ajutorul compasului şi al liniei (echerului) se mai pot construi şi alte unghiuri ca de exemplu 22,5°; 15°; 7,5°. Prin îmbinarea acestor procedee se pot construi mereu alte unghiuri.

Construcţia unui unghi egal cu un unghi dat. Reproducerea unui unghi dat cu ajutorul riglei şi al compasului este oricînd posibilă. Fie de exemplu de construit un unghi dat α în punctul P al unei drepte orientate g (fig. 7.2.9).

Se va lua vîrful unghiului în P şi una din laturi pe g. Se descrie apoi un arc de cerc cu centrul în vîrful unghiului dat care taie laturile acestuia în punctele A şi B. Cu aceeaşi deschidere a compasului se descrie un arc de cerc cu centrul în P care taie dreapta g în A'. Arcul de cerc cu vîrful în A' şi raza AA' va intersecta cercul cu vîrful în P, trasat anterior, într-un punct B' care este unic determinat ţinînd seama de orientarea planului. Unghiul $A'PB'$ este unghiul căutat. Cînd nu se dă unghiul ci numai mărimea lui în grade se va folosi raportorul.



7.2.9. Construcţia unui unghi egal cu un unghi dat

Construcţia unghiurilor numai cu rigla şi compasul. Această construcţie nu este întotdeauna posibilă. Deoarece triunghiurile, patrulaterele şi pentagoanele regulate pot fi construite cu rigla şi compasul, rezultă că acest procedeu poate fi folosit la construcţia unghiurilor de 120°, 90° şi 72°. Prin construcţia jumătăţii se obţin unghiurile de 60°, 30°, 15°, 45°, 36°, 18° şi 9°. Prin

adunarea unghiurilor de 15° și 9° se obține unghiul de 24° iar apoi prin înjumătățire, unghiurile de 12°, 6° și 3°. Astfel, toate unghiurile care sînt multipli ai unghiului de 3° pot fi construite cu rigla și compasul. Ele nu epuizează însă mulțimea unghiurilor construibile cu rigla și compasul.

7.3. Simetrie

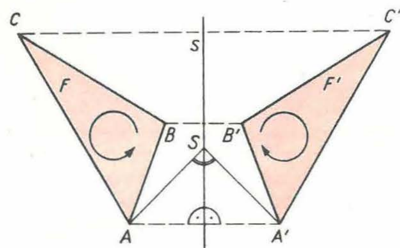
Simetrie axială (în raport cu o axă)

Fie planul E împărțit în două prin dreapta s. Dacă printr-o mișcare a planului se realizează o rotație de 180° în jurul axei s, atunci rezultă o aplicație a tuturor punctelor dintr-un semiplan pe punctele celuilalt semiplan.

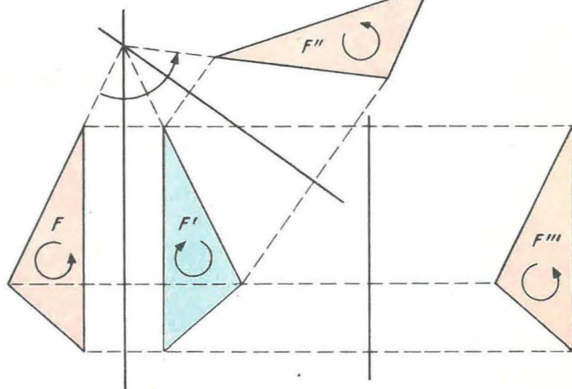
Această transformare geometrică se numește *simetrie față de o axă (axială)*. Prin ea fiecărui punct A (fig. 7.3.1) dintr-unul din semiplanele determinate de s îi corespunde simetricul său față de axă A' situat in celălalt semiplan. Dacă se îndoaie hîrtia pe care s-a reprezentat planul, de-a lungul axei s, figurile simetrice față de s se suprapun. Segmentul AA' este perpendicular pe dreapta s. Se spune că A' este simetricul lui A față de axa s și invers. Reciproc, fiind date în plan două puncte diferite P și P'. există o dreaptă unică s, în acest plan, față de care P și P' sînt simetrice.

Dacă se unesc două puncte A și A' simetrice față de s cu un punct oarecare situat pe dreapta s, atunci unghiurile formate de s cu segmentele de legătură AS și $A'S$ sînt egale și formează cu dreapta s unghiuri egale.

Astfel, prin simetrie axială o anumită figură se transformă în alta egală (congruentă). Simetria unei figuri față de o axă poate fi intuitiv comparată cu o oglindire a figurii originale. Cu ajutorul unei oglinzi ținute perpendicular pe planul E de-a lungul dreptei s se poate obține pentru fiecare figură F imaginea ei F'. Geometric F' se construiește construind pentru fiecare punct al lui F, simetricul său. Figurile care corespund printr-o simetrie au orientări (sensuri) opuse. Simetria față de o axă generează așa-zise figuri *indirect* (sau *invers*) *congruente* (fig. 7.3.1). Cum prin două simetrii succesive se schimbă sensul figurilor de două ori, rezultă că figura inițială F și imaginea ei prin două simetrii axiale succesive F'' sînt figuri direct congruente. Două simetrii axiale succesive nu pot fi înlocuite printr-o altă simetrie axială; pot fi înlocuite însă printr-o *translație* sau printr-o *rotație* (fig. 7.3.2).



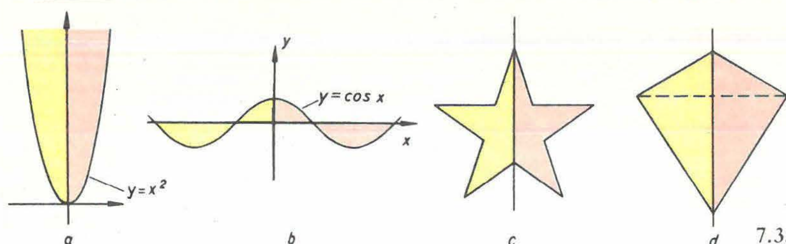
7.3.1. Simetria față de o axă



7.3.2. Două simetrii axiale pot fi înlocuite printr-o rotație sau printr-o translație

Printr-o simetrie axială, toate punctele aflate pe axa de simetrie rămîn invariante, adică se transformă în ele însele. Din acest motiv axa de simetrie se mai numește și dreapta fixă a simetriei.

Figuri cu simetrie axială. Cînd o anumită figură are puncte sau chiar segmente întregi situate pe o anumită dreaptă s, prin simetrie față de această dreaptă se obține o figură axial simetrică, adică o figură care se compune din două părți simetrice față de s (fig. 7.3.3).



7.3.3. Figuri simetrice față de o axă

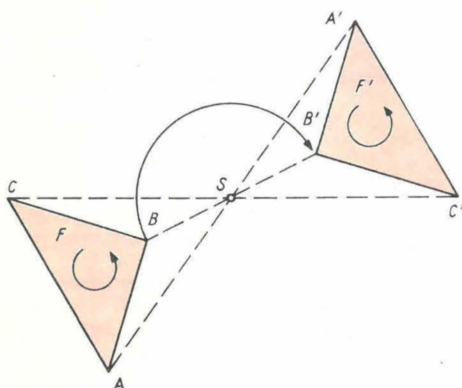
Simetria centrală

S-a văzut că în cazul simetriei axiale, figurile simetrice se suprapun printr-o rotație de 180° în spațiu în jurul axei de simetrie.

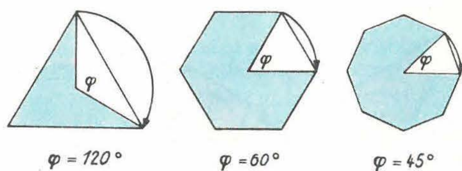
Două figuri sînt simetrice față de un punct (central simetrice) dacă se suprapun printr-o rotație plană de 180° în jurul acestui punct (S) numit *centru de simetrie* (fig: 7.3.4).

Prin rotația plană de 180° fiecărui punct B al planului îi corespunde un alt punct din plan B' astfel încît segmentul determinat de punctele B și B' trece prin centrul de simetrie S. Imaginea unui punct prin această transformare se numește simetricul față de centrul S al punctului original. Ca orice rotație în jurul unui punct simetria centrală este o transformare congruentă, adică nu schimbă forma și mărimea figurilor. Spre deosebire de simetria axială, simetria centrală nu schimbă orientarea (sensul) figurilor. Figurile corespondente sînt în acest caz direct congruente. Două simetrii succesive față de același centru conduc la figura inițială ($F \rightarrow F' \rightarrow F$). La orice simetrie centrală numai centrul de simetrie rămîne invariant; el este punctul fix al mișcării.

Figurile care se suprapun printr-o rotație de unghi φ în jurul unui punct P se numesc radial simetrice. Toate poligoanele regulate au această proprietate (fig. 7.3.5). Cum în cazul simetriei



7.3.4. Simetria față de un punct (simetria centrală)



7.3.5. Simetria radială a unor poligoane regulate

centrale unghiul de rotație este $\varphi = 180°$, rezultă că simetria centrală este un caz particular de simetrie radială,

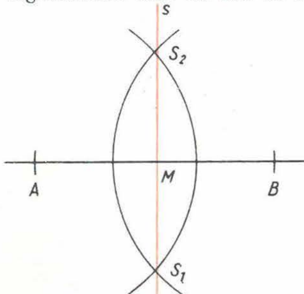
Cele mai simple figuri cu simetrie centrală

Figura	Centrul de simetrie
Segment	Mijlocul segmentului
Dreaptă	Orice punct al dreptei
Figura formată din două drepte care se intersectează	Punctul de intersecție
Figura formată din două unghiuri opuse la vîrf	Vîrful unghiului
Cerc	Centrul cercului

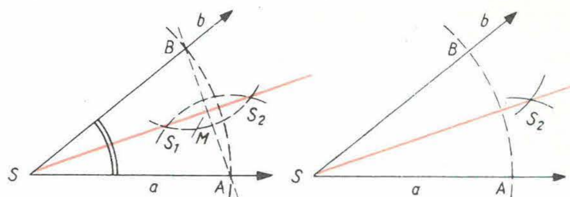
Construcţii fundamentale

Mijlocul unui segment. Aflarea mijlocului unui segment AB se face cu rigla şi compasul, pe baza proprietăţilor simetriei axiale. Problema revine la construirea axei de simetrie (fig. 7.3.6).

Din fiecare extremitate a segmentului se trasează cu aceeaşi rază mai mare decît jumătatea segmentului cîte un arc de cerc. Aceste raze se intersectează în două puncte S_1 şi S_2 care

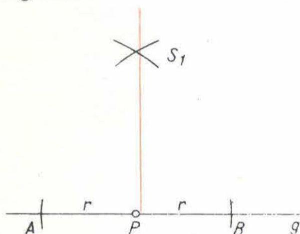


7.3.6. Construcţia mijlocului unui segment



7.3.7. Construcţia bisectoarei unui unghi

aparţin axei de simetrie s. Dreapta s intersectează segmentul AB în mijloc şi este perpendiculară pe aceasta (mediatoarea).



7.3.8. Ridicarea unei perpendiculare pe o dreaptă într-un punct dat

Construcţia bisectoarei unui unghi. Dreapta care trece prin vîrful unghiului şi îl împarte în două părţi egale se numeşte bisectoare. Construcţia bisectoarei se face tot cu rigla şi compasul, folosind proprietăţile simetriei axiale.

Din vîrful S al unghiului (a, b) se trasează un arc de cerc de rază oarecare care taie laturile acestuia în punctele A şi B. Mediatoarea segmentului AB este axă de simetrie a figurii şi deci împarte unghiul (a, b) în două părţi egale (fig. 7.3.7).

Trisecţiunea unghiului (împărţirea unghiului în trei părţi egale) este — spre deosebire de bisecţiunea unghiului — realizabilă cu rigla şi compasul doar în anumite cazuri speciale. Problema trisecţiunii unghiului este o problemă celebră încă din timpurile Greciei antice; imposibilitatea rezolvării ei a fost demonstrată prin metode algebrice.

Ridicarea unei perpendiculare. Fie de ridicat o perpendiculară într-un punct P pe o dreaptă g. Din punctul P se descrie un cerc cu o rază oarecare r. Acest cerc intersectează dreapta g în două puncte A şi B. Din A şi B se trasează cîte un cerc de rază egală, mai mare decît r. Unul din punctele de intersecţie a acestor cercuri, de exemplu S_1, se uneşte cu P. Dreapta S_1P este perpendiculara căutată (fig. 7.3.8).

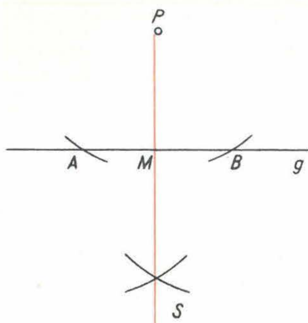
Mediatoarea unui segment se va construi după construcţia indicată la împărţirea segmentului în două părţi egale.

Coborîrea unei perpendiculare pe o dreaptă. Fiind dată o dreaptă g şi un punct P exterior acesteia, se cere coborîrea unei perpendiculare din P pe g. Un arc de cerc descris din P cu o rază suficient de mare taie dreapta g în punctele A şi B. Mediatoarea segmentului AB trece prin punctul P. Aceasta este perpendiculara căutată (fig. 7.3.9).

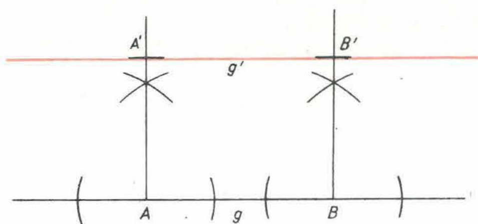
Trasarea unei paralele. Pentru a construi cu rigla şi compasul o paralelă la o dreaptă g se ridică perpendiculare în două puncte oarecare, A şi B ale dreptei g. Pe acestea se marchează la aceeaşi distanţă şi pe aceeaşi parte a lui g cîte un punct A', respectiv B'. Dreapta g' care trece prin A' şi B' este paralelă la g (fig. 7.3.10).

Posibilitatea unor construcţii cu rigla şi compasul. La construcţia geometriei plane, Euclid a folosit un sistem de axiome care considera ca perfect realizabile:

1. Trasarea unei drepte prin două puncte arbitrare date;
2. Descrierea cercurilor cu raze considerate distanţe între două puncte arbitrar date.



7.3.9. Coborîrea unei perpendiculare dintr-un punct pe o dreaptă



7.3.10. Construcţia unei paralele la o dreaptă dată

În mod corespunzător în geometria lui Euclid teoremele se demonstrează pe baza propoziţiilor şi teoremelor fundamentale privind intersecţia dreptelor, intersecţia dreptelor cu cercuri sau intersecţia cercurilor, precum şi teoremele fundamentale privind legarea punctelor prin drepte sau cercuri. La fel, pentru construcţiile exacte în sensul lui Euclid s-a convenit să se folosească doar instrumente pentru trasarea dreptelor (rigla) şi a cercurilor (compasul).

Cerinţa ca o anumită construcţie să se facă doar cu rigla şi compasul derivă deci din însăşi sistemul de axiome al lui Euclid; ea este o problemă a construcţiei întregii geometrii plane şi nu o problemă privind exactitatea unei anumite construcţii. De multe ori chiar, o construcţie este mai precisă cînd este făcută prin alte metode.

Deoarece la grecii antici tehnica de calcul era relativ slab dezvoltată, ei căutau să rezolve principalele probleme matematice prin construcţii geometrice cu rigla şi compasul, de exemplu ei realizau extragerea rădăcinii pătrate prin construirea mediei proporţionale a două segmente.

Nu au putut fi astfel rezolvate trei probleme devenite celebre:

— *trisecţiunea unghiului* (împărţirea unui unghi în trei părţi egale);

— *cvadratura cercului* (găsirea unui pătrat de arie egală cu cea a unui cerc dat);

— *duplicarea cubului* (găsirea unui cub care să aibă ca volum dublul volumului unui cub dat).

Cercetările moderne au arătat că rezolvarea acestor probleme în sensul lui Euclid este principial imposibilă. Astăzi, algebra, fundamentată pe teoria lui Galois poate răspunde complet la întrebarea dacă o construcţie geometrică poate fi efectuată cu rigla şi compasul. În acest scop este esenţial de ştiut dacă anumite ecuaţii cu coeficienţi raţionali pot fi rezolvate cu ajutorul celor patru operaţii algebrice de bază şi al extragerii rădăcinii pătrate.

7.4. Triunghiuri

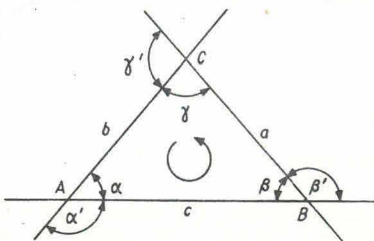
Definiţii, notaţii şi clasificarea triunghiurilor

Prin trei puncte diferite din plan, care nu se găsesc pe aceeaşi dreaptă, se pot duce exact trei drepte care unesc fiecare cîte două puncte. Figura plană, închisă, formată astfel, se numeşte *triunghi*; cele trei puncte se numesc vîrfuri, iar segmentele care leagă vîrfurile, laturi. Triunghiul este o figură convexă deoarece orice dreaptă care uneşte două puncte ale triunghiului conţine numai puncte ale triunghiului.

În general, vîrfurile triunghiului se notează cu A, B şi C iar laturile se notează, ţinîndu-se seama de vîrful opus, latura AB cu c, latura BC cu a şi latura CA cu b (fig. 7.4.1).

Fiecare pereche de laturi ale triunghiului formează un unghi interior. Aceste unghiuri se notează sau cu ajutorul literelor care desemnează vîrfurile sau cu litere din alfabetul grec

$$\sphericalangle CAB = \alpha, \quad \sphericalangle ABC = \beta, \quad \sphericalangle BCA = \gamma.$$

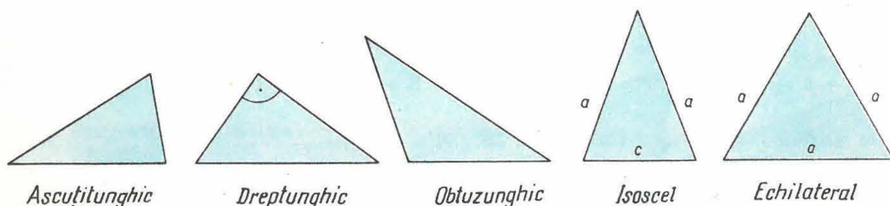


7.4.1. Triunghiul ABC

Unghiurile alăturate unui unghi interior care au o latură în prelungire cu o latură a triunghiului (prelungirea lui AB după B, BC după C, respectiv CA după A), iar drept cealaltă latură, o latură a triunghiului ($\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, respectiv $\overline{AB} = c$) se numesc unghiuri *exterioare triunghiului* (α', β', γ').

Triunghiul se notează prin ΔABC. Dacă se prevede o anumită orientare (sens), atunci prin convenție se stabilește că ΔABC este orientat pozitiv, cînd parcurgerea lui în sensul $\overrightarrow{AB} \to \overrightarrow{BC} \to \overrightarrow{CA}$ corespunde unei rotații în sensul orientării planului. Un triunghi este isoscel cînd are două laturi egale (fie acestea notate cu a); a treia latură c se numește ***bază***. Un triunghi este echilateral cînd are toate laturile egale.

Un triunghi este ascuțitunghic cînd are toate unghiurile ascuțite, dreptunghic cînd are un unghi drept și obtuzunghic cînd are un unghi obtuz. Într-un triunghi dreptunghic, latura care se opune unghiului drept se numește ipotenuză iar celelalte laturi catete (fig. 7.4.2).



7.4.2. Forme speciale de triunghiuri

Relații de bază în triunghi

Relații între laturi. Dintr-un vîrf oarecare al triunghiului se poate ajunge de-a lungul triunghiului, cel mult pe două căi, într-un alt vîrf al acestuia: sau direct pe latura care unește cele două vîrfuri sau de-a lungul celorlalte două laturi. De exemplu: din A în B se poate ajunge parcurgînd AB sau prin C de-a lungul laturilor b și a. Cum linia dreaptă este drumul cel mai scurt dintre două puncte, rezultă că

$$c < a + b, \quad b < a + c, \quad a < b + c.$$

Într-un triunghi suma a două laturi este mai mare decît a treia latură.

Prin scădere, din inegalitățile de mai sus, rezultă:

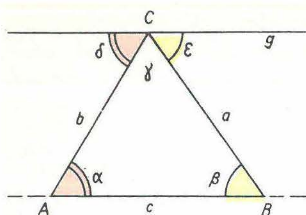
$$c - a < b, \quad b - a < c, \quad a - b < c,$$

$$c - b < a, \quad b - c < a, \quad a - c < b.$$

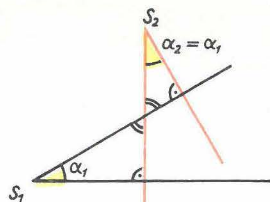
Într-un triunghi diferența a două laturi este mai mică decît a treia latură.

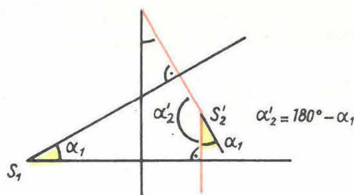
De exemplu, se poate construi un triunghi cu laturile de 3 cm, 4 cm și 5 cm, dar nu se poate construi un triunghi cu laturile de 3 cm, 4 cm și 8 cm, deoarece 3 cm + 4 cm < 8 cm și deci suma a două laturi ar fi mai mică decît a treia, respectiv 8 cm − 4 cm > 3 cm, adică diferența a două laturi ar fi mai mare decît a treia latură.

Relații între unghiuri. Dacă printr-unul din vîrfurile unui triunghi, de exemplu C, se duce o paralelă la latura opusă, respectiv c, rezultă în C un unghi de 180° împărțit prin două segmente în 3 părți (fig. 7.4.3). Cele două paralele g și C sînt intersectate de laturile triunghiului a, respectiv b.



7.4.3. $\alpha + \beta + \gamma = 180°$





7.4.4. Unghiuri cu laturi perpendiculare

Unghiurile δ și β, respectiv α și ε apar ca unghiuri alterne interne și deci sînt egale:

$$\delta = \alpha \quad \text{și} \quad \varepsilon = \beta.$$

Dar $\delta + \gamma + \varepsilon = 180°$, de unde rezultă că și $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ (fig. 7.4.4)

Suma unghiurilor într-un triunghi este de 180°.

De asemenea, în construcția de mai sus fiecare unghi exterior este un unghi alăturat unui unghi interior, de unde rezultă (fig.)

$$\alpha + \alpha' = 180°, \quad \beta + \beta' = 180°, \quad \gamma + \gamma' = 180°.$$

Adunînd aceste egalități, se obține

$$(\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha' + \beta' + \gamma') = 3 \cdot 180°.$$

Ținînd seama de suma unghiurilor interioare, rezultă

Suma unghiurilor exterioare unui triunghi este de 360°.

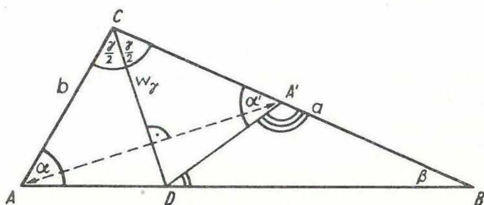
Cum fiecare unghi exterior este suplimentul unghiului interior alăturat iar acesta la rîndul său este suplimentul sumei celorlalte două unghiuri interioare, rezultă:

Fiecare unghi exterior unui triunghi este egal cu suma unghiurilor interioare nealăturate lui; $\alpha' = \beta + \gamma$; $\beta' = \gamma + \alpha$; $\gamma' = \alpha + \beta$.

Din propozițiile referitoare la relațiile dintre unghiurile unui triunghi, rezultă următoarea propoziție foarte importantă pentru aplicații în fizică (fig. 7.4.5).

Unghiurile cu laturile perpendiculare două cîte două sînt egale cu excepția cazurilor cînd vîrful unuia se găsește în interiorul sau pe laturile celuilalt; în acest caz ele sînt suplimentare.

Relații între laturi și unghiuri. Fie triunghiul ABC în care $a > b$. Bisectoarea w_γ a unghiului γ taie pe $AB = c$ într-un punct D. Construind simetricul triunghiului ADC în raport cu w_γ, b se suprapune pe a astfel încît imaginea A' a lui A se găsește între B și C (fig. 7.4.6). A' este vîrful unghiului $CA'D = \alpha'$ care este egal cu $\sphericalangle CAD = \alpha$ (simetria în raport cu w_γ). Unghiul α' este exterior triunghiului DBA' și deci este suma unghiurilor β și $\sphericalangle BDA'$, deci mai mare decît β. Deoarece $\alpha' = \alpha$ și $\alpha' > \beta$ rezultă în sfîrșit din $a > b$ că și $\alpha > \beta$.



7.4.5. În triunghiul ABC, din $a > b$ rezultă $\alpha > \beta$

Într-un triunghi, dintre două laturi oarecare, latura opusă unghiului mai mare este mai mare, iar unghiul opus laturii mai mari este mai mare; la unghiuri egale se opun laturi egale și reciproc.

Orice triunghi isoscel prezintă o simetrie axială. Perpendiculara coborîtă din vîrf pe bază este mediatoarea bazei și bisectoare a unghiului din vîrf. Unghiurile de lîngă bază sînt egale.

Într-un triunghi dreptunghic unghiurile ascuțite sînt complementare. Într-un triunghi dreptunghic isoscel unghiurile de la bază au fiecare 45°.

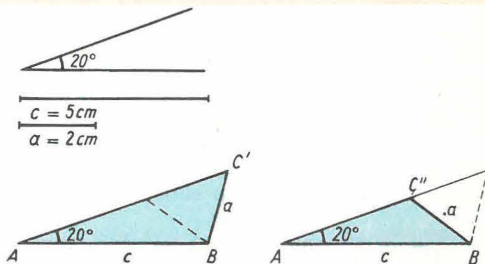
Într-un triunghi echilateral toate unghiurile interioare sînt egale, fiecare avînd 60°.

Triunghiurile echilaterale au trei axe de simetrie.

Dacă într-un triunghi dreptunghic unul din unghiurile ascuțite are 30°, atunci cateta opusă acestui unghi este jumătate din ipotenuză.

Ultima propoziție rezultă din proprietățile de simetrie ale triunghiurilor echilaterale și are multe aplicații; de exemplu, echerele care se găsesc în comerț sînt astfel încît sau au catetele egale sau una dintre catete este jumătatea ipotenuzei.

Congruența (egalitatea) triunghiurilor



7.4.6. Triunghiuri cu trei elemente necongruente

Generalități. Prin congruență (egalitate, coincidență) se înțelege o corespondență între figurile plane care nu se referă la forma și mărimea acestora. Figurile congruente pot fi transformate una în alta prin transformări geometrice care schimbă doar poziția figurilor nu însă lungimea segmentelor, mărimea unghiurilor (deci și aria), paralelismul și relațiile de incidență. Dacă figurile congruente corespund și în ce privește sensul lor de parcurgere, atunci ele pot fi transformate una în alta doar prin transformări ca translația, rotația și transformări compuse cu ajutorul acestora. Aceste figuri se numesc direct congruente. Dacă figurile congruente nu au același sens de parcurgere, pentru a le transforma una în alta trebuie folosite pe lîngă transformările menționate mai sus și o simetrie axială. Figurile care se obțin una din alta prin simetrie axială (compusă eventual cu rotații și translații) se numesc *indirect congruente. Transformările congruente:* translația, rotația și simetria axială pot fi folosite în demonstrații ca criterii de congruență pentru figuri (sau părți de figuri). De asemenea, ele joacă un rol în obținerea de noi rezultate în geometrie.

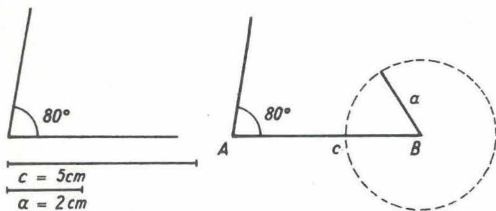
Cele patru teoreme de egalitate. Una din cerințele definiției congruenței este perfecta coincidență a tuturor părților figurilor congruente. Pentru a enunța criteriile de egalitate a triunghiurilor, numai trei elemente sînt determinante; dacă acestea coincid, coincidența celorlalte este o consecință. Cele patru criterii de egalitate a triunghiurilor sînt următoarele:

1. **Două triunghiuri sînt congruente dacă au toate laturile respectiv egale (L, L, L).**
2. **Două triunghiuri sînt congruente dacă au două laturi și unghiul determinat de acestea respectiv egale (L, U, L).**
3. **Două triunghiuri sînt congruente dacă au două laturi și unghiul opus celei mai mari dintre acestea respectiv egale (L, L, U).**
4. **Două triunghiuri sînt congruente dacă au o latură și două unghiuri alăturate respectiv egale (U, L, U).**

Se poate observa că există o legătură între cazurile de egalitate ale triunghiurilor și cazurile cînd este posibilă construcția unui triunghi cu elemente date. În general se poate construi un singur triunghi cînd se dau trei elemente ale acestuia corespunzînd unuia din cele patru cazuri de egalitate. Dimpotrivă, dacă se dau de exemplu, $a = 3$ cm, $c = 5$ cm și $\alpha = 20°$, atunci după cum se poate vedea și din fig. 7.4.6 nu se poate face o construcție unică. Procedeul de construcție ar fi următorul: se trasează un segment $\overline{AB} = c$ și în A se construiește unghiul α; apoi din B cu o rază egală cu a se trasează un arc care taie cealaltă latură a unghiului α în două puncte C' și C''. Ambele unghiuri ABC' și ABC'' astfel construite

satisfac condițiile inițiale. Dacă se ia însă $\alpha = 80°$, cercul cu vîrful în B și rază a nu taie latura mobilă a unghiului α în nici un punct și deci nu există nici un triunghi care să satisfacă condiția din enunț (fig. 7.4.7).

La construcțiile corespunzătoare celui de-al patrulea criteriu de egalitate trebuie deosebite cazurile cînd cele două unghiuri sînt alăturate dreptei date, sau nu. În primul caz, unghiurile pot fi construite imediat la extremitățile segmentului dat și al treilea vîrf apare ca punct de intersecție a laturilor mobile ale acestor unghiuri. În al doilea caz, fie de exemplu date c, α și γ; în acest caz fie că se calculează $\beta = 180° - \alpha - \gamma$ și se reduce problema la cazul precedent, fie că se construiește unghiul α într-un punct C' al laturii mobile $\overline{C'A}$ a unghiului γ și se duce prin punctul B o paralelă la latura mobilă a acestui unghi care taie latura mobilă a unghiului α în punctul C. Triunghiul căutat este triunghiul ABC.



7.4.7. Trei elemente cu care nu se poate construi un triunghi

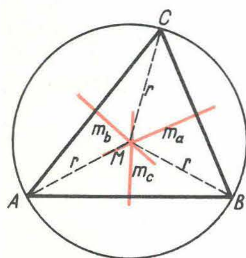
Drepte și puncte remarcabile în triunghi

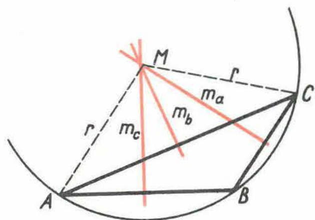
Prin *transversală* se înțelege o dreaptă care taie triunghiul.

Mediatoare. Această transversală este perpendiculară pe mijlocul unei laturi.

Mediatoarele laturilor unui triunghi se intersectează într-un punct M.

Fiecare punct al mediatoarei unui segment este egal depărtat de capetele segmentului; punctul de intersecție M a două mediatoare, de exemplu m_a și m_b va avea deci aceeași distanță la B și C și la C și A și este deci egal depărtat de A și B și deci se găsește și pe mediatoarea m_c. Punctul M este deci centrul cercului circumscris triunghiului (fig. 7.4.8) cu raza r. La triunghiul ascuțitunghic punctul M se găsește în interiorul triunghiului, la triunghiul obtuzunghic în exteriorul lui, la triunghiul dreptunghic pe ipotenuză. Cazul triunghiului dreptunghic este deseori formulat ca teorema lui Thales (THALES din Milet — matematician grec 624—547 î.e.n.).

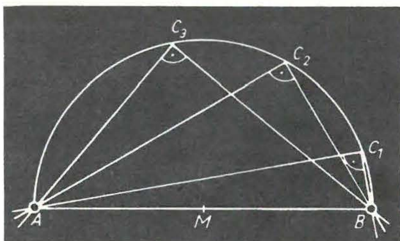




7.4.8. Mediatoare și cercul circumscris

Fiecărui triunghi dreptunghic i se poate circumscrie un cerc al cărui centru este mijlocul ipotenuzei. Altfel formulat (fig. 7.4.9):

Teorema lui Thales. Locul geometric al vîrfurilor tuturor unghiurilor drepte ale căror laturi trec prin două puncte fixe este cercul cu centrul în mijlocul segmentului ce unește cele două puncte și avînd ca diametru acest segment.

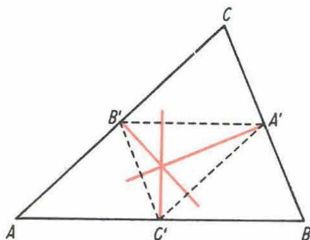


7.4.9. Teorema lui Thales

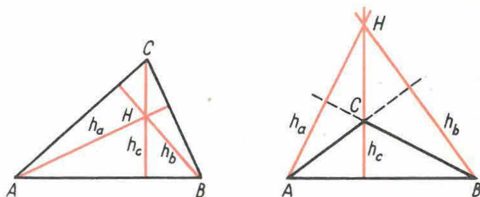
Centrul cercului circumscris unui triunghi isoscel se găsește pe axa de simetrie care este mediatoarea bazei.

Unind mijloacele laturilor unui triunghi, se obține un nou triunghi $A'B'C'$ care se găsește în interiorul triunghiului inițial ABC (fig. 7.4.10). Laturile triunghiului $A'B'C'$ sînt paralele cu laturile triunghiului ABC. Mediatoarele triunghiului ABC sînt deci perpendiculare pe laturile triunghiului $A'B'C'$ și trecînd prin vîrf sînt înălțimi în acest triunghi.

Înălțimi. Transversalele care sînt perpendiculare pe o latură și trec prin vîrful opus se numesc înălțimi. Înălțimile unui triunghi se notează cu h_a, h_b, h_c (fig. 7.4.11).



7.4.10. Mediatoare și înălțimi



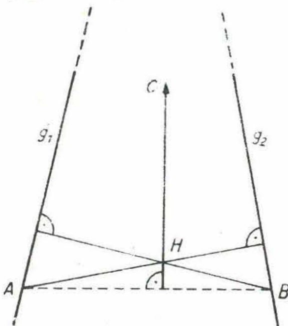
7.4.11. Înălțimile unui triunghi

Cele trei înălțimi ale unui triunghi se intersectează într-un punct (sînt concurente).

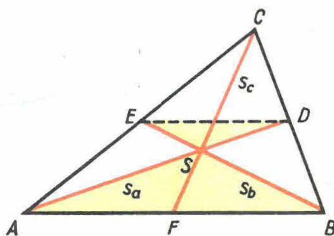
Punctul de intersecție a înălțimilor (ortocentrul) se găsește în interiorul triunghiului în cazul triunghiului ascuțitunghic și în exteriorul lui în cazul triunghiului obtuzunghic. Într-un triunghi dreptunghic, punctul de intersecție a înălțimilor este vîrful unghiului drept iar catetele sînt înălțimi. În triunghiul isoscel, înălțimea bazei este și mediatoarea ei; ambele transversale se găsesc pe axa de simetrie. Cu ajutorul punctului de intersecție a înălțimilor se poate rezolva următoarea problemă:

Fiind date două drepte neparalele l_1 și l_2 care se intersectează într-un punct C din afara porțiunii de plan determinată de hîrtia pe care se face desenul și un punct H, să se traseze dreapta care unește H cu punctul C (fig. 7.4.12). Perpendicularele coborîte din H pe dreptele l_1 și respectiv l_2 taie cealaltă dreaptă în punctele B, respectiv A și sînt înălțimi în triunghiul ABC. A treia înălțime va fi dreapta căutată; ea trece prin H și este perpendiculară pe AB.

Mediane. *Medianele* unesc mijlocul unei laturi cu vîrful opus și se notează cu s_a, s_b și s_c (fig. 7.4.13). Ele satisfac teorema:



7.4.12. Dreapta care trece prin H și prin punctul de intersecție C a dreptelor neparalele g_1 și g_2

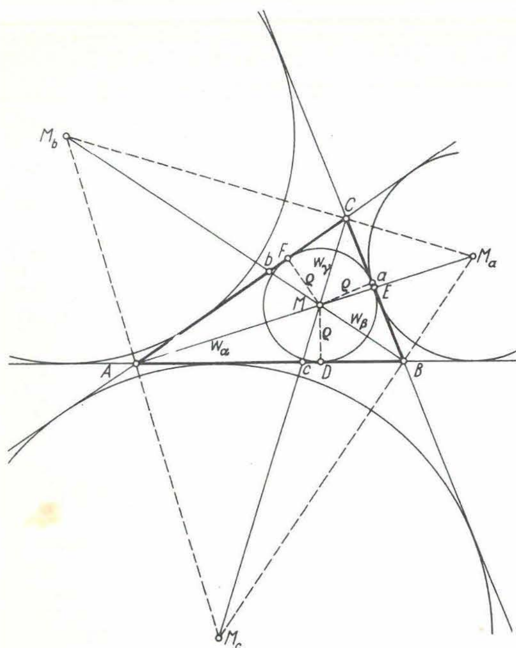


7.4.13. Medianele unui triunghi se intersectează într-un punct S

Medianele unui triunghi se intersectează într-un punct numit centru de greutate al triunghiului. Acest punct împarte mediana în raportul 2 : 1 socotit de la vîrf.

Pentru demonstrație sînt trasate în figură medianele AD și BE cu punctul lor de intersecție S. Dreptele ED și AB taie perechea de drepte CA și CB cît și perechea AD și EB în raportul

2 : 1 (vezi teoremele referitoare la fascicule de drepte). De aici, rezultă că și $SA : SD = SB : SE = AB : ED = 2 : 1$. Același lucru se poate demonstra pentru altă pereche de mediane, de exemplu CF și BE. Și acestea se intersectează tot în S deoarece nu există decît un punct, care împarte pe BE pornind din B în raportul 2 : 1.



7.4.14. Cele trei cercuri exînscrise

Bisectoare. *Bisectoarele* w_α, w_β și w_γ împart unghiurile triunghiului în părți egale.

Bisectoarele unui triunghi se intersectează într-un punct (sînt concurente).

Punctul M de intersecție a bisectoarelor w_α și w_β este egal depărtat atît de dreptele b și c (w_α) cît și de dreptele c și a (w_β). Cum el este *egal depărtat* de a și b, trebuie să se găsească și pe w_γ. Distanța punctului M la cele trei laturi este raza ρ a *cercului înscris* în triunghi, care atinge fiecare latură exact într-un punct. Aceste puncte D, E, F sînt picioarele perpendicularelor duse din M pe laturi (fig. 7.4.14). Bisectoarele a două unghiuri exterioare și cu bisectoarea unghiului rămas se intersectează de asemenea într-un punct. Punctele M_a, M_b și M_c obținute astfel sînt *centrele cercurilor exînscrise triunghiului* care sînt tangente fiecare la cîte o latură și la prelungirile celorlalte laturi (fig. 7.4.14).

În triunghiul isoscel, bisectoarea vîrfului, mediatoarea bazei, mediana bazei și înălțimea bazei coincid.

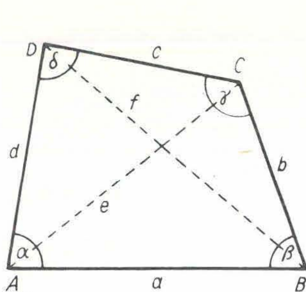
7.5. Patrulatere

Generalități

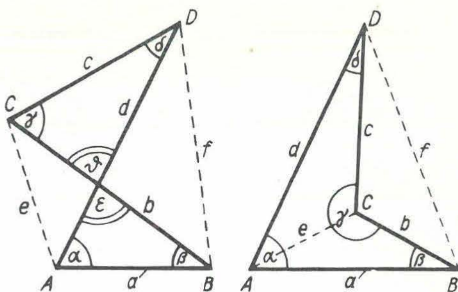
Definiții și notații în patrulater. Prin patru puncte din plan, așezate astfel încît să nu existe printre ele trei puncte în linie dreaptă, se pot duce șase drepte care unesc cîte două puncte. Cele patru puncte se numesc *vîrfurile unui patrulater*. Dacă se stabilește un sens de parcurgere, atunci segmentele care unesc două puncte consecutive se numesc laturi și segmentele care unesc două puncte neconsecutive se numesc diagonale. Astfel, fiecare patrulater are patru laturi $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ și două diagonale $AC = e$, $BD = f$. Dacă diagonalele se găsesc în interiorul patrulaterului, acesta este convex, în caz contrar este concav (fig. 7.5.1).

La fel ca la triunghi, dreptele pe care se găsesc laturile patrulaterului formează unghiuri interioare și unghiuri exterioare. Unghiurile interioare ale patrulaterului sînt $\sphericalangle DAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle BCD = \gamma$, $\sphericalangle CDA = \delta$.

Deoarece fiecare diagonală împarte un patrulater convex în două triunghiuri, rezultă că suma unghiurilor interioare ale unui patrulater convex este de 360°. Și la patrulaterele neconvexe se obține aceeași sumă deoarece și ele pot fi descompuse în două triunghiuri (care au un vîrf comun și două laturi în prelungire sau, cînd una din diagonale este în interior, în două triunghiuri care au o latură comună) (fig. 7.5.2).



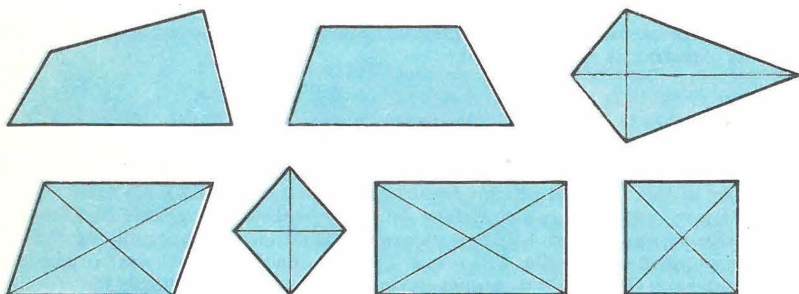
7.5.1. Patrulater convex



7.5.2. Patrulatere concave

Suma unghiurilor interioare într-un patrulater este de 360°.

Clasificarea patrulaterelor. Pentru diferitele tipuri de patrulatere convexe (fig. 7.5.3), se folosesc denumiri speciale.



7.5.3. Denumirile unor patrulatere speciale: trapezoid, trapez, deltoid convex, romboid, romb, dreptunghi, pătrat.

După *lungimea laturilor, se pot deosebi*:

patrulater oarecare	toate laturile au lungimi diferite
deltoid	cîte două perechi de laturi alăturate sînt egale
paralelogram	laturile opuse sînt egale două cîte două
romb	toate laturile sînt egale

După *poziția laturilor, se pot deosebi*:

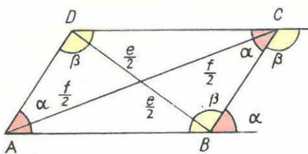
patrulater oarecare	fără laturi paralele
trapez	o pereche de laturi paralele
paralelogram	două perechi de laturi paralele

Paralelograme

Generalități. Orice *paralelogram* are două perechi de laturi opuse egale și două perechi de unghiuri interioare opuse egale. Cînd toate laturile sînt egale, paralelogramul este romb. Paralelogramele cu patru unghiuri egale sînt dreptunghiuri; fiecare unghi este un sfert din 360°, deci un unghi drept. Cînt toate unghiurile și toate laturile sînt egale, paralelogramul este un pătrat. Pătratul este un romb cu unghiurile drepte, sau un dreptunghi cu laturile egale. Un paralelogram cu unghiuri ascuțite și perechi de laturi neegale se mai numește romboid.

Cu ajutorul criteriilor de congruență pentru triunghiuri se poate demonstra pentru un paralelogram oarecare (fig. 7.5.4):

În orice paralelogram diagonalele se taie în părți egale, unghiurile alăturate unei laturi sînt suplimentare și laturile opuse egale două cîte două.



7.5.4. Paralelogram (romboid)

Simetrie. *Dreptunghiul* admite două axe de simetrie care trec prin mijloacele a două laturi; *rombul* are două axe de simetrie care trec prin cîte două vîrfuri opuse. *Pătratul* fiind atît romb cît și dreptunghi are patru axe de simetrie. În orice *paralelogram* punctul de intersecție a diagonalelor este centru de simetrie; aceasta înseamnă că paralelogramul este invariant la o rotație de 180° în jurul acestui punct.

Cele două diagonale împart paralelogramul în două perechi de triunghiuri congruente.

Diagonalele unui dreptunghi (pătrat) sînt egale. Diagonalele unui romb (pătrat) sînt perpendiculare; ele divid rombul (pătratul) în patru triunghiuri congruente.

Construcție. Deoarece fiecare diagonală împarte *paralelogramul* în două triunghiuri congruente, pentru construcția paralelogramului sînt necesare trei elemente. Pentru construcția unui patrulater oarecare sînt necesare în total cinci elemente, deoarece diagonala îl împarte în două triunghiuri necongruente dar cu o latură comună (diagonala). Pentru construcția *rombului* și a *dreptunghiului* sînt necesare două elemente iar pentru cea a pătratului un singur element. Pătratul este perfect determinat prin latură, dreptunghiul prin două laturi sau o latură și diagonală; rombul este determinat prin latură și diagonală sau latură și un unghi, sau diagonala și un unghi.

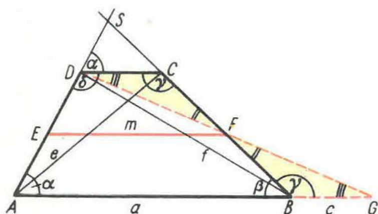
În general, construcțiile se fac prin construcția triunghiurilor componente și deci nu se deosebesc principial de construcția triunghiurilor.

Trapez

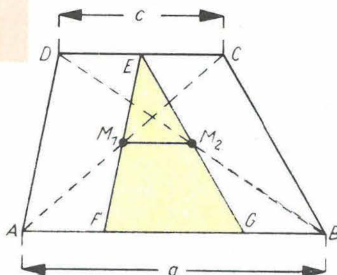
Trapezul este un patrulater convex cu cel puțin o pereche de laturi paralele. Dacă laturile neparalele sînt egale, atunci trapezul se numește *isoscel*. Dacă la un trapez ambele perechi de laturi opuse sînt paralele, atunci trapezul este un *paralelogram*. Laturile paralele ale unui trapez care nu este paralelogram se numesc *baze* iar celelalte *laturi neparalele*. Segmentul care unește mijloacele E și F ale laturilor unui trapez $ABCD$ se numește linia mijlocie a trapezului (fig. 7.5.5). Linia mijlocie EF este paralelă cu laturile $AB = a$ și $CD = c$; dacă nu ar fi așa, o paralelă la AB prin E ar tăia latura BC în F' și atunci ținînd seama de proprietățile fasciculului cu vîrful în S, $DE : EA = CF' : F'B$, pe cînd prin ipoteză $DE : EA = CF : FB = 1$. Deci trebuie ca $F' = F$ și deci și $EF \parallel AB$. Dreapta care trece prin D și F taie prelungirea lui AB în G. Triunghiurile BGF și CDF sînt congruente, adică AG are lungimea $a + c$ și din triunghiul AGD rezultă $m = \frac{1}{2}(a + c)$.

Linia mijlocie în trapez este egală cu semisuma bazelor:

$$m = \frac{a + c}{2} \quad \textit{(medie aritmetică)}$$



7.5.5. Trapez



7.5.6. Distanța dintre mijloacele diagonalelor în trapez

Linia mijlocie trece și prin *mijloacele diagonalelor*.

Distanța dintre mijloacele diagonalelor într-un trapez este egală cu semidiferența bazelor

$$m' = \frac{a - c}{2}.$$

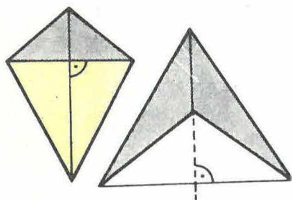
Fie bazele unui trapez $AB = a$ şi $CD = c$, M_1 şi M_2 mijloacele diagonalelor AC şi BD. Paralelele duse prin M_1 şi M_2 la laturile neparalele AD şi CB taie baza AB în F şi G respectiv (fig. 7.5.6) şi latura CD într-un punct E astfel încît $DE = \frac{c}{2} = CE$. Deoarece $DE = AF = \frac{c}{2} = CE = BG$, rezultă că $FG = a - c$. În triunghiul EFG, M_1M_2 uneşte mijlocul a două laturi şi deci este jumătate din a treia, astfel încît $M_1M_2 = m' = \frac{1}{2}(a - c)$. Privind laturile neparalelele ale unui trapez ca transversale care taie laturile paralele, rezultă că unghiurile alterne interne astfel determinate sînt suplimentare.

Într-un trapez unghiurile interioare determinate de o latură neparalelă cu bazele sînt suplimentare.

Pentru construcţia trapezului este suficientă cunoaşterea a patru elemente, pentru trapezul isoscel numai trei. În trapezul isoscel ambele diagonale sînt egale şi unghiurile interioare alăturate aceleiaşi baze sînt egale.

Deltoid

Un patrulater convex cu două perechi de laturi alăturate egale se numeşte *deltoid convex*.



7.5.7. Deltoid convex şi deltoid concav

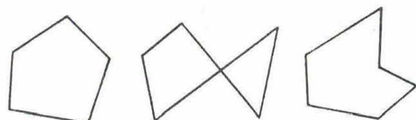
Diagonalele unui deltoid convex sînt perpendiculare, una din ele este axă de simetrie şi împarte deltoidul în două triunghiuri congruente, cealaltă îl împarte în două triunghiuri isoscele (fig.). Un deltoid cu toate laturile egale este un romb.

Un patrulater concav care are două perechi de laturi alăturate egale se numeşte *deltoid concav* (fig. 7.5.7). Diagonalele lui sînt de asemenea perpendiculare, una împarte figura în două triunghiuri congruente iar cealaltă este în exteriorul figurii şi formează cu perechea de laturi egale un triunghi isoscel. Pentru construcţia deltoizilor de orice fel este suficientă cunoaşterea a trei elemente.

7.6. Poligoane

Generalităţi

Figurile plane alcătuite din linii frînte (succesiune de segmente) închise se numesc *poligoane*; triunghiul şi patrulaterul sînt cazuri speciale de poligoane. Poligoanele sînt caracterizate în general de numărul vîrfurilor lor. Poligoanele ale căror laturi se intersectează şi în alte puncte decît în vîrfuri se numesc poligoane *încrucişate*. Dacă orice segment care uneşte două puncte ale unui poligon se găseşte în întregime în interiorul acestuia, poligonul se zice *convex* şi nu are nici un unghi mai mare decît 180°; în caz contrar poligonul este *concav* şi are unghiuri mai mari de 180° (fig. 7.6.1). Segmentele care unesc două vîrfuri vecine se numesc *laturi*; segmentele care unesc două vîrfuri nealăturate se numesc *diagonale*. Numărul laturilor este egal cu numărul vîrfurilor. Cum din fiecare vîrf al unui poligon cu n vîrfuri se pot duce $n - 3$ diagonale, rezultă că numărul diagonalelor unui poligon cu n vîrfuri este $\frac{n(n-3)}{2}$. Pentru $n = 3$ rezultă că triunghiul nu are diagonale iar pentru $n = 4$ există două diagonale. Diagonalele duse dintr-un vîrf al unui poligon cu n vîrfuri împart figura în $n - 2$ triunghiuri De aici rezultă că suma unghiurilor interioare unui poligon convex cu n laturi este $(n-2)\,180°$. Pentru $n = 3$ suma unghiurilor este $1 \cdot 180° = 180°$ iar pentru $n = 4$, $2 \cdot 180° = 360°$.



7.6.1. Diferite forme de poligoane

Poligoane convexe regulate cu n vîrfuri

Poligoanele convexe regulate cu n vîrfuri care au n laturi egale și n unghiuri interioare egale se numesc *regulate*. Fiecărui poligon convex regulat i se poate *înscrie* un cerc, astfel încît laturile sale sînt tangente la cerc. De asemenea i se poate *circumscrie* un cerc astfel încît laturile poligoanelor să fie coarde în cercul circumscris. Cum suma unghiurilor unui poligon convex oarecare cu n vîrfuri este $(n - 2) \cdot 180°$, rezultă că fiecare unghi interior al unui poligon convex regulat cu n vîrfuri este

$$\alpha = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n} = 180° - \frac{360°}{n}.$$

Razele care unesc centrul cercului circumscris M cu vîrfurile poligonului împart poligonul regulat cu n vîrfuri în n triunghiuri isoscele congruente, cu unghiul din vîrful M egal cu $\frac{360°}{n}$. Acest unghi și raza r determină complet poligonul regulat cu n vîrfuri.

Hexagonul regulat. În cazul $n = 6$ cele șase triunghiuri isoscele congruente sînt echilaterale cu latura r, deci latura hexagonului regulat înscris într-un cerc de rază r este egală cu r. Dacă se unesc vîrfurile din două în două, se obține un triunghi regulat (echilateral) cu latura $r\sqrt{3}$.

Șiruri de poligoane regulate cu n vîrfuri. Invers, fiind dat un triunghi echilateral înscris în cercul de rază r, se pot obține vîrfurile hexagonului regulat ca puncte de intersecție cu cercul ale perpendicularei, coborîte din centrul cercului pe latura triunghiului. Același procedeu, acela de a împărți arcul corespunzător unei laturi în două părți egale, permite în general obținerea poligonului regulat cu $2n$ laturi din poligonul regulat cu n laturi. Pornind de la triunghiul echilateral pot fi construite poligoanele regulate cu 6, 12, 24, ..., $3 \cdot 2^n$ vîrfuri.

7.6.2. a) Hexagon regulat. b) Triunghi regulat. c) Patrulater regulat

7.6.3. Decagon regulat

Patrulaterul regulat. Patrulaterul convex regulat este pătratul. Vîrfurile sale se obțin ca puncte de intersecție a două diametre perpendiculare cu cercul (fig. 7.6.2). Prin împărțirea coardei se pot obține în continuare poligoanele convexe cu 8, 16, ..., 2^n vîrfuri.

Decagonul regulat. Dacă se unesc două vîrfuri vecine P și Q ale unui decagon regulat cu centrul M al cercului circumscris, atunci triunghiul PQM este isoscel și unghiul α din M are 36°, iar fiecare unghi de la bază, $\beta = \frac{1}{2}(180° - 36°) = 72°$. Bisectoarea QR a unghiului PQM determină două triunghiuri isoscele, PQR și QMR. În acestea $PQ = QR = RM = s_{10}$ este latura decagonului regulat înscris (fig. 7.6.3) și $RP = r - s_{10}$. Triunghiurile PQR și QMP

au unghiuri egale, deci sînt asemenea; de aici rezultă $r : s_{10} = s_{10} : (r - s_{10})$. Soluția ecuației de gradul doi $s_{10}^2 + rs_{10} = r^2$ este $s_{10} = \frac{r}{2}\sqrt{5} - \frac{r}{2}$.

Latura decagonului este cel mai mare segment al razei r împărțite conform secțiunii de aur.

Pentru construcția decagonului se duce pe diametrul AB al cercului cu centrul în M și raza r o perpendiculară $\overline{MD}$. Fie H mijlocul razei AM. Lungimea segmentului $\overline{HD}$ se obține cu ajutorul teoremei lui Pitagora $(\overline{HD})^2 = (\overline{HM})^2 + (\overline{MD})^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + r^2 = \frac{5r^2}{4}$; $\overline{HD} = \frac{r}{2}\sqrt{5}$. Arcul de cerc cu centrul în H și raza HD taie raza MB în E și $\overline{ME} = \overline{HE} - \overline{HM} = \frac{r}{2}\sqrt{5} - \frac{r}{2}$, adică s_{10}. Considerîndu-se elementele decagonului regulat înscris în cerc, se pot determina și pentagonul regulat și tot șirul de poligoane regulate cu 5, 10, 20, ..., $5 \cdot 2^n$ vîrfuri.

Poligonul regulat cu 17 laturi. Construcția poligoanelor convexe regulate introduse mai sus (cu 3, 4, 5 vîrfuri și cele derivate din acestea) cît și a poligonului regulat cu 15 laturi, al cărui unghi la centru este de $\left(\frac{60}{4}\right)^\circ + \left(\frac{72}{8}\right)^\circ = 15^\circ + 9^\circ = 24^\circ$ era cunoscută matematicienilor din Grecia antică. Abia în 1796 Carl Friedrich Gauss (1777—1859) în vîrstă de 19 ani a reușit să demonstreze că și construcția poligonului regulat cu 17 laturi este posibilă. Gauss a scris în prima sa lucrare științifică publicată (1. VI. 1796):

„Orice începător în geometrie știe că diferite poligoane regulate ca triunghiul, pentagonul, poligonul regulat cu 15 laturi și cele care se obțin din acestea prin dublarea repetată a numărului laturilor pot fi construite geometric. La acest punct se ajunsese încă în timpul lui Euclid și se pare că s-a ajuns la concluzia că domeniul geometriei elementare nu mai poate fi extins; cel puțin eu nu cunosc încercări reușite în această direcție. Cu atît mai mult înclin să cred, că și descoperirea mea merită atenție, că în afară de aceste cîteva poligoane regulate, există încă o întreagă mulțime de poligoane regulate care admit o construcție geometrică. Această descoperire este de fapt doar un corolar al unei teorii de mari proporții, care nu este încă terminată și care va fi dată publicității de îndată ce va fi complet gata. — C. F. Gauss din Braunschweig, student în matematici la Göttingen".

Teoria despre care vorbește Gauss este rezolvarea ecuației binome $x^n - 1 = 0$ (n număr natural). Cele n rădăcini ale unității, soluțiile acestei ecuații, se găsesc în planul lui Gauss la distanțe egale pe cercul unitate cu centrul în punctul de intersecție a axei imaginare cu axa reală. Gauss a arătat că împărțirea cercului poate fi întotdeauna făcută dacă în $x^n - 1 = 0$ exponentul n este un număr prim de forma $2^{2^k} + 1$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Rezultă pentru $k = 0$, $2^{2^0} + 1 = 3$, pentru $k = 1$, $2^{2^1} + 1 = 5$, pentru $k = 2$, $2^{2^2} + 1 = 17$.

Deoarece Gauss a făcut cu descoperirea sa mare vîlvă, care s-a întins de-a lungul a două secole, în memoria acestei importante descoperiri, pe piatra sa funerară este desenat un poligon regulat cu 17 laturi. O reprezentare efectivă pentru $\cos\varphi$ cu $\varphi = \frac{360^\circ}{17}$ a fost comunicată de Gauss elevului său Gerling, sub o formă care conține numai numere raționale și rădăcini pătrate:

$$\cos\varphi = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} +$$

$$+ \frac{1}{8}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}.$$

Privire de ansamblu asupra poligoanelor convexe regulate (r = raza cercului circumscris)

n	Unghiul la centru	Latura	Perimetrul	Aria
3	120°	$r\sqrt{3}$	$2r \cdot 2{,}59807621\ldots$	$\frac{3}{4}r^2\sqrt{3} \approx 1{,}2990\,r^2$
4	90°	$r\sqrt{2}$	$2r \cdot 2{,}82842712\ldots$	$2r^2$
5	72°	$\frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$	$2r \cdot 2{,}93892626\ldots$	$\frac{5}{8}r^2\sqrt{10+2\sqrt{5}} \approx 2{,}3776\,r^2$
6	60°	r	$2r \cdot 3$	$\frac{3}{2}r^2\sqrt{3} \approx 2{,}5981\,r^2$
8	45°	$r\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$2r \cdot 3{,}06146746\ldots$	$2r^2\sqrt{2} \approx 2{,}8284\,r^2$
10	36°	$\frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$	$2r \cdot 3{,}09016923\ldots$	$\frac{5}{4}r^2\sqrt{10-2\sqrt{5}} \approx 2{,}9389\,r^2$
12	30°	$r\sqrt{2-\sqrt{3}}$	$2r \cdot 3{,}10582854\ldots$	$3r^2$
15	24°	$\frac{r}{2}\sqrt{7-\sqrt{5}-\sqrt{30-6\sqrt{5}}}$	$2r \cdot 3{,}11867536\ldots$	$\frac{15}{8}r^2\sqrt{7+\sqrt{5}-\sqrt{30+6\sqrt{5}}} \approx$ $\approx 3{,}0505\,r^2$
16	22°30′	$r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$	$2r \cdot 3{,}12144515\ldots$	$4r^2\sqrt{2-\sqrt{2}} \approx 3{,}0615\,r^2$
17	$21°10'35\frac{5}{17}''$	$\approx 0{,}36749904\,r$	$2r \cdot 3{,}12374180\ldots$	$\approx 3{,}0706r^2$
20	18°	$r\sqrt{2-\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}}$	$2r \cdot 3{,}12868930\ldots$	$\frac{5}{2}r^2\sqrt{6-2\sqrt{5}} \approx 3{,}0902\,r^2$
24	15°	$r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$	$2r \cdot 3{,}13262862\ldots$	$6r^2\sqrt{2-\sqrt{3}} \approx 3{,}1058\,r^2$
		$s_{2n} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - s_n^2}}$		

7.7. Calculul ariilor figurilor mărginite de drepte

Măsurarea ariilor

Unitatea de măsură pentru suprafețe (arii) este *metrul pătrat*, notat m². El este definit ca aria unui pătrat de latură 1 m.

Multiplii și submultiplii metrului pătrat:

Kilometrul pătrat	$1\ \text{km}^2 = 10^6\ \text{m}^2$
Hectarul	$1\ \text{ha} = 100\ \text{a} = 10^4\ \text{m}^2$
Arul	$1\ \text{a} = 100\ \text{m}^2 = 10^2\ \text{m}^2$
Decimetrul pătrat........	$1\ \text{dm}^2 = 10^{-2}\ \text{m}^2$
Centimetrul pătrat	$1\ \text{cm}^2 = 10^{-4}\ \text{m}^2$
Milimetrul pătrat	$1\ \text{mm}^2 = 10^{-6}\ \text{m}^2$

În țările anglo-saxone unitățile de măsură pentru arii derivă din yardul pătrat (sq. yd),

1 sq. yd $\approx$ 0,8361 m² sau 1 m² $\approx$ 1,196 sq. yd.

De aici se obține:

1 milă pătrată $\approx$ 2,59 km² sau 1 km² $\approx$ 0,3861 mi²

1 picior pătrat $\approx$ 929 cm² $\approx$ 0,0929 m² sau 1 m² $\approx$ 10,76 ft²,

1 inch pătrat $\approx$ 6,452 cm² sau 1 cm² $\approx$ 0,155 in².

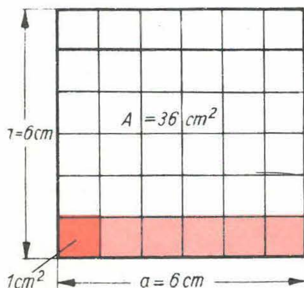
Unitatea de măsură pentru arii care se folosește cel mai des este acrul

1 acru = 4840 yd² ≈ 3377,844 m².

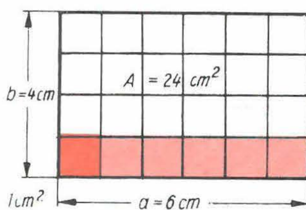
Calculul ariilor figurilor simple

Pătratul. Un pătrat de latură a se împarte în pătrate de latură egală cu unitatea (fig. 7.7.1). Rezultă astfel a benzi fiecare cu cîte a pătrate, în total $a \cdot a = a^2$ pătrate unitate.

Aria unui pătrat cu latura a	$A = a^2$



7.7.1. Aria unui pătrat



7.7.2. Aria unui dreptunghi

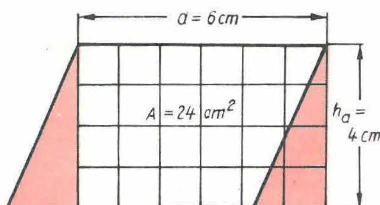
Dreptunghiul. Un dreptunghi cu laturile a și b se poate descompune în a benzi cu cîte b pătrate unitate (fig. 7.7.2). Aria va avea deci $a \cdot b$ pătrate unitate.

Aria unui dreptunghi cu laturile a și b	$A = a \cdot b$

În ambele cazuri s-a presupus că există pătrate unitate ale căror laturi pot fi comparate cu laturile pătratului, respectiv dreptunghiului dat.

Formulele date sînt valabile și atunci cînd lungimile laturilor sînt numere reale oarecare. Dacă a și b sînt multipli raționali $a = \frac{p_1}{q_1} e$, $b = \frac{p_2}{q_2} e$ ai lui e, e fiind latura pătratului unitate a dreptunghiului, atunci întreaga suprafață poate fi acoperită cu pătrate de latură e' cu $e = (q_1, q_2)e'$ iar (q_1, q_2) este cel mai mic multiplu comun al numerelor q_1 și q_2. În cap. 3 s-a arătat însă că orice număr real poate fi aproximat oricît de bine cu numere raționale. Calculul ariei unei suprafețe plane, despre a cărei frontieră se presupune numai că este definită de o funcție continuă, este posibil cu ajutorul calculului integral.

Paralelogramul. În general un paralelogram (romboid) se poate transforma într-un dreptunghi cu aceeași arie (fig. 7.7.2). Se numește înălțime a dreptunghiului perpendiculara coborîtă dintr-un vîrf pe latura opusă. În felul acesta aria paralelogramului apare ca produsul dintre lungimea unei laturi și înălțimea coborîtă pe această latură, $A = ah_a = bh_b$ (fig. 7.7.3).



Paralelogram	$A = a \cdot h_a = b \cdot h_b$

Aria paralelogramului este egală cu produsul unei baze cu înălțimea corespunzătoare acelei baze

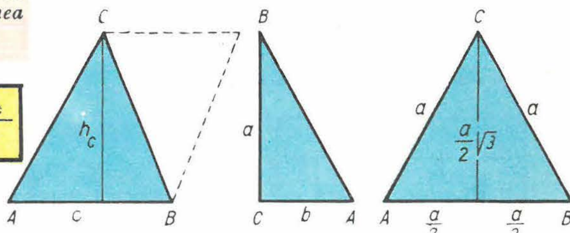
7.7.3. Aria unui paralelogram

Triunghiul. Aria triunghiului poate fi privită ca jumătatea ariei unui paralelogram (fig. 7.7.4). De aici se obține pentru aria triunghiului formula $A = \frac{1}{2} ch_c$. Într-un triunghi dreptunghic înălțimea corespunzătoare unei catete este cealaltă catetă. Dacă a și b sînt catetele, atunci

aria se obține din formula $A = \frac{1}{2} a \cdot b$. Pentru triunghiul echilateral $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ (demonstrația cu ajutorul teoremei lui Pitagora); se obține astfel $A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Aria unui triunghi este egală cu semiprodusul dintre o latură și înălțimea corespunzătoare ei

Triunghi	$A = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$



7.7.4. Aria unui triunghi

Cînd se cunosc unghiurile, se folosesc procedee trigonometrice pentru calculul ariilor (v. cap. Trigonometrie plană). Cînd se cunosc toate laturile unui triunghi, aria acestuia se poate calcula după formula lui HERON (matematician din Alexandria; 130 e.n.). $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, unde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

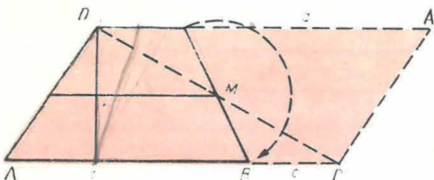
Probabil că formula lui Heron era cunoscută încă din timpul lui ARHIMEDE.

Prin *triunghiul lui Heron* se înțelege un triunghi care are lungimile laturilor și aria exprimate prin numere raționale. De exemplu pentru $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$ se obține $A = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{4^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2} = 84$ unități de arie (vezi cap. Trigonometrie plană).

În sfîrșit aria unui triunghi se mai poate obține și cu ajutorul razei cercului înscris, respectiv circumscris:

$$A = \frac{a \cdot b \cdot c}{4r} \text{ și } A = \frac{a \cdot \rho}{2} + \frac{b \cdot \rho}{2} + \frac{c \cdot \rho}{2} = \frac{\rho}{2}(a+b+c) = \rho s.$$

Trapezul. Pentru a calcula aria unui trapez $ABCD$ se face o simetrie centrală în raport cu mijlocul uneia din laturile neparalele ceea ce revine la o rotație de 180° în plan, în jurul acestui punct (fig. 7.7.5). Rezultă un paralelogram $AD'A'D$ a cărui arie este dublul ariei trapezului. El are o latură $a + c$ iar înălțimea este înălțimea trapezului. Aria trapezului va fi deci jumătate din aria acestui paralelogram, deci $A = \frac{1}{2}(a+c)h$. Cum linia mijlocie în trapez are lungimea $m = \frac{a+c}{2}$, aria trapezului se mai exprimă prin $A = mh$.



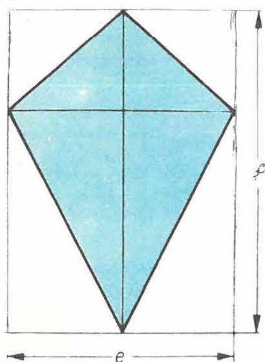
7.7.5. Aria unui trapez

Trapez	$A = mh = \frac{a+c}{2} \cdot h$

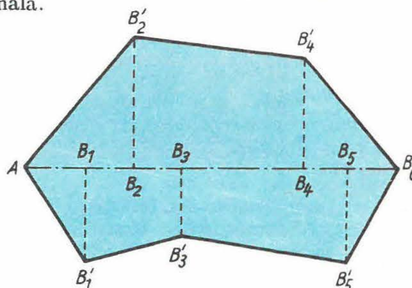
Aria unui trapez este egală cu produsul dintre linia mijlocie și înălțime.

Dacă într-un trapez $c = a$, atunci acesta este un paralelogram, formula $A = \frac{a+a}{2}h$ se transformă într-o formulă care dă aria paralelogramului $A = a \cdot h$. Dacă într-un trapez $c = 0$, atunci acesta devine triunghi și $A = \frac{(a+0)}{2}h$ se transformă în formula ariei unui triunghi $A = \frac{1}{2} a \cdot h$.

Deltoidul convex. Deltoidul convex este împărțit de diagonalele lui, e și f în patru triunghiuri dreptunghice (fig. 7.7.6). De aici rezultă formula ariei $A = \frac{e \cdot f}{2}$ în funcție de lungimile diagonalelor. Această formulă este valabilă și pentru romburi care sînt cazuri particulare de deltoizi convecși iar pentru pătrat devine $A = \frac{1}{2} d^2$, d fiind diagonală.



7.7.6. Aria unui deltoid convex



7.7.7. Aria unui poligon oarecare

Aria unui deltoid convex este egală cu semiprodusul diagonalelcr.

Deltoid convex	$A = \frac{1}{2} e \cdot f$

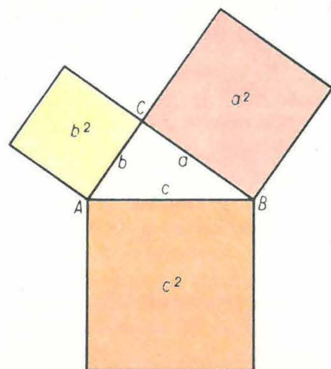
Poligoane oarecare. Pentru a determina aria unui poligon oarecare nu există formule speciale; fac excepție poligoanele convexe regulate. În general, se descompune figura în părți, în special triunghiuri și trapeze; uneori se completează figura cu părți a căror arie se cunoaște. Cum descompunerea nu este unică, poate fi aleasă cea mai convenabilă. În practică, hotărîtoare pentru descompunerea figurii este nu simplitatea calculelor ci posibilitatea măsurării exacte a dimensiunilor. În fig. 7.7.7 se poate vedea descompunerea unui poligon neregulat care conține numai triunghiuri și trapeze.

Triunghiul dreptunghic

Teorema lui Pitagora. Datorită importanței pe care o are pentru calcule și demonstrații, aceasta este cea mai cunoscută teoremă din geometria plană. Descoperirea ei este atribuită lui PITHAGORA din Samos (580–496 î.e.n.). Amănunte istorice privind viața lui sînt foarte puțin cunoscute. Există însă multe legende și povești privind activitatea lui iar teorema face chiar obiectul unor poezii: CHAMISSO de exemplu i-a dedicat un sonet.

Teorema lui Pitagora. Într-un triunghi dreptunghic pătratul ipotenuzei este egal cu suma pătratelor catetelor (fig. 7.7.8).

Teorema lui Pitagora	$a^2 + b^2 = c^2$	c — ipotenuză; a, b — catete

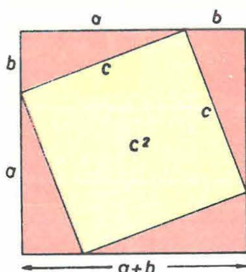


$a^2 + b^2 = c^2$

7.7.8. Teorema lui Pitagora

Pentru această teoremă se cunosc mai mult decît 100 de demonstrații; una din cele mai scurte este următoarea (fig. 7.7.9) care folosește descompunerea unui pătrat.

Din figura 7.7.9 se poate vedea direct că întreaga suprafață a pătratului este $(a + b)^2$ din care aria figurii



7.7.9. Demonstrația teoremei lui Pitagora folosind descompunerea pătratului

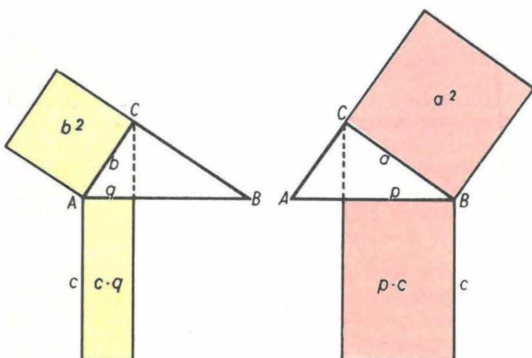
galbene este c^2 iar cele patru triunghiuri roșii au aria $4 \cdot \frac{ab}{2} = 2ab$, de unde $(a + b)^2 = c^2 + 2ab$ sau $a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$ și deci $a^2 + b^2 = c^2$.

Teorema lui Euclid. Demonstrația clasică a teoremei lui Pitagora folosește *teorema lui Euclid*. Aceasta se enunță astfel (fig. 7.7.10):

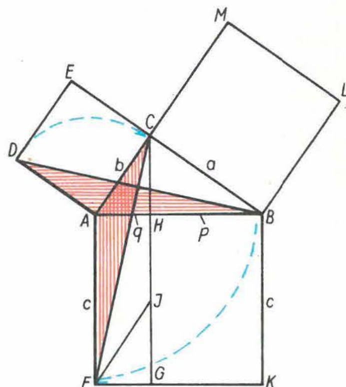
Într-un triunghi dreptunghic pătratul unei catete este egal cu aria dreptunghiului avînd ca laturi proiecția acestei catete pe ipotenuză și ipotenuza însăși.

$a^2 = pc$
$b^2 = qc$

Din fig. 7.7.10 se poate vedea că pătratul $ACED$ construit pe cateta $AC = b$ are aria egală cu dublul ariei triunghiului ABD; pătratul și triunghiul au aceeași bază AD și aceeași înățime AC. Cum ambele triunghiuri ABD și ACF sînt congruente (prin rotație se suprapun, respectiv au două laturi și unghiul dintre ele egale fiindcă $AF = AB$ prin construcție), rezultă că și pătratul $ACED$ și paralelogramul $ACIF$ au aceeași arie. În sfîrșit, paralelogramul $ACIF$ are aceeași arie cu



7.7.10. Teorema lui Euclid



7.7.11. Demonstrația teoremelor lui Euclid și Pitagora

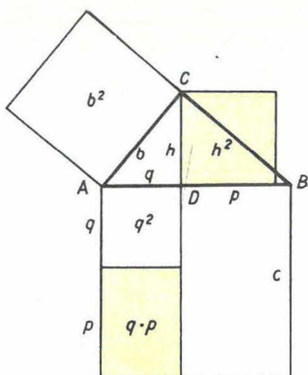
dreptunghiul $AFGH$ avînd aceeași bază AF și înălțimea comună AH. În mod analog se demonstrează că pătratul $BCML$ și dreptunghiul $BKGH$ sînt echivalente (fig. 7.7.11). De aici, rezultă $b^2 = cq$ și $a^2 = cp$. Aplicarea teoremei lui Euclid ambelor catete conduce la teorema lui Pitagora $a^2 + b^2 = cp + cq = c(p + q) = c \cdot c = c^2$.

Printre multiplele aplicații ale teoremei lui Pitagora se numără calculul unghiurilor în poligoane regulate, distanța a două puncte în geometria analitică, calculul înălțimii în triunghiul isoscel sau a înălțimii tetraedrului.

Teorema înălțimii. Pe lîngă teoremele lui Pitagora și Euclid și teorema înălțimii exprimă relații interesante între diferite arii legate de triunghiul dreptunghic. Ea se enunță astfel:

Într-un triunghi dreptunghic pătratul înălțimii relative la ipotenuză este egal cu aria dreptunghiului avînd ca laturi segmentele determinate de înălțime pe ipotenuză.

Teorema înălțimii	$h^2 = pq$



7.7.12. Teorema înălțimii

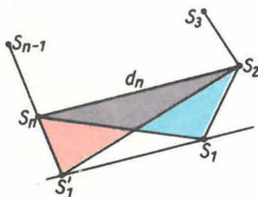
Înălțimea $h = CD$ (fig. 7.7.12) împarte triunghiul dreptunghic ABC în două triunghiuri asemenea $\Delta ADC \sim \Delta CDB$ și deci

$$q : h = h : p \text{ sau } h^2 = pq.$$

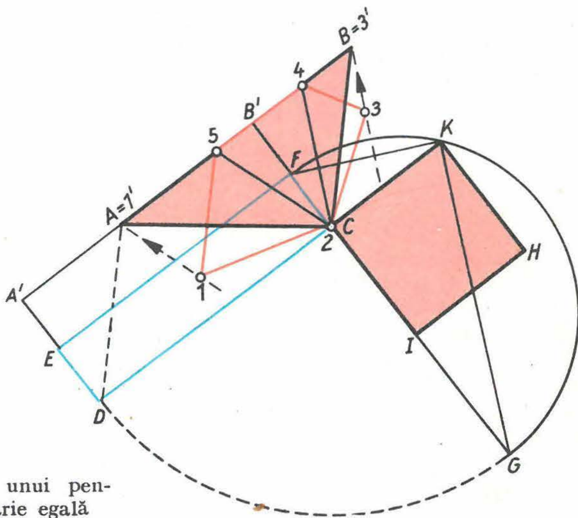
Transformarea suprafețelor

Orice poligon convex poate fi transformat într-un pătrat de arie egală. Deoarece triunghiurile cu aceeași bază și aceeași înălțime au arii egale, rezultă că vîrful S_1 al poligonului poate fi deplasat paralel cu diagonala $d_n = |S_nS_2|$ într-un punct S_1' pe dreapta $S_{n-1}S_n$. Aria triunghiului $\Delta S_nS_1S_2$ este egală cu aceea a triunghiului $\Delta S_nS_1'S_2$ astfel încît poligonul s-a transformat într-un poligon cu $n-1$ vîrfuri de arie egală (fig. 7.7.13, a).

Procesul poate fi continuat pînă se obține un triunghi ABC (fig.) de arie egală cu cea a poligonului inițial. Înălțimea triunghiului este $h_D = |B'C|$. Dreptunghiul $CDEF$ cu lățimea $|FC| = h_D/2$ și $|CD| = |AB|$ are aria egală cu cea a triunghiului (fig. 7.7.13, b). Dacă se iau $|FC| = p$ și $|EF| = q$ ca segmentele determinate de înălțime pe ipotenuza unui triunghi dreptunghic FGK, atunci pătratul $CIHK$ are aria $h^2 = p \cdot q$ egală cu aria poligonului inițial.



7.7.13, a. Transformarea unui poligon cu n laturi într-un poligon cu $n-1$ laturi avînd aceeași arie



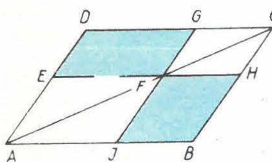
7.7.13, b. Transformarea unui pentagon într-un pătrat cu arie egală

Pentru a găsi triunghiul FGK se construiește $|CG| = |CD|$ pe dreapta determinată de F și C și se construiește *cercul lui Thales* pe diametrul $|FG|$.

După teorema lui Euclid și teorema înălțimii, un dreptunghi se poate transforma într-un paralelogram sau într-un pătrat și reciproc. În figură se arată modalitatea și etapele de transformare a unui triunghi într-un pătrat. Triunghiul ABC se transformă în paralelogramul de arie dublă $ABCD$, în care latura AC este diagonală și cu ajutorul celorlalte laturi, ținînd seamă de cazul de congruență (L, L, L) s-a construit triunghiul ACD. În acest paralelogram se trasează înălțimea CB' care este latură a dreptunghiului $A'B'CD$ echivalent cu paralelogramul $ABCD$. Se înjumătățește dreptunghiul $A'B'CD$ unind punctele E și F, mijloacele laturilor $A'D$ și $B'C$. Dreptunghiurile $A'B'FE$, respectiv $EFCD$ au aceeași arie ca triunghiul inițial ABC. Cu ajutorul teoremei înălțimii se transformă dreptunghiul $EFCD$ în pătrat: FC se prelungește după C cu DC iar pe FG ca diametru se construiește un semicerc (teorema

lui Thales). Perpendiculara în C pe FG se intersectează cu acest cerc. Segmentul CK este înălţimea triunghiului dreptunghic FGK şi deci este egal cu latura pătratului căutat $CKHI$, care este echivalent cu triunghiul ABC.

Pentru alte transformări este foarte importantă teorema privind paralelogramele complementare. Şi această teoremă este conţinută în *cartea întîi a elementelor lui* EUCLID.



7.7.14. Teorema paralelogramelor complementare

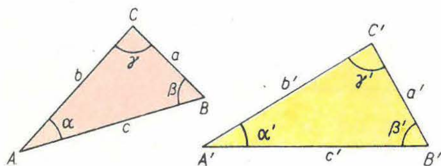
Dacă printr-un punct oareoare al diagonalei unui paralelogram se duc paralele la laturile acestuia, atunci dintre cele patru paralelograme formate sînt de aiie egală acelea care nu sînt tăiate de diagonală. Ele poartă numele de paralelograme complementare.

Demonstraţia se face astfel (fig. 7.7.14). Diagonala AC împarte paralelogramul $ABCD$ în două triunghiuri egale ABC şi ACD. Cum $IG \parallel AD$ şi $AB \parallel EH$, rezultă că $\overline{AI} = \overline{EF}$ şi $\overline{IF} = \overline{AE}$. De aici rezultă congruenţa triunghiurilor AIF şi AEF şi a triunghiurilor FHC şi FCG. Dacă se scad aceste triunghiuri congruente din triunghiurile congruente ABC şi ACD, se obţine congruenţa paralelogramelor complementare.

7.8. Asemănarea

Noţiunea de asemănare

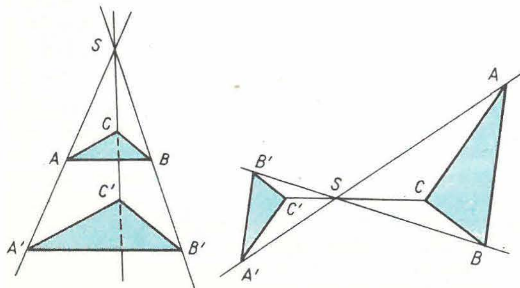
Factor de asemănare. Prin asemănare se înţelege o corespondenţă între figurile geometrice care păstrează forma, nu însă şi mărimea figurilor (fig. 7.8.1). Figurile asemenea pot fi transformate una în alta prin transformări geometrice astfel încît fiecărui punct al primei figuri să-i corespundă un punct al celei de-a doua figuri, iar fiecărui unghi din prima figură să-i corespundă un unghi egal în a doua figură.



7.8.1. Triunghiuri asemenea

În figuri asemenea segmentele corespunzătoare sînt proporţionale.

Dacă, de exemplu, triunghiul ABC se aplică pe triunghiul $A'B'C'$ astfel încît $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ atunci cele două triunghiuri sînt asemenea. Acest lucru se notează prin: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. Pe lîngă egalitatea unghiurilor, laturile verifică şi următoarele relaţii $a : a' = b : b' = c : c' = k$. Constanta k, care este aceeaşi pentru relaţiile dintre toate segmentele corespondente ale figurilor asemenea, se numeşte factor de asemănare. Pentru $k > 1$ relaţia de asemănare este o mărire la scară a figurilor. Pentru $k = 1$ se obţine, ca un caz particular al asemănării, congruenţa (egalitatea): figura iniţială şi imaginea ei sînt congruente. Pentru $0 < k < 1$ se obţine o micşorare la scară a figurii iniţiale.



7.8.2. Figuri asemenea

Poziţia de asemănare. Prin tranformările de congruenţă (translaţia, rotaţia şi simetria) două figuri asemenea oarecare pot fi aduse într-o anumită poziţie, numită *pcziţie de asemănare.*

La figurile în poziţie de asemănare laturile analoage (corespunzătoare) sînt paralele; corespondenţa realizată prin asemănare se poate realiza printr-un fascicul de drepte.

Punctul S prin care trec toate dreptele fasciculului se numeşte *centru de asemănare* al unei asemănări pentru figuri în poziţie de asemănare (fig. 7.8.2).

Din relațiile dintre laturi, care definesc asemănarea triunghiurilor, rezultă prin schimbarea mezilor și alte proporții: $a : b = a' : b'$; $a : c = a' : c'$; $b : c = b' : c'$. În același mod se pot scrie pentru figuri asemenea oarecare proporțiile cu mai multe rapoarte: $a : b : c : ... : n = a' : b' : c' : ... : n'$. De aici rezultă că în figuri asemenea raportul a două segmente omoloage este constant.

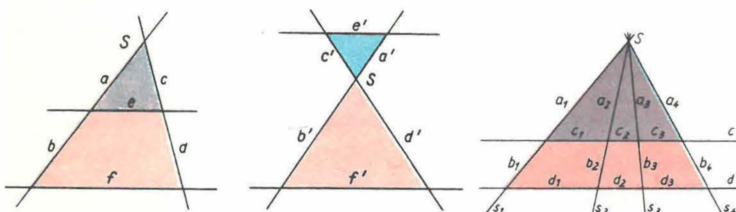
Fascicule de drepte

Din definiția asemănării rezultă următoarele proprietăți ale fasciculelor de drepte:

a) **Cînd dreptele unui fascicul sînt tăiate de paralele, atunci rapoartele dintre segmentele determinate de două paralele pe două drepte din fascicul sînt egale;**

b) **Rapoartele dintre segmentele determinate de două drepte ale fasciculului pe două drepte paralele cît și rapoartele dintre segmentele determinate de vîrf și intersecțiile cu cele două drepte sînt egale.**

c) **Rapoartele dintre segmentele determinate pe două drepte paralele de trei sau mai multe drepte din fascicul sînt egale.**



7.8.3. Proprietăți ale fasciculelor de drepte

Cu notațiile din fig. 7.8.3, proprietățile enunțate se pot scrie astfel:

a) $a : (b - a) = c : (d - c)$, $a : b = c$, $a' : (b' + a') = c' : (d' + c')$, $a' : b' = c' : d'$;

b) $e : (e + f) = a : (a + b) = c : (c + d)$, $e' : f' = a' : b' = c' : d'$;

c) $c_1 : d_1 = c_2 : d_2 = c_3 : d_3$.

După cum vîrful fasciculului se găsește de aceeași parte sau între cele două paralele, proprietățile enunțate fac obiectul primei sau celei de a doua teoreme privind fasciculele.

Teorema fasciculelor are la bază comparabilitatea segmentelor și deci posibilitatea de a măsura ambele segmente cu aceeași unitate de măsură. Din punct de vedere istoric, o problemă înrudită, cea a *comensurabilității*, a jucat un rol important. Ea a prezentat mari dificultăți atît timp cît nu s-au folosit numere reale ci numai numere raționale.

Teoremele privind fasciculele au multe aplicații la demonstrații, construcții și calcule. Măsurările cu *pana* se bazează pe aceste teoreme. După fig. 7.8.4, în primul caz

$x : 1 = 5{,}2 : 10$ sau $x = 0{,}52$ cm;

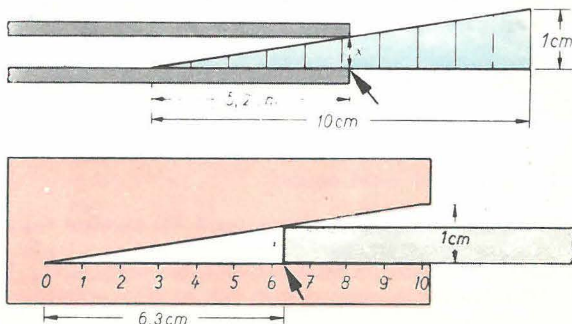
în al doilea caz

$x : 1 = 6{,}3 : 10$ sau $x = 0{,}63$ cm.

De asemenea lățimea unui rîu și înălțimea unui pom pot fi determinate cu ajutorul teoremelor privind fasciculele (fig. 7.8.5).

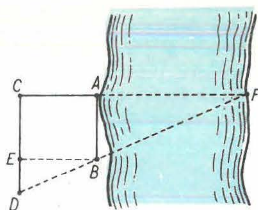
Criterii de asemănare

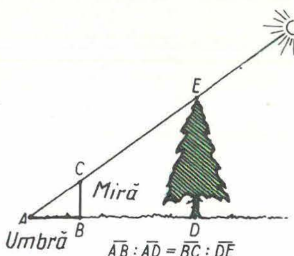
În definiția asemănării se cere sau egalitatea tuturor unghiurilor sau egalitatea tuturor rapoartelor dintre segmentele analoage. Pentru



7.8.4. Măsurarea cu pana

7.8.5. Determinarea lățimii și înălțimii cu ajutorul teoremelor privind fasciculele





asemănarea triunghiurilor este suficientă însă numai egalitatea unor unghiuri și a unor rapoarte, egalitatea celorlalte rezultînd ca o consecință din acestea.

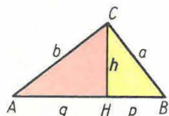
Cele patru criterii de asemănare pentru triunghiuri sînt următoarele:

Două triunghiuri sînt asemenea dacă au egale:
1. **două rapoarte de laturi;**
2. **raportul a două laturi și unghiurile dintre ele;**
3. **raportul a două laturi și unghiurile opuse laturii celei mai mari;**
4. **două unghiuri interioare.**

Cum în cazurile de asemănare intervin numai rapoartele laturilor și nu ca în cazurile de congruență lungimile acestora, criteriile de asemănare conțin cu un element mai puțin decît criteriile corespunzătoare de congruență.

Criteriile de asemănare au multe aplicații, în special la demonstrarea altor teoreme din geometrie, de exemplu la demonstrarea proprietății medianelor într-un triunghi de a se tăia în raportul 2 : 1.

Într-un triunghi dreptunghic, triunghiurile determinate de înălțimea coborîtă pe ipotenuză sînt asemenea cu triunghiul dat.



7.8.6. Relații în triunghiul dreptunghic

Pe figură, înălțimea $\overline{CH}$ împarte triunghiul ABC în triunghiurile AHC și BHC; ΔAHC ca și ΔABC au cîte un unghi drept, unghiul CAH este comun ambelor triunghiuri și deci, după criteriul patru, cele două triunghiuri sînt asemenea.

La fel se arată că $\Delta BCH \sim \Delta ABC$ și deci rezultă că $\Delta AHC \sim \sim \Delta BHC$ (fig. 7.8.6).

Într-un triunghi dreptunghic o catetă este medie geometrică între ipotenuză și proiecția ei pe ipotenuză.

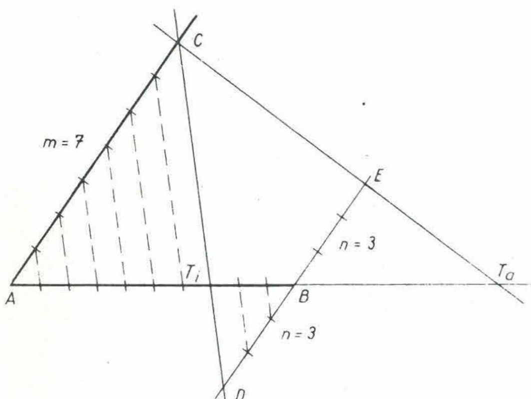
Din $\Delta AHC \sim \Delta ABC$ rezultă $\overline{AH} : \overline{AC} = \overline{AC} : \overline{AB}$ și din $\Delta BHC \sim \Delta ABC$ rezultă $\overline{BH} : \overline{BC} = \overline{BC} : \overline{AB}$, relații care se mai pot scrie $q : b = b : c$, respectiv $p : a = a : c$ de unde $b^2 = qc$ și $a^2 = pc$. Se poate observa echivalența acestei proprietăți cu teorema lui Euclid. Din $AH : CH = CH : HB$, respectiv $q : h = h : p$ rezultă $h^2 = pq$. Se recunoaște astfel teorema înălțimii care se mai poate formula și astfel:

Într-un triunghi dreptunghic, înălțimea pe ipotenuză este medie gecmetrică între cele două segmente determinate de ea pe ipotenuză.

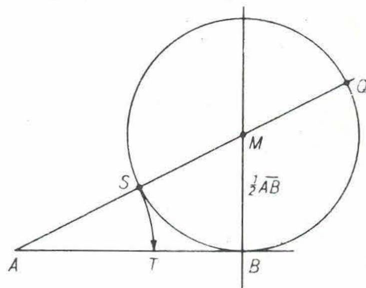
Împărțirea unui segment

Împărțirea interioară și exterioară. Cu ajutorul teoriei asemănării este posibilă împărțirea unui segment dat în orice *raport rațional* $\lambda = m/n$. Se presupune că $\lambda > 0$ cînd punctul de diviziune T se găsește între extremitățile segmentului; în acest caz diviziunea este interioară. $\lambda < 0$ cînd punctul de diviziune este în afara segmentului, în care caz este vorba de o *diviziune* exterioară. Fie $\lambda = \frac{\overline{AT}}{\overline{TB}} = m/n$, unde A și B sînt extremitățile segmentului. Con-

strucţia se face cu ajutorul teoremelor privind fasciculele de drepte. Pe figură, λ a fost ales astfel încît $|\lambda_{int}| = |\lambda_{ext}| = 7 : 3$. Se duc prin A şi B drepte paralele şi se trasează $\overline{AC} = 7$ şi $\overline{BD} = \overline{BE} = 3$ unităţi de lungime (diviziuni oarecare). Atunci punctul T_i, intersecţia segmentului AB cu dreapta CD şi punctul T_e intersecţia segmentului AB cu dreapta CE sînt puncte de diviziune interioară, respectiv exterioară, a segmentului AB în raportul 7:3. Construcţia rămîne neschimbată cînd m şi n sînt segmente oarecare chiar incomensurabile. Raportul de diviziune poate fi deci orice număr real. Cele două extremităţi ale segmentului împreună cu punctul interior şi punctul exterior care îl împart în acelaşi raport, formează o diviziune armonică (fig. 7.8.7).



7.8.7. Împărţirea unui segment



7.8.8. Secţiunea de aur a unui segment $|BM| = \frac{1}{2}|AB|$

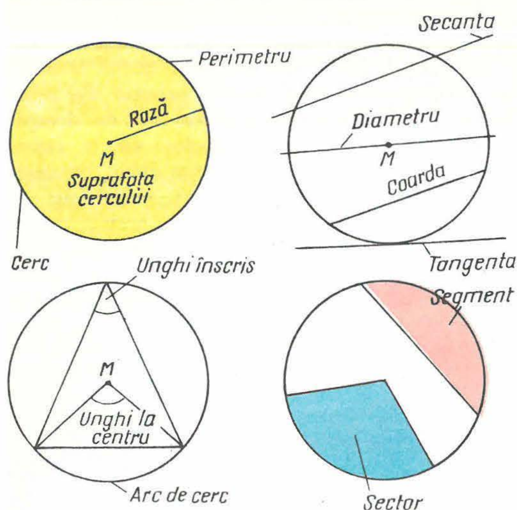
Pentru împărţirea segmentului în $m + n$ părţi egale se poate folosi aceeaşi construcţie deci şi aici se folosesc teoremele referitoare la fasciculele de drepte.

Secţiunea de aur. Un segment AB se poate împărţi totdeauna astfel încît partea cea mai mare AT să fie medie proporţională între partea cea mai mică şi întregul segment, adică $AB : AT = AT : TB$. În figură este reprezentată construcţia punctului T. Din teorema tangentei (puterii punctului) se obţine $AB^2 = AS \cdot AQ$ sau $AB : AQ = AS : AB$. Deoarece $AS = AT$ şi $AB = SQ$, se obţine prin scădere membru cu membru $AB : (AQ - SQ) = AS : (AB - AT)$ sau $AB : AT = AT : TB$. Se obţine astfel împărţirea unui segment în raport proporţional. Această diviziune este cunoscută şi sub numele de *secţiunea de aur*. Din punct de vedere istoric, secţiunea de aur a jucat un mare rol în artă. Mult timp se considera ca un criteriu al frumuseţii ideale a figurilor (inclusiv a corpului omenesc), satisfacerea de către unele dimensiuni ale acestora a raportului secţiunii de aur (fig. 7.8.8).

7.9. Cercul

Definiţii şi notaţii

Cercul este locul geometric al tuturor punctelor din plan care se găsesc la o distanţă constantă de un punct fix. Trebuie deosebită noţiunea de cerc de aceea de *suprafaţă a cercului*; prin cerc se înţelege numai linia care mărgineşte această suprafaţă. Pentru a se evita o confuzie, această linie se mai numeşte *circumferinţă*. Punctul fix egal depărtat de toate punctele cercului se numeşte *centru*. Orice segment care uneşte centrul cu un punct al cercului



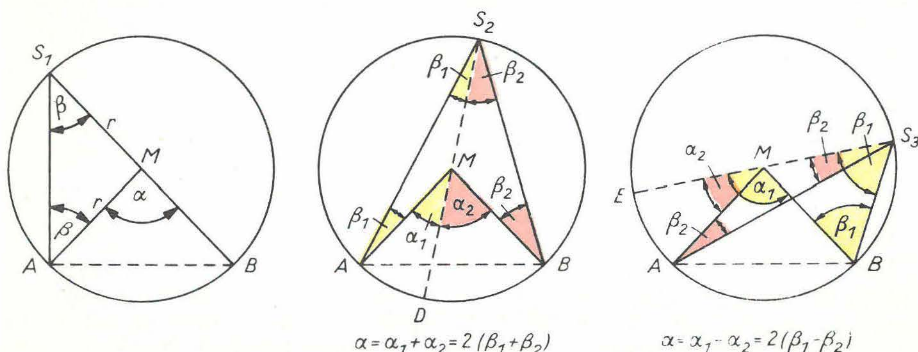
7.9.1. Definiții in cerc

se numește *rază*. Orice segment care unește două puncte oarecare ale cercului se găsește în întregime în interiorul acestuia, deci cercul este o *figură convexă*. O dreaptă care unește două puncte de pe cerc se numește *secantă*, iar partea din secantă care conține numai puncte interioare cercului se numește *coardă*. Coarda care trece prin centru se numește *diametru*. Diametrele sînt cele mai lungi coarde în cerc. Dreptele care au comun cu cercul un singur punct se numesc *tangente* la cerc. Unghiurile care au vîrful pe cerc și laturile secante de cerc se numesc *unghiuri înscrise în cerc*; unghiurile cu vîrful în centrul cercului se numeșc *unghiuri la centru*. Partea de pe cerc delimitată de un unghi la centru se numește *arc de cerc*. Partea din suprafața cercului delimitată de două raze și un arc de cerc se numește *sector circular*. Partea delimitată de un arc și coarda corespunzătoare lui se numește *segment* (fig. 7.9.1).

Unghiuri în cerc

Un unghi înscris în cerc are ca măsură jumătatea unghiului la centru corespunzător aceluiași arc.

La demonstrarea acestei propoziții trebuie deosebite trei cazuri. Pe figura 7.9.2 sînt ilustrate cele trei cazuri: primul cînd centrul cercului se găsește pe una din laturile unghiului, al doilea cînd centrul se găsește între laturile unghiului și al treilea caz cînd centrul se găsește în afara laturilor unghiului. În primul caz ΔAMS_1 este isoscel deoarece $\overline{AM} = \overline{MS_1} = r$. De aici rezultă $\sphericalangle AS_1M = \sphericalangle MAS_1 = \beta$. Cum unghiul la centru AMB este unghi exterior al triunghiului AMS_1, rezultă că $\alpha = 2\beta$.

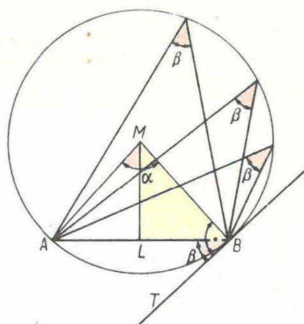


7.9.2. Unghiuri inscrise și unghiuri la centru

Celelalte două cazuri se tratează prin trasarea diametrelor S_2D și S_3E și reducînd problema la primul caz.

Fiecărui unghi la centru îi corespunde un arc de cerc și numai unul, fiecărui arc de cerc îi corespund mai multe unghiuri înscrise (fig. 7.9.3).

Unghiurile înscrise care subîntind același arc sînt egale. Unghiurile înscrise într-un semicerc sînt drepte.



7.9.3. Unghiuri înscrise și unghiuri determinate de o tangentă și o coardă

Cînd vîrful unghiului înscris se deplasează pe cerc între A și B ajungînd în punctul B, atunci una din laturi devine tangenta în B la cerc iar cealaltă coarda AB. Unghiul astfel determinat de o coardă și o tangentă este un caz special de unghi înscris (în figură $\sphericalangle ABT$).

Unghiul determinat de o coardă și o tangentă are aceeași măsură ca orice unghi înscris care subîntinde același arc.

Dacă se coboară o perpendiculară $\overline{ML}$ pe coarda $\overline{AB}$, atunci $\sphericalangle ABT = 90° - \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{2} = \beta$.

Tangente la cerc

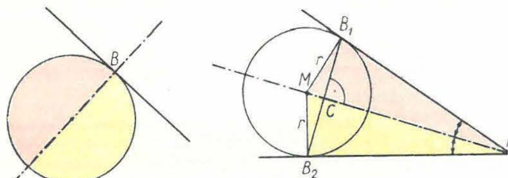
Raza dusă în punctul de contact al tangentei este perpendiculară pe tangentă; perpendiculara dusă pe o rază într-un punct al cercului este tangenta la cerc în acest punct.

Figura formată dintr-un cerc și o tangentă prezintă o simetrie axială. Axa de simetrie este dreapta care conține raza în punctul de contact, deci trece prin centru și prin punctul de contact. Și figura formată dintr-un cerc și dintr-o tangentă dusă dintr-un punct exterior P prezintă o simetrie axială (fig. 7.9.4). Axa de simetrie trece prin centrul cercului M și prin punctul P în care se intersectează tangentele simetrice. Această axă de simetrie poartă numele de *axă centrală*. Din proprietățile de simetrie rezultă următoarele propoziții:

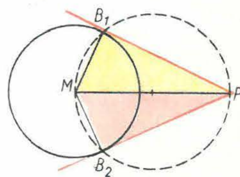
1. *Axa centrală împarte în două părți egale unghiul format de cele două tangente duse dintr-un punct exterior la cerc.*
2. *Segmentele determinate pe tangentele duse dintr-un punct exterior la cerc, de punctul comun P și de cele două puncte de contact sînt egale.*
3. *Coarda care unește punctele de contact a două tangente duse dintr-un punct exterior la cerc este împărțită de către axa centrală în două părți egale.*

Construcții. Toate construcțiile de tangente se bazează pe propozițiile enunțate mai sus. *Tangente duse dintr-un punct exterior la cerc.* Din mijlocul H al axei centrale se trasează un cerc cu raza HP, care taie cercul cu centrul M în punctele de tangență B_1 și B_2 (teorema lui Thales). Dreptele PB_1 și PB_2 sînt tangentele căutate (fig. 7.9.5).

Tangenta la cerc într-un punct al cercului. Raza în punctul de contact se prelungește în afara cercului cu o lungime egală cu raza pînă la punctul C; din C și M se descriu arce de



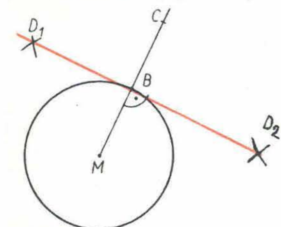
7.9.4. Tangente la cerc



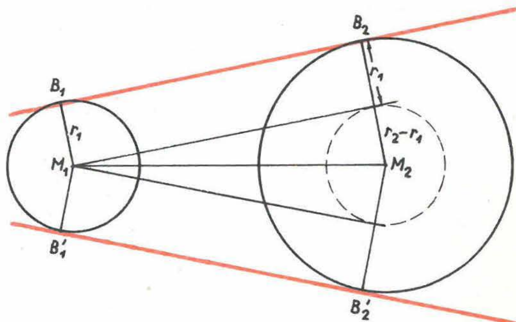
7.9.5. Tangente din P la cercul cu centrul M

cerc cu raza mai mare decît MB. Dreapta care unește punctele de intersecție, D_1 și D_2 determină tangenta căutată (fig. 7.9.6).

Tangente exterioare la două cercuri. Fiind date două cercuri cu centrele M_1 și M_2 și razele r_1 și r_2 $(r_2 > r_1)$ se cere să se ducă tangenta exterioară la ambele cercuri. Din punctul M_2 ca centru cu o rază $r_2 - r_1$ se trasează un cerc ajutător și se construiesc tangentele din M_1 la acest cerc. Paralelele duse la distanța r_1 la aceste tangente, B_1B_2 și $B_1'B_2'$ sînt tangentele exterioare la cercurile date. Intuitiv tangentele exterioare pot fi asemănate cu o curea de transmisie (fig. 7.9.7).

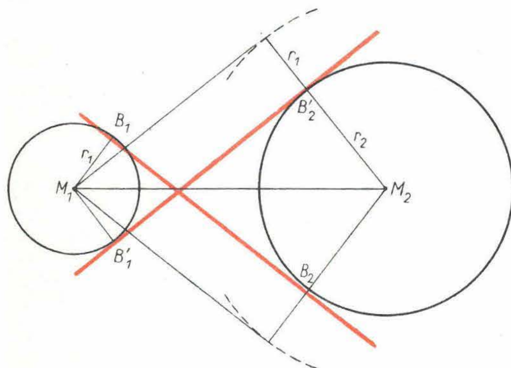


7.9.6. Tangenta în B la cercul cu centrul în M

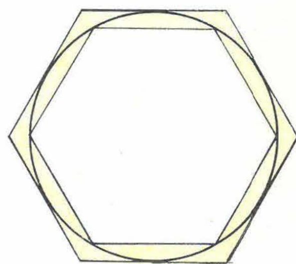


7.9.7. Tangente exterioare

Tangentele interioare la două cercuri. Pentru a găsi tangentele interioare la două cercuri date se descrie din M_2 cu raza $r_2 + r_1$ un cerc ajutător și se duc tangentele din M_1 la acest cerc. Paralelele duse la distanța r_1 la aceste tangente, B_1B_2 și $B_1'B_2'$ sînt tangentele comune la cele două cercuri date (fig. 7.9.8). Intuitiv figura poate fi asemănată cu curelele de transmisie încrucișate.



7.9.8. Tangente interioare



7.9.9. Hexagoane regulate înscrise și circumscrise unui cerc

Calculul unor elemente ale cercului

Lungimea cercului. Pentru determinarea lungimii cercului de diametru d, se pornește de la două poligoane regulate, unul înscris iar celălalt circumscris. Pe figură sînt considerate cele două hexagoane înscris și circumscris (fig. 7.9.9). Evident perimetrul hexagonului înscris ($U_i = 3d$) mărginește inferior iar perimetrul hexagonului circumscris ($U_c = 3{,}47d$) mărginește superior lungimea cercului dat, adică

$$3d < L < 3{,}47\, d$$

Lungimea cercului	$L = \pi d = 2\pi r$

Factorul cu care se înmulțește diametrul cercului pentru a se obține lungimea lui se notează cu litera din alfabetul grec π (se citește pi), $L = \pi d$.

Această constantă este una din cele mai importante și interesante constante matematice; ea este un număr irațional și transcendent. Ea se obține cu atît mai precis cu cît numărul laturilor poligoanelor considerate este mai mare. Încă ARHIMEDE (287—212 î.e.n.) și-a dus cercetările pînă la poligonul regulat cu 96 de laturi și marginile găsite de el pentru π se folosesc încă chiar și astăzi în practică ca aproximații suficient de exacte (în special marginea superioară) ale numărului π; el a găsit:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}, \text{ adică } 3,14084507 < \pi < 3,14285714.$$

Primele 40 zecimale sînt (fig. 7.9.10):

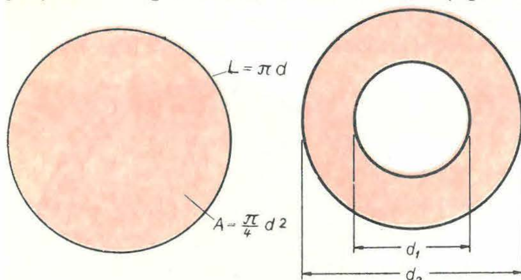
$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 41971\ \ldots$

7.9.10. Numărul π cu primele 40 zecimale

Următoarele evaluări ne arată ce înseamnă a considera numărul π cu 30 zecimale exacte. Sistemele stelare studiate de astronomi fotografic, prin expunere îndelungată, transmit lumina emisă aproximativ cu două miliarde de ani înainte. Cum lumina străbate într-un an aproximativ $9,5 \cdot 10^{12}$ km, rezultă că distanța acestui sistem pînă la pămînt este de aproximativ $r = 2 \cdot 10^9 \cdot 9,5 \cdot 10^{12}$ km $= 1,9 \cdot 10^{22}$ km. Lungimea unui cerc cu această rază este $L = 2\pi r = 3,8\pi \cdot 10^{22}$ km. Dacă se folosește π cu 30 zecimale exacte, atunci numărul obținut pentru lungimea L a acestui cerc prezintă o inexactitate de două unități la zecimala a 8-a, ceea ce înseamnă aproximativ 20 micrometri sau 0,02 milimetri. Este deci clar că o astfel de exactitate nu se folosește aproape niciodată. Valorile aproximative folosite în mod frecvent sînt $\pi \approx 3,14$ sau $\pi \approx 3\frac{1}{7}$ sau $\pi = 3,1416$ cu patru zecimale exacte (fig. 7.9.10).

Din transcendența numărului π rezultă că nu se poate construi cu linia și compasul un pătrat echivalent cu un cerc dat (cvadratura cercului).

Aria cercului. Aria cercului rezultă de asemenea din ariile poligoanelor regulate înscrise și circumscrise. Și aici numărul π joacă rol de factor de proporționalitate. Aria unui cerc este proporțională cu pătratul razei sale $A = \pi r^2$ (fig. 7.9.11).



7.9.11. Lungimea și aria cercului

7.9.12. Coroană circulară

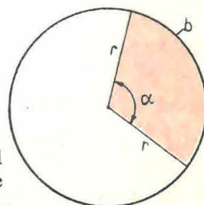
Aria cercului	$A = \pi r^2 = \frac{\pi}{4} d^2$

Coroană circulară. Aria unei coroane circulare (de diametru d_1 și d_2) se obține prin scădere (fig. 7.9.12)

Aria coroanei circulare	$A = \frac{\pi}{4}(d_2 + d_1)(d_2 - d_1)$

Sector circular. Deoarece aria unui sector circular A depinde de unghiul la centru α (fig. 7.9.13) și întrucît pentru cercul întreg $\alpha = 360°$, se poate scrie proporția

$$A : \pi r^2 = \alpha° : 360° \rightarrow A = \frac{\alpha°}{360°}\pi r^2.$$

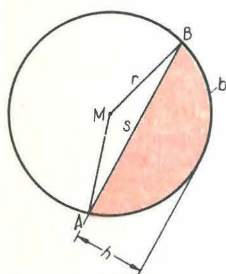


7.9.13. Sector circular

Arcul b care mărginește sectorul circular se obține din proporția $b : \alpha^\circ = 2\pi r : 360^\circ$ și poate fi folosit în formula ariei.

Arcul corespunzător unghiului la centru α	$b = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} 2\pi r = \frac{\alpha \pi r}{180}$
Aria sectorului circular	$A = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} \pi r^2 = \frac{br}{2}$

Segment circular. Aria segmentului circular se obține din cea a sectorului circular prin *scăderea* ariei triunghiului ABM (fig. 7.9.14).

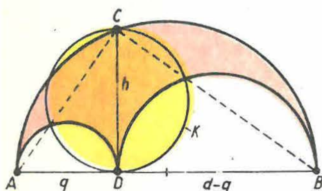


7.9.14. Segment circular

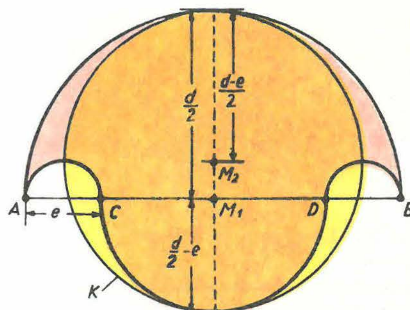
$$A = \frac{1}{2} b \cdot r - \frac{1}{2} s(r - h),$$ unde s este coarda și h înălțimea arcului.

Arbelos. Printre diversele figuri care se pot compune din arce de cerc se vor prezenta aici două care au fost cercetate de ARHIMEDE și pe care acesta le-a numit: Arbelos și Salinon. Arbelosul (cuțitul cizmarului) este figura mărginită de trei semicercuri tangente două cîte două cu diametrele pe aceeași linie, astfel încît suma diametrelor a două dintre ele să fie egală cu diametrul celui de al treilea (fig. 7.9.15). Dacă se duce tangenta comună în punctul de contact al cercurilor mici, ea este perpendiculară pe diametrul cercului mare și reprezintă jumătate dintr-o coardă a acestuia. Cercul K construit pe această jumătate de coardă ca diametru are aceeași arie cu arbelosul. Diametrul lui poate fi privit ca înălțimea CD în triunghiul dreptunghic ABC înscris în semicercul mare cu diametrul $AB = d$. Ea poate fi calculată cu ajutorul teoremei înălțimii $h^2 = q(d - q)$. Atunci $A_K = \frac{\pi}{4} h^2 = \frac{\pi}{4} q(d - q)$. Aria arbelosului este $A_{\text{Arb}} = \frac{1}{2} (A_{AB} - A_{AD} - A_{DB}) = \frac{\pi}{8} [d^2 - q^2 - (d - q)^2] = \frac{\pi}{4} q(d - q)$.

Salinon. Salinonul este format din patru semicercuri: unul de diametru d, apoi două de diametre e avînd fiecare cîte o extremitate a diametrului comună cu semicercul de diametru d și fiind de aceeași parte a acestui diametru. Al patrulea semicerc are diametrul pe aceeași linie cu primele trei, se găsește de cealaltă parte a acestei linii și are diametrul egal cu $d - 2e$ (fig. 7.9.16).



7.9.15. Arbelos

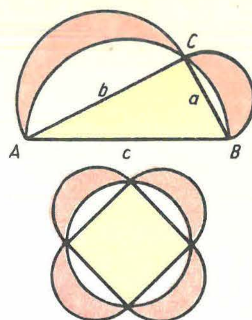


7.9.16. Salinon

Cercul K de diametru egal cu suma razelor primului $(d - 2e)$ și celui de-al patrulea cerc $\left(\frac{q}{2} - e\right)$ are aceeași arie cu aria S a salinonului.

Pe figură se poate vedea $A_K = \frac{\pi}{4} (d - e)^2$; $A_S = \frac{1}{2} (A_{AB} - 2A_{AC} + A_{CD}) = \frac{\pi}{8} [d^2 - 2e^2 + (d - 2e)^2] = \frac{\pi}{4} (d^2 - 2de + e^2) = \frac{\pi}{4} (d - e)^2$.

Lunulele lui Hippocrate. Celebre mai sînt și alte figuri formate din arce de cerc; printre acestea cele mai cunoscute sînt *lunulele lui Hippocrate* (matematician grec 440 î.e.n). Pe figura 7.9.17, în stînga, triunghiul colorat cu galben este, după teorema lui Thales, un triunghi dreptunghic ABC; rezultă deci $c^2 = a^2 + b^2$. Semicercul cu diametrul $\overline{AB} = c$ are aria $A_{AB} = \frac{\pi}{8} c^2$; suma ariilor semicercurilor construite pe $\overline{AC}$ și $\overline{BC}$ este $A_{AC} + A_{BC} = \frac{\pi}{8}(b^2 + a^2)$ și deci este egală cu A_{AB}. De aici rezultă:



7.9.17. Lunulele lui Hippocrate

Suma ariilor celor două lunule este egală cu aria triunghiului ABC.

În mod analog pe figura unde sînt arătate lunulele lui HIPPOCRATE, în dreapta se poate vedea că suma ariilor celor patru lunule este egală cu aria pătratului. Cu ajutorul acestor figuri speciale mulți matematicieni din antichitate printre care și Hippocrate încercau cu perseverență să rezolve problema cvadraturii cercului.

Teoreme asupra coardelor, secantelor și tangentelor

Cu ajutorul rotației unui cerc cu o coardă în jurul centrului cercului se poate demonstra următoarea propoziție:

Coardele de aceeași lungime se găsesc în cerc la aceeași distanță de centru; coardele egal depărtate de centru sînt egale.

Dacă într-un cerc coarda c_1 este mai mare decît coarda c_2, atunci distanța de la c_1 la centru este mai mică decît cea de la c_2 la centru. De aici rezultă că diametrul este cea mai lungă coardă din cerc. Dacă dreptele unui fascicul sînt tăiate de un cerc, atunci produsul segmentelor determinate de cerc pe fiecare dreaptă din fascicul este constant.
Această teoremă constituie generalizarea și sinteza următoarelor trei propoziții:

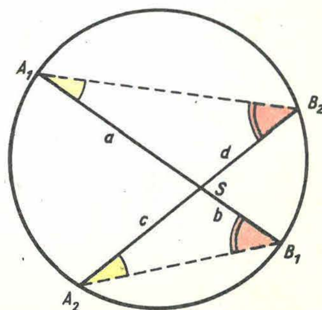
Teorema coardelor. Dacă două coarde se intersectează în interiorul cercului, atunci produsul segmentelor determinate pe o coardă este egal cu produsul segmentelor de pe cealaltă coardă.

Demonstrația rezultă astfel (fig. 7.9.18). Unghiurile $\sphericalangle B_1A_1B_2$ și $\sphericalangle B_2A_2B_1$ sînt egale. De asemenea $\sphericalangle A_1B_2A_2$ și $\sphericalangle A_2B_1A_1$ sînt egale, ca unghiuri înscrise corespunzătore aceluiași arc. Deci $\Delta A_1SB_2 \sim \Delta A_2SB_1$, de unde rezultă $\overline{SA_1} : \overline{SB_2} = \overline{SA_2} : \overline{SB_1}$ sau $\overline{SA_1} \cdot \overline{SB_1} = \overline{SA_2} \cdot \overline{SB_2}$, adică $a \cdot b = c \cdot d$.

Teorema secantelor. Dacă două secante ale unui cerc se intersectează în afara cercului, atunci produsul distanțelor de la punctul de intersecție a secantelor la punctele de intersecție a secantelor cu cercul este același pe ambele secante.

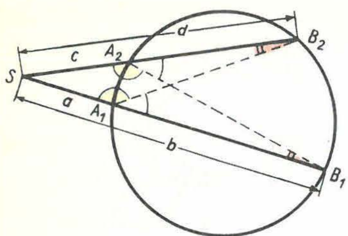
Demonstrația relației $SA_1 \cdot SB_1 = SA_2 \cdot SB_2$, respectiv $a \cdot b = c \cdot d$ se face la fel ca în cazul coardelor (fig. 7.9.19).

Teorema secantei și a tangentei. Orice tangentă dusă dintr-un punct exterior la cerc este medie proporțională între segmentele determinate pe orice secantă de acest punct și punctele de intersecție cu cercul.

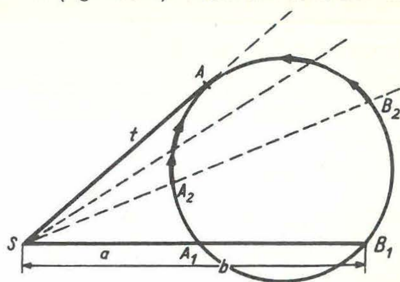


7.9.18. Teorema coardelor

Demonstrația relației $SA^2 = SA_1 \cdot SB_1$ respectiv $t^2 = a \cdot b$ se face ca la teorema secantei. Poziția punctului de tangență A este poziția limită cînd punctele A_2 și B_2 de pe secanta SA_2B_2 se apropie unul de celălalt pînă la contopire, $A_2 = B_2 = A$ (fig. 7.9.20). Produsul constant al



7.9.19. Teorema secantelor



7.9.20. Teorema secantei și a tangentei

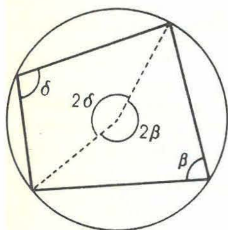
segmentelor determinate de secantă în modul descris mai sus poartă numele de puterea punctului (comun tuturor secantelor) față de cerc.

Patrulatere înscrise și circumscrise unui cerc

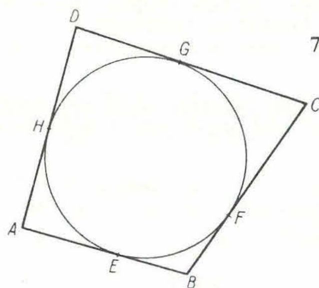
Patrulater înscris. Patrulaterul ale cărui laturi sînt coarde într-un cerc se numește *patrulater înscris* (fig. 7.9.21). Din teoremele asupra măsurii unghiului înscris și asupra sumei unghiurilor într-un patrulater rezultă:

Într-un patrulater înscris suma a două unghiuri opuse este de 180°.

Reciproc, numai acele patrulatere sînt înscriptibile pentru care suma unghiurilor opuse este de 180°.



7.9.21. Patrulater înscris



7.9.22. Patrulater circumscris

Patrulater circumscris. Un patrulater ale cărui laturi sînt tangente ale unui cerc se numește *patrulater circumscris* (fig. 7.9.22). Deoarece lungimile tangentelor duse dintr-un punct la un cerc sînt egale, rezultă, cu notațiile din figură, $AE = AH$, $BE = BF$, $CF = CG$, $DH = DG$ și deci și $AE + EB + CG + GD = BF + FC + DH + HA$, adică $AB + CD = BC + DA$, respectiv $a + c = b + d$.

Într-un patrulater circumscris suma a două laturi opuse este egală cu suma celorlalte două laturi opuse.

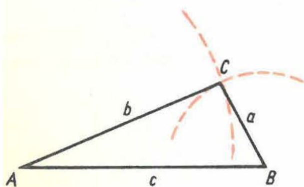
Reciproca acestei afirmații rezultă de asemenea în mod evident din figură.

Din aceste propoziții rezultă de exemplu că pătratul poate fi înscris și circumscris unor cercuri. Dreptunghiul este inscriptibil; rombul poate fi circumscris dar nu este inscriptibil, iar paralelogramul nu este inscriptibil și nu poate fi nici circumscris.

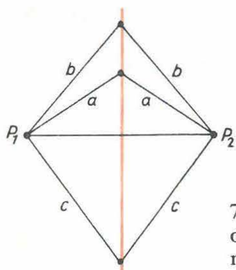
7.10. Locuri geometrice

Locurile geometrice în plan sînt *mulțimi de puncte* care îndeplinesc o anumită condiție geometrică. Cu alte cuvinte în afara acestor mulțimi nu se mai găsesc puncte ale planului care să satisfacă condiția dată iar în mulțimea care definește locul geometric nu se găsesc puncte care să nu satisfacă această condiție.

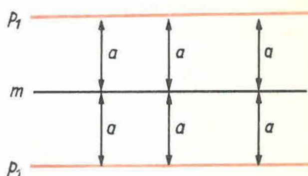
La rezolvarea multor probleme de construcție în geometria plană dar și în geometria descriptivă este necesar să se pună în evidență punctul de intersecție a două locuri geometrice. De exemplu la construcția triunghiului cu ajutorul celor trei laturi ale sale (fig. 7.10.1) se desenează întîi segmentul $AB = c$. Locurile geometrice cu ajutorul cărora se găsește punctul căutat C sînt ținînd seama de locul 5, cercul cu centrul în A și de rază b și cercul cu centrul în B și de rază a. Dacă aceste cercuri se intersectează, atunci punctul de intersecție se găsește la distanța b de A și la distanța a de B, deci satisface condiția impusă vîrfului C al triunghiului.



7.10.1. Loc geometric: construcția unui punct C



7.10.2. Mediatoarea ca loc geometric



7.10.3. Loc geometric: perechi de drepte paralele și paralela dusă la mijlocul distanței dintre paralele

Unele locuri geometrice elementare

1. *Locul geometric al punctelor egal depărtate de două puncte fixe este mediatoarea segmentului determinat de cele două puncte (fig. 7.10.2).*

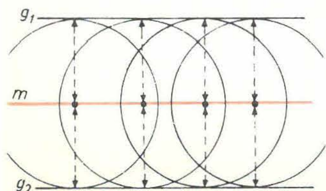
2. *Locul geometric al punctelor egal depărtate de o dreaptă dată este perechea de drepte paralele cu dreapta dată la distanță egală de o parte și alta a acesteia (fig. 7.10.3).*

3. *Locul geometric al punctelor care se găsesc la aceeași distanță de două drepte paralele este o paralelă la acestea dusă la mijlocul distanței dintre ele (fig. 7.10.4).*

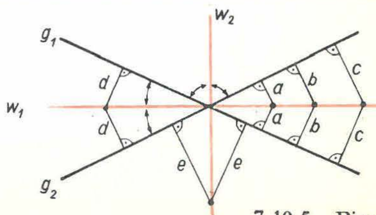
4. *Locul geometric al punctelor egal depărtate de două drepte neparalele este bisectoarea unghiului format de acestea. (fig.7.10.5).*

5. *Locul geometric al punctelor care se găsesc la o distanță fixă de un punct fix este cercul cu centrul în punctul fix și cu raza distanța dată.*

6. *Locul geometric al tuturor punctelor din care se vede un segment dat sub un unghi dat α este cercul în care acest segment este o coardă care subîntinde arcul corespunzător unui unghi la centru egal cu 2 α (fig. 7.10.6).*



7.10.4. Loc geometric: paralela dusă la mijlocul distanței dintre două drepte



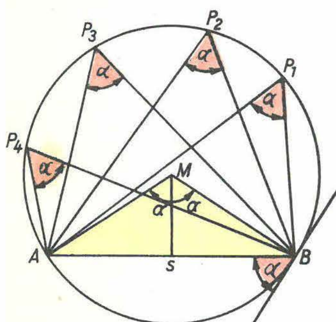
7.10.5. Bisectoarea ca loc geometric

Fie $s = \overline{AB}$ segmentul dat și α unghiul dat; atunci M, centrul cercului — loc geometric — este vîrful unui triunghi isoscel ABM în care $\overline{AB} = s$ este bază și unghiul opus bazei este 2α.

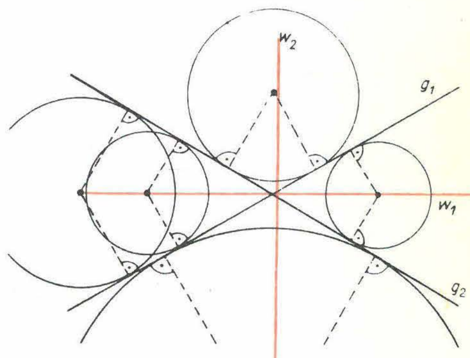
Cu ajutorul acestor șase locuri geometrice elementare pot fi rezolvate și alte probleme de găsire a unor locuri geometrice.

Aplicații. Locul geometric al centrelor cercurilor care se găsesc între două drepte date și sînt tangente fiecărei drepte poate fi găsit cu ajutorul locurilor geometrice elementare 3, respectiv 4 (fig. 7.10.4 și 7.10.7).

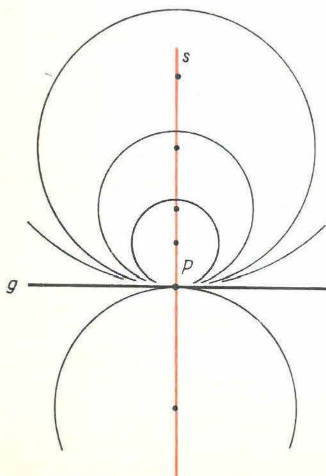
În general, reducerea problemei la locuri geometrice elementare se face în mai multe etape. Cu ajutorul locurilor geometrice elementare 3 și 1 se recunoaște ca loc geometric al centrelor cercurilor care sînt tangente în P la o dreaptă g, perpendiculara ridicată în P pe s (fig. 7.10.8). De aici, rezultă că locul geometric al centrelor tuturor cercurilor cu raza r, care sînt tangente în interior, respectiv exterior, unui cerc cu centrul în M și raza ρ este un cerc concentric cu cercul dat de rază $\rho - r$, respectiv $\rho + r$ (fig. 7.10.9). Determinarea unor locuri geometrice asemănătoare cu acestea are mare importanță pentru construcția de mașini, de exemplu, dispozitive cu roți dințate.



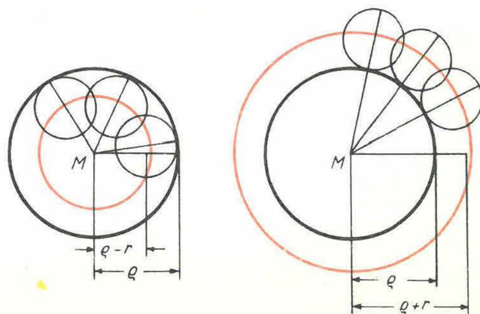
7.10.6. Locul geometric al punctelor din care un segment dat se vede sub un unghi dat



7.10.7. Loc geometric: bisectoarea unghiului



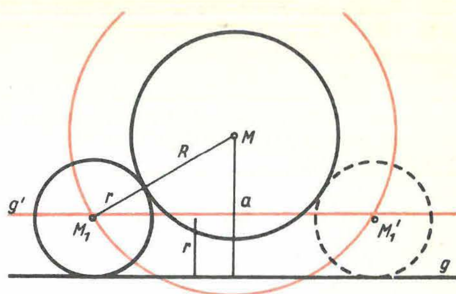
7.10.8. Perpendiculara pe o dreaptă ca loc geometrice



7.10.9. Cercurile concentrice ca loc geometric

Transformarea unei mișcări de rotație într-o mișcare orizontală. Și următoarea problemă conduce tot la construcția punctului de intersecție a două locuri geometrice:

Cu ajutorul unei roți mari (raza R și centru M) să se imprime unei roți mici (raza r) o mișcare de rotație, care transmite unei cremaliere g o mișcare rectilinie orizontală. Fie a distanța de la M la g. Unde trebuie să fie axa roții mici? Trebuie deci determinat centrul M_1 al cercului cu raza r care este la distanța r de g și la distanța $R + r$ de M. Astfel, M_1 se va găsi pe paralela g' dusă la g la distanța r cît și pe cercul cu centrul în M și cu raza $R + r$. După cum se vede din figură există două puncte M_1 și M_1' care satisfac aceste condiții (fig. 7.10.10).



7.10.10. Loc geometric: dreaptă și cerc

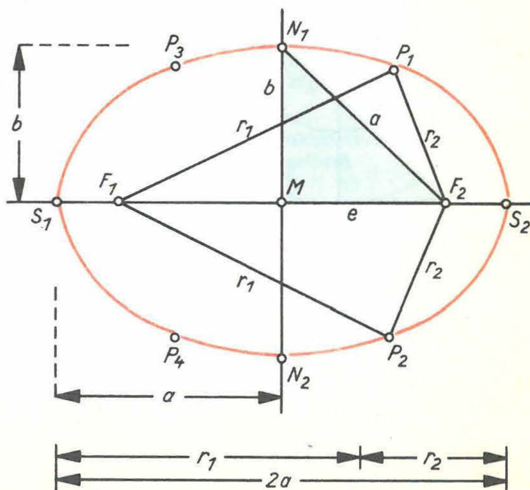
7.11. Tratarea în cadrul geometriei plane a secțiunilor conice

Elipsa

Elipsa este locul geometric al punctelor din plan pentru care suma distanțelor la două puncte fixe este constantă ($2a$).

Punctele fixe se numesc *focare*, F_1 și F_2, distanțele r_1, respectiv r_2 de la un punct al elipsei P la focare se numesc *raze vectoare*. Distanța constantă $2a$ trebuie să fie mai mare decît distanța dintre focare. Fiind dată distanța $2a$, aceasta poate fi descompusă în două segmente de lungimi r_1 și r_2, astfel încît arcele de cerc cu centrul în F_1 și raza r_1 și cu centrul în F_2 și rază r_2 se taie în două puncte P_1 și P_2 care se găsesc pe elipsă. Schimbînd între ele razele corespunzătoare fiecărui focar, se obțin în mod analog punctele P_3 și P_4 (fig. 7.11.1). Perechile de puncte P_1, P_2 și P_3, P_4 sînt simetrice față de axa care trece prin focare. De altfel întrega elipsă prezintă o simetrie față de această axă. Punctele P_1, P_3 și P_2, P_4 ca și întreaga elipsă admit ca axă de simetrie perpendiculara pe mijlocul segmentelor ce leagă focarele. Punctul de intersecție a celor două axe de simetrie este centrul de simetrie al elipsei și se numește *centru*. Distanța de la focare la centrul M se numește *excentricitate liniară* sau *distanță focală*, $MF_1 = MF_2 = e$. Orice dreaptă dusă prin centru taie elipsa în două puncte care determină un diametru. Cel mai mare diametru se numește *axa mare a elipsei*; capetele acestui diametru S_1 și S_2 au distanțele la focare $a + e$, respectiv $a - e$ iar distanțele la centru egale cu a. Ele se numesc vîrfuri principale. Cel mai mic diametru se numește *axa mică a elipsei* iar extremitățile sale N_1 și N_2 *vîrfuri secundare*; ele se găsesc la distanța a de focare. Distanța b de la vîrfurile secundare la centrul M se poate exprima cu ajutorul teoremei lui Pitagora $b^2 = a^2 - e^2$.

Elipsa	$r_1 + r_2 = 2a$ $e^2 = a^2 - b^2$



7.11.1. Elipsa

Forma elipsei este determinată prin două din mărimile a, b și e. Pentru valori mici ale lui b elipsa este mai plată; în cazul limită $b = 0$ poate fi considerată ca dublul segmentului $F_1F_2 = S_1S_2$. Cînd b crește, elipsa se apropie de cerc iar dreptunghiul determinat de axe devine pătrat ($b=a$). Cercul poate fi privit ca o elipsă cu excentricitatea $e=0$ pentru care $a=b=r_1-r_2=r$

Construcții mecanice și aproximative. Pentru multe scopuri practice și în special pentru schițele folosite în geometria descriptivă s-au elaborat construcții simple care fără multe linii ajutătoare dau o bună aproximare a elipsei.

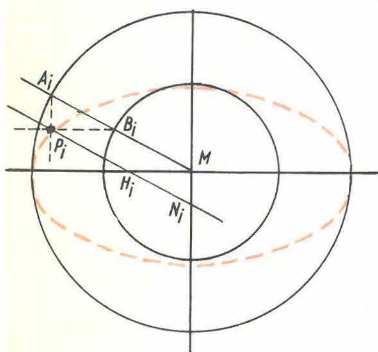
Construcția cu ajutorul firului. Marcînd focarele F_1 și F_2, se fixează pe acestea extremitățile unui fir de lungime $2a > 2e$. Mișcînd un creion astfel încît firul să fie întins, vîrful acestuia se va găsi totdeauna pe elipsă, deoarece $r_1 + r_2 = 2a$ (fig. 7.11.2).

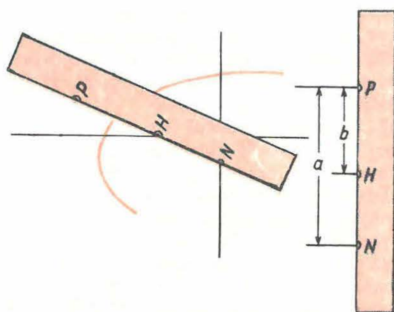
Compasul de elipse. Elipsograful. În geometria descriptivă elipsa se consideră ca o imagine afină a unui cerc. Se descriu cercurile cu vîrful în M și cu razele b, respectiv a. Se taie aceste cercuri cu o dreaptă care trece prin centrul M și fie B_i respectiv A_i un punct de intersecție. Paralelele prin B_i și A_i la axa mare, respectiv la axa mică se intersectează în punctul P_i aflat pe elipsă. O paralelă prin P_i la MB_iA_i taie axele în punctele H_i și N_i. Din paralelogramele $N_iMA_iP_i$ și $H_iMB_iP_i$ rezultă $N_iP_i = MA_i = a$, $H_iP_i = MB_i = b$. Dacă se marchează pe o riglă trei puncte N, H și P astfel încît $NP = a$ și $HP = b$, atunci punctul P se mișcă pe o elipsă cu axele $2a$ și $2b$ dacă punctele N și H rămîn pe axe (fig. 7.11.3).

7.11.2. Construcția elipsei cu ajutorul firului

Construcția prin benzi de hîrtie (fig. 7.11.4). Dacă extremitățile unui segment se mișcă pe două axe perpendiculare, atunci orice punct interior al segmentului descrie cîte o elipsă. Părțile în care segmentul este împărțit de punctul respectiv sînt semiaxele elipsei.

Pe figură s-au desenat două axe perpendiculare și din punctul lor de intersecție M, ca centru, s-au descris două cercuri concentrice cu razele $a=MB$ și $b=MD$. O rază oarecare MP taie cercul interior în Q. Paralele arbitrare la fiecare axă

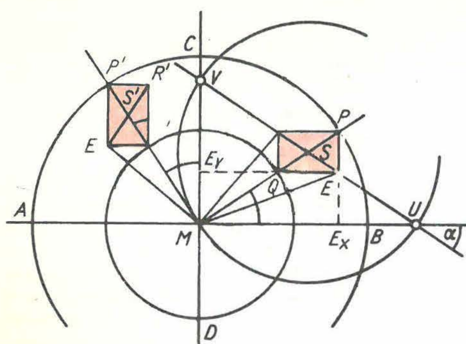


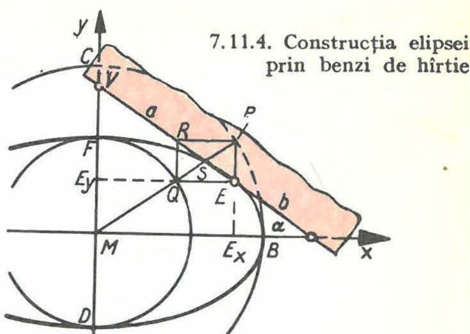


7.11.3. Principiul compasului de elipse

prin punctele P și Q se taie în punctele R și E. Dreapta RE are cu axele punctele de intersecție U și V și taie axa orizontală sub unghiul α. Prin construcție S este centrul dreptunghiului $PRQE$ și triunghiurile SMU și SMV sînt isoscele, adică $SU = SM = SV$, deci S este și mijlocul segmentului UV. Tot din figură rezultă $EU=SM-SQ=QM=b$, $EV=SU+SR=MP=a$, adică $UV=a+b$. Cînd raza MP se rotește în jurul centrului M astfel încît punctele U și V se mișcă rămînînd pe axe, segmentul UV își păstrează lungimea iar E rămîne tot timpul punctul care împarte acest segment în părți egale cu a și b. Dacă se notează cu E_x și respectiv E_y picioarele perpendicularelor din E pe axe, atunci în triunghiurile UEE_x respectiv EVE_y au loc relațiile $EE_x : UE = y : b = \sin\alpha$, respectiv $EE_y : EV = x : a = \cos\alpha$, de unde rezultă că $x^2/a^2+y^2/b^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. Punctul E se găsește deci pe elipsa cu axele $AB=2a$ și $FD=2b$. În felul acesta cu o bandă de hîrtie pe care s-au însemnat punctele U, E și V se pot repede trasa multe puncte ale elipsei. Este suficient să se așeze punctele U și V în diferite poziții pe axe și să se însemne punctul E corespunzător pe hîrtie.

Construcția axelor elipsei cînd se cunosc două diametre conjugate. Construcția prin benzi de hîrtie se poate folosi numai atunci cînd se cunosc axele elipsei. În general se cunosc doar două diametre conjugate. Axele se pot construi ținîndu-se seama de următoarele considerații. Elipsa nu e altceva decît o imagine afină a cercului circumscris ei. Prin această aplicație se obține



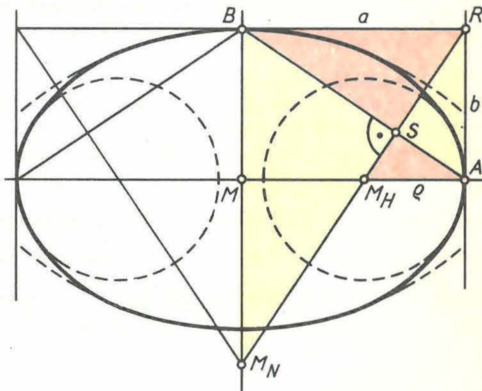


7.11.4. Construcția elipsei prin benzi de hîrtie

jumătatea diametrului ME' conjugat lui ME ca imagine a razei MP' perpendiculare pe MP. Astfel pentru punctul E' de pe elipsă au loc relațiile:

1. $P'E' \| Q'R' \| MC$; 2. $P'R' \| E'Q' \| AM$; 3) $\sphericalangle PQE = \sphericalangle P'Q'R'$ ca unghiuri cu laturile perpendiculare. Deoarece $P'Q' = PQ$, dreptunghiurile $RPEQ$ și $R'P'E'Q'$, și deci și triunghiurile MQR și $M'Q'E'$ sînt congruente. De aici rezultă imediat $MR \perp ME'$. Printr-o rotație de 90° în jurul lui M, $\overline{M'E'}$ se transformă în $\overline{MR}$.

Mijlocul segmentului RE este însă S și cercul descris din S cu raza SM va tăia deci dreapta RF în punctele U și V care împreună cu punctul M determină direcțiile axelor. Paralelele la aceste direcții prin punctele E și R se taie în punctele, Q, respectiv P și astfel MQ este lungimea semiaxei mici și MP lungimea semiaxei mari (fig. 7.11.4).



7.11.5. Construcția aproximativă a elipsei cu ajutorul cercurilor de curbură

Cercurile de curbură ale vîrfurilor. O metodă aproximativă de construcție a elipsei, deseori folosită, este aceea care are la bază cercurile de curbură ale vîrfurilor. Aceste cercuri pot fi confundate în vecinătatea vîrfurilor cu elipsa (fig. 7.11.5). Centrele lor M_N și M_H ca și razele $r = M_NB$ și $\rho = M_HA$ pot fi construite ușor fără prea multe linii ajutătoare (sau pot fi calculate prin mijloacele geometriei analitice într-un sistem de coordonate care coincide cu axele elipsei). În dreptunghiul cu vîrfurile $M(0, 0)$; $A(a, 0)$, $R(a, b)$ și $B(0, b)$ se duce diagonala $AB(y = -bx/a + b)$. Perpendiculara coborîtă pe aceasta din punctul $R(y = +ax/b - (a^2 - b^2)/b)$ taie diagonala în punctul $S(x_s = a^3/(a^2 + b^2)$; $y_s = b^3/(a^2 + b^2)$; $AS = = b^2/(a^2 + b^2)$; $SB = a^2/(a^2 + b^2))$ și axele în centrele M_H și M_N ale cercurilor de curbură. Razele lor pot fi calculate din teoremele privind fasciculele de drepte. Dreptele RSM_N și ASB sînt tăiate de paralelele $RB \| AM$ cît și de paralelele $BM_N \| RA$; se obține $\rho : a = \overline{AS} : \overline{SB} = b^2 : a^2$ sau $\rho = b^2/a$, respectiv $r : b = \overline{SB} : \overline{AS} = a^2 : b^2$ sau $r = a^2/b$.

Tangente la elipsă. Dacă P_i este un punct arbitrar al elipsei cu focarele F_1 și F_2 (fig. 7.11.6) și $F_2P_i = r_2$ raza vectoare a punctului P_i, atunci prelungindu-se F_2P_i în afara elipsei cu distanța $P_iF_1 = r_1$ se obține un punct L_i a cărui distanță de la focarul F_2 este $F_2L_i = r_1 + r_2 = 2a$. Punctul L_i se găsește deci pe cercul cu centrul în F_2 și de rază $2a$; acest cerc se numește *cerc director l.* Mediatoarea P_iN_i a segmentului F_1L_i împarte unghiul din vîrful P_i al triunghiului isoscel $F_1P_iL_i$ în două părți egale și este tangenta t_i în punctul P_i la elipsă deoarece pentru orice alt punct Q_i al acestei drepte în orice triunghi $F_2Q_iL_i$, $\overline{F_2Q_i} + \overline{Q_iL_i}$ este mai mare

7.11.6. Tangente la elipsă

decît a treia latură a triunghiului $F_2L_i = 2a$ și deci nici unul din aceste puncte nu poate fi punct al elipsei. Se poate da astfel o nouă definiție a elipsei:

Elipsa este locul geometric al centrelor (P_i) cercurilor tangente interior unui cerc dat (cercul director cu centrul F_2 și raza $2a$) și care trec printr-un punct fix.

Pe figură se poate observa că razele vectoare r_1 și r_2 formează unghiuri egale cu tangenta t_i. Din acest motiv razele luminoase sau sonore emise dintr-un focar sînt reflectate în celălalt focar. Dacă M este centrul elipsei, atunci dreapta N_iM împarte laturile F_1L_i și F_1F_2 ale triunghiului $F_1F_2L_i$ în două părți egale și este paralelă cu a treia, deci egală cu jumătatea ei. Toate punctele N_i care sînt picioare ale perpendicularelor coborîte din focarul F_i pe tangenta t_i se găsesc pe un cerc cu centrul în M și cu raza a.

Picioarele perpendicularelor coborîte din focar pe tangente se găsesc pe cercul circumscris elipsei avînd raza egală cu semiaxa a a elipsei.

Considerînd elipsa ca o imagine afină a cercului circumscris (fig. 7.11.6), atunci P_i este imaginea unui punct A_i care se găsește pe perpendiculara dusă prin P_i la axa mare. Axa mare este axa de afinitate și din acest motiv tangenta t_i' în punctul A_i la cercul circumscris taie tangenta t_i în punctul P_i la elipsă într-un punct T_i al axei mari. Prin acest punct T_i se poate construi și tangenta t_i' corespunzătoare lui t_i.

Aria elipsei. Prin corespondența afină realizată $x = x_1, y = = \frac{b}{a} y_1$, cercul de rază a se transformă în elipsa cu semiaxele a și b. Din aria cercului πa^2 se obține aria elipsei πab.

Aria elipsei	$A = \pi ab$

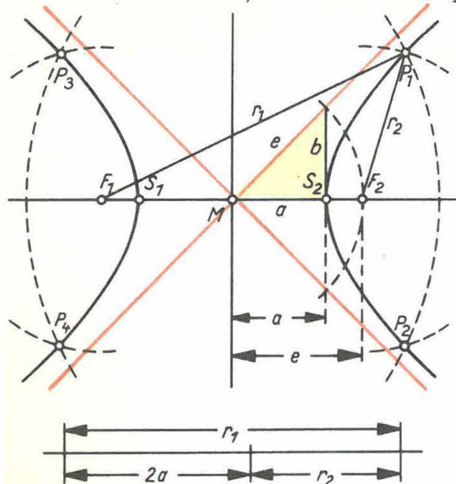
Hiperbola

Hiperbola este locul geometric al punctelor din plan pentru care diferența distanțelor a două puncte fixe este constantă.

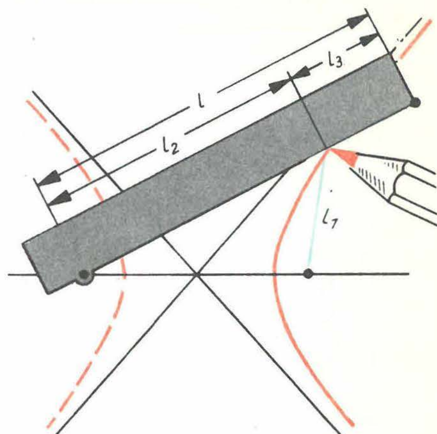
Punctele fixe se numesc focare F_1 și F_2, iar segmentele de lungimi r_1 și r_2 care unesc un punct de pe hiperbolă cu focarele, raze vectoare (fig. 7. 11.7). Distanța $2a$ trebuie să fie mai mică decît distanța dintre focare. Două arce de cerc, unul cu centrul F_1 și raza r_2 iar celălalt cu raza r_1 și centrul F_2 se taie în două puncte P_1 și P_2 care se găsesc pe hiperbolă. Schimbînd F_1 și F_2, se obțin alte două puncte ale hiperbolei P_3 și P_4. Perechile de puncte P_1, P_2 și P_3, P_4 ca de altfel întreaga hiperbolă admit ca rază de simetrie F_1F_2, segmentul determinat de focare iar perechile P_1, P_3 și P_2, P_4 și întreaga elipsă admit ca axă de simetrie mediatoarea segmentului F_1F_2. Punctul M de intersecție a celor două axe de simetrie este centrul de simetrie al hiperbolei și se numește centrul hiperbolei. Distanța de la fiecare focar la centrul hiperbolei se numește excentricitate e

$$\overline{MF_1} = \overline{MF_2} = e.$$

Hiperbola intersectează axa principală, cea care trece prin F_1 și F_2, în vîrfurile principale S_1 și S_2 care se găsesc la distanța a de centru și la distanța $e - a$ de focare. După cum se demonstrează în geometria analitică, hiperbola are două *asimptote*; acestea taie perpendicularele pe axa principală în vîrfurile principale S_1 și S_2 la distanța b de axa principală; distanța b poate fi determinată din relația $b^2 = e^2 - a^2$. Hiperbola este în întregime cuprinsă în porțiunea



7.11.7. Hiperbola



7.11.8. Construcția hiperbolei cu ajutorul firului

de plan delimitată de unghiul format de asimptote care conține și focarele. Curbura ei în vîrfurile principale este cu atît mai mare cu cît b este mai mic. În cazul limită ($b = 0$, $e = a$) hiperbola se reduce la porțiunile de axă mare din afara segmentului $S_1S_2 = F_1F_2$ parcurse de două ori — hiperbolă degenerată. Dimpotrivă cînd b crește, atunci curbura hiperbolei scade; în cazul limită $b \to \infty$ ea se reduce la hiperbola degenerată formată din două perpendiculare pe axa principală prin vîrfurile principale. Dacă asimptotele sînt perpendiculare, atunci $a = b$, hiperbola se numește în acest caz *echilateră*.

Construcția hiperbolei cu ajutorul firului. Fie date focarele F_1 și F_2 ale unei hiperbole ca și segmentul $2a$. O linie de lungime l se fixează cu un capăt într-unul din focare, la celălalt capăt se leagă un fir de lungime $k = l - 2a$. Capătul liber al firului se fixează în focarul F_2. Dacă se rotește linia în jurul lui F_1 astfel încît firul susținut de vîrful creionului să stea fixat pe aceasta, atunci acest vîrf va descrie o hiperbolă (fig. 7.11.8) după cum se poate vedea din relațiile:

$$l_2 + l_3 = l \text{ și } l_1 + l_3 = k,$$

deci

$$l_2 - l_1 = l - k = 2a$$

Tangente la hiperbolă. Dacă P_i este un punct arbitrar al hiperbolei, cu focarele F_1 și F_2, și se scurtează raza vectoare $P_iF_2 = r_2$ din P_i cu segmentul $P_iF_1 = r_1$, se obține punctul L_i, a cărui distanță de la focarul F_2 are lungimea constantă $F_2L_i = 2a$. Punctul L_i se găsește deci pe un cerc cu centrul în F_2 și cu raza $2a$. Acest arc se numește *cerc director l*. Mediatoarea P_iN_i a liniei de legătură F_iL_i este bisectoarea unghiului P_i al triunghiului isoscel $F_1L_iP_i$ și este tangentă t_i în punctul P_i la hiperbolă, deoarece pentru orice alt punct Q_i al acestei drepte, din triunghiul $F_2Q_iL_i$ rezultă că $F_2Q_i - Q_iL_i$ este mai mică decît a treia latură a triunghiului $F_2L_i = 2a$ și deci un astfel de punct nu poate fi pe hiperbolă (fig. 7.11.9). Se poate da acum o nouă definiție a hiperbolei:

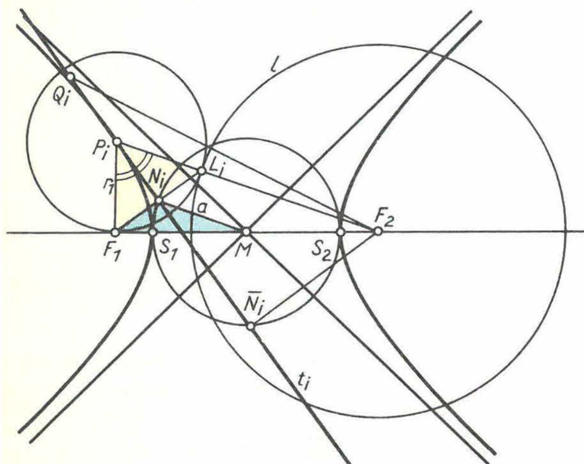
Hiperbola este locul geometric al centrelor P_i ale tuturor cercurilor, tangente exterior unui cerc (cerc director cu raza $2a$ și centrul F_2) și care trec printr-un punct fix F_1 din afara cercului director.

Din figură se poate vedea că:

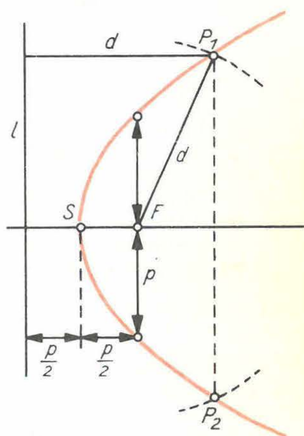
O tangentă la hiperbolă este bisectoarea unghiului format de razele vectoare în punctul de contact.

Dacă M este centrul hiperbolei, atunci dreapta MN_i împarte în părţi egale laturile F_1F_2 şi F_1L_i ale triunghiului $F_1F_2L_i$ şi este *paralelă* la a treia latură a acestui triunghi. Toate punctele N_i, care sînt picioare ale perpendicularelor coborîte din F_1 pe tangenta t_i, se găsesc pe un cerc cu centrul în M şi cu raza a, adică pe cercul vîrfurilor.

Picioarele perpendicularelor coborîte din focare pe tangente se găsesc pe cercul tangent hiperbolei în cele două vîrfuri.



7.11.9. Tangente la hiperbolă



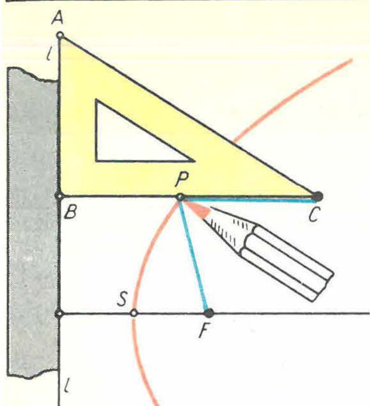
7.11.10. Parabola

Parabola

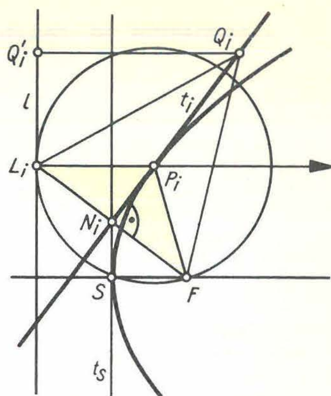
Parabola este locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de un punct fix şi de o dreaptă fixă din plan.

Punctul fix se numeşte *focar* F (fig. 7.11.10), iar dreapta fixă l, *directoare*. Distanţa de la focar la directoare se notează cu p şi se numeşte *parametrul hiperbolei*. Orice paralelă la dreapta directoare, la o distanţă mai mare decît $\frac{p}{2}$ este tăiată de un cerc cu centrul în F şi cu raza d în două puncte ale parabolei P_1 şi P_2. Aceste puncte sînt simetrice faţă de perpendiculara pe directoare prin focar. Această axă de simetrie se numeşte *axa parabolei* şi atinge parabola în vîrful S care are distanţa de la directoare şi de la focar egală cu $\frac{p}{2}$. Se demonstrează prin metodele geometriei analitice că pe perpendiculara pe axă prin focar punctele de intersecţie cu parabola determină un segment de lungime $2p$.

· **Construcţia parabolei cu ajutorul firului.** Şi pentru parabolă există o *construcţie cu ajutorul firului*. Un echer se aşază cu una din catete AB de-a lungul liniei directoare (o riglă). Un fir se fixează cu unul din capete în vîrful C al echerului iar celălalt capăt se fixează în focar



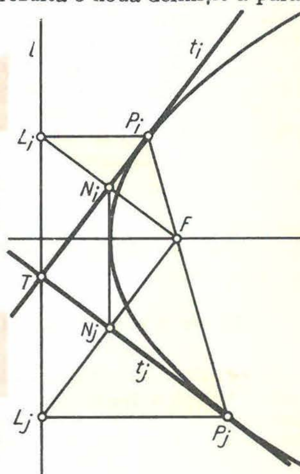
7.11.11. Construcția parabolei cu ajutorul firului



7.11.12. Tangente la parabolă

(fig. 7.11.11). Dacă se mișcă vîrful creionului de-a lungul catetei BC astfel încît firul să fie întins, atunci vîrful creionului descrie o parabolă deoarece distanțele PB și PF sînt egale.

Tangente la parabolă. Dacă P_i este un punct al parabolei, atunci distanța P_iL_i la linia directoare l este egală cu distanța P_iF_i la focar. Triunghiul FL_iP_i este isoscel. Mediatoarea P_iN_i a laturii L_iF este bisectoarea unghiului din vîrful P_i și este tangenta t_i în punctul P_i la parabolă, deoarece orice alt punct Q_i de pe parabolă are distanța Q_iQ_i' la linia directoare mai mică decît distanța $Q_iF = Q_iL_i$ la focar (fig. 7.11.12). De aici rezultă o nouă definiție a parabolei:



7.11.13. Două tangente perpendiculare la parabolă

Parabola este locul geometric al centrelor cercurilor, tangente la linia directoare și care trec printr-un punct fix F.

Pe figură se observă că tangenta în punctul P_i face unghiuri egale cu raza vectoare P_iF și cu paralela dusă prin punctul P_i la axă. Toate razele emise din focare sînt deci reflectate de parabolă paralel cu axa și reciproc razele paralele sînt reflectate în focar. Deoarece punctul N_i (fig. 7.11.12) se găsește pe tangenta t_s în S la parabolă perpendiculară pe axă, rezultă:

Parabola este înfășurătoarea laturilor mobile ale unghiurilor drepte ale căror vîrfuri (N_i) se găsesc pe tangenta la vîrf (t_s) și au o latură care trece prin focar.

Dacă t_j este o altă tangentă, perpendiculară pe t_i și t_i, t_j se intersectează în T, atunci patrulaterul FN_iTN_j este un dreptunghi. Diagonala, lui N_iN, se găsește pe tangenta la vîrf t_s, deoarece ea unește în triunghiul FL_iL_j mijloacele a două laturi. N_i și N_j și deci este paralelă cu a treia, deci paralelă la directoare. Triunghiurile N_iN_jF și N_iN_jT sînt congruente avînd ca bază N_iN_j și aceeași înălțime. Din acest motiv punctul T se găsește la distanța $\frac{p}{2}$ de tangenta la vîrf și se găsește pe directoare.

Toate perechile de tangente perpendiculare la o parabolă se taie pe linia directoare (fig. 7.11.13).

8. Geometrie în spaţiu

Geometria în spaţiu (*stereometria* — în greacă măsurarea corpurilor) este o subdiviziune a geometriei euclidiene. Obiectele ei sînt forma, poziţia, mărimea şi alte relaţii metrice privind corpurile geometrice care nu pot fi cuprinse în plan. Geometria în spaţiu — ca geometrie a spaţiului tridimensional — furnizează o imagine mai aprofundată a relaţiilor din realitatea obiectivă. Pentru rezolvarea unor etape din problemele tratate de geometria în spaţiu se pot examina anumite probleme reduse într-un plan. Există deci o strînsă legătură între geometria în spaţiu şi geometria plană. De asemenea în rezolvarea unor probleme de geometrie în spaţiu se folosesc deseori metode ale geometriei descriptive. De asemenea în *partea calculatorie a geometriei în spaţiu* se folosesc operaţii aritmetice şi algebrice.

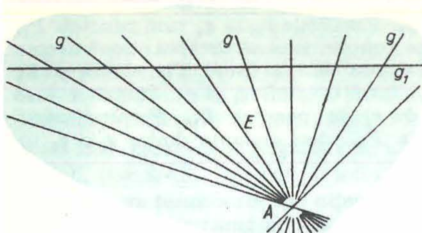
8.1. Noţiuni de bază

Drepte şi plane în spaţiu

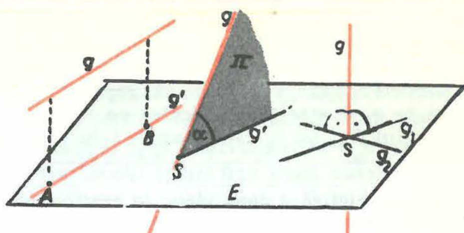
Punctele, dreptele şi planele sînt elemente de bază ale geometriei euclidiene cu trei dimensiuni. Pe lîngă noţiunile de punct şi dreaptă definite în geometria plană, ale căror definiţii se păstrează, trebuie aduse completări şi precizări în ce priveşte noţiunea de plan şi poziţia reciprocă a dreptelor şi planelor în spaţiu.

Planul. Pe cînd în geometria plană planul era considerat ca un cadrul în care se plasau toate problemele, planul în geometria în spaţiu este unul din elementele de bază ale formelor tridimensionale; în special se folosesc porţiuni plane ca suprafeţe ce mărginesc diferite forme geometrice. În spaţiu se poate obţine un plan prin rotirea unei drepte g în jurul unui punct A al ei, astfel încît să se sprijine pe o altă dreaptă g_1 care nu conţine pe A (fig. 8.1.1).

Poziţia unui plan în spaţiu este perfect determinată prin:
1. o dreaptă (g_1) şi un punct (A) care nu se găseşte pe dreaptă;
2. două drepte care se intersectează (g şi g_1);
3. două drepte paralele (caz particular cînd $g \parallel g_1$);
4. trei puncte care nu se găsesc pe aceeaşi dreaptă (A şi două puncte care determină pe g_1).



8.1.1. Generarea unui plan în spațiu



8.1.2. Poziția unei drepte față de un plan E

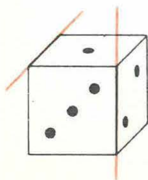
Poziția relativă a dreptelor în spațiu. Pentru orice dreaptă g din spațiu există oricîte paralele g' care se găsesc la o distanță a de g. Toate aceste drepte formează generatoarele unui cilindru a cărui axă este g. Prin orice punct P din spațiu, care se găsește la distanța a de dreapta g, se poate duce o paralelă și numai una la g. Distanța dintre două drepte paralele în spațiu este definită la fel ca în geometria plană, ceea ce se justifică prin aceea că două drepte paralele determină un plan.

Poziția relativă a dreptelor și planelor în spațiu. O dreaptă este conținută într-un plan E dacă are cu planul două puncte comune A și B. Dreapta intersectează planul E și are un singur punct S comun cu planul (fig. 8.1.2) (punct de intersecție). Dreapta formează cu planul unghiul α atunci cînd dreapta g și cu proiecția ei g' pe plan formează în planul de proiecție unghiul α. O dreaptă este perpendiculară pe cel puțin două drepte g_1 și g_2 din planul E care trec prin punctul de intersecție. O dreaptă este paralelă cu planul E dacă este conținută în plan sau nu are nici un punct comun cu planul.

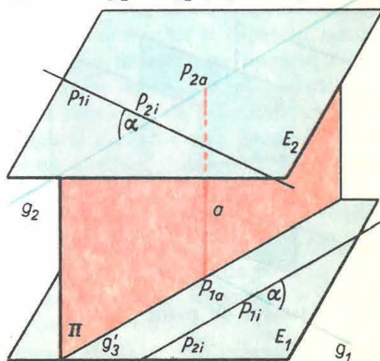
Snop de drepte și fascicul de drepte. Printr-un punct se pot duce în spațiu oricîte drepte. Mulțimea tuturor dreptelor din spațiu care au un punct comun formează un *snop de drepte*. Punctul comun tuturor dreptelor se numește *suportul snopului*. În mod analog mulțimea tuturor dreptelor din spațiu paralele cu o direcție dată, se numește *snop de drepte paralele*. Toate dreptele dintr-un snop care se găsesc în același plan formează un *fascicul de drepte*, respectiv un *fascicul de drepte paralele*. Prin fiecare punct P din spațiu trece un snop și din orice plan care trece prin P un fascicul care este o submulțime a snopului definit de P.

Două drepte din spațiu care nu se intersectează pot să se găsească în același plan și în acest caz sînt paralele, sau pot să nu se găsească în același plan (fig. 8.1.3).

Unghiul și distanța dintre două drepte care nu se găsesc în același plan. Fie g_1 și g_2 două astfel de drepte. Prin orice punct P_{2i} a lui g_2 se poate duce o paralelă p_{1i} la g_1 (fig. 8.1.4). Toate



8.1.3. Exemplu de drepte care nu se găsesc în același plan

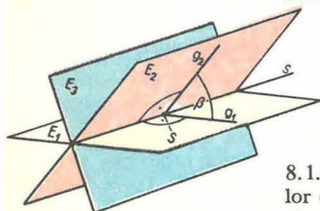


8.1.4. Unghiul α dintre două drepte care nu se găsesc în același plan

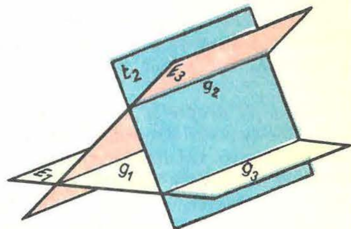
aceste paralele p_{1i} determină un plan E_2 în care se găsește g_2. Unghiul α în E_2 dintre o paralelă p_{1i} și g_2 este considerat unghiul dintre dreptele g_1 și g_2. Paralelele p_{2i} la g_2 prin punctele P_{1i} ale lui g_1 formează același unghi cu g_1 în planul E_1 ce conține această dreaptă. Două drepte care nu se intersectează se zic *ortogonale* cînd unghiul dintre ele este drept. Planele E_1 și E_2 sînt paralele, distanța a dintre ele reprezintă distanța dintre dreptele g_1 și g_2. Planul π care conține pe g_2 și este perpendicular pe E_1 este tăiat de g_1 în punctul P_{1a}. Perpendiculara coborîtă din P_{1a} pe g_2 este conținută în π și taie g_2 în P_{2a}, deci distanța dintre g_1 și g_2 va fi $P_{1a}P_{2a} = a$.

Poziția relativă a două plane în spațiu. Două plane în spațiu care nu coincid au cel mult o dreaptă comună. Două plane în spațiu care coincid sau nu au nici un punct comun se numesc *paralele*.

Fascicul și snop de plane. Mulțimea tuturor planelor din spațiu care trec prin aceeași dreaptă formează un fascicul de plane. Dreapta se numește *suport al fasciculului*. În figura 8.1.5 sînt reprezentate trei plane E_1, E_2, E_3 din fasciculul ce are ca suport dreapta s. Printr-o rotație în jurul suportului se poate realiza suprapunerea oricărei perechi de plane din fascicul. Unghiul cu care trebuie rotit un plan ca să se suprapună cu celălalt plan, de exemplu β, este unghiul celor două plane din fascicul. Prin rotație cele două drepte g_1 în E_1 și g_2 în E_2 perpendiculare în punctul S de pe suport descriu un plan perpendicular în S pe dreapta s. În acest plan se găsește unghiul $\beta = \sphericalangle (g_1, g_2)$. Dacă β este un unghi drept, atunci planele E_1 și E_2 sînt perpendiculare. Un plan E_2 paralel cu dreapta de intersecție g_1 a planelor E_1 și E_3 le taie pe acestea după dreptele paralele g_1, g_2, g_3 (fig. 8.1.6.). Mulțimea tuturor planelor din spațiu care nu au două cîte două nici un punct comun formează un *fascicul de plane paralele*. Pe

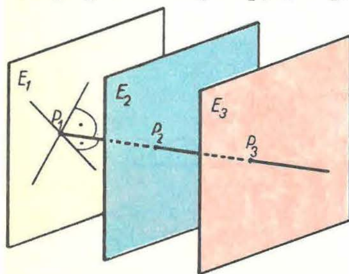


8.1.5. Fascicul de plane avînd ca suport dreapta s.

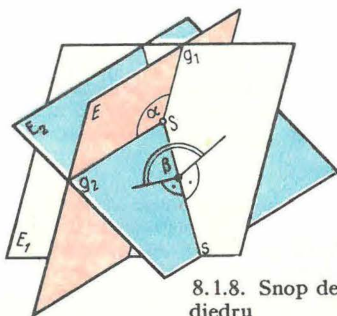


8.1.6. Paralelismul dreptelor de intersecție g_1, g_2, g_3 ale planelor E_1, E_2, E_3

figura 8.1.7 sînt reprezentate trei plane E_1, E_2, E_3 ale unui fascicul de plane paralele. Intersecția planelor din acest fascicul cu un plan ce nu aparține fasciculului se face după drepte paralele. Mulțimea tuturor planelor E, E_1, E_2 din spațiu care trec printr-un punct comun se numește *snop de plane* iar punctul comun *suport* sau vîrf al snopului. Dreptele de intersecție ale planelor din snop s, g_1, g_2 trec prin vîrful S al snopului (fig. 8.1.8). Deoarece planul E nu este perpendicular pe E_1 și pe E_2, unghiul dintre E_1 și E_2 nu va fi α ci β.



8.1.7. Fascicul de plane paralele



8.1.8. Snop de plane și unghi diedru

Distanța dintre două plane paralele. Distanța dintre două plane paralele se definește ca lungimea segmentului care unește un punct al unui plan cu un punct al celuilalt plan, astfel încît acest segment să fie perpendicular pe ambele plane (compară cu distanța dintre două drepte care nu se intersectează).

Unghiuri și diedre

În figura intitulată „Snop de drepte și unghi poliedru" este reprezentat un snop de plane; dreptele de intersecție a trei dintre aceste plane, luate două cîte două, g_1, g_2 și s formează muchiile unui *unghi poliedru* cu vîrful în S. Două muchii determină o *față* a unghiurilor. Unghiurile determinate de două fețe se numesc *diedre*; ele se definesc la fel ca unghiurile dintre două plane. Pe figură sînt reprezentate unghiul plan α între muchiile g_1 și g_2 și unghiul diedru β între planele E_1 și E_2 (fig. 8.1.8). Orice unghi solid are cel puțin trei muchii și trei fețe. Dacă numărul muchiilor este n, atunci se vorbește în general de unghiuri poliedre cu n muchii ($n = 3, 4, 5 ...$). Dacă se duc dintr-un punct interior unui unghi poliedru, perpendiculare pe fețe, se obține un alt unghi poliedru care are drept muchii aceste perpendiculare. Unghiul astfel obținut se numește *unghi-polar* al unghiului dat.

Orice unghi poliedru este unghi polar al unghiurilor lui polare.

În legătură cu unghiurile determinate de un unghi poliedru se pot enunța următoarele propoziții:

1. *Suma tuturor unghiurilor formate de muchiile unui unghi poliedru cu n muchii este mai mică decît 360°.*

2. *Suma tuturor unghiurilor diedre ale unui unghi poliedru cu n muchii este mai mare decît* $n \cdot 180° - 360°$ *și mai mică decît* $n \cdot 180°$.

3. *Unghiul dintre două muchii ale unghiului polar și cu diedrul corespunzător al unghiului poliedru inițial au împreună 180°.*

4. De *asemenea diedrele unghiului polar și cu unghiurile dintre muchiile corespunzătoare ale unghiului poliedru inițial au împreună 180°.*

Corpuri

Noțiuni de bază. Corpul se definește din punct de vedere geometric ca mulțimea tuturor punctelor, dreptelor și planelor din spațiul cu trei dimensiuni care se găsește în interiorul unei suprafețe închise inclusiv punctele, segmentele și porțiunile de plan care se găsesc pe această suprafață. Suprafața care mărginește corpul se numește *suprafața corpului* iar porțiunea din spațiu care se găsește în interiorul acestei suprafețe se numește *volumul corpului*.

Corpurile mărginite numai de porțiuni plane se numesc *poliedre* (în grecește *polys* = multe, *hedron* = plane), de exemplu cubul, prisma și piramida sînt poliedre. Poligoanele plane care mărginesc poliedrul se numesc *fețe*, segmentele comune fețelor se numesc *muchii* și capetele acestor segmente *vîrfuri*. Unghiul format de semiplanele care trec printr-o muchie este *unghiul diedru* determinat de cele două plane. Se poate vorbi despre muchii dintr-o accepțiune mai largă, înțelegîndu-se prin muchii linia după care se intersectează două suprafețe care mărginesc corpul (dintre aceste suprafețe cel puțin una să nu fie plană). Unghiul făcut de cele două suprafețe care se intersectează după această muchie poate fi definit ca unghiul dintre perpendicularele coborîte în punctul considerat al curbei pe planele tangente la cele două suprafețe. [Dacă corpul este convex, atunci corpul se va găsi în interiorul porțiunii de plan determinate de aceste plane.]

Dacă se consideră planul ca o suprafață cu curbură nulă, care coincide cu planul ei tangent, atunci pentru un cilindru drept unghiul dintre suprafața laterală și bază este de 90°; în cazul cilindrului drept acest unghi este unghiul dintre generatoare și raza bazei. Exemple de corpuri mărginite de suprafețe curbe fără muchii sînt sfera, elipsoidul și torul.

Aria suprafeței care mărginește corpul poate fi în general calculată prin însumarea ariilor fețelor și a suprafețelor curbe. Pentru corpurile care se întîlnesc mai frecvent s-au introdus formule de calcul care simplifică procedeul de însumare. Pentru măsurarea volumului corpurilor s-au introdus unități de măsură.

Unități de măsură

Unități de măsură pentru volume. Metrul cub (notat m^3) este volumul unui cub cu muchia de un metru. Din metrul cub derivă următoarele unități mai mari, respectiv mai mici, respectiv multipli și submultipli.

Unitatea de volum	notația	transformarea
kilometru cub	km^3	$1\ km^3 = 10^9\ m^3 = 10^{12}\ dm^3$
metru cub	m^3	$1\ m^3 = 1\ m^3 = 10^3\ dm^3$
decimetru cub	dm^3	$1\ dm^3 = 10^{-3}\ m^3 = 1\ dm^3$
centimetru cub	cm^3	$1\ cm^3 = 10^{-6}\ m^3 = 10^{-3}\ dm^3$
milimetru cub	mm^3	$1\ mm^3 = 10^{-9}\ m^3 = 10^{-6}\ dm^3$

În special în *economia forestieră* — în comerțul cu lemne — se folosesc unitățile:

sterul	ster	1 ster = 1 m^3 de lemn (inclusiv golurile interioare)
metrul cub plin	1 m^3p	1 m^3p = 1 m^3 de masă lemnoasă compactă 1 ster ≈ 0,7 m^3p, 1 m^3p ≈ 1,4 steri

Unități de capacitate. Litrul (notat l) a fost inițial definit ca volumul unui kilogram de apă pură, fără aer, la densitatea sa maximă și sub presiunea de o atmosferă; $1\ l = 1{,}000028 \cdot 10^{-3} m^3$. După noua definiție litrul nu se mai deosebește de decimetrul cub.

Unitate de capacitate	notația	transformarea
hectolitrul	hl	$1\ hl = 10^2\ l = 10^2\ dm^3$
litrul	l	$1\ l = 1\ l = 1\ dm^3$
centilitrul	cl	$1\ cl = 10^{-2}\ l = 10^{-2}\ dm^3$
mililitrul	ml	$1\ ml = 10^{-3}\ l = 10^{-3}\ dm^3$
$1\ m^3 = 10\ hl = 1000\ l$		

În țările anglo-saxone volumul și capacitatea se bazează pe yardul cub (vezi tabela)

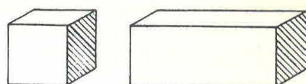
	1 yard cub	ft^3	in^3	1 galon (imp)	1 galon (USA)	1 dm^3	1 m^3
1 yard cub	1	27	46 656	168,2	140,17	764,553	0,765
1 picior cub	0,037	1	1728	6,229	5,191	28,32	0,028
1 inch^3	0,00002	0,00058	1	0,0036	0,004329	0,0164	0,000 16
1 galon (imperial)	0,05945	0,1605	277,42	1	6/5	4,546	0,00455
1 galon (USA)	0,04954	0,1337	231	5/6	1	3,788	0,00379
1 l = 1 dm^3	0,00131	0,0353	61,02	0,22	0,183	1	0,002
1 m^3	1,308	35,314	61 020	220	138	1000	1

8.2. Cubul și paralelipipedul dreptunghic

Generalități

Cubul și paralelipipedul dreptunghic sînt poliedre. Cubul are opt unghiuri poliedre drepte, douăsprezece muchii egale și șase fețe reprezentate de pătrate egale.

Paralelipipedul dreptunghic are ca și cubul opt unghiuri polieșre drepte, douăsprezece muchii dintre care cîte patru egale și paralele. El este mărginit de trei perechi de dreptunghiuri egale și paralele. Cubul este un caz particular de paralelipiped dreptunghic (fig. 8.2.1).



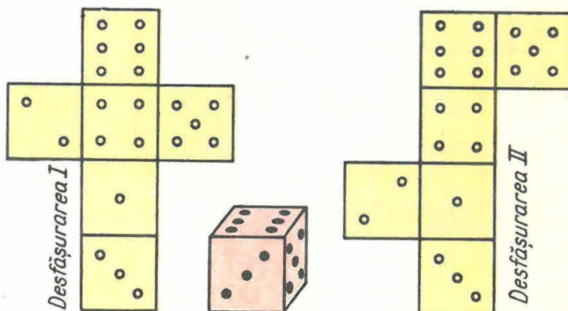
8.2.1. Cubul este un caz particular de paralelipiped dreptunghic

Ariile cubului și paralelipipedului dreptunghic

Dacă se taie suprafața unui poliedru de-a lungul unui număr suficient de mare de muchii, întreaga suprafață a corpului poate fi aplicată pe un plan. Se obține astfel un model plan al suprafeței poliedrului pe care îl vom numi *desfășurarea poliedrului*.

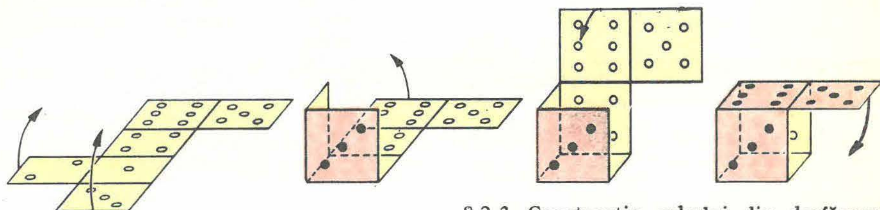
Invers, fiind dată desfășurarea poliedrului prin îndoire și lipire de-a lungul unor muchii se obține poliedrul inițial.

Desfășurarea cubului constă dintr-un sistem de șase pătrate legate între ele. Există mai multe posibilități de ordonare a pătratelor (fig. 8.2.2). Pe figura 8.2.3 se vede cum se reconstituie cubul din desfășurarea dată.

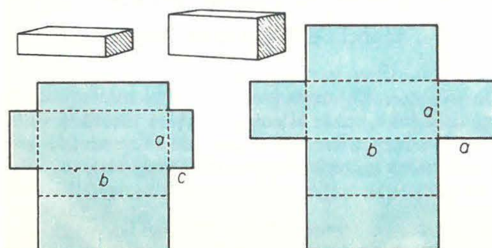


8.2.2. Două desfășurări ale unui cub

Desfășurarea paralelipipedului dreptunghic constă dintr-un sistem de trei perechi de dreptunghiuri congruente. Și aici există mai multe posibilități de ordonare. În figura 8.2.3 sînt reprezentate



8.2.3. Construcția cubului din desfășurare



8.2.4. Două desfășurări ale paralelipipedului dreptunghic

două paralelipipede dreptunghice; cel din dreapta are o pereche de suprafețe laterale formate din pătrate; atunci și celelalte patru dreptunghiuri din desfășurare sînt congruente.

Dacă un paralelipiped dreptunghic are muchiile a, b, c (fig. 8.2.4), atunci cele trei dreptunghiuri vor avea ariile ab, bc și ca iar aria A a paralelipipedului va fi: $A = 2 \cdot ab + 2 \cdot ac + 2 \cdot bc = 2(ab + ac + bc)$.

Aria paralelipipedului dreptunghic	$A = 2(ab + ac + bc)$
Aria cubului	$A = 6a^2$

Un paralelipiped dreptunghic mărginit de o pereche de pătrate va avea aria $A = 2a^2 + 4ab$. În sfîrșit pentru cub: $a = b = c$ și deci $A = 6a^2$.

Volumele cubului și paralelipipedului dreptunghic

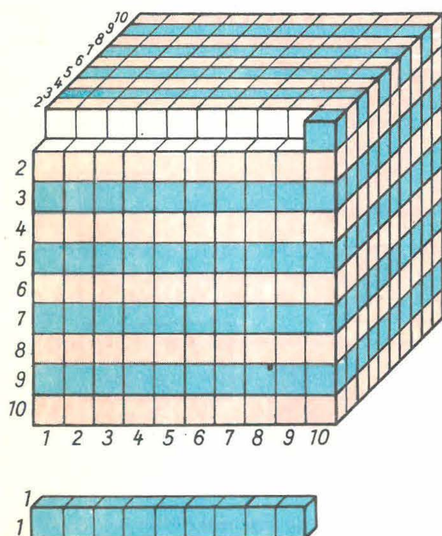
În geometrie aria unei figuri (de exemplu a pătratului) se determină prin acoperirea acesteia cu pătrate cu latură convenabil aleasă. În mod analog se poate proceda și la determinarea volumelor, de exemplu, pentru cub și paralelipiped dreptunghic, prin umplerea acestora cu cuburi cu muchia convenabil aleasă.

Volumul unui cub cu muchia a ($a = 10$ cm) poate fi obținut în modul reprezentat în figura (8.2.5). Rezultă astfel $a (= 10)$ rînduri a cîte a ($= 10$) *cuburi unitate* suprapuse de a ($= 10$) ori,

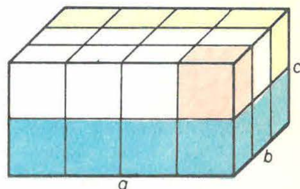
Volumul cubului	$V = a^3$

în total vor fi $a \cdot a \cdot a = a^3$ ($10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000$) cuburi unitate.

Volumul unui paralelipiped dreptunghic cu muchiile a, b și c se poate umple cu a rînduri a cîte b cuburi unitate suprapuse de c ori. Volumul va conține deci $a \cdot b \cdot c$ cuburi unitate (fig. 8.2.6). Pentru cazul particular cu o pereche de fețe formate din nătrate $V = a^2c$.



8.2.5. Volumul decimetrului cub



8.2.6. Volumul unui paralelipiped dreptunghic

Volumul paralelipipedului dreptunghic	$V = a \cdot b \cdot c$

Exemplu. Care este volumul unei cărămizi de format normal $7,1 \times 11,5 \times 24$ cm?
$a = 24$ cm, $b = 11,5$ cm, $c = 7,1$ cm, $V = a \cdot b \cdot c = 24\text{ cm} \cdot 11,5\text{ cm} \cdot 7,1\text{ cm} = 1959,60\text{ cm}^3$.

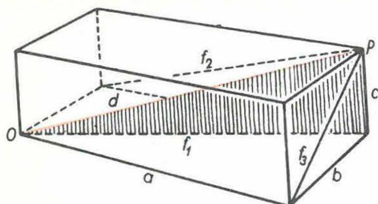
Formulele introduse sînt valabile și atunci cînd lungimile uneia sau mai multor muchii nu sînt multipli ai muchiei e a cubului unitate. Dacă muchiile au ca lungime multipli raționali ai lui e, de exemplu: $a = \frac{p_1 e}{q_1}$, $b = \frac{p_2 e}{q_2}$, $c = \frac{p_3 e}{q_3}$, atunci considerațiile făcute mai sus sînt valabile pentru un cub mai mic a cărui muchie este $e' = e/k$, unde k este cel mai mic multiplu comun al numerelor q_1, q_2, q_3. Un multiplu irațional al lui e poate fi considerat ca limită a unui șir de numere raționale (v. cap. 3). Calculul volumelor corpurilor mărginite de suprafețe definite într-un sistem de coordonate printr-o funcție se face cu metodele calculului integral.

Relații importante

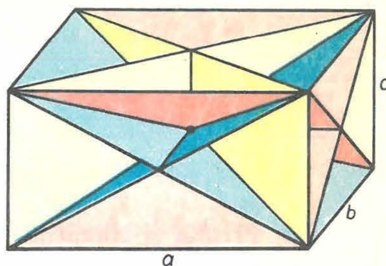
Diagonale. Trebuie făcută deosebire între *diagonalele fețelor* și *diagonalele poliedrului*. Paralelipipedul dreptunghic are 12 diagonale ale fețelor, egale cîte patru, și patru diagonale care unesc vîrfuri conținute în fețe diferite și care sînt egale. Lungimile diagonalelor apar ca ipotenuze

în triunghiuri dreptunghice (fig. 8.2.7) și pot fi calculate cu ajutorul teoremei lui Pitagora. Fie a, b, c cele trei muchii ale paralelipipedului dreptunghic și f_1, f_2, f_3 diagonalele fețelor:

$$f_1 = \sqrt{a^2 + b^2},\ f_2 = \sqrt{a^2 + c^2},\ f_3 = \sqrt{b^2 + c^2}.$$



8.2.7. Lungimea diagonalelor unui paralelipiped dreptunghic



8.2.8. Trei perechi de plane diagonale ale unui paralelipiped dreptunghic

Diagonala paralelipipedului apare ca ipotenuză în triunghiul dreptunghic avînd drept catete una din diagonalele fețelor și muchia care nu s-a folosit la calculul acesteia:

$$d = \sqrt{f_1^2 + c^2} = \sqrt{f_2^2 + b^2} = \sqrt{f_3^2 + a^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Cele patru diagonale ale paralelipipedului formează șase plane diagonale care îl intersectează după șase dreptunghiuri (fig. 8.2.8). Aceste dreptunghiuri sînt două cîte două egale și au ca laturi diagonalele fețelor și muchiile:

Paralelipiped dreptunghic	diagonale ale fețelor	$f_1 = \sqrt{a^2 + b^2},\ f_2 = \sqrt{a^2 + c^2},\ f_3 = \sqrt{b^2 + c^2}$
	diagonale	$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

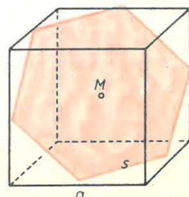
Ariile lor D_1, D_2, D_3 sînt:

$$D_1 = cf_1 = c\sqrt{a^2 + b^2};\quad D_2 = bf_2 = b\sqrt{a^2 + c^2};\quad D_3 = af_3 = a\sqrt{b^2 + c^2}.$$

Diagonalele cubului. Deoarece $a = b = c$ se obține:
$f_1 = f_2 = f_3 = f = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$; $d = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$ și $D_1 = D_2 = D_3 = D = a \cdot f = a\sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2a^2} = a^2\sqrt{2}$.
Muchia, diagonala feței f și diagonala d verifică proporția; $a : f : d = a : a\sqrt{2} : a\sqrt{3} = \sqrt{1} : \sqrt{2} : \sqrt{3}$.

Cub	diagonale ale fețelor	$f = a\sqrt{2}$
	diagonale	$d = a\sqrt{3}$

Centru. Atît pentru cub cît și pentru paralelipipedul dreptunghic are loc propoziția: toate diagonalele trec prin același punct M care determină pe fiecare dintre ele segmente egale (fig. 8.2.8). M se numește *centrul corpului* și este în același timp *centrul de greutate* al corpurilor cu formă de cub sau paralelipiped dreptunghic și cu masa omogenă. M este *centrul cubului* și al sferei circumscrise acestuia. Raza sferei circumscrise este egală cu jumătate din diagonală, deci $r = \frac{a}{2}\sqrt{3}$; raza sferei înscrise este egală cu jumătatea muchiei, deci $\rho = \frac{a}{2}$.



8.2.9. Hexagonul regulat ca secțiune plană a unui cub

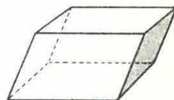
Secțiune prin cub. Prin cub se poate duce o secțiune plană în așa fel încît să rezulte că suprafața de intersecție este un hexagon regulat. Centrul cubului coincide cu centrul hexagonului iar vîrfurile hexagonului se găsesc în mijlocul celor șase muchii ale cubului care pot fi parcurse continuu și care sînt astfel încît nu există printre ele trei cuprinse în același plan (fig. 8.2.9). Acest hexagon regulat se compune din șase triunghiuri echilaterale egale cu latura $s = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ (jumătate din diagonala feței cubului) și aria $A = \frac{s^2}{4}\sqrt{3}$. Aria hexagonului S va fi:

$$S = 6A = 6\frac{s^2}{4}\sqrt{3} = \frac{3s^2}{2}\sqrt{3} = \frac{3a^2}{4}\sqrt{3}.$$

8.3. Prisma și cilindrul

Generalități

Prisma. O dreaptă care se deplasează în spațiu fără să-și schimbe direcția, sprijinindu-se pe linia ce mărginește un poligon cu n laturi ($n = 3, 4, \ldots$) descrie o *suprafață prismatică*; dreapta care trece prin vîrful poligonului se numește *muchie* a acestei suprafețe. Poligonul cu n laturi poate fi privit ca o secțiune a unui plan care taie suprafața prismatică. Dacă se mai face o secțiune a acestei suprafețe printr-un plan paralel, suprafața de secțiune va fi tot un poligon cu n laturi congruent cu primul. Suprafața prismatică împreună cu cele două poligoane de secțiune mărginesc un corp. Acest corp se numește *prismă*, cele două poligoane se numesc *baze* ale prismei iar partea din suprafața prismatică care aparține prismei se numește *suprafața laterală* a acesteia. Liniile care unesc două vîrfuri corespunzătoare ale bazelor se numesc *muchiile laterale* ale prismei. O prismă cu bazele poligoane cu n laturi are n muchii laterale. În total o astfel de prismă are deci $3n$ muchii ($2n$ muchii ale bazelor și n muchii laterale). Toate muchiile laterale au aceeași lungime, de asemenea și muchiile bazelor care sînt paralele. Segmentele conținute în suprafața laterală care sînt paralele cu muchiile laterale se numesc *generatoare* ale prismei. Înălțimea prismei este distanța dintre cele două baze. Dacă muchiile sînt perpendiculare pe baze, atunci prisma se numește *dreaptă* (prismele care nu sînt drepte se numesc *oblice*). Suprafața laterală a prismei drepte se compune din dreptunghiuri. Dacă bazele prismei sînt poligoane regulate, atunci prisma se numește *regulată* iar suprafața laterală se compune din paralelograme congruente. Dreapta care trece prin centrele bazelor unei prisme regulate se numește *axa* prismei și orice plan care trece prin axă se numește *plan axial*. O prismă care are ca baze paralelograme se numește *paralelipiped* (fig. 8.3.1).



8.3.1. Paralelipiped oblic

În optică și la construcția aparatelor optice, se folosesc în mod frecvent lentile prismatice. Descompunerea luminii solare la trecerea printr-o prismă în culorile spectrului (roșu, portocaliu, galben, verde, albastru, indigo, violet) a fost descoperită de fizicianul englez Isaac NEWTON (1643—1727). Aparatele optice ca: binoclul, luneta, luneta astronomică, periscopul, microscopul, aparatul fotografic, folosesc pentru dirijarea razelor diferite combinații de lentile sferice și prismatice.

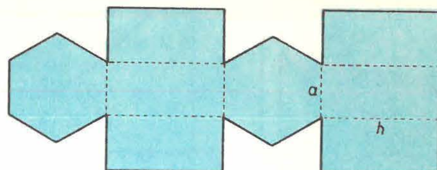
Cilindrul. O dreaptă care se deplasează în spațiu păstrîndu-și direcția și sprijinindu-se pe o curbă numită *directoare*, descrie o *suprafață cilindrică*. *Cilindrul* este corpul mărginit de o suprafață cilindrică cu curba directoare închisă și de două plane paralele între ele (nu însă neapărat paralele la planul curbei directoare). Dreptele paralele între ele care generează suprafața cilindrică se numesc *generatoarele cilindrului* iar cele două secțiuni ale acesteia determinate de planele paralele se numesc *bazele cilindrului*. Bazele cilindrului sînt figuri congruente; distanța dintre planele bazelor se numește *înălțimea cilindrului*. Orice cilindru are două muchii, în sensul propriu-zis al cuvîntului, cele două linii care mărginesc bazele. Dacă în orice punct al acestor muchii unghiul dintre baze și suprafața cilindrică este de 90°, atunci cilindrul se numește *drept*.

După forma bazelor pot fi deosebite mai multe feluri de cilindri: dacă bazele sînt cercuri, atunci cilindrul se numește *cilindru circular*. Cilindrul circular drept se mai numește și *cilindru de rotație*. Dacă dintr-un cilindru confecționat dintr-un material solid se înlătură partea care reprezintă un cilindru cu aceeași înălțime dar cu bazele concentrice cu cele ale cilindrului inițial, se obține un cilindru gol. Aceștia au multe aplicații în tehnică; astfel de cilindri sînt de exemplu

diverși recipienți pentru gaze (gazometre, cazane de presiune), lichide (cisterne) și chiar corpuri solide (containere pentru ciment etc). Conductele sînt cilindri goi cu o lungime foarte mare; ele se folosesc pentru transportul gazelor (sisteme de gaze naturale, abur pentru termoficare) sau al lichidelor (conducte de apă, petrol etc.).

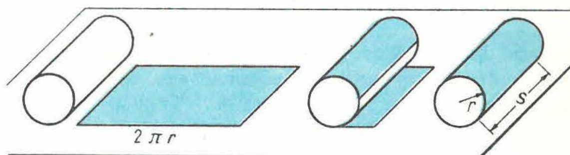
Ariile prismei și cilindrului

Prisma. La fel ca și în cazul cubului, dintr-o prismă se poate obține desfășurarea ei (sau invers din desfășurare se poate reconstitui prisma). Pe figură este reprezentată desfășurarea unei prisme regulate hexagonale (fig. 8.3.2).



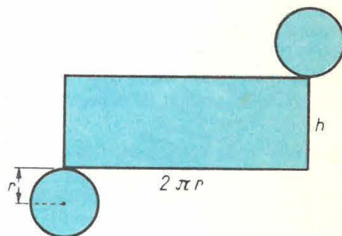
8.3.2. Desfășurarea unei prisme hexagonale regulate

Cilindrul. Pentru a obține suprafața desfășurată a unui cilindru se fac tăieturi de-a lungul unei generatoare și de-a lungul muchiilor bazelor după cum se vede în figură. Suprafața laterală a unui cilindru circular drept secționat se va desfășura în trei faze. Desfășurarea lui se compune dintr-un dreptunghi cu generatoarea s ca înălțime și cu lățimea egală cu lungimea cercurilor de bază, adică $2\pi r$ (fig. 8.3.3) și din două suprafețe circulare cu raza r (fig. 8.3.4). Suprafața laterală secționată desfășurată a unui cilindru care nu este drept va fi mărginită de două drepte paralele și de două sinusoide (fig. 8.3.5). Pentru orice cilindru suprafața sa laterală poate fi desfășurată. Aria A a unei prisme sau a unui cilindru oarecare se poate calcula prin însumarea ariei laterale și a ariilor bazelor. Formula obținută se poate particulariza după caz.



8.3.3. Suprafața curbă desfășurată a unui cilindru circular drept secționat

În principiu orice suprafață cilindrică este desfășurabilă. În practică, desfășurarea, chiar pentru cazul cilindrului circular drept, presupune rectificarea cercului. Se poate obține o aproximare cu o precizie de 0,002% prin construcția lui A. KOCHANSKY (1685), care se poate realiza ușor cu rigla și compasul; se obține $\pi \approx \sqrt{13^1/_3 - 2\sqrt{3}}$ (fig. 8.3.6).



8.3.4. Desfășurarea unui cilindru circular drept secționat

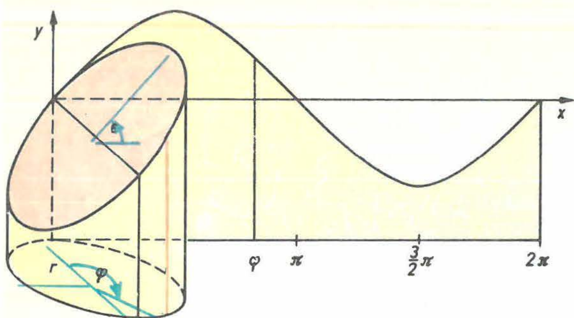
Aria prismei sau a cilindrului	$A = 2A_B + A_l$

Exemplul 1. Aria unei prisme hexagonale regulate (fig. 8.3.2) se poate calcula cunoscîndu-se latura bazei $a = 3$ cm și înălțimea $h = 4$ cm. $A_B = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$ și $A_l = 6ah$, de unde rezultă

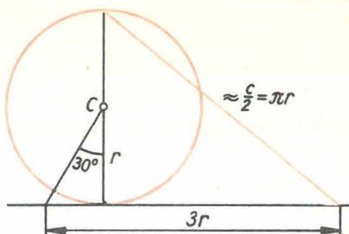
$$A = 2 \cdot \frac{3}{2}a^2\sqrt{3} + 6ah = 3a^2\sqrt{3} + 6ah = 3a(a\sqrt{3} + 2h).$$

Introducînd pentru a și h valorile date, se obține $A \approx 119$ cm².

Exemplul 2. Pentru a calcula aria unei bare de oțel avînd secțiunea un cerc cu diametrul $d = 50$ mm și înălțimea $h = 60$ mm, se obține $A_B = \frac{\pi d^2}{4}$ și $A_l = \pi dh$, de unde $A = 2\frac{\pi d^2}{4} + \pi dh = \pi d\left(\frac{d}{2} + h\right)$ și înlocuind cu valorile date $A = 4\,250\pi$ mm² $\approx 133{,}52$ cm².



8.3.5. Secţiune oblică a unui cilindru circular drept



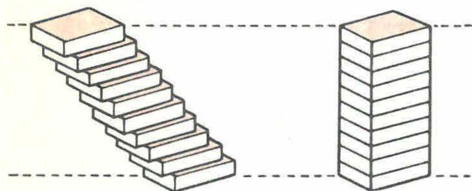
8.3.6. Construcţia aproximativă a lui Kochansky. Rectificarea unui cerc

Principiul lui Cavalieri

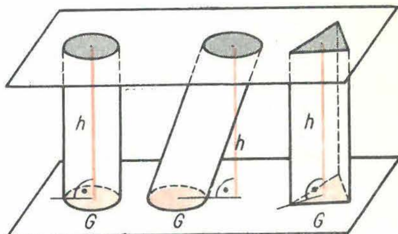
La calcularea volumului prismei şi al cilindrului se foloseşte un principiu enunţat în 1629 de matematicianul italian Bonaventura CAVALIERI (1598—1647), elev al lui GALILEI.

Principiul lui Cavalieri. Corpurile cu aceleaşi secţiuni transversale şi cu aceeaşi înălţime au aceleaşi volume. În particular prismele sau cilindrii cu aceleaşi baze şi aceeaşi înălţime au aceleaşi volume.

Principiul poate fi justificat în mod sugestiv prin considerarea unui corp format din plăci prismatice de înălţime suficient de mică şi apoi prin schimbarea poziţiei plăcilor se obţine un corp de altă formă dar cu acelaşi volum (fig. 8.3.7). Bazele părţilor componente ale acestui corp sînt



8.3.7. Ilustrarea principiului lui Cavalieri



8.3.8. Calculul volumului cu principiul lui Cavalieri

secţiunile transversale care la aceeaşi înălţime au aceeaşi arie. Cu cît înălţimea acestor părţi este mai mică cu atît aria laterală a corpului (cu aspect de trepte) poate fi aproximată printr-o suprafaţă continuă; de exemplu un cilindru circular oblic poate fi aproximat prin suprapunerea unui vraf de cercuri din hîrtie de aceeaşi rază. Principiul enunţat poate fi demonstrat prin consideraţii asupra limitelor şi cu ajutorul calculului integral.

Dacă se notează aria bazei unei prisme cu A_B şi înălţimea corpului cu h, atunci se obţine pentru volumul V al oricărei prisme sau al oricărui cilindru $V = A_B \cdot h$ (fig. 8.3.8).

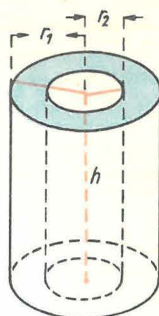
Volumul prismei sau cilindrului	$V = A_B \cdot h$

Volumul cilindrului circular	$V = \pi r^2 h = \dfrac{\pi}{4} d^2 h$

De aici, se obţine, de exemplu pentru *prisma regulată triunghiulară* cu latura bazei a şi înălţimea h,

$$A_B = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}, \quad V = \frac{a^2 h}{4}\sqrt{3}.$$

Pentru prisma regulată pentagonală $A_B = 5 \cdot \frac{a^2}{4}$ cotg 36° și $V = \frac{5}{4} a^2 h \cdot$ cotg 36°.



8.3.9. Calculul volumului cilindrului gol

Bazele unui *cilindru gol* sînt inele circulare congruente, $A_B = \pi r_1^2 - \pi r_2^2$ (fig. 8.3.9); ariile laterale exterioare A_{l_e} și interioare A_{l_i} sînt dreptunghiuri $A_{l_e} = 2\pi r_1 h$, $A_{l_i} = 2\pi r_2 h$, aria cilindrului gol va fi $A = 2A_B + A_{l_e} + A_{l_i} = 2\pi(r_1 + r_2)(r_1 - r_2) + 2\pi r_1 h + 2\pi r_2 h = 2\pi(r_1 + r_2)(r_1 - r_2) + 2\pi[(r_1 + r_2) h]$.

Aria cilindrului gol	$A = 2\pi(r_1 + r_2)(r_1 - r_2 + h)$

Volumul cilindrului gol se obține ca diferență dintre volumul cilindrului mare V_e și volumul cilindrului mic, adică V_i adică $V = V_e - V_i = A_{B_1} h - A_{B_2} h = A_B h$.

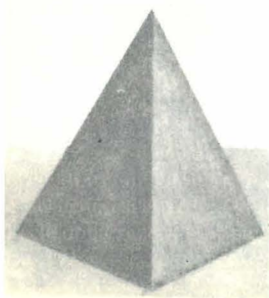
Volumul cilindrului gol	$V = A_B h = \pi(r_1 + r_2)(r_1 - r_2) h$

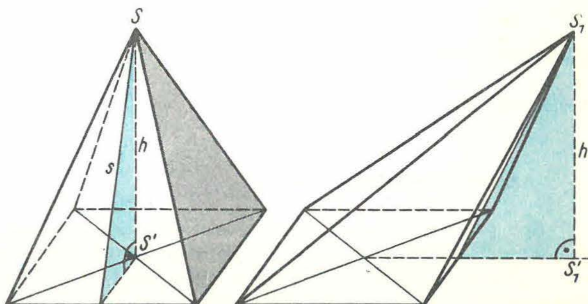
8.4. Piramida și conul

Generalități

Piramida. O semidreaptă care trece printr-un punct fix S din plan și care se sprijină pe linia care mărginește un poligon cu n laturi ($n = 3, 4, \ldots$) conținut într-un plan care nu conține punctul S, descrie o *suprafață piramidală*. Semidreptele care trec prin cele n vîrfuri ale poligonului se numesc *muchii ale suprafeței piramidale*. Poligonul plan cu n laturi împreună cu suprafața piramidală include o porțiune mărginită a planului; corpul geometric astfel definit se numește *piramidă* (fig. 8.4.1). Poligonul cu n laturi este *baza* piramidei și punctul S *vîrful* ei. Segmentele determinate pe fețele suprafeței piramidale de vîrful S și cîte un vîrf al bazei se numesc *muchiile laterale* ale piramidei spre deosebire de laturile poligonului de bază care se numesc *muchiile bazei*. Piramida cu baza un poligon cu n laturi are n muchii laterale și n muchii ale bazei, deci în total $2n$ muchii și n triunghiuri ce compun suprafața laterală. Dreptele conținute în aceste triunghiuri, care trec prin S se numesc *generatoare* ale piramidei.

Înălțimea piramidei este distanța între vîrf și bază și se reprezintă de regulă prin perpendiculara coborîtă din vîrf pe bază. Piciorul acestei perpendiculare este S' care poate să se găsească uneori și în afara bazei (fig. 8.4.2). *Baza* unei piramide regulate este un poligon regulat; dacă piciorul înălțimii coincide cu centrul acestui poligon, atunci piramida se numește *dreaptă*. Fețele laterale ale unei piramide regulate drepte sînt triunghiuri isoscele congruente. **Înălțimea**


8.4.1. Piramida



8.4.2. Piramide patrulatere dreaptă și oblică

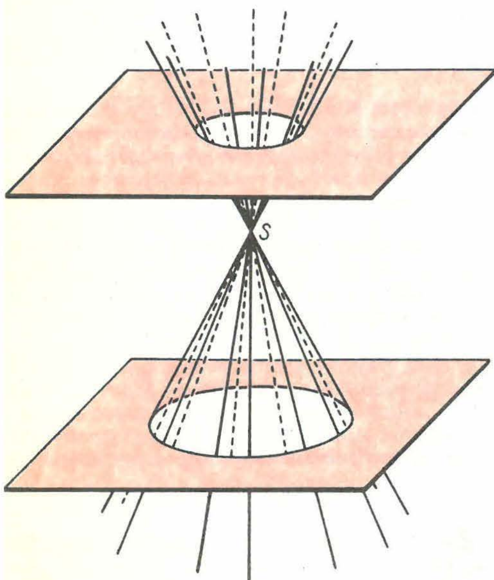
unei piramide drepte este totodată și *axa* ei, o secțiune plană dusă prin axă este o *secțiune axială*. *Tetraedrul regulat* este o piramidă la care atît baza cît și fețele sale laterale sînt triunghiuri echilaterale.

Celebrele monumente funerare ale regilor Egiptului antic sînt piramide patrulatere drepte; cele mai cunoscute sînt piramidele lui Keops, Kefren, Mykerion cu Sfinxul care se află la sud de Cairo la Giseh. Ele au fost construite în urmă cu 5 000 de ani și erau considerate în antichitate una din cele șapte minuni ale lumii.

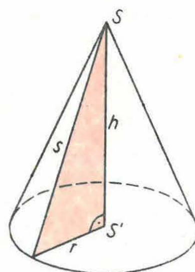
Piramida mare are latura bazei lungă de 227 m (inițial 233 m) și înălțimea de 137 m, cu 10 m mai puțin decît în momentul terminării construcției. Pentru transportul materialelor de construcție folosite ar fi fost necesare 20 000 trenuri de marfă a cîte 30 de vagoane; puse unul lîngă altul ar avea ca lungime dublul distanței aeriene Paris-Volgograd.

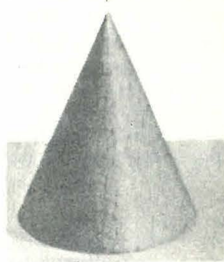
Conul. O dreaptă numită generatoare, care trece printr-un punct fix și se sprijină pe o linie curbă, numită *directoare*, descrie o *suprafață conică*. Conul este un corp mărginit de o suprafață conică cu o curbă directoare închisă și de un plan care nu trece prin punctul S. Suprafața conică determină pe acest plan baza conului. Punctul S se numește *vîrful conului*. Suprafața laterală a conului este porțiunea din suprafața conică cuprinsă între vîrf și bază. Corpul mărginit de o suprafață avînd ca directoare curba închisă și de două plane duse de o parte și de alta a vîrfului S se numește *con dublu* (fig. 8.4.3). Cele două baze sînt figuri asemenea și suma înălțimilor reprezintă distanța dintre cele două plane. După felul bazei pot fi deosebite conuri circulare, conuri eliptice și alte forme de conuri. Dacă baza are un centru S' și perpendiculara din S pe bază cade în S', conul se numește *drept* (fig. 8.4.4). Conurile drepte pentru care toate secțiunile plane prin înălțime sînt congruente pot fi privite ca corpuri de rotație; de exemplu conul circular drept se obține prin rotația unui triunghi dreptunghic în jurul uneia din catete.

În tehnică pot fi întîlnite multe obiecte de forme conice: acoperișuri ale turnurilor, părți de aparate și recipienți (de exemplu silozuri de ciment, părți componente ale diferitelor unelte, ventile conice etc.); și în natură pot fi întîlnite forme conice, de exemplu, munții de origine vulcanică.



8.4.3. Suprafață conică și con dublu

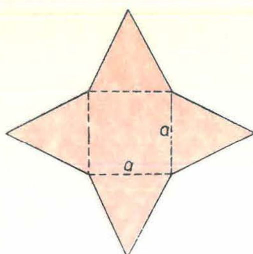




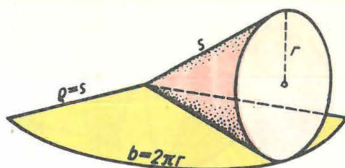
8.4.4. Con circular drept

Ariile piramidei și conului

Se poate obține *desfășurarea* unei piramide prin secționarea ei de-a lungul muchiilor laterale și aplicarea fețelor laterale în planul bazei. Pe figură se poate vedea desfășurarea unei *piramide patrulatere* (fig. 8.4.5). Un *con* se secționează de-a lungul unei generatoare și a cercului bazei. Suprafața laterală a conului circular se desfășoară la fel ca cea a cilindrului circular. În cazul conului rezultă un sector circular (fig. 8.4.6), a cărui rază ρ este lungimea s a generatoarei conului și al cărui arc b este egal cu lungimea cercului de bază, $2\pi r$, precum și suprafața bazei.



8.4.5. Desfășurarea unei piramide patrulatere



8.4.6. Desfășurarea suprafeței laterale a unui con circular drept secționat

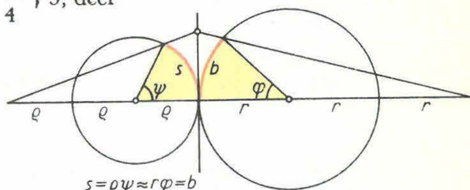
Pentru aria laterală se obține $A_l : \pi\rho^2 = b : 2\pi\rho$, $A_l = \frac{b\rho^2}{2\rho} = \frac{2\pi rs}{2} = \pi rs$. Dacă h este înălțimea conului, atunci $s = \sqrt{r^2 + h^2}$.

Aria laterală a conului circular	$A_l = \pi rs$

Dacă A este aria totală a unei piramide sau a unui con, atunci $A = A_B + A_l$. Această formulă poate fi particularizată după caz. Pentru aria totală a tetraedrului regulat cu latura a (fig. 8.4.4), se obține $A_l = 3A_B$ și $A_B = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, deci

$$A = 4A_B = 4 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = a^2\sqrt{3}.$$

Pentru problema desfășurării arcului s al unui cerc de rază r și unghiul la centru φ, pe un cerc de rază ρ, *construcția lui* NICOLAUS CUSANUS (1401—1464) dă o aproximație grafică destul de bună, dacă unghiurile φ și ψ corespunzătoare celor două arce sînt mai mici decît 45°. (fig. 8.4.7).



8.4.7. Construcția lui Nicolaus Cusanus pentru arcele circulare corespondente

Volumele piramidei și conului

Pentru a se aplica principiul lui Cavalieri în cazul piramidei se face prin piramidă o secțiune paralelă cu baza. Figura obținută prin secțiune este asemenea cu baza. Din teorema privind fasciculele de drepte rezultă că toate segmentele paralele din cele două figuri asemenea s' și s sînt în raportul $s' : s = h' : h$ și deci ariile A' și A ale celor două figuri vor fi în raportul $A' : A = h'^2 : h^2$.

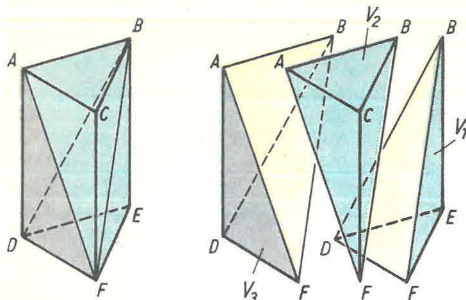
Raportul dintre aria bazei unei piramide și aria unei secțiuni paralele cu baza este egal cu raportul pătratelor distanțelor de la vîrf la planele respective (înălțimilor).

Din principiul lui Cavalieri rezultă:

Două piramide cu baze egale și cu înălțimi egale au același volum.

Deoarece orice piramidă poate fi descompusă în piramide triunghiulare, rezultă că este suficient să se găsească o metodă de calcul al volumului piramidei triunghiulare.

Volumul unei piramide triunghiulare este o treime din volumul prismei care are aceeași bază și aceeași înălțime.



8.4.8. Descompunerea unei prisme în trei piramide triunghiulare

După cum se vede din figura 8.4.8, o prismă triunghiulară poate fi descompusă prin trei secțiuni plane în trei piramide V_1, V_2 și V_3 care au același volum. V_1 și V_2 au ca baze, baza inferioară, respectiv baza superioară a prismei, $\Delta DEF = \Delta ABC$ și ca înălțime, înălțimea prismei. Deoarece $\Delta ACF = \Delta AFD$, V_2 și V_3 au baze egale, înălțimile lor fiind egale cu distanța de la punctul B la fața $ACFD$. Deci dacă A_B este aria bazei și h înălțimea piramidei, atunci volumul ei va fi $V = \frac{1}{3} A_B h$.

Volumul unei piramide	$V = \frac{1}{3} A_B h$

Principiul lui Cavalieri ține seama numai de ariile secțiunilor paralele și nu și de forma acestor secțiuni. Conul poate fi privit ca un caz special de piramidă cu aria bazei $A_B = \pi r^2$ și deci se pot afirma următoarele:

Conurile cu baze egale și înălțimi egale au volume egale. Volumul unui con este o treime din volumul cilindrului cu aceeași bază și aceeași înălțime.

Volumul unui con	$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{12} \pi d^2 h$

Trunchiul de piramidă și trunchiul de con

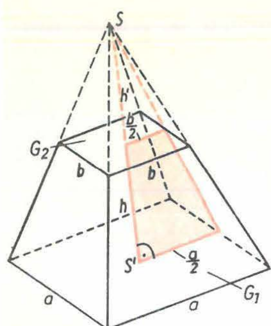
Trunchiul de piramidă rezultă prin înlăturarea dintr-o piramidă a unei piramide mai mici avînd același vîrf cu piramida inițială și baza B_1 paralelă cu baza B_2 a piramidei inițiale. Dacă h' este înălțimea piramidei înlăturate și H înălțimea piramidei inițiale, atunci înălțimea trunchiului de piramidă va fi $h = H - h'$; B_1 și B_2 se numesc *baza inferioară*, respectiv *superioară* a trunchiului de piramidă. Trunchiul de piramidă este drept sau regulat după cum piramida din care provine are aceste proprietăți.

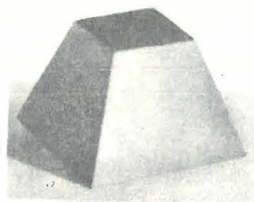
Aria unui trunchi de piramidă	$A = A_{B_1} + A_{B_2} + A_l$

Aria totală a trunchiului de piramidă se compune din ariile bazelor, A_{B_1}, A_{B_2} și aria laterală A_l care la rîndul ei se compune din ariile a n trapeze, atunci cînd B_1 este un poligon cu n laturi. Trunchiul de piramidă are atunci $2n$ muchii ale bazelor și n muchii laterale.

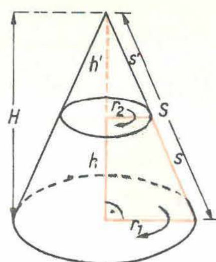
Pentru un trunchi de piramidă patrulateră regulată dreaptă cu laturile bazei a și b (fig. 8.4.9), suprafața laterală se compune din trapeze isoscele. Dacă η este înălțimea acestor trapeze, atunci $\eta = \sqrt{h^2 + \frac{1}{4}(a-b)^2}$ și se obține astfel aria totală $A = a^2 + b^2 + 4\frac{a+b}{2}\eta = a^2 + b^2 + 2\eta(a+b)$.

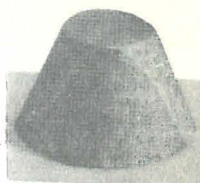
În mod corespunzător se poate obține dintr-un con un trunchi de con (fig. 8.4. 10). Suprafața laterală a trunchiului de con se poate desfășura și apare ca diferența a două sectoare circulare. Într-o secțiune axială a conului inițial cele două raze r_1 și r_2 sînt paralele, și apar în triunghiurile determinate de generatoarea S și înălțimea H, respectiv generatoarea s' a conului înlăturat și înălțimea h' a acestuia; $H = h + h'$, $S = s + s'$. Din teorema asupra fasciculelor de drepte rezultă $r_1 : r_2 = (s + s') : s'$ sau $(r_1 - r_2) : r_1 = s : S$, adică $S = \frac{s r_1}{r_1 - r_2}$, respectiv $s' : s = r_2 : (r_1 - r_2)$





8.4.9. Trunchiuri de piramidă





8.4.10. Trunchiuri de con

sau $s' = \frac{sr_2}{r_1 - r_2}$. Pentru aria totală a trunchiului de con se obține $A = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi(r_1 + r_2)\,s$.

Aria laterală A_l și aria totală A a trunchiului de con circular drept	$A_l = \pi s(r_1 + r_2)$ $A = \pi(r_1^2 + r_2^2) + s(r_1 + r_2) = \frac{\pi}{4}\,[d_1^2 + d_2^2 + 2s(d_1 + d_2)]$

Multe obiecte de uz casnic se aseamănă unui trunchi de piramidă, de exemplu: coșul de rufe, forma de copt; formă de trunchi de con au obiecte ca: ghivece de flori, pahare, abajururi etc.

Volume. Dacă A_{B_1} este aria bazei și $h + h'$ înălțimea piramidei inițiale iar A_{B_2} și h' aria bazei respectiv înălțimea piramidei înlăturate, atunci volumul V al trunchiului de piramidă va fi: $V = \frac{1}{3}\,[A_{B_1}(h + h') - A_{B_2}h']$. Deoarece raportul ariilor a două secțiuni paralele este egal cu raportul pătratelor distanțelor lor de la vîrf rezultă că $h' : (h + h') = \sqrt{A_{B_2}} : \sqrt{A_{B_1}}$. Din această proporție se obține $h' = \frac{h\sqrt{A_{B_2}}}{\sqrt{A_{B_1}} - \sqrt{A_{B_2}}}$ și $h + h' = \frac{h\sqrt{A_{B_1}}}{\sqrt{A_{B_1}} - \sqrt{A_{B_2}}}$.

Volumul trunchiului de piramidă va fi deci:

$$V = \frac{h}{3} \cdot \frac{A_{B_1}\sqrt{A_{B_1}} - A_{B_2}\sqrt{A_{B_2}}}{\sqrt{A_{B_1}} - \sqrt{A_{B_2}}} = \frac{h}{3} \cdot \frac{A_{B_1} - A_{B_2}\sqrt{A_{B_1}A_{B_2}} + A_{B_1}\sqrt{A_{B_1}A_{B_2}} - A_{B_2}^2}{A_{B_1} - A_{B_2}} =$$

$$= \frac{h}{3}\,(A_{B_1} + \sqrt{A_{B_1}A_{B_2}} + A_{B_2}).$$

Relații analoage se obțin și pentru trunchiul de con unde $A_{B_1} = \pi r_1^2$ și $A_{B_2} = \pi r_2^2$.

	Volume	Formule aproximative
Trunchi de piramidă	$V = \frac{h}{3}\,(A_{B_1} + \sqrt{A_{B_1}A_{B_2}} + A_{B_2})$	$V \approx \frac{A_{B_1} + A_{B_2}}{2} \cdot h$
Trunchi de con	$V = \frac{h}{3}\,(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$	$V \approx \frac{\pi h}{2}\,(r_1^2 + r_2^2)$ $V \approx \frac{\pi h}{4}\,(r_1 + r_2)^2$

Cu ajutorul *formulelor aproximative* se obțin în calculul practic rezultate de precizie satisfăcătoare. Ele sînt cu atît mai precise cu cît forma trunchiului de piramidă se apropie de cea a unei prisme ($A_{B_1} \approx A_{B_2}$) și forma trunchiului de con de cea a unui cilindru ($r_1 \approx r_2$). Din cele două formule aproximative, prima dă o aproximație prin exces iar a doua o aproximație prin lipsă.

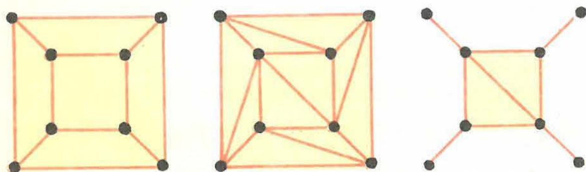
8.5. Poliedre

Teorema lui Euler

Corpurile mărginite numai de suprafețe plane se numesc *poliedre*; cubul, paralelipipedul dreptunghic, piramida și trunchiul de piramidă sînt *poliedre*. Un poliedru se numește *convex* sau *eulerian* dacă segmentul care unește două puncte oarecare conține numai puncte din interiorul poliedrului. Următoarea propoziție privind poliedrele convexe a fost demonstrată de matematicianul elvețian Leonhard EULER (1707—1783); și se presupune că ea era cunoscută deja de ARHIMEDE (aproximativ 287—212 î.e.n.) cînd a fost descoperită de matematicianul francez René DESCARTES (1596—1650).

Teorema lui Euler. Dacă e este numărul vîrfurilor, f numărul fețelor și k numărul muchiilor unui poliedru convex, atunci $e + f - k = 2$.

Pentru demonstrarea teoremei lui Euler asupra poliedrelor ne vom reprezenta corpul gol mărginit de o membrană subțire. Dacă se înlătură una din fețe, atunci restul suprafeței se poate întinde pe un plan (fig. 8.5.1). Prin acest procedeu se modifică unghiurile dintre muchii și forma fețelor dar nu și numărul lor. Mai precis, numărul fețelor a scăzut cu 1. Deci, dacă pentru desfășurarea figurii se verifică $e + f - k = 1$, atunci teorema lui Euler este demonstrată.



8.5.1. Desfășurarea plană a unui cub pentru demonstrarea teoremei lui Euler asupra poliedrelor

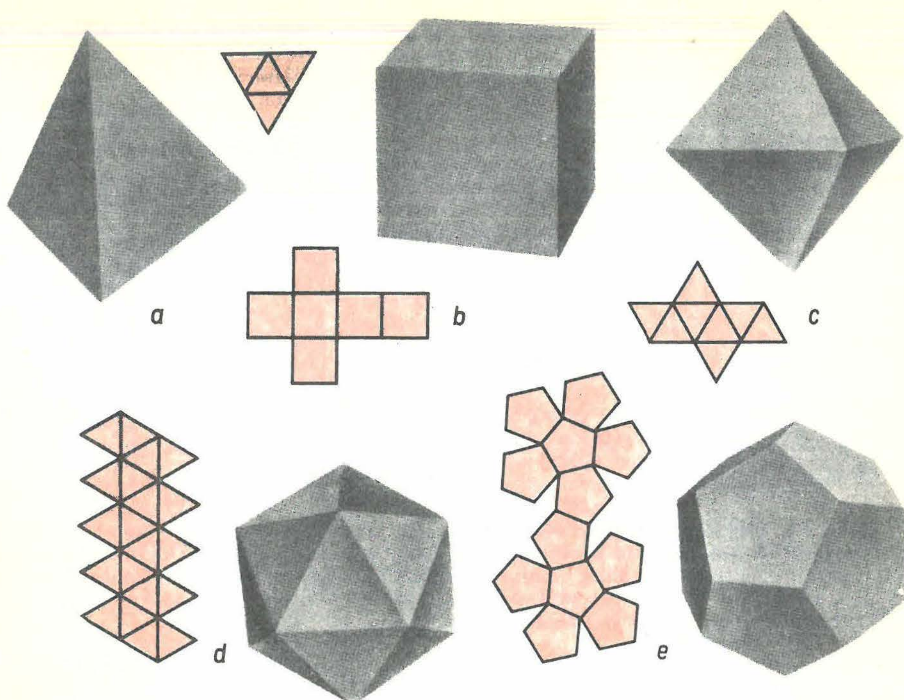
Dacă se descompune desfășurarea în triunghiuri prin ducerea diagonalelor, atunci suma $e+f-k$ nu se schimbă, deoarece atît f cît și k cresc cu cîte o unitate. Dacă se înlătură începînd de la margine, cîte o latură din fiecare triunghi care nu este totodată latură a unui alt triunghi, atunci f și k scad cu cîte o unitate. Dacă se înlătură o muchie cu un vîrf care nu aparține și altei muchii, atunci e și k scad cu cîte o unitate astfel încît diferențele $f - k$, respectiv $e - k$ rămîn neschimbate. Se procedează la fel în continuare pînă ce se verifică că pentru $e = 3$, $k = 3$ și $f = 1$, $e + f - k = 1$.

Poliedre regulate

Cele cinci poliedre convexe regulate (fig. 8.5.2). Dacă suprafața unui poliedru se compune numai din poligoane regulate congruente, atunci poliedrul se numește *regulat*.

Deoarece suma tuturor unghiurilor formate de muchiile ce trec printr-un vîrf este mai mică decît 360°, rezultă că există numai cinci poligoane regulate convexe: 1. fețele poliedrului sînt triunghiuri echilaterale; atunci deoarece unghiurile dintre două muchii ce pornesc din același vîrf sînt de 60°, rezultă că în acel vîrf se întîlnesc trei, patru sau cinci fețe laterale; 2) fețele laterale sînt pătrate (unghiurile dintre două muchii sînt de 90°) și 3) fețele laterale sînt pentagoane regulate (unghiurile dintre două muchii alăturate sînt de 108°). În cazurile 2 și 3 din fiecare vîrf pornesc cîte trei fețe laterale.

Un poliedru regulat convex nu poate fi mărginit de hexagoane regulate, deoarece în acest caz unghiurile dintre două muchii sînt de 120°, 3 · 120° nu este mai mic decît 360°.



8.5.2. Cele cinci corpuri regulate:
a) tetraedrul; b) cubul; c) octaedrul; d) icosaedrul; e) dodecaedrul

Din aceste considerații rezultă cinci poliedre convexe regulate pentru care numărul vîrfurilor, muchiilor și fețelor este dat de schema următoare:

Felul fețelor	nr. fețelor	Numărul			Denumirea corpului regulat
		vîrfurilor e	fețelor f	muchiilor k	
Triunghiuri echilaterale	3	4	4	6	Tetraedru
Triunghiuri echilaterale	4	6	8	12	Octaedru
Triunghiuri echilaterale	5	12	20	30	Icosaedru
Pătrate	3	8	6	12	Cub
Pentagoane regulate	3	20	12	30	Dodecaedru

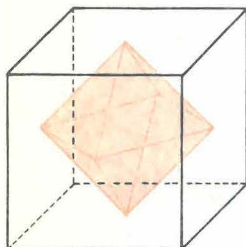
În studiul poliedrelor regulate convexe, relația dintre acestea și *sferele înscrise, respectiv circumscrise* este foarte importantă. Pentru acest tip de poliedre, centrele acestor sfere coincid cu centrul corpului. Sfera circumscrisă trece prin toate vîrfurile poliedrului regulat și sfera înscrisă este tangentă tuturor fețelor laterale în centrul acestora. De aici, rezultă: perpendicularele pe fețe ridicate în centrul fețelor se taie în centrul poliedrului.

Dacă n este numărul laturilor unei fețe, m numărul muchiilor ce pornesc dintr-un vîrf, e numărul vîrfurilor poliedrului, f numărul fețelor și k numărul tuturor muchiilor, atunci dacă a este lungimea muchiei, aria și volumul corpului sînt date în următorul tabel:

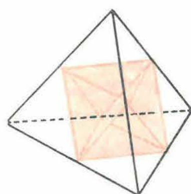
Corp regulat	n	m	e	f	k	A	V
Tetraedru	3	3	4	4	6	$a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3}{12}\sqrt{2}$
Cub	4	3	8	6	12	$6a^2$	a^3
Octaedru	3	4	6	8	12	$2a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3}{3}\sqrt{2}$
Dodecaedru	5	3	20	12	30	$3a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$	$\frac{a^3}{3}(15+7\sqrt{5})$
Icosaedru	3	5	12	20	30	$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{5}{12}a^3(3+\sqrt{5})$

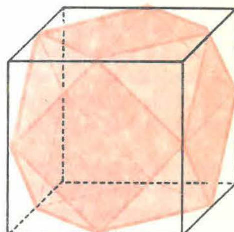
Dualitate. Săgețile încrucișate din tabel indică dualitatea corpurilor respective. Numărul vîrfurilor și fețelor se permută între ele; acest lucru se vede pe figura 8.5.3 în cazul cubului și al octaedrului. Numărul muchiilor rămîne, conform teoremei lui Euler, neschimbat: $v_1 + f_1 = f_2 + v_2 = e + 2$.

Tetraedrul este propriul lui dual.



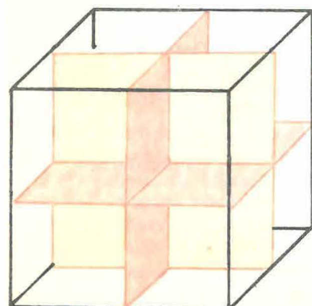
8.5.3. Dualitatea dintre cub și octaedru





8.5.4. Poliedru trunchiat. Tetraedrul devine octaedru (stînga) și cubul devine un cristal mediu (dreapta)

Poliedre trunchiate (retezate). Dacă se înlătură, dintr-un poliedru regulat, vîrfurile în așa fel încît să se obțină secțiuni plane congruente, atunci corpul rămas va fi tot un poliedru regulat sau semiregulat (arhimedic) după cum poliedrul retezat are toate fețele congruente sau în fiecare vîrf se unesc poligoane regulate diferite. Poliedrul retezat din figură se numește *cristal mediu* pentru că se poate obține atît din cub cît și din octaedru cu secțiuni duse prin mijloacele muchiilor (fig. 8.5.4). De exemplu, un cub poate fi retezat astfel încît din fiecare față (pătrat) să rezulte un octaedru regulat.



8.5.5. Plane principale ale cubului

Cristale

Pe cînd majoritatea corpurilor din natură sînt mărginite de fețe neregulate, cristalele prezintă aproape unicul exemplu de corpuri regulate.

Legea invarianței unghiurilor prin care se stabilește că în toate cristalele cu aceeași compoziție chimică, unghiurile

dintre fețe sînt egale a fost descoperită de medicul și naturalistul danez Niels STENSEN (1638—1668). Pentru a studia simetria cristalelor pe lîngă noțiunile de centru de simetrie și axe de simetrie se introduce și noțiunea de *plan de simetrie*.

Cubul admite, pe lîngă cele trei axe de simetrie, și 9 plane de simetrie care trec prin centrele a cîte două fețe opuse (fig. 8.5.5). Cele trei plane de simetrie principale sînt paralele la două fețe opuse și trec prin centrul cubului. Pe fiecare dintre acestea sînt perpendiculare două plane de simetrie care conțin fiecare două diagonale ale cubului.

Următorul tabel dă o privire de ansamblu asupra planelor de simetrie din cele șase sisteme de cristale.

Sistem	Numărul		Exemple
	planelor de simetrie	planelor principale de simetrie	
Regulat	9	3	Cub (sare) octaedru (fier magnetic), tetraedru (minereu de antimoniu), dodecaedru (sulf)
Hexagonal	7	1	Prisma hexagonală, piramida hexagonală dublă (cuarț)
Tetragonal	5	1	Stîlp pătratic și piramidă
Rombic	3	0	Piramida dublă cu baza romb (sulf)
Monoclin	1	0	
Triclin	0	0	Sulfat de cupru

8.6. Sfera

Generalități

Prin rotirea unui cerc (semicerc) în jurul unui diametru, perimetrul acestuia descrie o suprafață sferică. Porțiunea din spațiu, închisă de o suprafață sferică, se numește *sferă*. Sfera este locul geometric al tuturor punctelor din spațiu a căror distanță la un punct fix este constantă. Punctul fix se numește *centrul sferei*. Formele sferice joacă un rol important în viața cotidiană a omului, de exemplu, rulmenții, mingea sau corpurile cerești.

Poziția relativă a dreptelor și sferelor. Dreptele pot avea cu o suprafață sferică un punct comun, două puncte comune sau nici un punct comun.

Secantă. Coardă. O secantă taie suprafața sferică în două puncte. Partea din această secantă care conține numai puncte ale sferei se numește *coardă*. Coarda cea mai lungă este diametrul sferei; centrul sferei se găsește la jumătatea diametrului. Orice segment determinat de centru și de un punct al suprafeței sferice se numește *rază*.

Tangente. Tangenta atinge sfera într-un punct (fig. 8.6.1). În punctul de contact se pot duce oricîte tangente; toate aceste tangente determină planul tangent. Raza în punctul de contact este perpendiculară pe planul tangent.

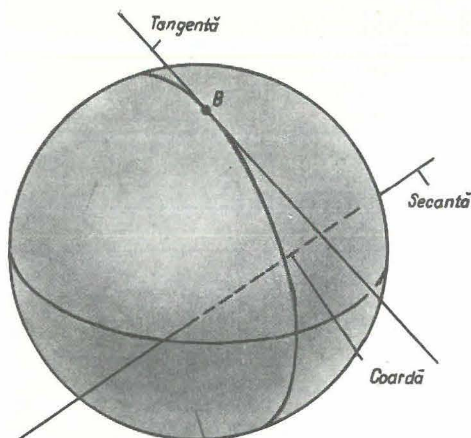
Poziția relativă a sferelor și planelor. Un plan și o suprafață sferică au în comun un cerc, un punct sau nici un punct.

Calotă sferică, segment sferic. Orice plan taie sfera după un cerc, care poate fi un cerc mare sau un cerc mic (v. cap. 12). Planul împarte suprafața sferică în două calote sferice și sfera în două segmente sferice. Aceste calote și segmente (fig. 8.6.2) sînt egale dacă planul trece prin centrul sferei.

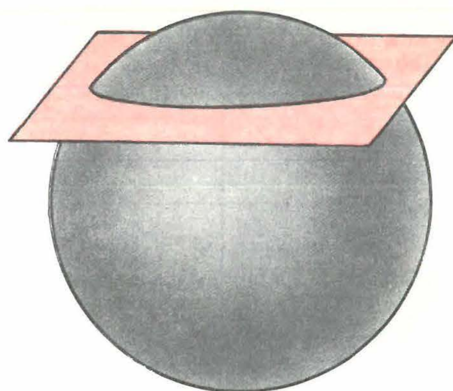
Zonă sferică. Două plane paralele delimitează dintr-o sferă o zonă sferică. Zona sferică este mărginită de două cercuri dintre care numai unul poate fi un cerc mare al sferei.

Două cercuri mari delimitează dintr-o sferă patru pene sferice.

Sector sferic. Dacă raza unei sfere se mișcă sprijinindu-se de-a lungul unui cerc al sferei ea va descrie o suprafață conică și împarte sfera în două *sectoare sferice*.

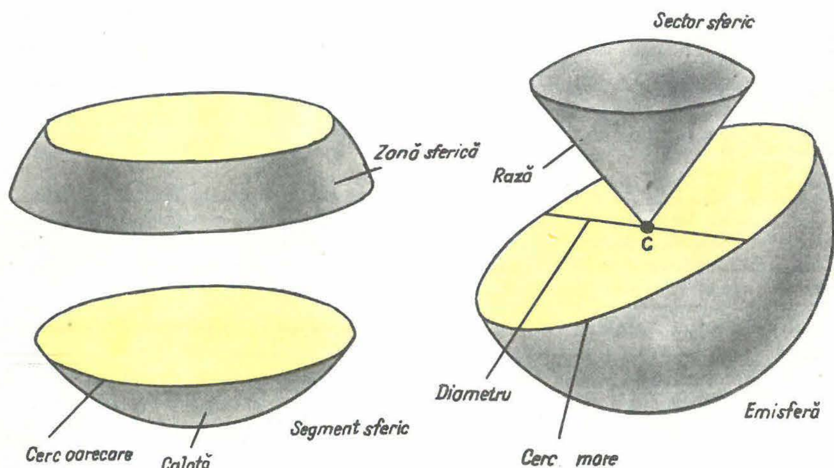


8.6.1. Sfera și linii importante referitoare la sferă



8.6.2. Intersecția unei suprafețe sferice cu un plan este un cerc

Principalele părți ale sferei sînt reprezentate pe figura 8.6.3.

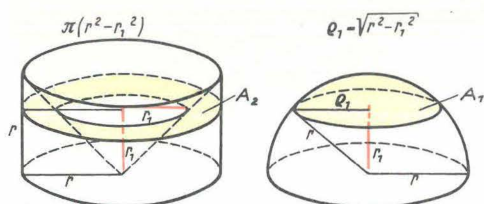


8.6.3. Sfera și părțile ei

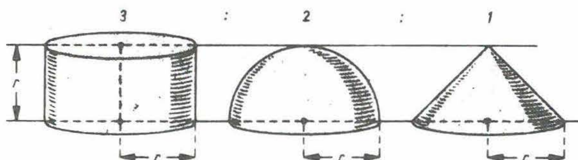
Volume

După principiul lui Cavalieri emisfera de rază r are același volum ca *cilindrul circular drept* cu raza r și înălțimea r din care sa înlăturat un *con circular drept* cu înălțimea r și raza r (fig. 8.6.4). Un plan aflat la o distanță r_1 ($r_1 < r$) de bază, paralel cu aceasta, taie emisfera după un cerc cu raza $\rho_1 = \sqrt{r^2 - r_1^2}$ și corpul echivalent (cilindrul fără con) după un inel circular cu razele r și r_1. Suprafețele de secțiune au ariile $A_1 = \pi\rho_1^2 = \pi(r_2 - r_1^2)$ și $A_2 = \pi r_2 - \pi r_1^2$ și deci cele două arii sînt egale. S-a demonstrat astfel că emisfera are volumul

$$V_H = \pi r^3 - \frac{\pi}{3} r^3 = \frac{2}{3} \pi r^3.$$



8.6.4. Deducerea formulei pentru volumul unei sfere



8.6.5. Volumele acestor trei corpuri sînt în raportul 3:2:1

Volumul sferei	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Volumul părților sferei. *Segment sferic.* Formula pentru volumul segmentului sferic se deduce după același principiu (compararea emisferei cu partea din cilindru rămasă după înlăturarea conului (fig. 8.6.6). În acest caz, în locul conului apare un trunchi de con:

$$V = \pi r^2 h_1 - \frac{\pi h_1}{3}[r^2 + (r - h_1)r + (r - h_1)^2] = \frac{\pi h_1}{3}[3rh_1 - h_1^2] = \frac{\pi h_1^2}{3}(3r - h_1).$$

Deoarece $\rho^2 = r^2 - (r - h_1)^2 = 2rh_1 - h_1^2$ sau $6rh_1 - 2h_1^2 = 3\rho^2 + h_1^2$, rezultă

$$V = \frac{\pi h_1}{6}(3\rho^2 + h_1^2),$$

unde r este raza sferei, h_1 înălțimea segmentului și ρ raza cercului de secțiune.

Volumul segmentului sferic	$V = \frac{\pi h_1^2}{3}(3r - h_1) = \frac{\pi h_1}{6}(3\rho^2 + h_1^2).$

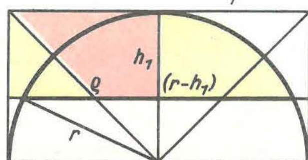
Zonă sferică. Dacă o zonă sferică are înălțimea (distanța dintre cercurile de secțiune) h și razele cercurilor de secțiune ρ_1 și ρ_2, atunci după principiul lui Cavalieri volumul ei va fi egal cu diferența dintre volumul unui cilindru $\pi r^2 h$ și al unui trunchi de con cu razele bazelor $r_1 = r_2 + h$ și r_2 (fig. 8.6.7). Se obține

$$V = \pi r^2 h - \frac{\pi h}{3}[(r_2 + h)^2 + (r_2 + h)r_2 + r_2^2] = \frac{\pi h}{6}(6r^2 - 6r_2^2 - 6r_2 h - 2h^2).$$

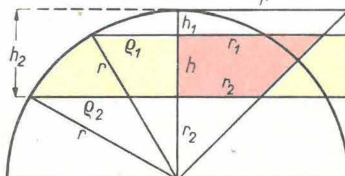
Din relațiile $\rho_1^2 = r^2 - (r_2 + h)^2$, $\rho_2^2 = r^2 - r_2^2$, $\rho_1^2 + \rho_2^2 = 2r^2 - 2r_2 h - 2r_2^2 - h^2$, $3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + h^2 = 6r^2 - 6r_2^2 - 6r_2 h - 2h^2$ rezultă $V = \frac{\pi h}{6}(3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + h^2)$.

Volumul zonei sferice	$V = \frac{\pi h}{6}(3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + h^2)$

Sector sferic. Volumul sectorului sferic este suma volumelor unui con și al unui segment sferic; $V^{sect} = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h) + \frac{\pi}{3}\rho^2(r - h)$, unde h este înălțimea segmen-



8.6.6. Deducerea formulei pentru volumul segmentului sferic



8.6.7. Deducerea formulei pentru volumul zonei sferice

tului, $r - h$ înălțimea conului și ρ raza cercului director. Deoarece $\rho^2 = h(2r - h)$, rezultă $V_{sect} = \frac{2}{3} \pi r^2 h$.

Volumul sectorului sferic	$V = \frac{2}{3} \pi r^2 h$

Sfera goală. O sferă goală se compune dintr-o sferă cu raza r_1 din care s-a înlăturat o sferă cu același centru și raza r_2 $(r_1 > r_2)$. Volumul sferei goale este atunci diferența dintre volumul acestor sfere: $V_{sferei\ goale} = \frac{4}{3} \pi r_1^3 - \frac{4}{3} \pi r_2^3 = \frac{4}{3} \pi (r_1^3 - r_2^3)$.

Volumul sferei goale	$V = \frac{4}{3} \pi (r_1^3 - r_2^3)$

Arii

Aria sferei. Spre deosebire de suprafața laterală a conului și a cilindrului suprafața sferei nu poate fi desfășurată. Pentru deducerea formulei ariei sferei sînt necesare considerații asupra limitelor.

Dacă o sferă se descompune cu ajutorul razelor în n piramide cu baza poligoane cu vîrfurile pe suprafața sferică, avînd ariile A_{B_i}, cînd n crește, înălțimile h_i se deosebesc foarte puțin de raza r. Atunci suma ariilor A_{B_i} și suma volumelor $\frac{1}{3} A_{B_i} h_i$ aproximează destul de bine aria sferei A și volumul V al sferei. Din $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=1}^{n} A_{B_i} = A$, $\lim\limits_{n \to \infty} h_i = r$ și $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=1}^{n} A_{B_i} h_i = V$ rezultă $V = \frac{1}{3} r \cdot A$, respectiv $A = \frac{3V}{r} = 4\pi r^2$.

Aria sferei este egală cu de patru ori aria unui cerc mare al sferei.

Aria sferei	$A = 4\pi r^2$

La fel ca și cercul, dintre toate corpurile cu aceeași arie sfera are volumul maxim și dintre toate corpurile cu același volum, aria cea mai mică (vezi probleme isoperimetrice din capitolul „Calculul variațiilor"). Această proprietate a sferei are o mare importanță; evaporarea și pierderile de căldură sînt mai mici pentru formele sferice decît pentru alte forme. Din acest motiv în tehnică, sînt preferați uneori recipienți sferici.

Aria părților sferei. Pentru găsirea formulei ariei A a *calotei sferice* se procedează ca și în cazul ariei sferei, adică din $V_{sector} = \frac{2}{3} \pi r^2 h$ și din relația $\frac{2}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} r . A_{calotei}$ rezultă $A_{calotă} = 2\pi r h$, unde h este înălțimea segmentului corespunzător. (Fig. 8.6.3). Aria *zonei sferice* se poate obține ca diferență a două calote. Dacă h este înălțimea zonei respective, h_2 înălțimea calotei mari și h_1 a celei mici, se obține

$A_{zonă} = A_{calota2} - A_{calota1} = 2\pi r h_2 - 2\pi r h_1 = 2\pi r (h_2 - h_1)$ și deoarece $h_2 - h_1 = h$ rezultă $A_{zonă} = 2\pi r h$.

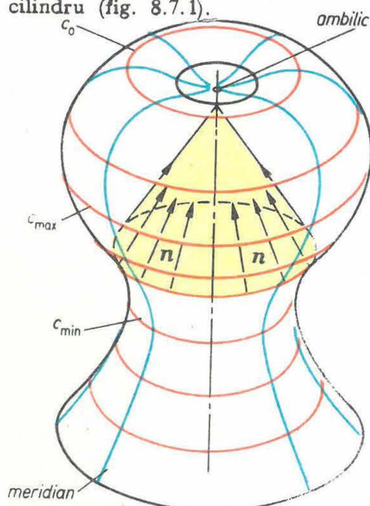
Formulele pentru $A_{calotei}$ și A_{zonei} nu se deosebesc formal, numai h este de fiecare dată altceva.

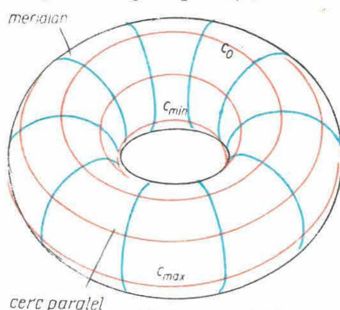
Aria *sectorului sferic* este suma ariei calotei și a suprafeței laterale a conului: $A_{sector} = 2\pi r h + \pi \rho r = \pi r (2h + \rho)$, unde h este înălțimea segmentului respectiv, ρ raza cercului de bază a conului și r raza sferei și totodată generatoarea conului.

Arii					
Calota sferică	$A = 2\pi r h$	Zona sferică	$A = 2\pi r h$	Sector sferic	$A = \pi r(2h + \rho)$

8.7. Alte corpuri

Corpuri de rotație. De cînd s-a inventat roata olarului, *corpurile de rotație* au avut numeroase aplicații. Orice plan prin axa de rotație taie *suprafața de rotație* după un *meridian* sau un *profil* și fiecare plan perpendicular pe axă taie suprafața după un *cerc paralel*. Orice suprafață de rotație poate fi acoperită cu o rețea ortogonală de meridiane și de cercuri paralele. Normalele **n** ale suprafețelor de-a lungul unui cerc paralel format din puncte regulate formează de regulă un con de rotație. Pentru cercurile de rază maximă și minimă, conul degenerează într-un plan și pentru un cerc de-a lungul căruia un plan tangent atinge suprafața, conul degenerează într-un cilindru (fig. 8.7.1).





8.7.2. **Tor** cu diferite poziții ale cercului de rotație

8.7.1. Corp de rotație: normala **n**, conul normal de-a lungul unei secțiuni circulare este colorat cu galben; de-a lungul unui cerc într-un plan tangent, acesta devine cilindru circular; de-a lungul unui cerc a cărui rază este un maxim sau un minim relativ, acesta degenerează într-un plan.

Corpuri de rotație binecunoscute sînt sfera, conul de rotație, cilindrul de rotație, paraboloidul de rotație, hiperboloidul de rotație cu o pînză, hiperboloidul de rotație cu două pînze, elipsoidul de rotație (vezi cap. 24), torul, pseudosfera și catenoidul.

Un *tor* se obține prin rotația unui cerc de rază r în jurul unei axe din planul cercului la o distanță $a > r$ de centrul acestuia (fig. 8.7.2). Torul este o *suprafață tubulară*.

Pseudosfera se obține prin rotația tractricei în jurul asimptotei ei. Dacă se alege axa O a unui sistem de coordonate carteziene ca asimptotă și dacă a este distanța vîrfului A măsurată pe axa Oy, atunci volumul pseudosferei este $V = 2\pi a^3/3$. În orice punct regulat, suprafața are curbură gaussiană constantă și negativă. Datorită acestei proprietăți, pseudosfera servește ca model pentru geometria neeuclidiană hiperbolică după cum sfera servește ca model pentru geometria neeuclidiană eliptică.

Centrele de curbură ale tractricei se găsesc pe *lănțișor* care este astfel evoluta *tractrice*[1] (fig. 19.5.11). Prin rotația lănțișorului în jurul directoarei sale rezultă *catenoidul* care este unica suprafață de rotație reală minimală.

Regulile lui Pappus. Pentru a calcula volumul și aria corpurilor de rotație, PAPPUS din Alexandria (sfîrșitul sec. 3. î.e.n.) a dat reguli, care astăzi se deduc cu ajutorul calculului integral.

Regula lui Pappus pentru aria suprafețelor. Dacă o curbă plană C se rotește în jurul unei drepte l în planul ei, astfel încît C se găsește pe o parte a lui l, atunci aria S a suprafeței de rotație rezultate este egală cu produsul dintre lungimea curbei generatoare C și lungimea drumului parcurs în rotație de centrul de greutate al lui C.

Regula lui Pappus pentru volume. Dacă o parte a unui plan A se rotește în jurul unei drepte în plan care are cel mult puncte frontieră în comun cu A, atunci volumul V al corpului de rotație rezultat este egal cu produsul dintre aria lui A și lungimea drumului parcurs în rotație de centrul de greutate al lui A.

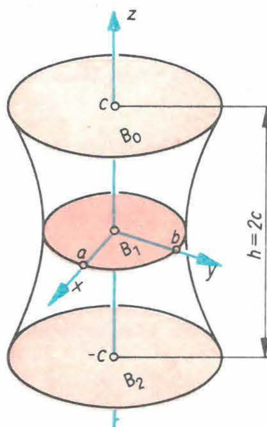
Exemplul 1: Pentru un tor (fig. 8.7.2) aria suprafeței S este dată de $S = 2\pi a \cdot 2\pi r = 4\pi^2 ar$ și volumul de $V = 2\pi a \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 ar^2$.

Exemplul 2. Prin rotația unui semicerc în jurul diametrului se obțin valorile binecunoscute ale ariei suprafeței și volumului pentru sferă și astfel se pot calcula distanțele ρ_C și ρ_A ale centrelor de greutate ale arcului semicircular, respectiv discului semicircular, la axă. Din $S = 4\pi r^2 = s \cdot 2\pi\rho_C$ cu $s = \pi r$ se obține $4\pi r^2 = 2\pi^2 r\rho_C$ și astfel $\rho_C = 2r/\pi$. Din $V = 4\pi r^3/3 = 2\pi\rho_A A$ cu $A = \pi r^2/2$ se obține $4\pi r^3/3 = \pi^2 r^2 \rho_A$ și astfel $\rho_A = 4r/(3\pi)$.

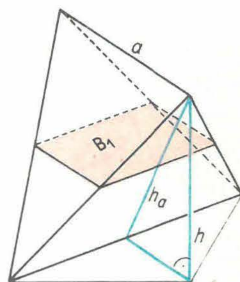
Regula lui Kepler, regula lui Simpson. Unele formule aproximative pentru calculul volumului unui corp sînt deosebit de utile în practică. În multe cazuri speciale formulele dau valorile exacte. Într-o lucrare amplă privind *geometria butoaielor*, KEPLER (1571—1630) a găsit o formulă aproximativă pentru determinarea volumului V al unui butoi, unde B_0, B_2, B_1 sînt ariile celor două baze și a secțiunii medii iar h este înălțimea butoiului.

Regula lui Kepler	$V = h(B_0 + 4B_1 + B_2)\,6$

Formula dă valori exacte pentru trunchiul de piramidă, sfera, paraboloidul eliptic, hiperboloidul cu o pînză, elipsoidul și toate corpurile obținute din acestea prin secțiuni perpendiculare pe axă.



8.7.3. Hiperboloid



8.7.4. Tetraedru

Exemplul 1. Planele $z_0 = c$, $z_2 = -c$, $z_1 = 0$, taie hiperboloidul cu o pînză $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) - (z^2/c^2) = 1$ după secțiuni de arii $B_0 = B_2 = 2\pi ab$ și $B_1 = \pi ab$. Corpul mărginit de B_0, B_2 și de hiperboloid (fig. 8.7.3) are înălțimea $2c$ și volumul $V = (8/3)\pi abc$.

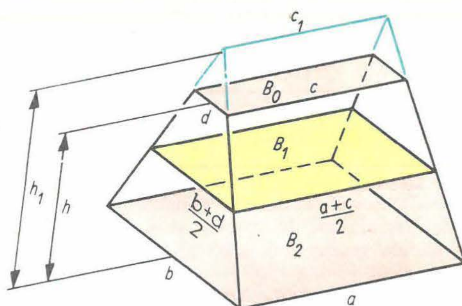
Exemplul 2. Pe paraboloidul de rotație $z = x^2 + y^2$ planele $z_0 = 1$ și $z_2 = 9$ delimitează un corp pentru care $B_0 = \pi$, $B_2 = 9\pi$, $B_1 = 5\pi$ și $h = 8$; astfel volumul corpului este $V = 40\pi$.

Exemplul 3. Pentru un tetraedru cu muchia a (fig. 8.7.4), $B_0 = B_2 = 0$, $B_1 = a^2/4$ și $h^2 = h_a^2 - a^2/4$ și $h = a/\sqrt{2}$. Volumul găsit prin regula lui Kepler este: $V = a^3\sqrt{2}/12$.

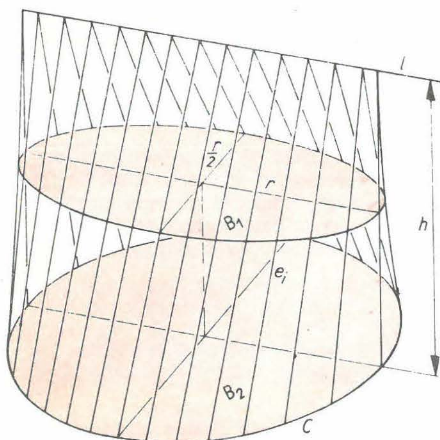
Deoarece *regula lui Kepler* dă rezultate exacte pentru piramidă și tetraedru, ea poate fi aplicată fără erori pentru *prismoizi*. De asemenea ea dă aproximații bune pentru butoaie și trunchiuri de copac care nu sînt prea lungi. Ea nu poate fi aplicată corpurilor de rotație ale căror curbe meridiane prezintă discontinuități pe direcția tangentei și pentru corpuri ale căror înălțimi sînt mari în comparație cu diametrul mediu. În cazurile critice se poate obține o precizie mai mare făcîndu-se mai multe măsurători prin împărțirea înălțimii h în $n = 2k$ părți egale și aplicînd regula lui Kepler pentru cele k felii rezultate. Dacă B_i este aria secțiunii i, volumul se obține cu ajutorul *regulii lui* SIMPSON (1710—1761).

Regula lui Simpson	$V = h/(3n)\,\{B_0 + 4(B_1 + B_3 + \ldots + B_{n-1}) + 2(B_2 + B_4 + \ldots + B_{n-2}) + B_n\}$

Conoizi. În tehnică conoizii au o deosebită importanță practică. În general aceștia se generează astfel. Fiind dată o *curbă directoare* c, o *dreaptă directoare* l și un *plan de direcție* neparalel cu l, conoidul este format de mulțimea dreptelor care se sprijină pe c și pe l și sînt paralele cu planul. Dacă curba directoare este un cerc al cărui plan nu conține dreapta directoare, se obține un *conoid circular*. Pentru un *conoid circular drept*, dreapta directoare este perpendiculară pe planul de direcție și este intersectată sub unghiuri drepte de axa cercului în afara planului cercului. Un plan paralel cu planul cercului intersectează conoidul după o elipsă (fig. 8.7.5). Regula lui Kepler aplicată unui conoid circular drept dă volumul exact. Dacă r este raza cercului de bază și h înălțimea, atunci $B_0 = \pi r^2$, $4B_1 = 2\pi r^2$, $B_2 = 0$ și $V = \pi r^2 h/2$.



8.7.6. Prismoid, ponton, pană



8.7.5. Conoid

Prismoizi. *Prismoidul*, este un poliedru care are ca baze două poligoane oarecare paralele iar ca fețe laterale triunghiuri sau trapeze. Prisma, piramida și trunchiul de piramidă sînt cazuri particulare de prismoizi. Pentru prismă, baza inferioară și baza superioară sînt congruente iar la piramidă baza superioară degenerează într-un punct. Alte forme speciale de prismoizi sînt *pana*, un prismoid la care baza superioară degenerează într-o dreaptă, și *pontonul* care este o pană trunchiată (fig. 8.7.6). O pană se descompune printr-o secțiune paralelă cu baza într-un ponton și într-o pană mai mică; cele două baze ale pontonului sînt asemenea iar trapezele laterale două cîte două congruente. Un ponton pentru care înălțimea este foarte mare în comparație cu bazele este deseori denumit *obelisc*. Aplicarea regulii lui Kepler prismoizilor dă valori exacte pentru volumele lor. Pentru un ponton avînd laturile bazei a și b, laturile acoperișului c și d și înălțimea h avem $B_0 = ab$, $4B_1 = (a + c)(b + d)$, $B_2 = cd$ și astfel $V = h[2(ab + cd) + ad + bc]/6$. Pentru $d = 0$ corpul este o pană cu $c = c_1$ și volumul $V = h_1 b(2a + c_1)/6$. În tehnică pana se folosește ca unealtă de despicare și ca element component al diferitelor mașini. Formă de ponton au diferite elemente de construcții plutitoare, poduri transportabile și docuri. Obeliscurile apar la unele monumente. Pietrele de moară au uneori această formă. În sfîrșit diferitele forme de acoperișuri pot fi denumite în general prismoizi.

9. Geometrie descriptivă

Geometria descriptivă studiază și aplică reprezentări ale spațiului tridimensional, în planul bidimensional al planșetei de desen.

În alegerea reprezentărilor au prioritate două cerințe: claritatea și păstrarea măsurilor.

Imagini clare se obțin, de exemplu, prin proiecție centrală deoarece imaginea din planul desenului imită ceea ce se vede cu ochiul. Modul cel mai uzual de păstrare a măsurilor constă în utilizarea proiecției normale. Deoarece una dintre dimensiuni se pierde prin reprezentarea în plan a obiectelor tridimensionale, păstrarea proporțiilor este posibilă numai sub rezerva anumitor restricții. Imaginile axonometrice care păstrează norma dau o reprezentare clară a obiectului spațial prin respectarea proporțiilor. Printre acestea imaginile obținute prin axonometrie frontală sînt în general preferate, datorită simplității lor.

Dacă desenul tehnic și construcțiile pot fi considerate drept mijloace suplimentare de comunicație, alături de vorbire și scriere, ele trebuie să se realizeze în concordanță cu unele convenții ale geometriei descriptive. Elaborarea acestor convenții, adecvate scopurilor practice, a fost fundamentată de MONGE (1746—1818) care, prin celebra sa lucrare, „Géometrie descriptive" și prin cercetările sale în domeniu este considerat drept fondatorul geometriei descriptive.

9.1. Reprezentări în geometria descriptivă

Proiecția centrală

În proiecție centrală, o reprezentare se obține cu ajutorul unui *fascicul de drepte* ce trec printr-un punct V, situat în afara *planului de proiecție*, π. *Imaginea, în proiecția centrală* a unui punct arbitrar $P \neq V$ este $P^c = r_p \cap \pi$, intersecția razei $r_p = VP$ cu planul imagine π. În această proiecție toate punctele planului π_V, care trece prin V și este paralel cu π, vor fi reprezentate ca puncte de la infinit ale planului π. Acest plan, π_V se numește *plan de fugă* (fig. 9.1.1).

Imaginea în proiecția centrală l^c, a unei *drepte* l, care nu trece prin V și nu este conținută în π_V este tot o *dreaptă*, deoarece razele care proiectează punctele ei, de exemplu $r_A = VA$ și $r_B = VB$ formează un *plan*, care se intersectează cu planul π după o dreaptă (fig. 9.1.2). Punctul L, în care dreapta l înțeapă planul π reprezintă propria sa imagine și se găsește pe $l^c (L = l \cap \pi)$. *Proiecția centrală* l^c a dreptei l este determinată în mod univoc prin imaginile A^c și B^c a două puncte A și B. Punctul L_V în care dreapta l intersectează planul π_V se numește *punct de fugă al dreptei* l; imaginea sa este *punctul impropriu* al dreptei l^c. Imaginea punctului impropriu al dreptei l este punctul de intersecție L_u^c al planului π cu raza r_l, paralelă cu l, ce trece prin V. Acest punct de fugă L_u^c reprezintă *imaginea punctului* comun de la infinit al tuturor dreptelor paralele cu l. Punctul de fugă al tuturor dreptelor perpendiculare pe planul π este reprezentat de piciorul perpendicularei coborîte din punctul V pe planul π și se numește *punct principal de fugă*, H. Lungimea d a segmentului VH se numește *le distanță*. Punctele de fugă ale tuturor dreptelor care taie planul π sub un unghi de 45° sînt situate pe un cerc cu centrul în H și de rază d, numit *cerc de distanță*.

9,1,1, Planul imagine și planul de fugă în proiecție centrală

9.1.2. Reprezentarea unei drepte în proiecție centrală

Proiecția paralelă

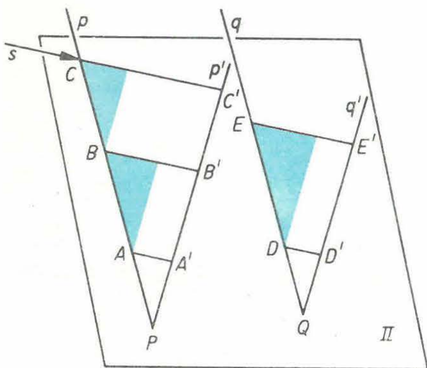
Dacă vîrful V al fasciculului de raze care realizează reprezentarea în proiecție centrală se găsește la infinit, se obține *proiecția paralelă* a punctelor P din spațiu, prin punctele P' ale planului π. Deoarece razele care proiectează punctele unei drepte p formează un plan, imaginea p' a dreptei este tot o dreaptă, în general, și imaginile a două drepte paralele p și q sînt paralele. Doar atunci cînd dreapta dată l_0 este paralelă cu razele proiectoare, imaginea sa este un punct $L_0 = (l_0 \cap \pi)$. Pentru dreptele care nu sînt paralele cu razele proiectoare sînt valabile următoarele teoreme:

Raportul în care trei puncte împart o dreaptă este invariant în această proiecție, de exemplu $|AB|:|BC| = |A'B'|:|B'C'|$ (fig. 9.1.3).

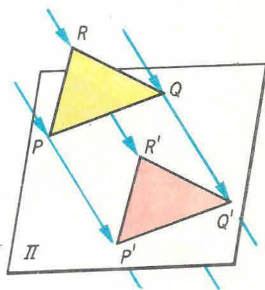
Raportul a două segmente situate pe drepte paralele este invariant în proiecția paralelă, de exemplu $|AB|:|DE| = |A'B'|:|D'E'|$.

Imaginea unei figuri aflate într-un plan paralel cu π este congruentă cu figura originală, de exemplu $\Delta PQR \cong \Delta P'Q'R'$ (fig. 9.1.4).

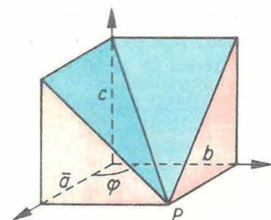
Proiecție oblică. Dacă corpul solid ce urmează a fi reprezentat are trei muchii respectiv perpendiculare, sau axe de simetrie a,b,c, atunci se poate obține constructiv o *proiecție oblică (proiecția paralelă oblică)* a sa. Dacă planul imagine π se alege vertical, atunci corpul solid poate fi adus într-o asemenea poziție, încît două din cele trei axe ale sale să fie paralele cu π, una dintre ele, de exemplu b, orizontală, iar cealaltă, de exemplu c, verticală (fig. 9.1.5). A treia axă, a, ca și toate dreptele paralele cu aceasta sînt perpendiculare pe planul π și se numesc *linii de adîncime*. Imaginile acestora sînt paralele și fac cu imaginea lui b unghiul de deformare $\varphi = (\bar{a}, b)$, unde $\bar{a}$ este imaginea lui a. Raportul $\lambda = \bar{a} : a$, dintre lungimea imaginii segmentului și lungimea sa originală, măsurată pe linia de adîncime se numește *raport de deformare*. Pot fi reconstituite dimensiunile figurii spațiale, plecînd de la desenul imaginii sale.



9.1.3. Constanta raportului de diviziune în proiecția paralelă



9.1.4. Imaginea unei figuri paralele cu planul imagine este congruentă cu originalul în proiecția paralelă



9.1.5. Imaginea oblică a unei secțiuni a cubului

Pentru ușurința construcției unghiul φ se alege egal cu una din valorile de 30°, 45°, 60° sau 120°, care se pretează desenării cu echere, iar raportul de deformare λ se alege astfel încît să fie un număr rațional simplu, ca de exemplu 1, 1 : 2, 2 : 3, 1 : 3 sau 3 : 4.

Proiecția normală sau ortogonală. În această reprezentare razele proiectoare paralele sînt perpendiculare pe planul imagine π. Claritatea mult redusă a imaginii este compensată în două moduri.

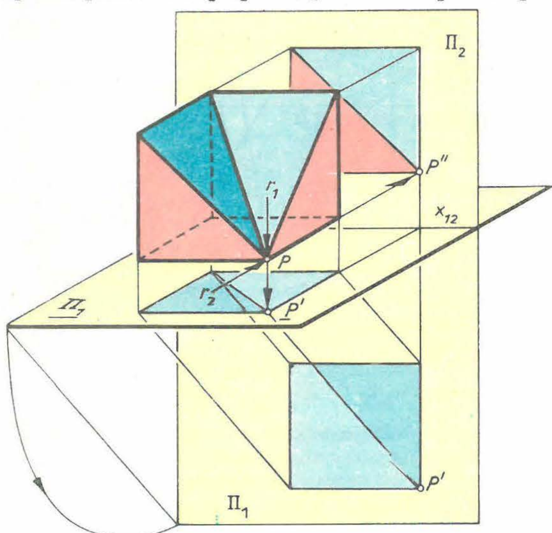
1) Punctele sau liniile obiectului sînt reperate prin cotele lor deasupra planului orizontal de referință. Aceasta se aplică în mod special în proiecția lucrărilor de teren și în reprezentarea reliefului.

2) Imaginea normală se compară cu o a doua imagine normală, în cadrul aceluiași desen. Aceasta se realizează dacă direcțiile de proiecție și planurile imagine care dau cele două imagini normale sînt perpendiculare. Metoda celor două plane de proiecție, schițată aici, se aplică în construcțiile de mașini și arhitectură.

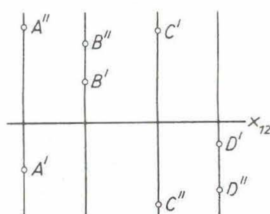
9.2. Metoda celor două plane

În metoda celor două plane obiectul din spațiul cu trei dimensiuni este reprezentat prin proiecțiile sale normale pe două plane perpendiculare, π_1 și π_2 (fig. 9.2.1). Aceste plane împart spațiul în patru cvadranți (fig. 9.2.2). Un obiect din spațiul cu trei dimensiuni este reprezentat în planul π_1 printr-un fascicul de drepte paralele și în planul π_2, printr-un al doilea fascicul de drepte paralele. În acest fel se obțin două proiecții normale ale unui obiect, în două plane perpendiculare și anume proiecția orizontală în planul π_1 și proiecția verticală, în planul π_2. Este de preferat ca obiectul ce urmează a fi reprezentat să fie situat în cvadrantul întîi. Pentru comoditatea desenatorului care lucrează cu aceste două imagini ale unui obiect, proiecția verticală este plasată în planul desenului, iar proiecția orizontală este rabătută în jurul axei x_{12} astfel încît și aceasta să ajungă în planul desenului. După această rotație, proiecția verticală se găsește deasupra axei, iar proiecția orizontală, sub axă. Proiecțiile orizontală, respectiv verticală ale unui punct P se găsesc pe o dreaptă perpendiculară pe axă. Această dreaptă se numește dreaptă directoare (de ordine). Se spune că proiecția orizontală P' și proecția verticală P'' ale punctului P se află într-o poziție Monge. Distanța dintre P'' și axă linia de pămînt) este numită prima distanță, d_1, iar cea dintre P' și axă este numită a doua (distanță, d_2 ale lui P. Corespunzător proiecțiilor orizontală P' și verticală P'' ale punctului P avem razele de proiectare r_1, respectiv r_2, ambele trecînd prin P.

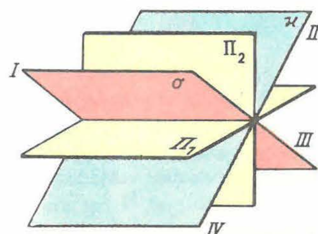
Dacă obiectul se găsește în primul cvadrant, atunci proiecția sa verticală se va găsi totdeauna deasupra axei orizontale, respectiv proiecția sa orizontală sub această axă. Este însă posibil să avem de reprezentat corpuri care să se găsească în ceilalți trei cvadranți. De exemplu, punctele A, B, C, D se găsesc respectiv, în cvadranții I, II, III și IV (fig. 9.2.2). Distanțele d_i corespunzătoare satisfac următoarele inegalități: pentru $A : d_1, d_2 > 0$, pentru $B : d_1 > 0$, $d_2 < 0$, pentru $C : d_1, d_2 < 0$, pentru $D : d_1 < 0, d_2 > 0$.



9.2.1. Imagini oblice ca reprezentări ale unui obiect spațial (tridimensional) în proiecțiile perpendiculare în coordonate



9.2.2. Proiecția orizontală și verticală a patru puncte A, B, C, D:
A se află primul cvadrant, *B* în al doilea, *C* în al treilea, *D* în al patrulea

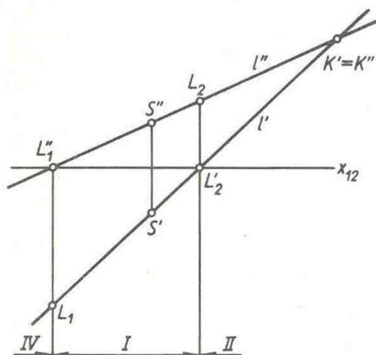


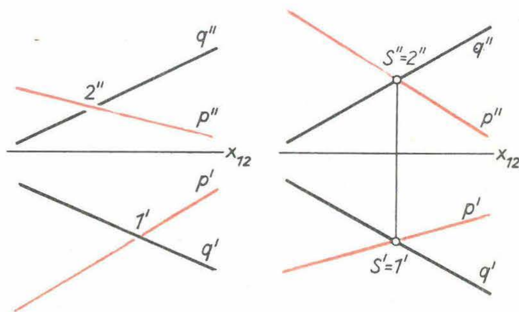
9.2.3. Planuri de coincidență și de simetrie

Pentru punctele a căror proiecție orizontală (verticală) se găsește pe axă, $d_2 = 0$ ($d_1 = 0$). Toate punctele aflate în planul de simetrie σ (planul de coincidență, $\varkappa$) este valabilă relația $d_1 = d_2$ ($d_1 = -d_2$). În cazul proiecției pe două plane, în planul desenului se suprapun două planuri-imagine. Printr-o combinație convenabilă de construcții geometrice plane, aplicată celor două imagini ale unui obiect, pot fi rezolvate probleme ale construcțiilor geometrice spațiale. Axa x_{12} nu trebuie, de aceea, privită ca o linie de separare între proiecțiile orizontală și verticală, aceasta ilustrînd intersecția celor două plane imagine, înaintea rabaterii care le-a adus în planul desenului.

Reprezentarea dreptelor și planelor

Reprezentarea unei drepte. Proiecțiile l' și l'' ale *unei drepte* l sînt determinate în mod univoc prin proiecțiile a două puncte ale sale. Pentru o primă dreaptă principală, h_1 paralelă cu π_1, proiecția sa verticală h_1'' este paralelă cu axa x_{12}; pentru *o a doua dreaptă principală* h_2 paralelă cu π_2 proiecția sa orizontală, h_2' este paralelă de asemenea cu x_{12}. Poziția unei drepte oarecare l, care nu intersectează axa x_{12} și nu este o dreaptă principală este determinată de urmele sale, adică punctele de intersecție cu planele π_1 și π_2. $L_1 = (l \cap \pi_1)$ se numește *prima urmă*, iar $L_2 = (l \cap \pi_2)$ se numește *a doua urmă* (fig. 9.2.4); punctele L_1'' și L_2' se găsesc pe x_{12}. Punctul de intersecție $K' = K''$ al proiecțiilor dreptei corespunde punctului K, în care dreapta l intersectează planul de coincidență. Pentru *o dreaptă* l, perpendiculară pe π_1 avem $l' = L_1$, în timp ce pentru o dreaptă l perpendiculară pe π_2, $l'' = L_2$. Două drepte, p și q se intersectează într-un punct S din spațiu dacă și numai dacă punctele de intersecție ale proiecțiilor $1' = (p' \cap q')$ și $2'' = (p'' \cap q'')$ se găsesc într-o poziție Monge. În acest caz $1' = S'$ și $2'' = S''$. În caz contrar, cele două drepte nu se intersectează (fig. 9.2.5).



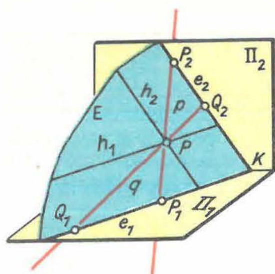


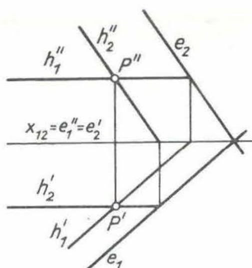
9.2.5. Perechi de drepte oarecare și intersectate

9.2.4. Proiecție orizontală și verticală a unei drepte l cu urmele punctelor L_1 și L_2; deoarece $d_1 = -d_2$, $K' = K''$ se află în planul de coincidență

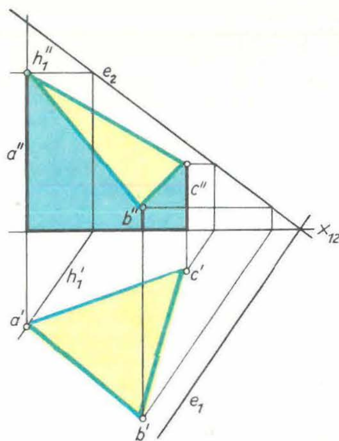
Reprezentarea unui plan. Un plan E este determinat prin două drepte care se intersectează. De exemplu, dacă dreptele p și q se intersectează în punctul P (fig. 9.2.6) și P_1, P_2 respectiv Q_1, Q_2 sînt urmele lor pe planele π_1 și π_2, atunci dreptele $e_1 = P_1Q_1$ și $e_2 = P_2Q_2$ se află atît în planul E, cît și respectiv, în planele π_1 și π_2. Dreptele e_1 și e_2 se numesc urmele planului E în π_1 și π_2 și se pot construi cu ajutorul urmelor dreptelor p și q. Urmele e_1 și e_2 se intersectează într-un punct K pe axa x_{12}, același în care aceasta intersectează planul E.

În construcțiile grafice dintr-un plan dat sînt foarte utile *liniile principale* sau *urmele paralele*. Primele linii principale, paralele la primele urme sau *linii de înălțime* sînt paralele cu e_1; liniile principale secundare, paralele la al doilea rînd de urme sau *linii frontale* sînt paralele cu e_2. De exemplu, se poate stabili cu ușurință situația în care un punct P, determinat prin proiecțiile sale P' și P'', se află sau nu în planul E, determinat de e_1 și e_2. Dacă proiecția verticală h_1'' a primei linii principale h_1 a lui E este dusă prin P'', atunci





9.2.6. Reprezentarea planului și laticii punctului P;
a) în imaginea oblică; b) în proiecțiile normale în coordonate



9.2.7. Secțiunea plană prin prismă, soluția prin intermediul laticelor primei drepte principale

proiecția sa orizontală, h_1 este univoc determinată. Dacă P' se află pe h_1' găsită prin acest procedeu, atunci P este un punct conținut în E; în caz contrar, P este exterior planului e. Modelul descris aici se numește *laticea* punctului P. Această latice este de asemenea posibilă pentru o dreaptă arbitrară conținută în E. Printr-o aplicare a laticelor se poate obține, de exemplu, construcția intersecției dintre o prismă perpendiculară pe π_1 și un plan. Proiecțiile orizontale ale punctelor de intersecție a, b, c, vor fi a', b', c'. Proiecțiile verticale corespunzătoare ale acelorași puncte de intersecție se găsesc prin utilizarea primelor linii principale, folosind laticele (fig. 9.2.7). *Liniile de coborîre* intersectează liniile de înălțime formînd unghiuri drepte, punctul de intersecție aflîndu-se pe linia de cea mai mare pantă a planului. De aceea planurile liniilor de cădere sînt perpendiculare pe planurile liniilor de înălțime.

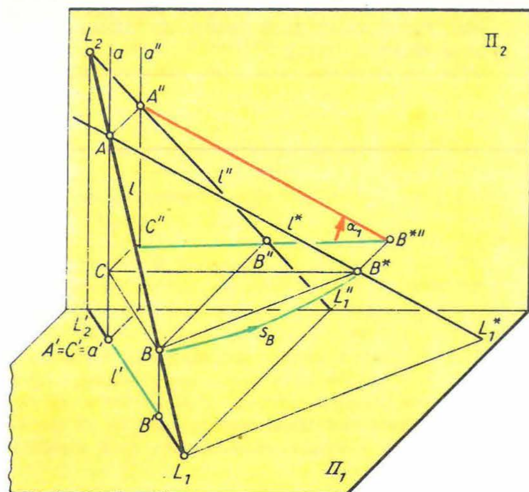
Cazurile particulare ale poziției planului E pot fi caracterizate prin pozițiile urmelor e_1, și e_2. Pentru *primul plan proiector* perpendicular pe π_1, $e_2 \perp x_{12}$, pentru *al doilea plan proiector* perpendicular pe π_2, $e_1 \perp x_{12}$ și pentru un plan perpendicular atît pe π_1, cît și pe π_2, ambele urme sînt perpendiculare pe x_{12}. Pe un astfel de plan obținem o proiecție verticală care completează proiecțiile orizontală și verticală ale solidului. În *planul orizontal*, e_1 și e_2 sînt paralele cu linia de pămînt. Dacă ele coincid cu ea, atunci planul conține linia de pămînt și poate fi reprezentat numai de liniile principale.

Un plan se numește *direct* dacă planul și proiecția verticală a triunghiului ABC în plan au același sens de rotație. Dacă sensurile de rotație a celor două imagini ale triunghiului sînt opuse, planul se numește *alternativ*.

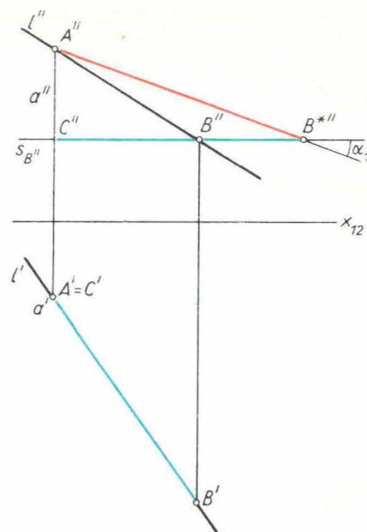
Determinarea adevăratei dimensiuni corespunzătoare proiecției normale. Distanța dintre două puncte A și B este egală cu lungimea segmentului AB măsurată de-a lungul dreptei $l=AB$. Dacă l este o dreaptă principală cu corespondent în planul imagine, atunci proiecția normală a segmentului îi dă valoarea adevărată, de exemplu h_1 în planul π_1 și h_2 în planul π_2.

Dacă A și B sînt situate pe dreapta l într-o poziție oarecare, atunci l poate fi rabătută în jurul primei sau celei de a doua drepte proiectoare luată ca axă așa încît să fie situată într-una din pozițiile de mai înainte relative la planul imagine.

De exemplu l poate fi rabătută în jurul primei drepte proiectoarea prin A în poziția celei de a doua drepte principale (fig. 9.2.8). Dacă C este piciorul perpendicularei din B pe a, atunci triunghiul dreptunghic ABC poate fi rotit în jurul laturii $|AC| = |A''C''|$. Cealaltă latură este $|CB| = |A'B'|$. Punctul B se mișcă în spațiu pe un arc de cerc paralel cu planul π_1 cu centrul în C și raza $|A'B'|$. În planul π_2 punctul $B^{*''}$ se mișcă pe o dreaptă ce trece prin B'' paralelă cu linia de pămînt (axă) x_{12} către punctul $B^{*''}$ determinînd $|B^{*''}C''| = |A'B'|$ (fig. 9.2.9). În afară de distanța reală AB, această construcție dă primul unghi de înclinate α_1 al dreptei $l = AB$ față de planul pămîntului (orizontal) π_1; $\alpha_1 = \sphericalangle AL_1L_2' = \sphericalangle ABC = \sphericalangle A''B^{*''}C''$. Similar, cel de al doilea unghi de înclinare α_2 pe care l îl face cu planul π_2 este obținut prin rotație în jurul celei de a doua drepte proiectoare perpendiculară pe planul π_2.



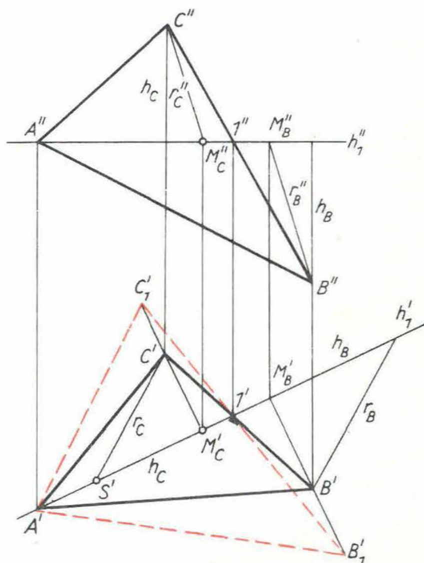
9.2.8. Reprezentarea oblică pentru determinarea distanței a două puncte în spațiu



9.2.9. Determinarea distanței prin intermediul rabaterii paralele

Forma reală a unei figuri plane poate fi determinată prin rabatere paralelă cu planul de proiecție. Este normal să se folosească prima sau a doua dreaptă principală a planului figurii ca axă de rotație.

Exemplu. Forma adevărată a unui triunghi ABC dat poate fi determinată din proiecția orizontală și verticală prin rabaterea lui în jurul dreptei principale h_1 ce trece prin A într-o poziție paralelă cu planul pămîntului (orizontal). În timpul rabaterii A rămîne fix, în timp ce B și C descriu arce de cerc ale căror plane au axa de rotație h_1 ca normală comună. Raza r_C a cercului descris de C este ipotenuza unui triunghi dreptunghic cu $|C'M'_C|$ și h_C ca laturi, unde M'_C este piciorul perpendicularei din C' pe h'_1 și segmentul h_C este luat din proiecția verticală. Dacă acesta este desenat din M'_C în lungul lui h_1 către capătul S', atunci $|S'C'| = r_c$. Luînd acest segment r_C din M'_C de-a lungul dreptei de ordine ce trece prin C' perpendiculară pe h'_1 este obținut punctul C'_1, care este rezultatul rotației lui C în jurul lui h_1. Punctul B este tratat similar (fig. 9.2.10).



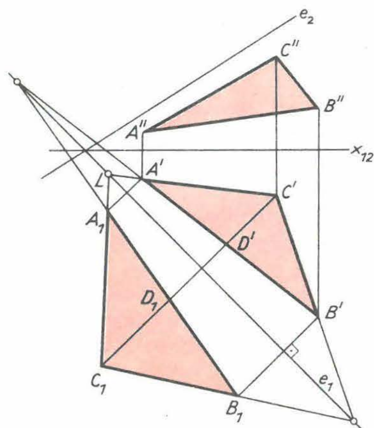
9.2.10. Forma reală a unei figuri plane obținută prin aplicarea metodei compasului dublu.

Deoarece în această metodă, în afară de dreapta de ordine perpendiculară pe dreapta principală ce trece

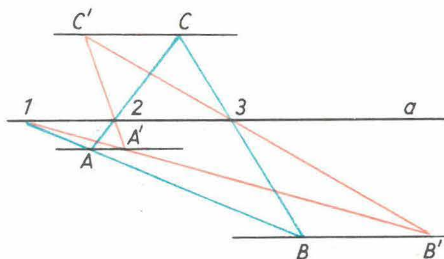
prin punctul ce urmează a fi rotit, încă două distanțe trebuie luate cu compasul, ea este numită *metoda compasului dublu.* Se verifică dacă dreptele $B'C'$ și $B_1'C_1'$ se întîlnesc într-un punct pe axa de rotație h_1. Forma reală a unei figuri plane ține seama de asemenea de unghiul de intersecție a două drepte care se intersectează în spațiu.

Perspectiva afină

Dacă o figură plană arbitrară este rotită în spațiu în jurul uneia din urmele ei din interiorul planului imagine corespunzător acestei urme, atunci figura rezultată și proiecția perpendiculară a figurii originale pe același plan sînt înrudite prin *perspectiva afină ortogonală*, de exemplu triunghiul ABC (fig. 9.2.11) dă proiecția perpendiculară $A'B'C'$ și triunghiul $A_1B_1C_1$ prin rotație în jurul lui e_1 în planul π_1. Pentru aceasta, urma e_1 este *axa afinității*. Razele de afinitate de la origine la punctul reflectat, $A'A_1$ de exemplu, sînt paralele și direcția afinității este perpendiculară pe axa de afinitate. Corespondența dintre original și reflecție este punct cu punct și liniară deoarece dreptele l' devin dreptele l_1. Aceste drepte l' și l_1 se întîlnesc într-un punct L al axei afinității. Fiecare punct al axei se reflectă tot în el. Dreptele paralele devin tot drepte paralele și raportul unei diviziuni de trei puncte pe o dreaptă este egal cu cel al proiecției perpendiculare a punctelor, de exemplu, $|A'D'|:|D'B'| = |A_1D_1|:|D_1B_1|$. Raportul în care dreapta care unește o pereche arbitrară de puncte este divizată de axa de afinitate este numit *caracteristica* perspectivei afine. Într-o perspectivă afină *oblică* sau o perspectivă afină *generală* direcția de afinitate poate face orice unghi cu axele afinității. Într-o *perspectivă afină tangențială* sau *perspectivă afină echivalentă* razele afinității sînt paralele cu axa afinității (fig. 9.2.12).



9.2.11. Perspectiva afină a unei figuri plane și rezultatul rotirii ei



9.2.12. Perspectiva afină tangențială avînd pe a ca axă de afinitate

Reprezentarea unei perspective afine în plan este unic determinată de axa afinității și de o pereche de puncte ce corespund în desen.

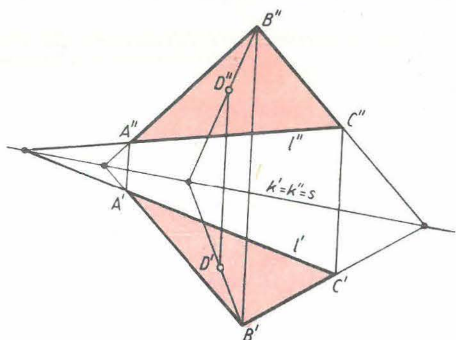
Pe planșeta de desen există între proiecția orizontală și proiecția verticală a unei figuri plane un raport de perspectivă afină. Dreptele de ordine ale tuturor punctelor, de exemplu $D'D''$ dau *direcția afinității* și imaginile l' și l'' ale oricărei drepte l ale figurii plane intersectează într-un punct al dreptei s desenul. Aceasta este axa de afinitate a perspectivei afine. Proiecțiile orizontală și verticală a dreptei de intersecție $k = (\varkappa \cap E)$ a planului de coincidență $\varkappa$ cu planul E al figurii coincid cu aceasta și avem : $k' = k'' = s$ (fig. 9.2.13).

Între proiecția orizontală și proiecția verticală a unei figuri plane este o înrudire afină. Razele de afinitate coincid cu dreptele de legătură ale punctelor și axa de afinitate s coincide cu imaginea identică a intersecției dreptei k cu planșeta de desen.

Această proprietate geometrică poate fi folosită constructiv, de exemplu pentru a obține laticea unui punct D din plan.

Elipsa ca imagine a perspectivei afine a cercului. Aplicația perspectivei afine a unui cerc cu centrul în C este determinată de axa afinității s și de imaginea C' a centrului C. Direcția afinității este CC'. În timp ce orice dreaptă îi taie imaginea pe axa afinității, imaginea oricărui punct P poate fi construită ca punctul de intersecție a două drepte, de exemplu, imaginea P' a punctului P este obținută din două condiții $CC' \parallel PP'$ și $(CP \cap s) = (C'P' \cap s)$.

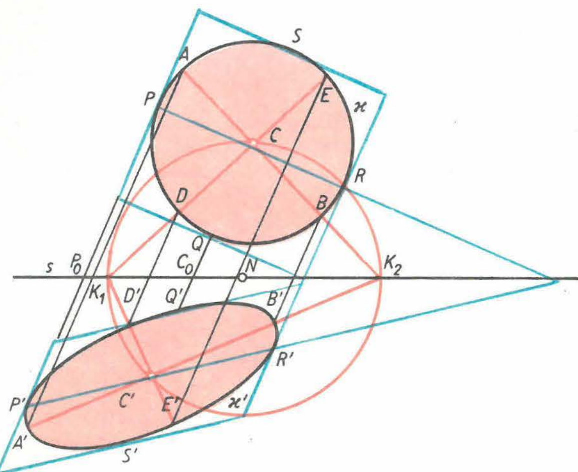
Reprezentările diametrelor perpendiculare ale cercului sînt numite diametrele conjugate ale elipsei (vezi cap. 7 și 25), de exemplu $P'R'$ și $Q'S'$, imaginile lui $PR \perp QS$. Deoarece paralelele apar paralele și raportul de diviziune rămîne neschimbat, există relații importante între coardele paralele și tangente.



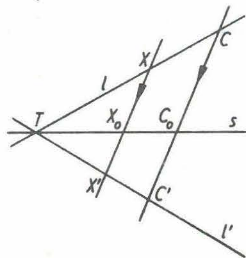
9.2.13. Perspectiva afină a proiecțiilor orizontale și verticale ale unei figuri plane

Diametrul unei elipse împarte în două toate coardele paralele cu diametrul conjugat, și tangentele la punctul extrem al diametrului unei elipse sînt paralele cu diametrul conjugat, de exemplu $P'R'$ împarte în două coardele paralele cu $Q'S'$ și tangentele la P' și R' sînt paralele cu $Q'S'$.

Dintre perechile de diametre conjugate există numai una care formează o pereche perpendiculară de diametre. Acestea sînt *axa mare* și *axa mică* a elipsei. Dacă K_1 și K_2 (fig. 9.2.14) sînt punctele lor de intersecție cu axa afinității s, atunci atît C cît și C' sînt situate pe un cerc cu diametrul K_1K_2. Centrul lui N este punctul de intersecție al mediatoarei segmentului CC' cu s; raza sa este $|NC| = |NC'| = |NK_1| =$



9.2.14. Elipsa ca reprezentare a perspectivei afine a cercului



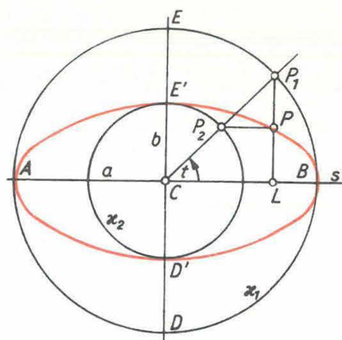
9.2.15. Raportul de diviziune pentru dreptele perspectivei afine.

$= |NK_2|$. Axa afinității s și perechea de puncte C, C' sînt suficiente pentru a construi transformarea afină a cercului $\varkappa$ în elipsa $\varkappa'$. Axa s taie CC' în C_0 și PP' în P_0. Pentru construirea unei perechi mai îndepărtate de puncte X, X' sînt folosite proprietățile relației afine (fig. 9.2.15): $CC' \parallel PP' \parallel XX'$ și $|PP_0| : |P'P_0| = |CC_0| : |C'C_0| = |XX_0| : |X'X_0| = k$ unde k este raportul de afinitate.

Pentru construirea punctelor elipsei cu rigla și compasul se aplică *reprezentarea afină ortogonală*, cu axa mare a elipsei ca axă a afinității și axa mică ca direcție a afinității. A și B de pe axa mare rămîn fixate în timp ce D' și E' de pe axa mică sînt imaginile lui D și E (fig. 9.2.16). Raportul afinității este dat de $k = |CD'| : |CD|$. De aceea elipsa este imaginea afină a cercului $\varkappa_1$ cu centrul în C și raza $|CA|$. Din relația afină dintre $\varkappa_1$ și elipsă poate fi derivată

următoarea construcție pentru elipsă. Se desenează un al doilea cerc $\varkappa_2$ cu centrul în C și raza $|CD'|$. Se alege un punct arbitrar P_1 pe $\varkappa_1$. Dreapta CP_1 taie $\varkappa_2$ în P_2. Se desenează perpendiculara din P_1 pe s și dreapta paralelă la s prin P_2. Atunci perpendiculara și paralela se intersectează într-un punct al elipsei.

Demonstrație. Din construcție $|CD'|:|CD|=|CP_2|:CP_1|=$ $=|LP|:|LP_1|=k$. Deoarece direcția afinității este perpendiculară pe s, P este imaginea lui P_1. Această construcție a elipsei este cunoscută ca *metoda construcției prin două cercuri*. Există și alte metode de construcție a elipsei (vezi cap. 7) din care poate deriva o reprezentare parametrică (vezi cap. 13).



9.2.16. Construcția elipsei prin două cercuri

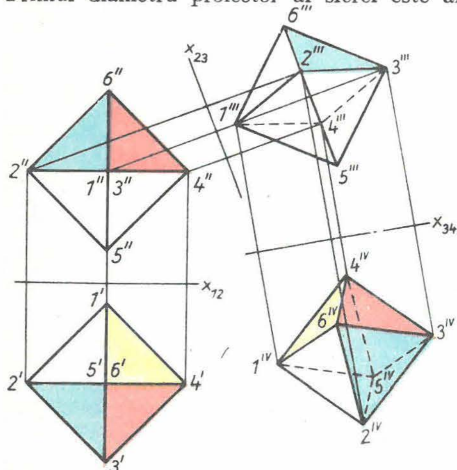
Proiecții laterale, rabateri și reprezentări ale solidelor

Construcțiile fundamentale precedente în termenii proiecțiilor normale în coordonate, sînt deseori aplicate în scopul reprezentării obiectelor spațiale, ca în următoarele exemple.

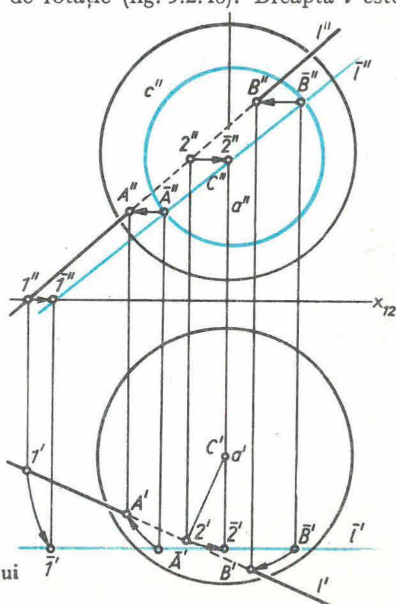
Exemplul 1. Din proiecțiile orizontală și verticală ale unui octaedru aflat într-o poziție specială raportată la planurile imagine, o reprezentare într-o poziție generală poate fi obținută cu ajutorul celor două proiecții verticale laterale (proiecții longitudinale). De exemplu, punctul $1'''$ are aceeași distanță față de x_{23} ca și $1'$ față de x_{12} și 1^{IV} are aceeași distanță față de x_{34} ca și $1''$ față de x_{23} (fig. 9.2.17). Închizînd dreptele proiectoare și suprafețele, se obține o reprezentare centrală a solidului. Oricum, nu mai este posibil să se obțină măsurile solidului direct din această proiecție.

În afară de utilitatea în a face o schiță unui obiect, proiecția laterală (longitudinală) este aplicată ca principiu de construcție. Translația punctelor la o nouă proiecție verticală se realizează ținînd seama de regula: distanțele punctelor proiecției închise de la axa închisă sînt translatate de la noua linie de pămînt de-a lungul dreptelor de ordine corespondente la noua proiecție.

Exemplul 2. Intersecția unei drepte cu o sferă poate fi construită cu ajutorul rotației. Primul diametru proiector al sferei este ales ca axă de rotație (fig. 9.2.18). Dreapta l este



9.2.17. Octaedru, în proiecțiile orizontală, verticală și laterală



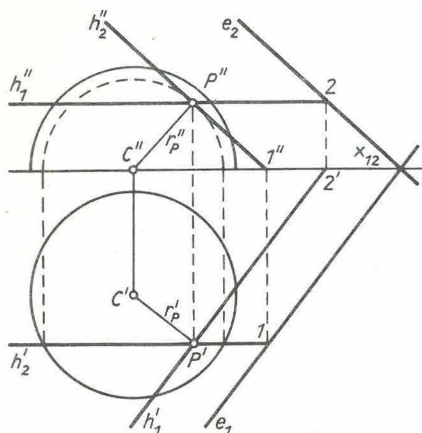
9.2.18. Intersecția dreptei cu sfera: aplicația rotației unui solid ca principiu de construcție

rotită în jurul lui a încît poziția sa finală $\bar{l}$ este paralelă la π_2. Două puncte 1 și 2 de pe l, alese convenabil, ajung în $\bar{1}$ și $\bar{2}$, și sfera ajunge în ea însăși. Primul plan proiector Γ prin $\bar{1}$ taie sfera printr-un cerc c, a cărui proiecție verticală coincide cu forma sa adevărată. De aici punctele $\bar{A}''$ și $\bar{B}''$ ale intersecției lui c'' cu $\bar{l}''$ sînt proiecțiile verticale ale punctelor de intersecție a dreptei cu sfera. Dreptele ce trec prin $\bar{A}''$ și $\bar{B}''$ paralele cu linia pămîntului (linie de bază) taie dreapta l'' în A'' și B''. Aceasta are efectul rotației inverse în proiecție verticală. Planurile punctelor de intersecție A și B ale dreptei l cu sfera sînt găsite cu ajutorul dreptelor de ordine ce trec prin A'' și B''.

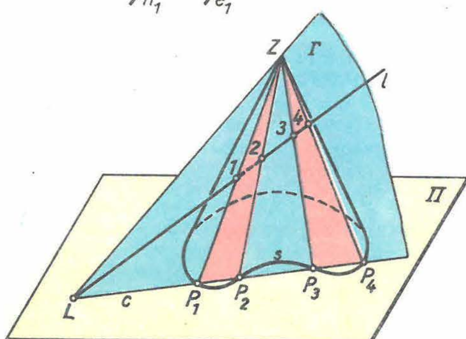
Exemplul 3. Planul tangent la o sferă într-un punct dat P al sferei poate fi construit cu ajutorul primei și celei de a doua drepte principale. Deoarece planul tangent T este perpendicular pe raza r_P ce trece prin P, cele două drepte principale h_1 și h_2 ale lui T care se intersectează în P fac unghiuri drepte cu r_P (fig. 9.2.19). Rezultă $\sphericalangle h_1'r_P' = \sphericalangle h_2''r_P'' = 90°$. Deoarece h_1'' și h_2' sînt paralele cu linia de pămînt (linia de bază), urmele e_1 și e_2 ale planului tangent acoperite de dreptele principale h_1 și h_2 pot fi construite.

Exemplul 4. Să se găsească intersecțiile unei drepte l cu un con al cărui vîrf Z și urma curbei s în π sînt cunoscute. Principiul soluției poate fi văzut dintr-o reprezentare oblică fig. 9.2.20). Planul Γ trece prin Z și l și are ca urmă dreapta c în π. Dacă c taie urma curbei s în punctele P_1, P_2, P_3, P_4, atunci dreptele ZP_i sînt generatoarele conului aflate în Γ. Punctele lor de intersecție 1, 2, 3, 4 cu l sînt prin urmare punctele de intersecție ale dreptei l cu conul.

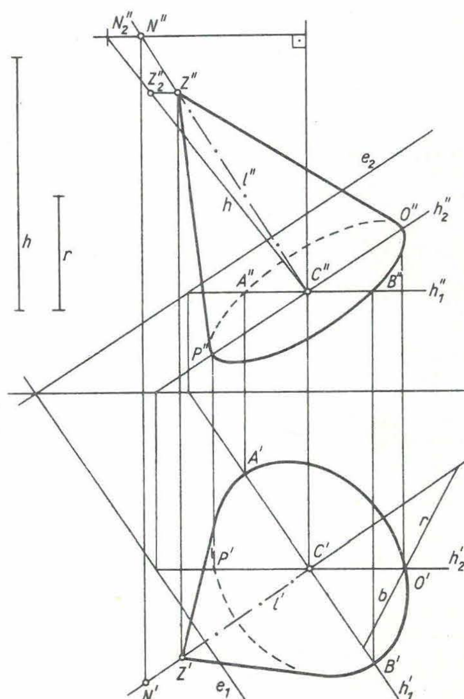
Exemplul 5. Să se construiască un con de rotație al cărui cerc de bază se află în planul E determinat de urmele lui e_1 și e_2, unde înălțimea h a conului, raza bazei r și planul C al centrului C al bazei circulare sînt date (fig. 9.2.20). Construcția se poate face în trepte.



9.2.19. Planul tangent la o sferă



9.2.20. Intersecția dreptei cu conul în reprezentarea oblică

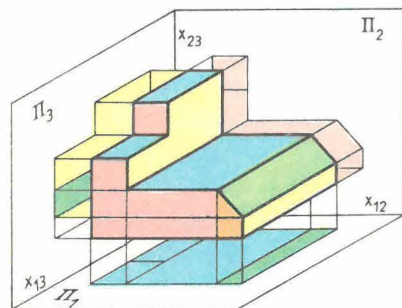


9.2.21. Construcția unui con de rotație pe o bază plană dată

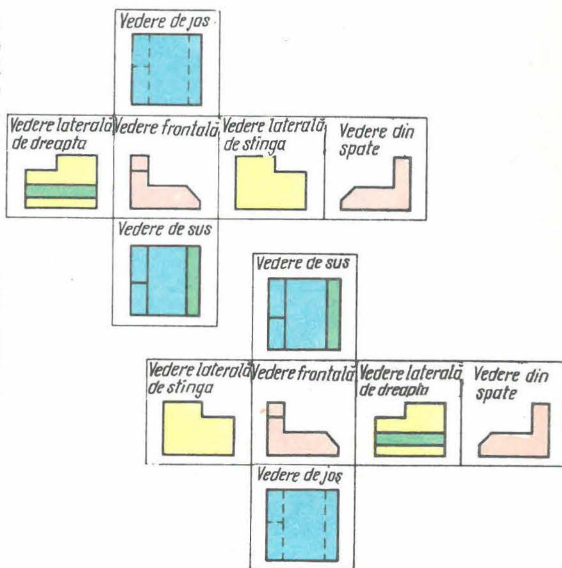
1. Cu ajutorul primei și celei de a doua drepte principale se construiește proiecția verticală C'' a lui C din C'. 2. Diametrul cercului de bază este reprezentat în proiecția orizontală pe h_1' și în proiecția verticală pe h_2'' prin lungimea lui reală. $|A'B'|$ și $|P''Q''|$ sînt axele mari ale celor două elipse imagine. 3. Cu ajutorul dreptelor directoare, se găsesc punctele A'', B'' pe h_1'' și $P'Q'$ pe h_2'. 4. Din construcția deformată de pe hîrtie se găsesc axele mici ale elipselor imagine și de aici înseși elipsele ca imagini ale cercului de bază al conului. 5. Pe perpendiculara l ce trece prin C pe E, cu proiecțiile $l' \perp h_1'$ și $l'' \perp h_2''$ se ia un punct arbitrar $N \neq C$ și se rotește segmentul CN, păstrînd C fix, pînă cînd ajunge paralel cu π_2. 6. Dacă CN_2 este poziția perpendicularei după rotație, un segment cu lungimea h este trasat în lungul lui $C''N_2''$ începînd din C'' către punctul Z''. Dreapta orizontală care trece prin Z_2'' taie $C''N''$ în Z''. Dreapta directoare prin această proiecție verticală a vîrfului conului dă planul Z'. 7. Tangentele din Z' și Z'' la imaginile corespunzătoare ale cercului de bază pot fi construite folosind, de exemplu, o perspectivă afină. Aceasta determină proiecțiile cerute ale conului de rotație (fig. 9.2.21).

Cele șase proiecții principale. Proiecția verticală laterală al cărei plan π_3 este perpendicular pe π_1 și π_2 este denumită *proiecția perpendiculară* (fig. 9.2.22). Dreptele lor de intersecție x_{12}, x_{23}, x_{13} sînt perpendiculare în spațiu. Figura ne arată că nu orice obiect spațial poate fi la fel reconstruit din proiecțiile orizontală și verticală.

În general, un obiect poate fi proiectat cu unghiuri drepte pe 6 planuri ceea ce formează suprafața unui cub (fig. 9.2.23). Se obțin șase proiecții principale ale unei structuri spațiale în *reprezentarea europeană*. În *reprezentarea americană* imaginea unui obiect este tratată în sensul opus.



9.2.22. Reprezentarea oblică a proiecției orizontale, verticale și a proiecției verticale a secțiunii unui obiect spațial



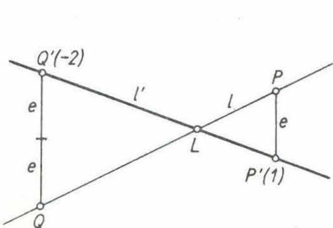
9.2.23. Șase proiecții principale în sistemul european și în sistemul american

9.3. Alte reprezentări

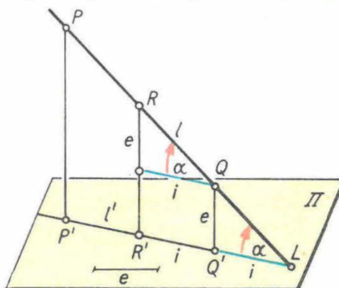
Proiecția cu cote — metoda unui plan

În proiecția cu cote, un punct P din spațiu este aplicat pe punctul său imagine P' de o rază proiectoare perpendiculară pe planul imagine π și distanța $k = |P'P|$ este dată în funcție de o unitate fixă e, ca cotă. Planul π este luat de obicei orizontal și semispațiul

pozitiv cu $k>0$ deasupra planului. Imaginea l' a unei drepte l este fixată d imaginile P' și Q' ale punctelor P și Q ale dreptei. Notînd cotele lor (ținînd seama de semne) pe două drepte paralele ce trec prin P' și Q' se obține punctul L ca urmă a dreptei l (fig. 9.3.2). Invers o dreaptă în spațiu este unic determinată de imaginile a două *puncte gradate* oarecare. Dacă *intervalul* este înțeles ca fiind distanța dintre proiecțiile a două puncte gradate ale căror cote diferă printr-o unitate, atunci unghiul de înclinare a dreptei față de planul imagine $\alpha = \sphericalangle(l, l')$ este determinat de ecuația $i = e \operatorname{cotg} \alpha$ (fig. 9.3.2). Cu ajutorul proiecției cu cote se poate determina dacă două drepte neparalele a și b, date, fiecare determinată de cîte două



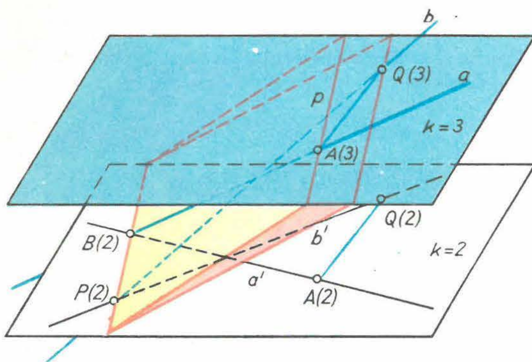
9.3.1. Reprezentarea punctului și dreptei în proiecția cu cote

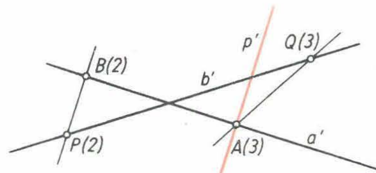


9.3.2. Intervalul și unghiul de înclinare al unei drepte

a) reprezentarea oblică; b) proiecția cu cote

puncte gradate A, B și P, Q, se intersectează sau nu (fig. 9.3.3). Punctele cu aceeași cotă se află într-un plan paralel cu π, de exemplu $P(2)$ și $B(2)$ în planul $k = 2$. Un plan ce trece prin $P(2)$ $B(2)$ și $A(3)$ taie planul $k = 3$ sub o dreaptă p paralelă cu $P(2)B(2)$ care conține dreapta a. Dreapta b taie a numai dacă ea se află în acest plan, ceea ce se poate dacă $Q(3)$ se găsește pe p.

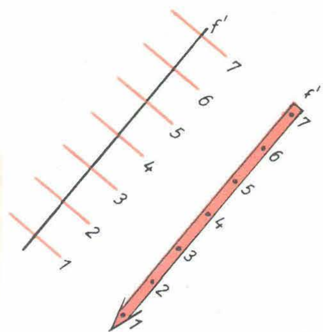




9.3.3. Proiecția cu cote a două drepte oarecare a și b

a) reprezentarea oblică; b) proiecția cu cote

După cum dreptele care întîlnind două puncte oarecare cu aceeași cotă ale neparalelelor a și b se intersectează sau sînt paralele, tot așa perechea de drepte a și b nu se intersectează sau se intersectează. Pentru o pereche de paralele a și b dreptele care unesc perechi de puncte cu aceeași cotă au proiecțiile lor pe un plan paralele.



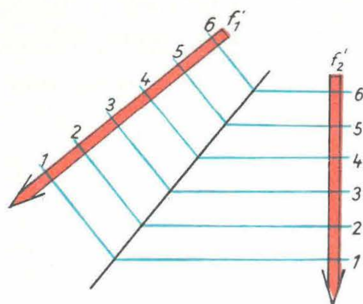
9.3.4. Reprezentarea unui plan cu ajutorul scalei liniei de pantă gradate

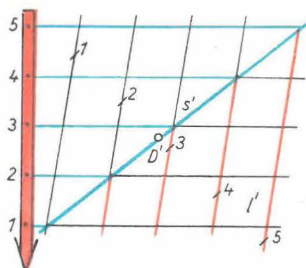
Un plan înclinat către π poate fi reprezentat prin drepte paralele echidistante cu înălțimi egale cu cotele lor sau printr-o *linie de pantă* f, tăind liniile de cotă sub unghiuri drepte. Poziția unui astfel de plan poate fi descrisă numai cu ajutorul liniei de pantă gradate.

Linia de cotă cu cota 0 este chiar *urma planului* (fig. 9.3.4).

Intersecția a două plane date de linii de pantă gradate poate fi obținută găsind intersecțiile liniilor de cotă cu aceeași cotă (fig. 9.3.5). Acest principiu se aplică în problemele referitoare la taluzuri și acoperișuri.

9.3.5. Intersecţia a două plane în metoda unui plan



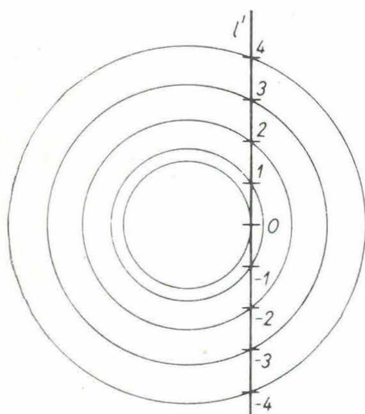


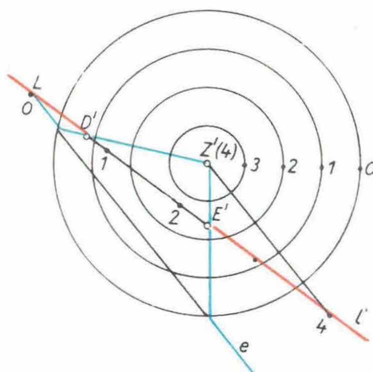
9.3.6. Intersecţia planului cu o dreaptă în metoda unui plan

Dacă o dreaptă l şi un plan E sînt date prin liniile gradate, atunci familia dreptelor paralele ce trec prin punctele ce gradează dreapta l sînt liniile de cotă ale planului E_1 care conţine dreapta l. Dreapta de intersecţie s a lui E şi E_1 taie l în punctul ei de intersecţie D cu E (fig. 9.3.6).

Proiecţie orizontală de nivel. Dacă o suprafaţă oarecare este tăiată de o familie de plane paralele cu π avînd drept cote numere întregi, se obţine o familie de curbe de nivel. Proiecţia perpendiculară a acestor curbe pe π dă proiecţia orizontală de nivel a suprafeţei. De exemplu, proiecţia orizontală de nivel a unui con de rotaţie cu axa perpendiculară pe π şi vîrful Z este o familie de cercuri concentrice cu Z', centru comun. Razele cercurilor pot fi luate de pe generatoarea conului marcată cu cote. Pentru hiperboloidul de rotaţie cu o pînză, proiecţia orizontală de nivel este de asemenea o familie de cercuri concentrice, ale căror raze sînt determinate numai de proiecţia perpendiculară a generatoarei g a suprafeţei, marcate cu cote (fig. 9.3.7).

9.3.7. Conturul proiecţiei orizontale a unui hiperboloid de rotaţie cu o pînză





9.3.8. Intersecţia unui con de rotaţie cu o dreaptă prin metoda unui plan

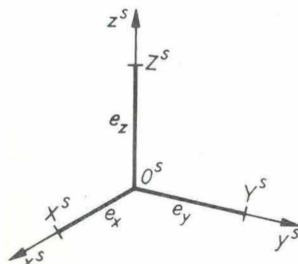
Intersecţia unui con de rotaţie cu o dreaptă l (fig. 9.3.8) poate fi construită cu ajutorul planului Γ care conţine pe l şi vîrful Z al conului. Urma e a planului în π conţine urma L a lui l şi este paralelă cu dreapta care întîlneşte Z într-un punct al lui l care are aceeaşi cotă ca şi Z. Această urmă taie curba de nivel 0 a conului în punctul ei de intersecţie cu generatoarea pe care o întîlneşte l pe suprafaţa conului.

Suprafeţele care pot fi înţelese numai prin măsurarea unui mare număr de puncte în proiecţia orizontală de nivel sînt numite *topografice*. Reprezentarea unor astfel de suprafeţe cu ajutorul proiecţiei orizontale de nivel are importanţă practică la construcţia taluzurilor pe drumurile principale. În plus, această metodă de reprezentare are diverse aplicaţii în industria elicelor pentru vapoare şi avioane, şi pentru aripile avioanelor şi caroseriile vehiculelor.

Axonometrie

În scopul de a obține cît mai multe dimensiuni ale solidului dintr-o imagine vizuală a solidului obținută prin proiecție paralelă, solidul este raportat la un *triedru ortonormal* $O(X, Y, Z)$ și acesta, împreună cu solidul, este proiectat pe planșeta de desen, unde imaginea lui este un *triedru* $O^s(X^s, Y^s, Z^s)$. În conformitate cu direcția de incidență a razei proiectoare se face deosebirea dintre *axonometria obișnuită* sau *oblică* și *axonometria ortogonală* sau *perpendiculară*. În loc de un singur segment unitate $|OX| = |OY| = |OZ| = e$, în figura originală, în imagine sînt trei $|O^sX^s| = e_x$, $|O^sY^s| = e_y$ și $|O^sZ^s| = e_z$, care pot avea lungimi diferite și sînt obținute din imaginea $O^s(X^s, Y^s, Z^s)$ (fig. 9.3.9).

Teorema lui Pohlke conține condiția sub care un triedru plan poate fi socotit ca proiecția paralelă a unui triedru spațial.

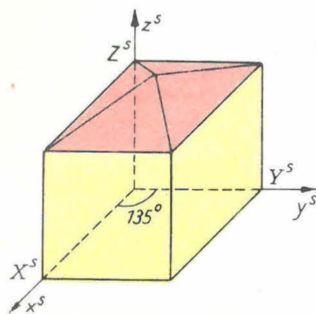


9.3.9. Triedrul lui Pohlke

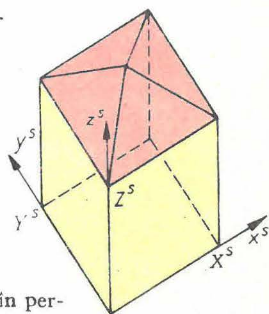
Teorema lui Pohlke. Un triedru plan $O^s(X^s, Y^s, Z^s)$ poate fi socotit ca proiecția paralelă a unui triedru ortonormal $O(X, Y, Z)$ dacă cele patru puncte O^s, X^s, Y^s, Z^s nu sînt toate coliniare.

Un triedru ortonormal spațial este de asemenea numit *vîrful unui cub* și proiecția lui paralelă este numită *triedrul Pohlke*.

Metode speciale. Un caz special al reprezentării axonometrice este proiecția oblică, pentru care $e_y = e_z = 1$, $y^s \perp z^s$ în timp ce dimensiunea e_x și direcția axei x^s pot fi luate arbitrar. Aceasta este o problemă a *axonometriei oblice dimetrice*, care mai este cunoscută ca *axonometria frontală*. *Perspectiva cavalieră* este un caz special al metodei proiecției oblice, în acest caz $e_x = e_y = e_z = 1$, $y^s \perp z^s$ și $\sphericalangle(x^s, y^s) = 135°$ (fig. 9.3.10). *Perspectiva militară sau perspectiva aeriană* este caracterizată de $e_x = e_y = e_z = 1$, $x^s \perp y^s$ și z^s vertical (fig. 9.3.11).



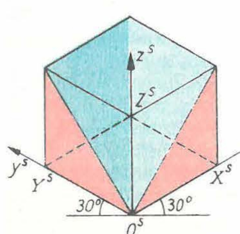
9.3.10. Modelul unei case în perspectiva cavalieră

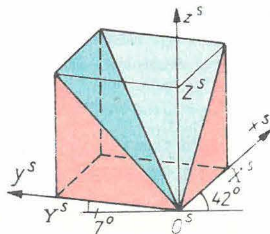


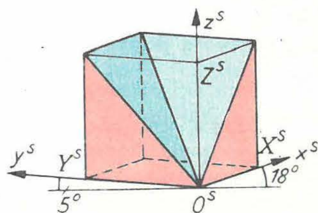
9.3.11. Modelul unei case în perspectiva militară

Ca și perspectiva cavalieră, ea reprezintă o axonometrie izometrică și este folosită pentru a da unei clădiri o impresie mai naturală decît o poate face proiecția orizontală.

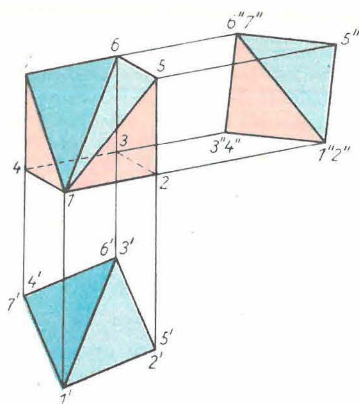
În practică se folosește frecvent reprezentarea izometrică, dimetrică sau trimetrică, exemplificate pe o secțiune a unui cub (fig. 9.3.12).







9.3.12. Imaginile unei secțiuni a cubului:
a) izometrică, b) dimetrică, c) trimetrică

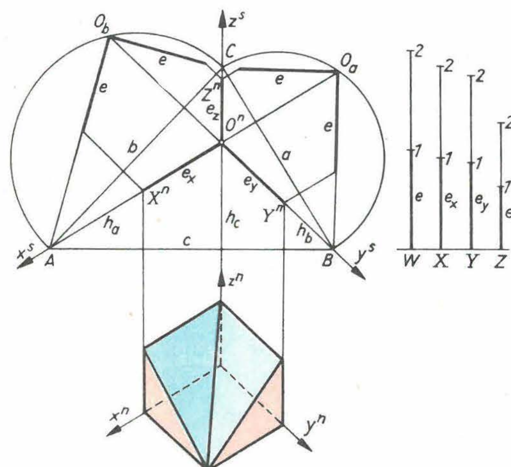


9.3.13. Reprezentarea axonometrică prin metoda identității lui L. Eckhardt

Dacă reprezentarea unui obiect spațial este dată cu ajutorul proiecțiilor perpendiculare cu coordonate, atunci o imagine axonometrică poate fi obținută prin *metoda identității* datorată lui L. ECKHART.

Cele două imagini sînt separate și așezate arbitrar pe planșetă. Pentru fiecare proiecție se ia o direcție de tăiere arbitrară. Punctele imaginii axonometrice se află în punctele de intersecție ale razelor de tăiere corespunzătoare (fig. 9.3.13). Metoda cere practică în aranjarea proiecțiilor și în alegerea direcțiilor de tăiere, pentru a obține o imagine axonometrică care să nu fie prea deformată.

Axonometria ortogonală. Pentru a obține imagini clare trebuie ca nici una din axele triedrului spațial ortonormal $O(X, Y, Z)$ să nu fie paralelă cu planul imagine π. Urmele lor A, B, C sînt puncte reale. Triunghiul urmelor ABC cu laturile a, b, c este, din considerente spațiale, ascuțitunghic și numai el determină triedrul Pohlke $O^n(X^n, Y^n, Z^n)$ în axonometria ortogonală.



9.3.14. Axonometria ortogonală a triedrului lui Pohlke și aplicația ei la secțiunea unui cub

Proiecția perpendiculară O^n este punctul de intersecție al înălțimilor h_a, h_b, h_c ale triunghiului ABC și punctele X^n, Y^n, Z^n sînt găsite reflectînd triunghiurile dreptunghice BCO și CAO în jurul laturilor a și b pe desen (fig. 9.3.14). În triedrul Pohlke segmentul unitate apare scurtat; factorii de reducere sînt

$$\lambda = e_x : e = |O^nA| : |OA|$$

$$\mu = e_y : e = |O^nB| : |OB|$$

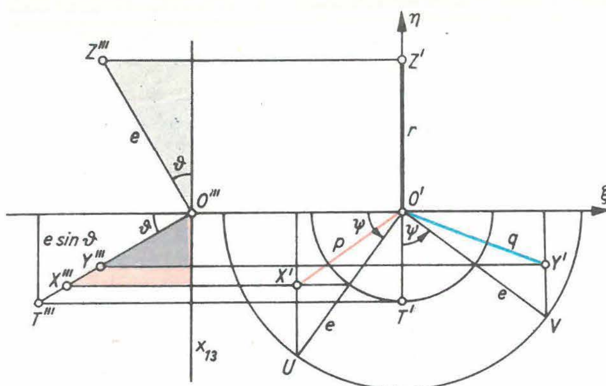
$$\nu = e_z : e = |O^nC| : |OC|$$

Aceștia satisfac o relație care se obține din teorema lui Gauss.

Relația dintre factorii de reducere
$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 2$

Teorema lui Gauss. Dacă proiecțiile ortogonale $O' = O$, $X' = p$, $Y' = q$, $Z' = r$ ale originii 0 și ale punctelor unitate X, Y, Z ale unui sistem de coordonate cartesian pe planul π sînt privite ca puncte ale unui plan numeric complex, atunci $p^2 + q^2 + r^2 = 0$.

Pentru a demonstra aceasta, se reprezintă triedrul ortonormal $O(X, Y, Z)$ cu ajutorul proiecțiile perpendiculare cu coordonate (proiecția orizontală și proiecția verticală laterală), unde proiecția verticală laterală se ia paralelelă cu axa OZ (fig. 9.3.15). Rezultă $|O'Z'| = |r| = e \cos \vartheta$. Mai departe rezultă că $O'X'$ și $O'Y'$ sînt semidiametrele conjugate ale unei elipse care derivă dintr-un cerc cu centrul O' și raza e prin reducerea fiecărui arc de cerc paralel cu linia de pămînt în proporția $\sin \nu : 1$. Dacă un plan Gaussian notat ξ, η este așezat în planul orizontal de



9.3.15. Demonstrarea relației $p^2 + q^2 + r^2 = 0$

proiecție cu O' ca origine și cu axa imaginară η care coincide cu $O'Z'$ atunci punctele X', Y', Z' corespund numerelor complexe p, q, r. Acestea sînt date de: $p = \cos(\pi + \psi) + i \sin\vartheta \sin(\pi + \psi) = -\cos\psi - i \sin\vartheta \sin\psi$, $q = \cos(3\pi/2 + \psi) + i \sin\vartheta \sin(3\pi/2 + \psi) = \sin\psi - i \sin\vartheta \cos\psi$, $r = i \cos\vartheta$.

Ridicînd la pătrat și adunînd se obține $p^2 + q^2 + r^2 = 0$. Dacă se ia modulul numerelor complexe și se pune $\lambda = |p|$, $\mu = |q|$, $\nu = |r|$, atunci rezultă $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 2$.

Perspectiva centrală

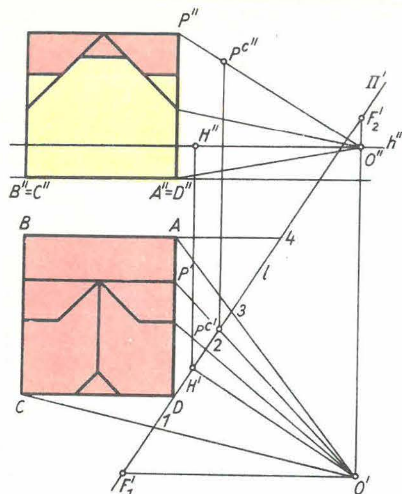
Perspectiva centrală este o proiecție centrală și este folosită pentru a construi imagini clare ale obiectelor spațiale, date de obicei prin proiecția lor orizontală și verticală. Problema inversă a reconstruirii proiecției orizontale și verticale din imaginile perspectivei centrale, de obicei fotografii, reprezintă domeniul *fotogrametriei*. Această problemă este rezolvabilă numai dacă pentru un *aparat fotografic orientat*, poziția lui relativă către obiect este cunoscută sau dacă, ca și într-o ridicare cartografică făcută cu ajutorul fotografiilor aeriene, fotografiile conțin *puncte* precise *de ghidaj* ale căror poziții sînt cunoscute. Pentru a determina o perspectivă centrală este suficient să se cunoască centrul perspectivei sau *punctul de perspectivă* O, *planul orizontal de poziție* Γ care nu trece prin O și un *plan-imagine vertical* π care nu trece prin O. Planul Ω paralel cu Γ ce trece prin O taie planul imagine π în *linia de orizont* h. Planul imagine și planul de poziție se intersectează în *linia de poziție* l. Piciorul perpendicularei din O pe π este *punctul principal* H. El se află pe orizontul h. Segmentul $d = |OH| = |O'H'|$ este *distanța*.

Metodele intersecției și punctului de fugă. Dacă sînt date proiecțiile orizontală și verticală ale unui model de casă, atunci perspectiva centrală a modelului relativă la planul-imagine vertical π și la punctul de perspectivă Q poate fi construită punct cu punct cu ajutorul metodei celor două plane. Aceasta este arătată pentru punctul P (fig. 9.3.16). $P'O'$ taie linia de poziție l în $P^{c'}$ și $P''O''$ taie dreapta directoare prin $P^{c'}$ în $P^{c''}$. În acest fel poate fi găsită imaginea P^c a lui P. Ea poate fi translatată pe un alt desen, care corespunde cu o rabatere a lui π în jurul lui l și conține orizontul, punctul principal și punctele de fugă. Din regulile proiecției centrale, toate dreptele paralele au același punct de fugă. Pentru dreptele paralele cu planul de poziție Γ, punctele de fugă se află pe orizontul h. Pentru familia de paralele determinată de AB sau DC el este F_1. Proiecția lui orizontală este intersecția lui l cu dreapta prin O' paralelă la DC; similar, F_2' este proiecția orizontală a punctului de fugă pentru toate dreptele paralele caracterizate prin DA sau CB. Punctul de fugă al tuturor dreptelor perpendiculare pe planul-imagine este punctul principal H. Mai departe, punctele de intersecție ale muchiilor de bază cu dreapta de poziție sînt ajutătoare pentru construcție. Punctele 1, 2, 3, 4 pe l și F_1, F_2 pe h obținute în exemplul prezentat pot fi aduse în perspectiva centrală prin orientarea punctului H. În acest fel construcția perspectivei proiecției orizontale este redusă la îmbinarea punctelor și intersecția dreptelor.

Acum cotele primei linii pînă la streașina modelului de casă sînt luate din proiecția verticală și puse pe perpendicularele pe l prin 1, 2, 3 și 4 în π.

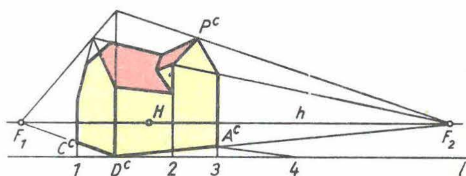
Folosind punctele de fugă F_1 și F_2, imaginea în perspectivă a modelului poate fi completată.

Metoda intersecției a fost descrisă de BRUNELLESCHI (1377—1446). Ea are dezavantajul că necesită spațiu mare și transferări de dimensiuni și este evitată în proiectele arhitecților·



9.3.16. Reprezentarea perspectivei centrale a unui model de casă construită prin metoda intersecției

Proiecția orizontală în π_1 este astfel aranjată (fig. 9.3.17), încît perpendicularele pe π_1' dau muchiile perpendiculare ale casei în reprezentarea perspectivei centrale. Cotele tuturor muchiilor frontale ale casei în raport cu punctul de perspectivă sînt transferate din proiecția verticală și cotele aparent reduse în schiță nu sînt construite în proiecție verticală, ci cu ajutorul dreptelor de fugă.



9.3.17. Reprezentarea perspectivei centrale a unui model de casă într-un proiect arhitectural

Probleme de măsurare ale perspectivei. În tratarea problemelor de măsurare ale perspectivei centrale sînt necesare diferite instrumente ca de exemplu determinarea adevăratei lungimi a unui segment AB a cărui proiecție centrală A^cB^c este dată. Pentru segmentele perpendiculare pe planul de poziție Γ, soluția este simplă. De exemplu, dacă trebuie găsită lungimea adevărată a unui segment m perpendicular pe Γ, dat de $m^c = |A^cB^c|$ (fig. 9.3.18), se ia arbitrar un punct F_s pe h și se unește cu A^c și B^c. Dreapta $s^c = A^cF_s$ se află în Γ și taie l în S, un punct al planului-imagine π.

Făcînd în așa fel ca t să indice dreapta $B^c F_s$, ea intersectează în T perpendiculara la l din S. Acum T se află de asemenea în π, prin urmare $|ST|$ este adevărata lungime a perpendicularei m dată de proiecția centrală.

Pentru dreptele care se află din planul de poziție, punerea segmentelor date în perspectiva centrală este importantă. Imaginea s^c a dreptei s_s în Γ, taie l în s și h în punctul ei de fugă F_s (fig. 9.3.19). Pe s_s este un punct A cu proiecția A^c. Dreapta s și raza de fugă OF_s sînt paralele. Pentru a obține construcția, s este rotit în Γ în jurul lui S către l și OF_s este rotit în jurul lui F_s în Ω către h. În urma rotației, A merge în A_l și O în M_s. Dreptele AA_l și OM_s sînt paralele. Ele, prin urmare, definesc un plan care conține dreptele OA și M_sA_l. Rezultă că aceste două drepte se intersectează în spațiu. Deoarece punctul lor comun trebuie să se găsească pe de o parte în π și pe de altă parte pe OA, nu poate fi decît imaginea punctului A^c a lui A. Deoarece segmentul $|SA_l|$ dă adevărata lungime a segmentului $|SA|$ dat de proiecția centrală, adevărata lungime a oricărui segment luat pe s^c

poate fi reconstruită cu ajutorul punctului M_s prin mijlocirea unei construcții în π. Punctul de măsură M_s aparținînd lui s poate fi de asemenea găsit în π din F_s și punctul $O°$ este obținut prin rabaterea punctului O. Cu centrul în F^s și raza $|F_sO°|$ este desenat un arc de cerc, tăind h în M_s. Dreapta care unește M_s și A^c taie l în A_l. $|SA_l|$ dă adevărata lungime a segmentului $|SA|$ dat de proiecția centrală. Dacă imaginea B^c a unui punct mai îndepărtat B este definită pe s^c, atunci cu ajutorul lui M_s adevărata lungime a lui $|SB|$ poate fi construită într-un mod similar. Afară de aceasta, segmentul $|A_lB_l|$ este egal cu adevărata lungime a segmentului $|AB|$ dat în imagine.

9.3.18. Adevărata lungime a unei perpendiculare la planul de poziție Γ

9.3.19. Metoda punctului de măsură

Metoda explicată aici pentru determinarea adevăratei lungimi a unui segment orizontal din lungimea perspectivei centrale este cunoscută ca *metoda punctului de măsură* și punctul M_s aparținînd tuturor dreptelor paralele cu s este cunoscut ca punct de măsură lui s.

În afară de acesta, orice segment dat a poate fi de mai multe ori trasat pe l și punctele de diviziune se unesc cu M_s. Aceste drepte, prin intersecțiile cu s_c, generează o scală proiectivă.

Prin aceste metode proiecția centrală a unui cub așezat pe Γ poate fi construită, dată fiind proiecția vizibilă $|A^cB^c|$ a unei muchii a (fig. 9.3.20). În construcție se ține seama de faptul că proiecția centrală este dată de poziția dreptei l, orizontul h, punctul principal H și distanța d.

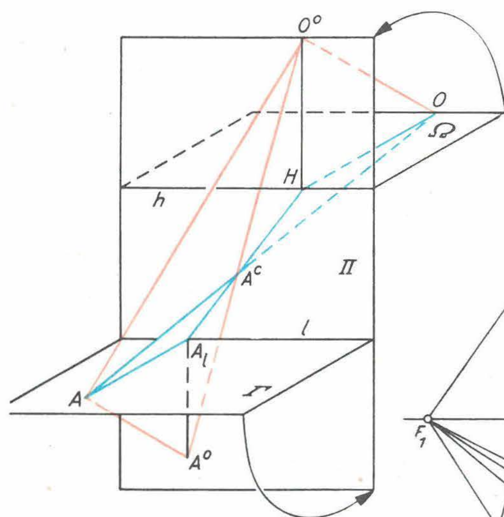
Coliniaritatea perspectivă. Se presupune că un punct A în Γ și proiecția lui centrală A^c sînt date (fig. 9.3.21). Planurile Γ și Ω sînt rotite în același sens în jurul lui l și respectiv h, către π. Atunci A ajunge în $A°$ și O în $O°$. Coardele $AA°$ și $OO°$ sînt paralele și determină un plan, care taie π în $O°A°$. Deoarece acest plan conține raza vizuală OA, A^c se află

9.3.20. Construcția proiecției centrale a unui cub, dîndu-i-se o muchie A^cB^c

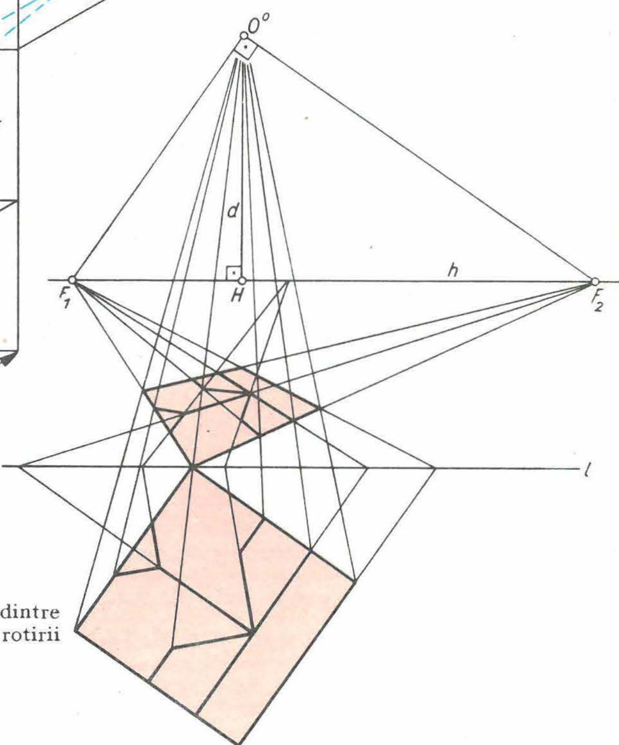
de asemenea pe $O^\circ A^\circ$. În afară de aceasta, paralele OH și AA_l determină un plan, care de asemenea conține raza vizuală OA și taie planul-imagine π sub dreapta HA_l. De aici rezultă că punctul de intersecție a lui $O^\circ A^\circ$ și HA_l este punctul imagine A^c al lui A.

Construcția, limitată la esențial, arată că există o relație de perspectivă coliniară între A^c și A° cu O° ca centru de coliniaritate, l ca axă de coliniaritate, și h ca contraaxă.

Imaginea perspectivei centrale a unei figuri în Γ și rotirea ei în jurul lui l către planul imagine π sînt conexate prin coliniaritatea perspectivă (*fig.* 9.3.22).



9.3.21. Perspectiva punctelor coliniare; relația dintre proiecția centrală a punctului A din Γ și rezultatul rotirii lui

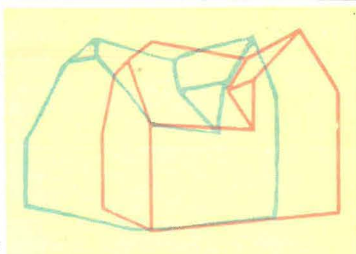


9.3.22. Coliniaritatea perspectivă dintre o figură plană din Γ și rezultatul rotirii ei în planul imagine π

Perechi de imagini stereoscopice

Vederea spațială depinde de faptul că fiecare ochi vede o imagine diferită a perspectivei centrale a unui obiect spațial. Aceste două imagini diferite sînt numite *imagini perechi stereoscopice* sau *imagini stereo*. Ele pot fi fotografiate cu un aparat de fotografiat stereo cu două obiective distanțate aproximativ 65 mm (≈ 2,56″) și separate cu ajutorul unui stereoscop, și apoi văzute fiecare în parte. Deoarece un obiect spațial poate fi reconstruit din imaginile lui stereo, *stereoscopia* este aplicată în ridicări topografice, criminologie și investigări de accidente. Imaginile stereoscopice pot fi de asemenea construite, de exemplu, prin metoda intersecției în perspectiva centrală. Distanța celor două puncte-ochi O și $\bar{O}$ este luată de 65 mm și distanța d de 200 mm.

În *metoda anaglifelor* cele două imagini stereoscopice sînt repuse în desen în așa fel încît ele emit lumină (fizic) diferită, de exemplu, lumină diferit polarizată sau lumină de culori complementare, verde și roșu (fig. 9.3.23). Imaginile se văd prin sticlă filtrantă. Fiecare absoarbe lumina imaginii corespunzătoare celuilalt ochi. Separarea imaginilor corespunzătoare fiecărui ochi prin colorare sau polarizare, folosind un aparat optic, dă privitorului impresia de profunzime spațială și plastică a obiectului. Pentru privirea figurii se va folosi un filtru roșu pentru ochiul stîng și un filtru verde pentru ochiul drept.



9.3.23. Două imagini în perspectivă centrală ale unui model de casă

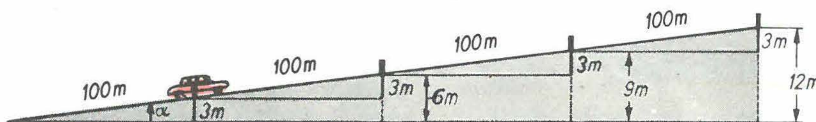
10. Trigonometrie

10.1. Funcții trigonometrice

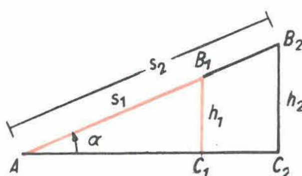
Trigonometria (*goniometria*) este știința care se ocupă cu *măsurarea unghiurilor* (în grecește *gonia* — unghi și *metrein* — a măsura). Prin măsurarea unghiurilor nu înțelegem numai măsurarea cu raportorul a unghiurilor, ci și măsurarea lor cu ajutorul unor funcții care sînt dependente de unghiuri. Funcțiile folosite în trigonometrie (în calcularea elementelor triunghiurilor) se numesc *funcții trigonometrice*.

Introducerea funcțiilor trigonometrice

Sinus. Dacă nivelul unei străzi crește la fiecare 100 m cu 3 m, atunci raportul diferenței de înălțime *h* la drumul parcurs *s*, adică 3 : 100 este o măsură a unghiului α pe care-l face



10.1.1. Planul înclinat



10.1.2. Sinusul și cosinusul unghiului α; $|AC_2|=e_2$; $|AC_1|=e_1$; $h_1/s_1 = h_2/s_2$; AC_1B_1 și AC_2B_2 sînt triunghiuri asemenea

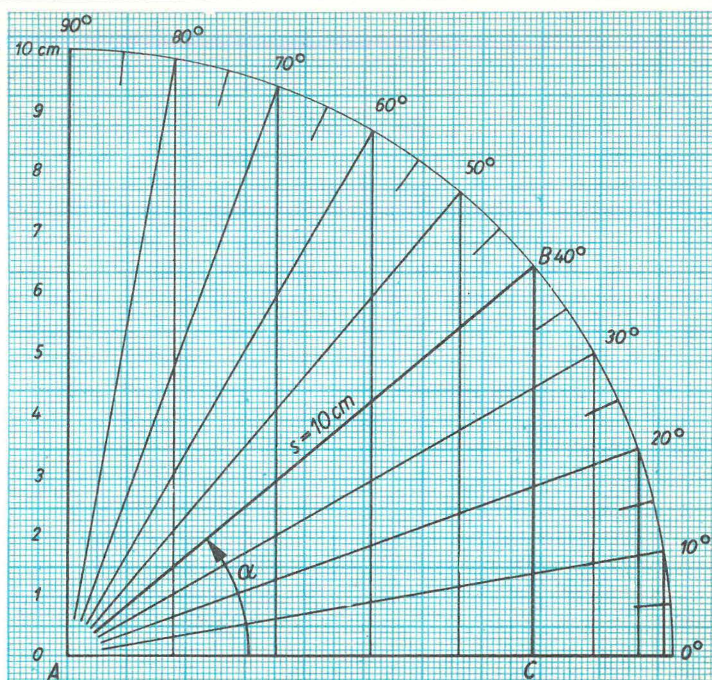
drumul cu orizontala (fig. 10.1.1). Raportul $h : s$ sau h/s este o *funcție de unghiul* α (fig. 10.1.2), denumită *sinusul unghiului* α:

$$\frac{h}{s} = \sin\alpha, \quad h = s\sin\alpha.$$

Cu ajutorul unui desen executat pe hîrtie milimetrică se poate afla valoarea $\frac{h}{s} = \sin\alpha$.

Determinarea mărimii sinusului, grafic, se face foarte simplu cînd s este o putere a lui 10, de exemplu 10 cm.

10.1.3. Determinarea grafică a raportului h/s pentru un unghi ascuțit dat; pentru $\alpha = 40°$ de exemplu,
$$\frac{h}{s} = \frac{6{,}43\ \text{cm}}{10{,}00\ \text{cm}} = 0{,}643.$$

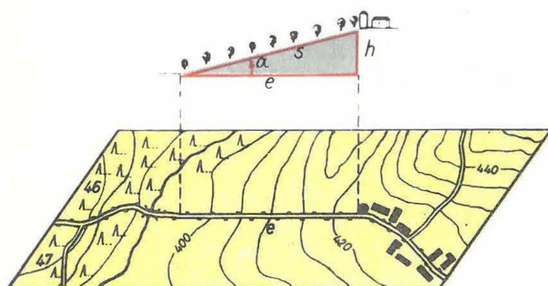


Exactitatea acestei determinări este mică, dar poate crește mărind figura. Reiese că funcția sinus a fiecărui unghi ascuțit este mai mică decît 1 și valorile sinusului sînt mai mari pentru unghiuri mai mari.

Cosinus. Pe hărțile geografice proiecțiile e pe planul orizontal ale segmentelor înclinate s apar ca distanțe pe hartă (fig. 10.1.4). Și raportul $e : s$ reprezintă o funcție a unghiului α, care se numește *cosinusul unghiului* α:

$$\cos\alpha = e : s = \frac{e}{s}; \qquad e = s\cos\alpha.$$

Valorile funcției cosinus se pot determina grafic, ca și cele ale funcției sinus. Din figura 10.1.3 reiese că valorile cosinusului scad cu creșterea unghiului.



10.1.4. Proiecția unui segment înclinat s pe hartă

Tangenta, cotangenta, secanta și cosecanta. Și alte rapoarte formate cu cele trei distanțe s, h și e stabilesc relații între aceste distanțe și unghiul α; ele definesc noi funcții unghiulare. Cele trei distanțe pot forma șase rapoarte. Dintre cele șase funcții trigonometrice *secanta* și *cosecanta* se folosesc mai rar, de exemplu în astronomie sau în navigație (fig. 10.1.4).

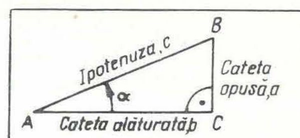
$$\text{Sinus: } \sin\alpha = \frac{h}{s};$$

$$\text{cosinus: } \cos\alpha = \frac{e}{s},$$

$$\text{tangentă: } \operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{e}, \qquad \text{cotangentă: } \operatorname{cotg}\alpha = \frac{e}{h},$$

$$\text{secantă: } \sec\alpha = \frac{s}{e}, \qquad \text{cosecantă: } \operatorname{cosec}\alpha = \frac{s}{h}.$$

10.1.5. Unghiul α într-un triunghi dreptunghic



Într-un triunghi dreptunghic ABC cu ipotenuza c, se notează cu a cateta opusă unghiului α, iar cu b cateta alăturată (fig. 10.1.5). Atunci definirea celor șase funcții se mai poate face și în felul următor:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{ipotenuză}}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{cateta opusă}}{\text{cateta alăturată}},$$

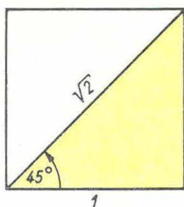
$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{cateta alăturată}}{\text{ipotenuză}}, \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateta alăturată}}{\text{cateta opusă}},$$

$$\sec\alpha = \frac{c}{b} = \frac{\text{ipotenuză}}{\text{cateta alăturată}}, \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{ipotenuză}}{\text{cateta opusă}}.$$

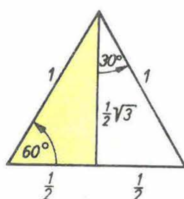
Între funcțiile trigonometrice există anumite relații, care se stabilesc foarte ușor într-un triunghi dreptunghic, adevărate pentru orice unghi α:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \qquad \operatorname{tg}\alpha \operatorname{cotg}\alpha = 1, \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}, \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}, \quad 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad 1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$



10.1.6. Pătrat cu latura 1



10.1.7. Triunghi echilateral cu latura 1

Unghiurile de 45°, 30° și 60° se pun în evidență prin trasarea diagonalei $d = \sqrt{2}$ a pătratului (fig. 10.1.6) și respectiv a înălțimii $h = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ într-un triunghi echilateral (fig. 10.1.7), ambele figuri avînd latura egală cu 1. Pentru cele patru funcții trigonometrice uzuale se obțin ușor valorile. Ele sînt date în tabelul de mai jos cu patru zecimale:

Unele valori sînt *raționale*, altele *iraționale*, dar toate sînt *algebrice*. Cu ajutorul relațiilor deri-

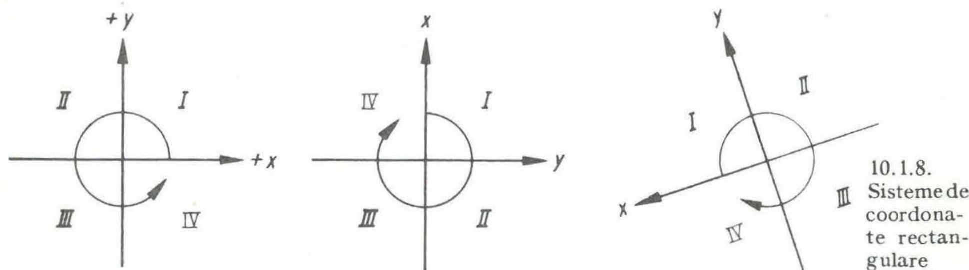
Funcția	$\varphi = 30°$	$\varphi = 45°$	$\varphi = 60°$	Funcția	$\varphi = 30°$	$\varphi = 45°$	$\varphi = 60°$
$\sin\varphi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\sin\varphi$	0,5000	0,7071	0,8660
$\cos\varphi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	$\cos\varphi$	0,8660	0,7071	0,5000
$\operatorname{tg}\varphi$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\operatorname{tg}\varphi$	0,5774	1,0000	1,7321
$\operatorname{cotg}\varphi$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\operatorname{cotg}\varphi$	1,7321	1,0000	0,5774

vate din teorema de adunare a funcțiilor trigonometrice se pot calcula, prin operații algebrice, valorile funcțiilor trigonometrice pentru $\frac{\varphi}{2}$, $\frac{\varphi}{4}$, ..., 2φ, 3φ, 4φ, 5φ, ...

În general, valorile funcțiilor trigonometrice sînt *numere transcendente*, ale căror valori se obțin din serii infinite cu precizia dorită.

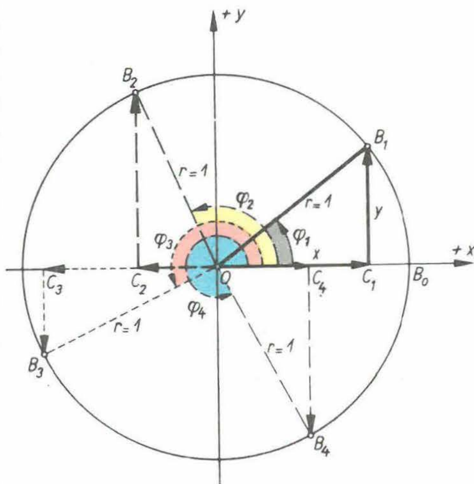
Definiția funcțiilor trigonometrice pentru un unghi oarecare

Pentru a defini funcțiile trigonometrice sinus, cosinus, tangentă și cotangentă ale unui unghi oarecare, nu numai pentru unghiuri ascuțite, se utilizează un *sistem cartezian de coordonate*, în care sensul de rotire este *pozitiv* de la dreapta spre stînga, adică invers rotirii acelor de ceasornic. În *topografia subterană* și în *geofizică* se folosesc sisteme a căror axă x este orientată spre nord, y către est, iar sensul de rotație pozitiv este cel al acelor de ceasornic. Diferite sisteme de coordonate rectangulare sînt prezentate în figura 10.1.8.



10.1.8. Sisteme de coordonate rectangulare

Definirea funcțiilor trigonometrice pe cercul de rază unitate. Într-un sistem de coordonate carteziene un unghi φ se poate afla în orice cadran iar valoarea sa se poate măsura în grade sexagesimale, centezimale sau în radiani (v. cap. 7). Raza mobilă va tăia cercul de rază $r = 1$ în punctul B_i. Pentru punctul de intersecție B_0 a axei Ox cu cercul unitate, unghiul φ va avea valoarea 0. În timp ce raza parcurge un cerc întreg, φ va lua toate valorile de la 0° pînă la 360°, respectiv 400g centezimale sau 2π. Relațiile pe care le vom obține sînt valabile și pentru unghiuri mai mari decît 2π, deoarece punctul B_i va avea aceleași coordonate ca și pentru unghiul cuprins între 0 și 2π. Coordonatele punctului B_i sînt definite astfel: *abscisa este proiecția ortogonală a razei $r = 1$ pe axa Ox, iar ordonata proiecția pe axa Oy*; coordonatele sînt pentru B_3 negative, deoarece $\overrightarrow{OC_3}$ și $\overrightarrow{C_3B_3}$ sînt orientate negativ față de axa Ox și respectiv Oy (fig. 10.1.9).



10.1.9 Definirea funcțiilor trigonometrice pe cercul de rază $r = 1$

În primul cadran, în triunghiul OC_1B_1, sînt valabile definițiile pentru sinus, cosinus, tangentă, cotangentă. S-a constatat că aceleași definiții sînt valabile pentru toate cadranele, adică pentru orice coordonate ale punctului B_i.

Abscisele și ordonatele au în diferite cadrane diferite semne, iar raza este totdeauna pozitivă. În fig. 10.1.9, sin φ_2, tg φ_3, cotg φ_3 și cos φ_4 sînt pozitive, iar cos φ_2, tg φ_2, cotg φ_2, sin φ_3, cos φ_3, sin φ_4, tg φ_4 și cotg φ_4 sînt negative. În tabelul semnelor sînt arătate semnele celor patru funcții trigonometrice în cele patru cadrane.

Tabelul semnelor

$$\sin\varphi = \frac{\text{ordonată}}{\text{rază}}, \quad \cos\varphi = \frac{\text{abscisă}}{\text{rază}},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\text{ordonată}}{\text{abscisă}}, \quad \operatorname{cotg}\varphi = \frac{\text{abscisă}}{\text{ordonată}}.$$

Funcția	Cadranul I	II	III	IV
sin φ	+	+	−	−
cos φ	+	−	−	+
tg φ	+	−	+	−
cotg φ	+	−	+	−

Procedeul arătat de extindere a domeniului de valabilitate a definițiilor de la cadranul I la cadranele II, III, IV se aplică des în matematică *(principiul permanenței)*. Pentru funcțiile trigonometrice toate relațiile stabilite pînă acum pentru primul cadran sînt valabile pentru orice unghi φ (fig. 10.1.10).

Și pentru unghiurile 0°, 90° (100^g, $\pi/2$), 180° (200^g, π), 270° (300^g, $3\pi/2$) și 360° (400^g, 2π) se pot calcula valorile funcțiilor trigonometrice, căci abscisa și ordonata acestor unghiuri iau valorile 0, 1 sau −1. Tangenta și cotangenta sînt *nedeterminate* cînd numitorul fracției ia valoarea 0. Dacă ne apropiem de 90° prin valori mai mici decît 90°, atunci

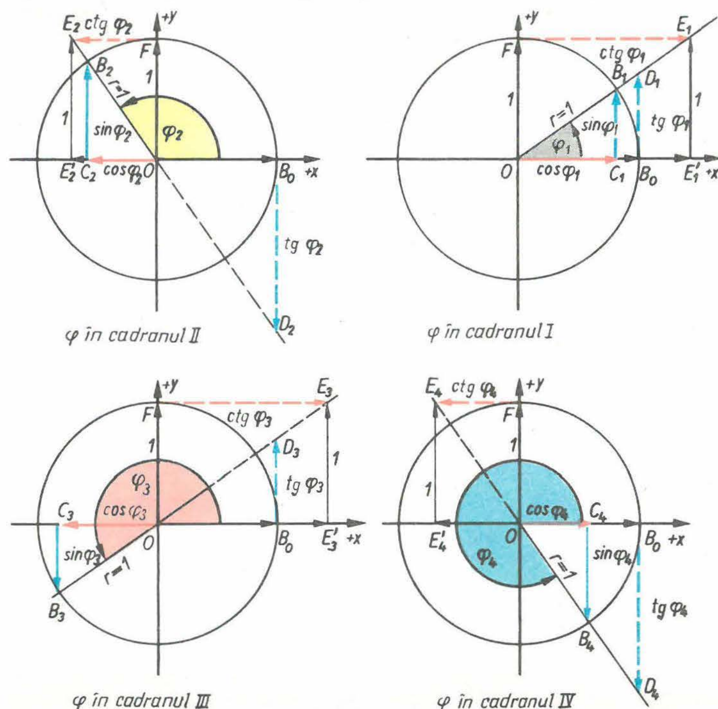
$$\lim_{\varphi_1\to 90^\circ} \operatorname{tg}\varphi_1 = \lim_{\overline{OC_1}\to 0} \frac{\overline{C_1B_1}}{\overline{OC_1}} = +\infty;$$

iar cînd valorile sînt mai mari decît 90°, atunci

$$\lim_{\varphi_2\to 90^\circ} \operatorname{tg}\varphi_2 = \lim_{\overline{OC_2}\to 0} \frac{\overline{C_2B_2}}{-\overline{OC_2}} = -\infty.$$

Unghiul φ	0° 0^g 0	90° 100^g $\frac{\pi}{2}$	180° 200^g π	270° 300^g $\frac{3}{2}\pi$	360° 400^g 2π
sin φ	0	+1	0	−1	0
cos φ	+1	0	−1	0	+1
tg φ	0	±∞	0	±∞	0
cotg φ	±∞	0	±∞	0	±∞

Pentru φ = 90° tangenta nu este definită, valoarea tangentei sare de la +∞ la −∞; tg 90° = ±∞. Și la 270° tangenta prezintă *un salt* de la +∞ la −∞, iar cotangenta are puncte



10.1.10. Funcțiile trigonometrice în cele patru cadrane

de salt la $\varphi = 0$ și $\varphi = \pi$. Deoarece raza cercului unitate este egală cu $+1$, sinusul și cosinusul sînt egale cu *valoarea ordonatei*, respectiv *a abscisei*.

Valoarea *tangentei* este în fond mărimea segmentului orientat care se află pe tangenta la cercul unitate de la punctul B_0 ($x = 1$) și pînă la punctul de intersecție a laturii mobile a unghiului φ cu tangenta la cercul unitate:

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\sin \varphi_2}{\cos \varphi_2} = \frac{\overrightarrow{C_2B_2}}{\overrightarrow{OC_2}} = \frac{\overrightarrow{B_0D_2}}{\overrightarrow{OB_0}} = m(\overrightarrow{B_0D_2}), \quad \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\sin \varphi_1}{\cos \varphi_1} = \frac{\overrightarrow{C_1B_1}}{\overrightarrow{OC_1}} = \frac{\overrightarrow{B_0D_1}}{\overrightarrow{OB_0}} = m(\overrightarrow{B_0D_1}),$$

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{\sin \varphi_3}{\cos \varphi_3} = \frac{\overrightarrow{C_3B_3}}{\overrightarrow{OC_3}} = \frac{\overrightarrow{B_0D_3}}{\overrightarrow{OB_0}} = m(\overrightarrow{B_0D_3}), \quad \operatorname{tg} \varphi_4 = \frac{\sin \varphi_4}{\cos \varphi_4} = \frac{\overrightarrow{C_4B_4}}{\overrightarrow{OC_4}} = \frac{\overrightarrow{B_0D_4}}{\overrightarrow{OB_0}} = m(\overrightarrow{B_0D_4}).$$

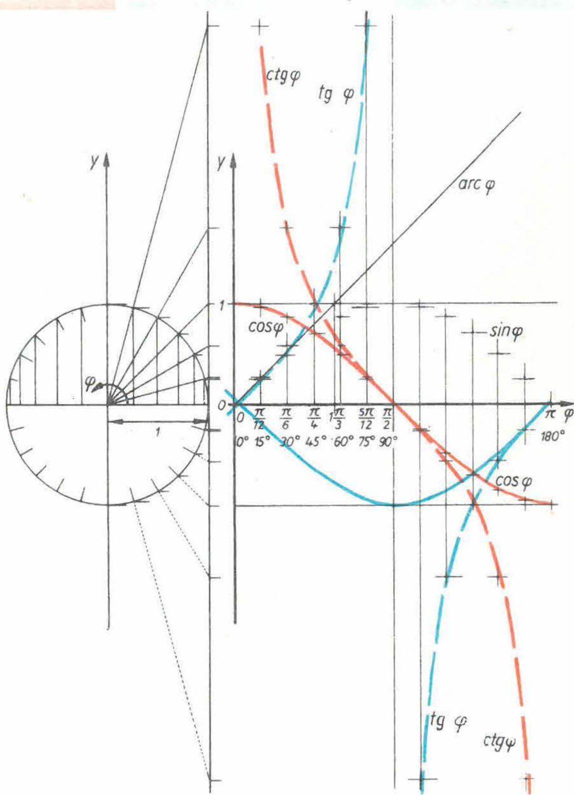
Cotangenta poate fi și ea exprimată ca mărimea segmentului orientat de pe tangenta la cercul unitate în punctul F ($y = 1$), avînd drept extremități punctele de intersecție cu tangenta a părții pozitive a axei Oy și a laturii mobile a unghiului:

$$\operatorname{cotg} \varphi_1 = \frac{\cos \varphi_1}{\sin \varphi_1} = \frac{\overrightarrow{OC_1}}{\overrightarrow{C_1B_1}} = \frac{\overrightarrow{OE_1'}}{\overrightarrow{E_1'E_1}} = m(\overrightarrow{FE_1}),$$

$$\operatorname{cotg} \varphi_2 = \frac{\cos \varphi_2}{\sin \varphi_2} = \frac{\overrightarrow{OC_2}}{\overrightarrow{C_2B_2}} = \frac{\overrightarrow{OE_2'}}{\overrightarrow{E_2'E_2}} = m(\overrightarrow{FE_2}),$$

$$\operatorname{cotg} \varphi_3 = \frac{\cos \varphi_3}{\sin \varphi_3} = \frac{\overrightarrow{OC_3}}{\overrightarrow{C_3B_3}} = \frac{\overrightarrow{OE_3'}}{\overrightarrow{E_3'E_3}} = m(\overrightarrow{FE_3}),$$

$$\operatorname{cotg} \varphi_4 = \frac{\cos \varphi_4}{\sin \varphi_4} = \frac{\overrightarrow{OC_4}}{\overrightarrow{C_4B_4}} = \frac{\overrightarrow{OE_4'}}{\overrightarrow{E_4'E_4}} = m(\overrightarrow{FE_4}).$$



10.1.11. Construcția graficelor funcțiilor trigonometrice

Tangenta și *cotangenta* sînt deci egale cu *mărimea segmentului de pe tangentă* (punct de contact $x = 1$), respectiv *pe cotangentă* (punct de contact $y = 1$).

Valorile funcțiilor trigonometrice pentru unghiurile 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3}{2}\pi$ și 2π se pot afla foarte ușor din cercul unitate.

Reprezentarea grafică a funcțiilor în cele patru cadrane. O privire de ansamblu asupra valorilor pe care le iau funcțiile trigonometrice se obține printr-o reprezentare grafică într-un

sistem de coordonate în care valorile argumentului φ în radiani sînt reprezentate pe axa absciselor iar valorile funcțiilor trigonometrice respective ca ordonate. În prima figură se face o reprezentare prin puncte a valorilor funcțiilor trigonometrice din 15° în 15° în primele două cadrane. În a doua figură sînt reprezentate valorile funcțiilor trigonometrice în toate cele patru cadrane.

Proprietățile funcțiilor trigonometrice

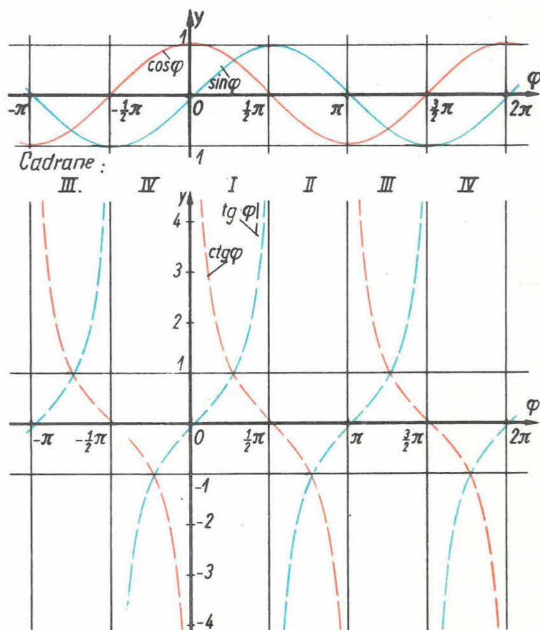
Din reprezentarea grafică a funcțiilor trigonometrice (fig. 10.1.12) pot fi deduse o serie de proprietăți ale acestor funcții, a căror veridicitate se poate demonstra cel mai ușor în cercul unitate. Unghiurile pot lua orice valoare pozitivă sau negativă (așa cum vom arăta mai departe).

Periodicitatea funcțiilor trigonometrice. Funcțiile trigonometrice sînt periodice: funcțiile sinus și cosinus au perioade 2π (360° sau 400^g); tangenta și cotangenta au perioada π (180° sau 200^g). În cercul unitate latura mobilă a unghiului $(\varphi \pm 2n\pi)$ are aceeași poziție, deci funcția trigonometrică are aceeași valoare:

$$\sin(\varphi \pm 2n\pi) = \sin\varphi;$$
$$\cos(\varphi \pm 2n\pi) = \cos\varphi;$$
$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

Reprezentarea grafică pe cercul unitate ne arată că tangenta și cotangenta unghiurilor $(\varphi \pm n\pi)$ au respectiv aceeași valoare:

$$\operatorname{tg}(\varphi \pm n\pi) = \operatorname{tg}\varphi;$$
$$\operatorname{cotg}(\varphi \pm n\pi) = \operatorname{cotg}\varphi;$$
$$n = 1, 2, 3, \ldots$$



10.1.12. Reprezentarea grafică a funcțiilor trigonometrice în cele patru cadrane (argumente măsurate în radiani)

Funcțiile sinus și cosinus iau toate valorile cuprinse între -1 și $+1$ pentru $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ iar tangenta și cotangenta valorile de la $-\infty$ la $+\infty$ pentru $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

$$-1 \leqslant \sin\varphi \leqslant +1 \text{ sau } |\sin\varphi| \leqslant 1, \quad -1 \leqslant \cos\varphi \leqslant +1 \text{ sau } |\cos\varphi| \leqslant 1.$$

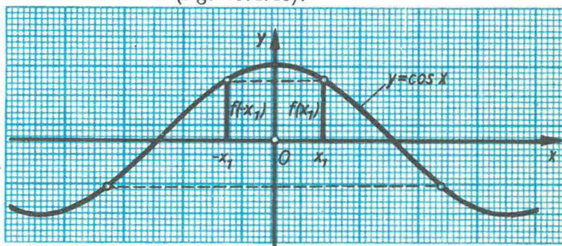
Panta tangentei. Conform regulilor calculului diferențial, derivata unei funcții într-un punct al curbei reprezintă panta tangentei în acest punct. Astfel $\frac{d\sin\varphi}{d\varphi} = \cos\varphi$, $\frac{d\cos\varphi}{d\varphi} = -\sin\varphi$, $\frac{d\operatorname{tg}\varphi}{d\varphi} = \frac{1}{\cos^2\varphi}$, $\frac{d\operatorname{cotg}\varphi}{d\varphi} = -\frac{1}{\sin^2\varphi}$. Curbele sinusului și tangentei taie axa absciselor în punctul $\varphi = 0$ sub un unghi de 45°, $\left[\frac{d\sin\varphi}{d\varphi}\right]_{\varphi=0} = \left[\frac{d\operatorname{tg}\varphi}{d\varphi}\right]_{\varphi=0} = +1$. Pentru valori crescătoare ale lui φ curbele sinusului și tangentei se depărtează de tangenta comună, sinusul

în jos, tangenta în sus, deoarece cos φ descrește. Pentru $\varphi = \pi$, curbele sînt perpendiculare. Pentru $\varphi = \frac{\pi}{2}$ curbele cosinusului și cotangentei au o tangentă comună care formează un unghi de $-45°$ cu axa φ; $\left[\frac{d\cos\varphi}{d\varphi}\right]_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{d\,\mathrm{cotg}\,\varphi}{d\varphi}\right]_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = -1$; pentru unghiuri mai mari curba cosinusului se va afla deasupra iar cea a cotangentei dedesubtul tangentei comune. Pentru $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ aceste curbe vor fi perpendiculare. În punctele $\varphi = \frac{\pi}{2}$ și $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ curba sinusului va avea o tangentă paralelă cu axa φ iar în punctele $\varphi = 0$ și $\varphi = \pi$ curba cosinusului va avea și ea o tangentă paralelă cu axa φ.

Orientarea tangentei la curbele sinusului și tangentei în primul cadran arată veridicitatea relației $\sin\varphi < \mathrm{arc}\,\varphi < \mathrm{tg}\,\varphi$ în care arc φ este măsura unghiului în radiani.

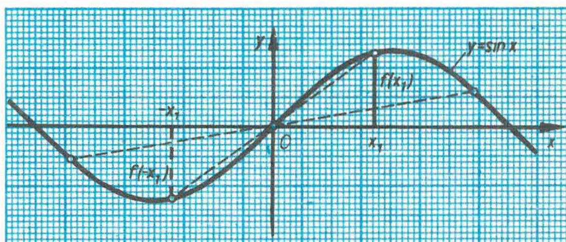
Pe grafic arc φ este reprezentat printr-o dreaptă înclinată la 45° față de axa φ pozitivă.

Funcții pare și impare. Funcția cos φ este o funcție pară, avînd aceeași valoare pentru unghiuri pozitive sau negative egale în valoare absolută (fig. 10.1.13).



10.1.13. Reprezentarea grafică a funcției pare $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$

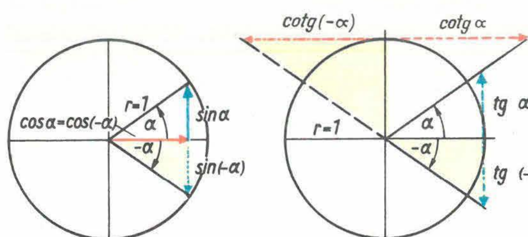
funcții impare
$\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$
$\mathrm{tg}(-\varphi) = -\mathrm{tg}\,\varphi$
$\mathrm{cotg}(-\varphi) = -\mathrm{cotg}\,\varphi$
funcție pară
$\cos(-\varphi) = \cos\varphi$



10.1.14. Reprezentarea grafică a funcției impare $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$

Funcțiile sinus, tangentă, cotangentă sînt impare. Curbele lor sînt simetrice față de origine; valoarea funcției pentru un unghi negativ este egală cu valoarea negativă a funcției pentru unghiul pozitiv cu aceeași valoare absolută $f(-x) = -f(x)$ (fig. 10.1.14). Veridicitatea acestor relații se demonstrează cel mai ușor pe cercul unitate.

Datorită acestor proprietăți, pentru a găsi valorile funcțiilor pentru toată perioada este suficient să cunoaștem valorile funcțiilor într-un *subinterval* de lungimea unei jumătăți de perioadă. Cosinusul are aceleași valori între 0 și π ca în intervalul 2π și π; $\cos\varphi = \cos(2\pi - \varphi)$, $\varphi \leqslant \pi$. Pe intervalul $[0, \pi]$ el ia toate valorile posibile. Pentru celelalte trei funcții impare este suficientă cunoașterea valorilor funcției într-un subinterval al perioadei pentru sin φ de la 0 la π, pentru tangentă și cotangentă de la 0 la $\frac{\pi}{2}$.



10.1.15. Sinusul, cosinusul, tangenta și cotangenta unghiurilor negative

Cu ajutorul cofuncției și relațiilor dintre funcții se arată că este suficientă cunoașterea valorilor funcției sinus pentru φ de la 0 la $\frac{\pi}{2}$ pentru a afla valorile celorlalte funcții trigonometrice (fig. 10.1.15). Pentru simplificarea calculelor se dau împreună cu valorile sinusului pentru $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ și valorile tangentei.

Relații între funcțiile trigonometrice ale unui unghi. Conform relațiilor stabilite pînă acum, orice funcție trigonometrică a unui unghi se poate exprima prin oricare altă funcție trigonometrică a aceluiași unghi. De exemplu, exprimăm sin φ și cotg φ în funcție de cos φ:

$$1.\quad \sin\varphi = \pm\sqrt{1-\cos^2\varphi}.\quad 2.\quad \operatorname{cotg}\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi}{\pm\sqrt{1-\cos^2\varphi}}.$$

Următorul tabel conține toate relațiile:

de aflat	fiind date sin φ	cos φ	tg φ	cotg φ
$\sin\varphi =$	$\sin\varphi$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\varphi}$	$\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\varphi}}$
$\cos\varphi =$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\varphi}$	$\cos\varphi$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}$	$\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{\pm\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\varphi}}$
$\operatorname{tg}\varphi =$	$\frac{\sin\varphi}{\pm\sqrt{1-\sin^2\varphi}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\varphi}}{\cos\varphi}$	$\operatorname{tg}\varphi$	$\frac{1}{\operatorname{cotg}\varphi}$
$\operatorname{cotg}\varphi =$	$\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2\varphi}}{\sin\varphi}$	$\frac{\cos\varphi}{\pm\sqrt{1-\cos^2\varphi}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}$	$\operatorname{cotg}\varphi$

Pentru unghiurile din primul cadran rădăcinile vor avea ca semn +, în celelalte cadrane semnul rădăcinii se va stabili conform tabelului semnelor sau pe baza cercului unitate.

Exemplu. În cadranul III valorile funcțiilor sin φ, cos φ sînt negative, iar tg φ și cotg φ sînt pozitive; în rîndul al doilea al tabelului pentru $\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$ formulele au următoarea expresie:

$$\cos\varphi = -\sqrt{1-\sin^2\varphi} = -\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = -\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\varphi}}$$

Funcții și cofuncții. Cuvîntul cosinus provine din latinescul *complementi sinus* care înseamnă sinusul unghiului complementar; la fel și *cotangenta și cosecanta sînt tangenta și secanta unghiului complementar.* Unghiul complementar β al unui unghi ascuțit dat α este unghiul pentru care α + β este un unghi drept. Unghiul drept poate fi măsurat în grade sexagesimale,

centezimale sau în radiani. Astfel, dacă α și β sînt măsurate în radiani, atunci $\alpha + \beta = \pi/2$. Deci cosinusul, cotangenta și cosecanta se pot exprima astfel:

$$\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\beta,$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \sec\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sec\beta,$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\beta.$$

1 unghi drept = 90° = = 100^g = $\pi/2$ radiani

Într-un triunghi dreptunghic, unde unghiului α îi corespunde cateta a și unghiului β cateta b, funcțiile trigonometrice se exprimă astfel:

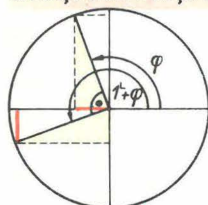
$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c} = \sin\beta, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \operatorname{cotg}\beta, \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a} = \operatorname{tg}\beta,$$

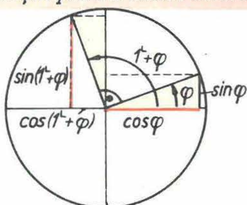
prin urmare:

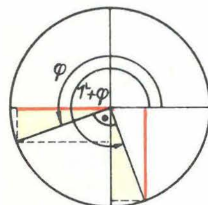
$$\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \quad \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \quad \sec\alpha = \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right),$$

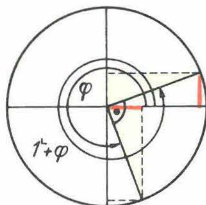
deci putem afirma că *sinusul* este *cofuncția cosinusului* și *tangenta*, respectiv *secanta* sînt *cofuncțiile cotangentei*, respectiv *cosecantei*.

Fiecare funcție trigonometrică ia pentru valori crescătoare ale argumentului de la 0 *la* $\frac{\pi}{2}$, *aceleași valori ca și cofuncția pentru valori descrescătoare ale argumentului de la* $\frac{\pi}{2}$ *la* **0.**









10.1.16. Rotirea cu un unghi drept

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \cos\varphi, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\sin\varphi$$

Relații între cadrane. Între funcțiile trigonometrice ale căror argumente se deosebesc printr-un multiplu de $\frac{\pi}{2}$ există legături numite relații între cadrane.

Trecerea de la un cadran la altul se face prin rotirea figurii cu un unghi drept, adică prin adunarea la argumentul φ a unui unghi de 90° (fig. 10.1.16). Deci abscisele, respectiv valorile cosinusului vor trece în ordonate, adică în valorile sinusului în valoarea absolută și invers:

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\right| = |\cos\varphi|,$$

$$\left|\left(\cos\frac{\pi}{2} + \varphi\right)\right| = |\sin\varphi|.$$

Un $\cos\varphi$ pozitiv (se află pe axa Ox pozitivă) va trece după o rotație în $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)$ pe partea axei Oy pozitive, deci va fi pozitiv; un $\cos\varphi$ negativ care se afla pe partea axei Ox negative se va găsi după o rotație cu $\frac{\pi}{2}$ în partea axei Oy negative. Deci, $\cos\varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)$. O valoare pozitivă $\sin\varphi$ care se afla pe partea pozitivă a axei Oy printr-o rotație cu $\frac{\pi}{2}$ se va găsi pe axa Ox negativă, iar o valoare $\sin\varphi$ negativă se va afla pe axa Ox pozitivă. Deci $\sin\varphi = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)$.

Raza cercului unitate are în sistemul de coordonate aceeași poziție pentru un unghi pozitiv φ ca și pentru unghiul negativ ψ cînd $\varphi + \psi = 2\pi$. Deci funcțiile trigonometrice au aceeași valoare cînd îl înlocuim pe φ cu $-\psi$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \cos(-\psi) = \cos\psi, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = -\sin(-\psi) = \sin\psi.$$

Deoarece $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ și $\operatorname{cotg}\varphi = \dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\operatorname{cotg}\varphi, \qquad \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\operatorname{tg}\varphi,$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \operatorname{cotg}\psi, \qquad \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \operatorname{tg}\psi.$$

Deci relațiile între funcții și cofuncții sînt valabile pentru orice unghi ψ. Relația $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \beta\right) = \cos\beta$ se interpretează geometric astfel: graficul funcției sinus este translația graficului funcției cosinus cu $\dfrac{\pi}{2}$.

Trecerea la următoarele cadrane, adică la al treilea sau la al patrulea, reprezintă în fond o adunare a argumentului unghiului cu $\dfrac{2\pi}{2}$ și $\dfrac{3\pi}{2}$ respectiv. Relațiile se deduc foarte ușor folosind relațiile anterioare, în care în loc de φ se pune $\dfrac{\pi}{2} + \psi$ sau $\dfrac{2\pi}{2} + \psi$ respectiv.

Exemple. 1. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{2\pi}{2} + \psi\right) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} + \psi\right) = -\operatorname{cotg}\left(\dfrac{\pi}{2} + \psi\right) = +\operatorname{tg}\psi.$

2. $$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \psi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{2} + \psi\right) = -\sin\left(\frac{2\pi}{2} + \psi\right) =$$
$$= -\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \psi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right) = +\sin\psi.$$

Putem scădea dintr-un multiplu de $\dfrac{\pi}{2}$ un unghi oarecare φ folosind tot relațiile anterioare:

Exemplu. $\sin\left(\dfrac{2\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi.$

Reducerea la primul cadran. Toate relațiile obținute pot fi sintetizate într-un tabel. Funcțiile trigonometrice ale unghiului $\Phi = \dfrac{n\pi}{2} \pm \delta$ pentru $n = 1, 2, 3, 4$ pot fi exprimate printr-o funcție trigonometrică a unghiului δ, unde δ este un unghi oarecare.

Φ	$\frac{\pi}{2}-\delta$	$\frac{\pi}{2}+\delta$	$\frac{2\pi}{2}-\delta$	$\frac{2\pi}{2}+\delta$	$\frac{3\pi}{2}-\delta$	$\frac{3\pi}{2}+\delta$	$\frac{4\pi}{2}-\delta$	$\frac{4\pi}{2}+\delta$
sin Φ cos Φ tg Φ cotg Φ	cos δ sin δ cotg δ tg δ	cos δ $-$sin δ $-$cotg δ $-$tg δ	sin δ $-$cos δ $-$tg δ $-$cotg δ	$-$sin δ $-$cos δ $+$tg δ $+$cotg δ	$-$cos δ $-$sin δ $+$cotg δ $+$tg δ	$-$cos δ $+$sin δ $-$cotg δ $-$tg δ	$-$sin δ $+$cos δ $-$tg δ $-$cotg δ	sin δ cos δ tg δ cotgδ
cadran	I	II	II	III	III	IV	IV	I

Tabelul ne indică următoarele reguli:

1. Pentru *multiplii impari* ai lui $\frac{\pi}{2}$, adică pentru $\Phi = \frac{\pi}{2} \pm \delta$, $\Phi = \frac{3\pi}{2} \pm \delta$, în locul funcţiei căutate pentru Φ, va apărea *cofuncţia* lui δ.
2. Pentru *multiplii pari* ai lui $\frac{\pi}{2}$, adică pentru $\Phi = \frac{2\pi}{2} \pm \delta$, $\Phi = 2\pi \pm \delta$, va apărea *aceeaşi funcţie* a lui δ ca şi aceea pe care o căutăm pentru Φ.
3. Dacă δ este ascuţit, atunci raza mobilă a unghiului Φ se va afla în cadranul indicat de ultimul rînd al tabelului pentru care ştim semnele pe care le au funcţiile trigonometrice.

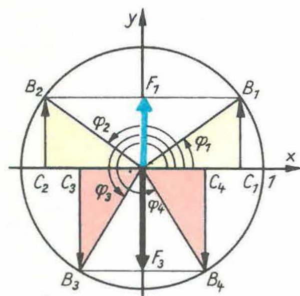
Acest tabel reprezintă în fond trecerea la primul cadran a oricărui unghi. În practică, unghiul δ este pozitiv şi deci coloanele $\frac{\pi}{2}+\delta$, $\frac{2\pi}{2}+\delta$, $\frac{3\pi}{2}+\delta$ sînt cele mai des folosite.

Conform tabelului $\sin\left(\frac{2\pi}{2}+\delta\right) = -\sin\delta$; $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right) = -\operatorname{cotg}\delta$, $\operatorname{cotg}\left(\frac{3\pi}{2}+\delta\right) = -\operatorname{tg}\delta$.

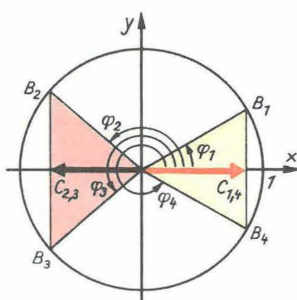
Funcţii trigonometrice inverse. Trasăm din centrul cercului două segmente orientate $\overrightarrow{OF_1}$ şi $\overrightarrow{OF_3}$ pe axa Oy care au dimensiuni mai mici decît unitatea. Paralele duse prin punctele F_1 şi F_3 la axa Ox intersectează cercul în punctele B_1 şi B_2, respectiv B_3 şi B_4. Din fig. 10.1.17 reiese că OB_1 şi OB_2, respectiv OB_3 şi OB_4 sînt laturile mobile a două unghiuri φ_1 şi φ_2 respectiv φ_3 şi φ_4 ale căror sinusuri se măsoară prin mărimea segmentelor $\overrightarrow{OF_1}$, respectiv $\overrightarrow{OF_3}$,

$$\sin\varphi_1 = \sin\varphi_2 = m(\overrightarrow{OF_1}),$$

$$\sin\varphi_3 = \sin\varphi_4 = m(\overrightarrow{OF_3}).$$



10.1.17. Construcţia unghiurilor pentru două valori ale sinusului



10.1.18. Construcţia unghiurilor pentru două valori ale cosinusului

Deci, orice număr y cu $|y| \leqslant 1$ poate fi o valoare a funcţiei sinus şi putem găsi două unghiuri φ_1 şi φ_2 care sînt soluţiile ecuaţiei $y = \sin\psi$.

În figură nu pot fi reprezentate unghiurile obţinute prin rotaţii complete ale laturilor mobile. Deci există o infinitate de soluţii:

$$\psi_1 = \varphi_1 \pm 2n\pi \quad \text{şi} \quad \psi_2 = \varphi_2 \pm 2n\pi, \quad \text{pentru } y > 0, \quad n = 0,\ 1,\ 2, \dots$$

La fel

$$\psi_1 = \varphi_3 \pm 2n\pi \quad \text{şi} \quad \psi_2 = \varphi_4 \pm 2n\pi \quad \text{pentru } y < 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Datorită proprietăţilor de simetrie faţă de axa Oy

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \pi, \ \varphi_3 + \varphi_4 = 3\pi.$$

Procedînd analog pentru orice număr x, cu $|x| \leqslant 1$ reprezentat orientat ca segment pe axa Ox, și trasîndu-se paralele la Oy prin $C_{1,4}$, respectiv $C_{2,3}$, obținem cîte două unghiuri φ_1 și φ_4, respectiv φ_2 și φ_3 ca soluții ale ecuației $\cos\psi = x$(fig 10.1.18).

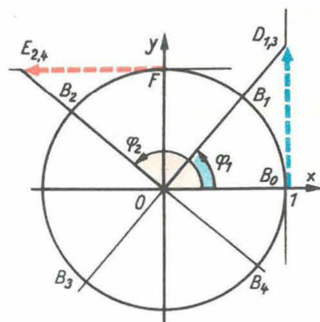
$$\psi_1 = \varphi_1 \pm 2n\pi, \quad \psi_2 = \varphi_4 \pm 2n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

respectiv

$$\psi_1 = \varphi_2 \pm 2n\pi, \quad \psi_2 = \varphi_3 \pm 2n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

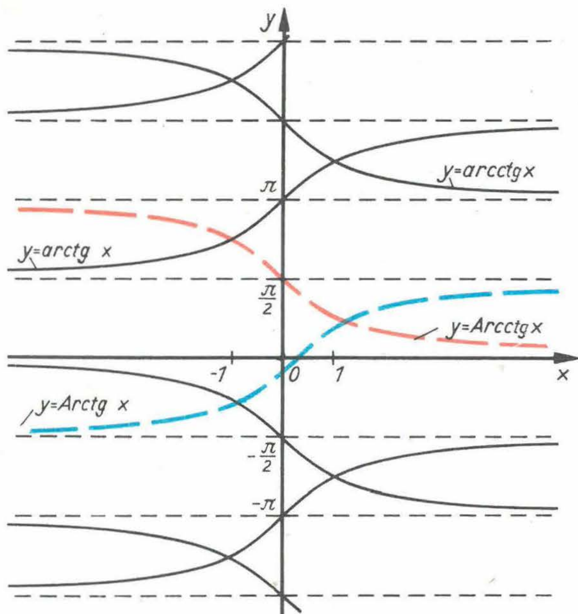
Între aceste soluții există relația $\varphi_1 + \varphi_4 = 2\pi$, respectiv $\varphi_2 + \varphi_3 = 2\pi$.

Fiecărei valori a cosinusului sau a sinusului îi corespund două valori ale unghiului ψ, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$; de ex. pentru $y = \sin\psi$ avem φ_1 și φ_2. Pe cercul unitate se observă că unghiul φ este definit printr-una din aceste funcții și prin semnul celeilalte. Din relația $\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} = \frac{\sin\psi}{1+\cos\psi}$, obținută ca o consecință a teoremei de adunare rezultă că pentru determinarea unghiului ψ, $0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi$ este suficientă și valoarea tangentei jumătății unghiului.

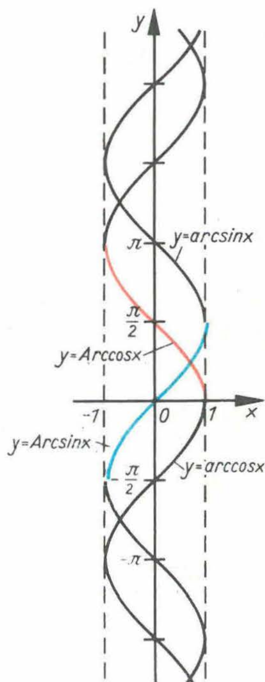


10.1.19. Construcția unghiului la o valoare dată a tangentei, respectiv a cotangentei

Fiind dat un număr x sau y, problema de a găsi unghiurile care reprezintă argumentele funcțiilor tangentă și cotangentă, care au această valoare dată, se poate rezolva pe cercul trigonometric (fig. 10.1.19). Segmentele orientate cu valoarea y sau x, $\overrightarrow{B_0D_{1,3}}$, respectiv $\overrightarrow{FE_{2,4}}$ se află pe tangentele la cerc în punctele $B_0\,(x=1)$ respectiv, $F\,(y=1)$. Dreptele care unesc capetele segmentului $D_{1,3}$, respectiv $E_{2,4}$ cu centrul intersectează cercul în punctele B_1 și B_3, respectiv B_2, B_4. Soluțiile ecuației $\operatorname{tg}\psi = y$ sînt $\psi_1 = \varphi_1 \pm n\pi$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ și ale ecuației $\operatorname{cotg}\psi = x$ sînt $\psi_1 = \varphi_2 \pm n\pi$, $n = 0, 1, 2, \ldots$



10.1.21. Reprezentarea grafică a funcțiilor $y = \operatorname{arctg} x$ și $y = \operatorname{arccotg} x$



10.1.20. Reprezentarea grafică a funcțiilor $y = \arcsin x$ și $y = \arccos x$

O funcție care determină unghiul măsurat în radiani, pentru care o funcție trigonometrică are o valoare dată, se numește *arcfuncție*.

Denumirea de *arcfuncție* (arcsin, arccos etc.) provine din limba latină. *Arcus cuius sinus x est* înseamnă arcul al cărui sinus este egal cu x.

Funcția trigonometrică (fig. 10.1.20)	Funcția inversă (fig. 10.1.21)
$y = \sin x$	$y = \arcsin x$
$y = \cos x$	$y = \arccos x$
$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{arctg} x$
$y = \operatorname{cotg} x$	$y = \operatorname{arccotg} x$

Notăm cu arcsin x mulțimea tuturor arcelor al căror sinus este egal cu x. Introducînd noțiunea de *funcție inversă* (orice funcție strict monotonă pe un interval se poate inversa pe acel interval) putem introduce Arcsin x, Arcos x, Arctg x Arccotg x care sînt funcțiile inverse ale funcțiilor $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$; ele sînt monotone pe intervalele de determinare principală $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $[0, \pi]$, $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $(0, \pi)$, deci mulțimile Arcsin x, Arccos x, Arctg x Arccotg x conțin numai unghiul din intervalele respective.

Utilizarea tabelelor trigonometrice

Principiul întocmirii și utilizării tabelelor este același pentru toate modurile de exprimare a unghiurilor. Deoarece tabelele pentru unghiuri sexagesimale, cu subunități zecimale sînt cele mai răspîndite, explicațiile se vor baza pe aceste tabele. În anexă sînt date tabele cu 4 cifre (fig. 10.1.22); particularitățile pentru tabele cu 5, 6 sau 7 cifre sînt date în instrucțiunile de utilizare ale fiecărei tabele.

Găsirea valorilor funcțiilor trigonometrice. În tabela alăturată valorile funcțiilor menționate în capul tabelei se găsesc la intersecția liniilor și coloanelor corespunzătoare; de exemplu, la intersecția liniei 5 cu coloana 4 se găsește $\sin 5{,}4° = 0{,}0941$; deoarece valorile funcției sinus sînt toate cu excepția uneia ($\sin 90° = 1$) mai mici decît unitatea, de obicei în tabelă se dau doar cifrele de după virgulă ale valorii funcției.

10.1.22. Tabelă cu valorile funcției sin α atunci cînd se dă α

Toate tabelele trigonometrice au *capete de coloană, respectiv de rînduri, duble,* putînd fi citite începînd din *stînga sus,* respectiv din *dreapta jos*; prin aceasta se înțelege că rîndurile tabelei pot fi parcurse de sus în jos, respectiv coloanele sale, de la stînga la dreapta, sau invers, rîndurile pot fi parcurse de jos în sus, respectiv coloanele de la dreapta la stînga. Citind tabela începînd din stînga sus, se obține pentru linia 5 și coloana 4 valoarea $\sin 5{,}4° = 0{,}0941$; la citirea începînd cu colțul din dreapta jos al tabelei, aceeași valoare corespunde liniei 84 și coloanei 6; cum $5{,}4° + 84{,}6° = 90°$, această valoare corespunde *cofuncției*, adică $\cos 84{,}6° = 0{,}0941$. Valorile unei funcții trigonometrice și ale cofuncției sale sînt astfel cuprinse într-o aceeași tabelă; valorile sinusului, respectiv tangentei, se citesc cu începere din stînga sus, valorile cosinusului și respectiv ale cotangentei se citesc cu începere din dreapta-jos, Datorită posibilității reducerii unghiurilor la primul cadran, în tabele se dau doar valorile corespunzătoare acestuia; semnul valorii funcției căutate rezultă din tabela de semne sau din cercul trigonometric.

În afara acestor tabele, numite și „tabelele *valorilor naturale*" ale funcțiilor trigonometrice, mai există și tabele ce conțin logaritmii acestor valori naturale. Aceste *tabele de logaritmi ai funcțiilor trigonometrice* au fost introduse mai demult pentru a fi utilizate în calcule mai exacte; în zilele noastre. datorită utilizării calculatoarelor crește însă importanța valorilor naturale ale funcțiilor trigonometrice. Îu mod uzual, în tabelele de logaritmi ai funcțiilor trigonometrice caracteristica logaritmului se dă mai mare cu 10 unități față de cea reală; de exemplu $\log \sin 5{,}4° = 0{,}9736-2 = 8{,}9736-10$, dar tabela dă 8,9736.

La căutarea valorilor funcțiilor trigonometrice este necesar ca pentru fiecare unghi să se facă poziționarea sa pe cercul trigonometric, pentru a avea mai multă siguranță asupra semnului valorii funcției trigonometrice și relațiilor dintre funcțiile trigonometrice. Notațiile p și n folosite în exemplele de calcul indică semnul pozitiv sau negativ al valorilor obținute.

Exemplul 1. Pentru unghiul $\varphi_1 = 56,6°$ obținem:

$$\sin 56,6° = 0,8348; \qquad \cos 56,6° = 0,5505;$$

$$\text{tg}\, 56,6° = 1,517; \qquad \text{cotg}\, 56,6° = 0,6594;$$

$$\lg \sin 56,6° = 9,9216; \qquad \lg \cos 56,6° = 9,7407;$$

$$\lg \text{tg}\, 56,6° = 0,1809; \qquad \lg \text{cotg}\, 56,6° = 9,8191.$$

Exemplul 2. Pentru unghiul $\varphi_2 = 113,4°$ (fig. 10.1.23) obținem:

$$\sin 113,4° = \sin(90° + 23,4°) = +\cos 23,4° = +0,9178;$$

$$\cos 113,4° = \cos(90° + 23,4°) = -\sin 23,4° = -0,3971;$$

$$\text{tg}\, 113,4° = -\text{cotg}\, 23,4° = -2,311;$$

$$\text{cotg}\, 113,4° = -\text{tg}\, 23,4° = -0,4327;$$

$$\lg \sin 113,4° = 9,9627\, p; \quad \lg \cos 113,4° = 9,5990\, n;$$

$$\lg |\text{tg}\, 113,4°| = 0,3638\, n; \quad \lg |\text{cotg}\, 113,4°| = 9,6362\, n;$$

Exemplul 3. Pentru unghiul $\varphi_3 = 244,8°$ (fig. 10.1.24) obținem:

$$\sin 244,8° = \sin(180° + 64,8°) = -\sin 64,8° = -0,9048;$$

$$\cos 244,8° = \cos(180° + 64,8°) = -\cos 64,8° = -0,4258;$$

$$\text{tg}\, 244,8° = \text{tg}\, 64,8° = +2,125;$$

$$\text{cotg}\, 244,8° = \text{cotg}\, 64,8° = +0,4706;$$

$$\lg |\sin 244,8°| = 9,9566\, n; \quad \lg |\cos 244,8°| = 9,6292\, n;$$

$$\lg \text{tg}\, 244,8° = 0,3274\, p; \quad \lg \text{cotg}\, 244,8° = 9,6726\, p.$$

Exemplul 4. Pentru unghiul $\varphi_4 = 320,3°$ (fig. 10.1.25) obținem:

$$\sin 320,3° = \sin(270° + 50,3°) = -\cos 50,3° = -0,6388;$$

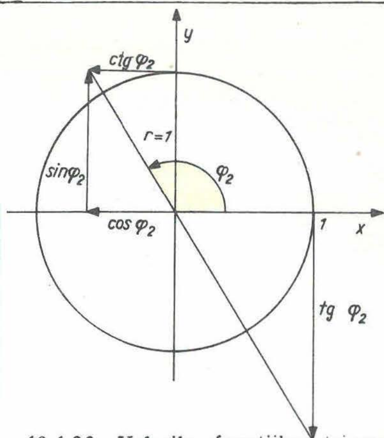
$$\cos 320,3° = \cos(270° + 50,3°) = +\sin 50,3° = +0,7694;$$

$$\text{tg}\, 320,3° = -\text{cotg}\, 50,3° = -0,8302;$$

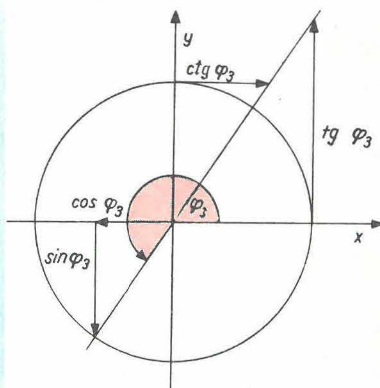
$$\text{cotg}\, 320,3° = -\text{tg}\, 50,3° = -1,205;$$

$$\lg |\sin 320,3°| = 9,8053\, n; \quad \lg \cos 320,3° = 9,8862\, p;$$

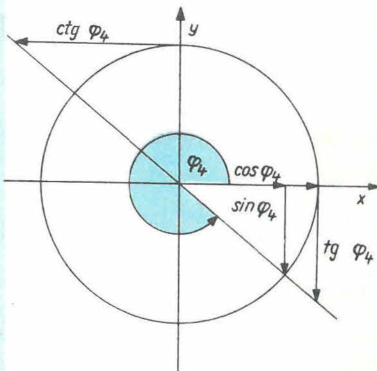
$$\lg |\text{tg}\, 320,3°| = 9,9192\, n; \quad \lg |\text{cotg}\, 320,3°| = 0,0808\, n.$$



10.1.23. Valorile funcțiilor trigonometrice pentru unghiul $\varphi_2 = 113,4°$



10.1.24. Valorile funcțiilor trigonometrice pentru $\varphi_3 = 244,8°$



10.1.25. Valorile funcțiilor trigonometrice pentru unghiul $\varphi_4 = 320,3°$

Dacă unghiul a cărui funcţie trigonometrică se caută este dat cu o zecimală z mai mult decît are tabela, respectiv valoarea funcţiei trigonometrice căutate se găseşte între valorile t_1 şi t_2, atunci prin folosirea *interpolării liniare*, din *diferenţa* $d = t_2 - t_1$, rezultă *corecţia* $c = \frac{d \cdot z}{10}$.

Deoarece cofuncţiile cosinus şi cotangentă descresc odată cu creşterea argumentului, pentru acestea corecţia trebuie scăzută din valoarea dată în tabelă.

Valoarea sin 5,47° se situează între 0,0941 şi 0,0958. Diferenţa este $d = 17 \cdot 10^{-4} = 0{,}0017$, următoarea cifră z este 7; pentru corecţie se obţine valoarea $c = \frac{17 \cdot 7}{10} \cdot 10^{-4} = (11{,}9) \times 10^{-4} \approx 12 \cdot 10^{-4} = 0{,}0012$; deci $\sin 5{,}47° = 0{,}0953$. Pentru calculul valorii cos 56,64° situată între 0,5505 şi 0,5490 se obţine $d = -15 \cdot 10^{-4}$, $z = 4$, $c = \frac{-15 \cdot 4}{10} \cdot 10^{-4} = -(6{,}0) \times 10^{-4}$, adică $\cos 56{,}64° = 0{,}5499$.

Exemple

1. $\operatorname{tg} 113{,}43° = -\operatorname{cotg} 23{,}43° = -\left(2{,}311 - \frac{11 \cdot 3}{10} \cdot 10^{-3}\right) = -2{,}308.$

2. $\lg |\cos 244{,}86°| = \lg \cos 64{,}86° n = \left(\bar{1}{,}6292 - \frac{16 \cdot 6}{10} \cdot 10^{-4}\right) n = \bar{1}{,}6282\, n.$

3. $\lg |\sin 320{,}39°| = \lg \cos 50{,}39° n = \left(9{,}8053 - \frac{9 \cdot 9}{10} \cdot 10^{-4}\right) n = \bar{1}{,}8045\, n.$

4. $\operatorname{cotg} 81{,}36^g = 0{,}1519$ deoarece $\operatorname{cotg} 81{,}3^g = 0{,}1530$ şi $\operatorname{cotg} 81{,}4^g = 0{,}1512$.

5. $\operatorname{tg} 62°37' = 1{,}931$ deoarece $\operatorname{tg} 62°30' = 1{,}921$ şi $\operatorname{tg} 62°40' = 1{,}935$.

Determinarea unghiului. În cazul în care valoarea funcţiei trigonometrice date coincide cu o valoare din tabelă, atunci găsirea unghiului se reduce la citirea liniei şi coloanei corespunzătoare acestei valori. În cazul în care valoarea funcţiei nu coincide cu o valoare din tabelă, zecimala următoare a unghiului z se obţine din diferenţa de tabelă, d şi *diferenţa* c, dintre valoarea funcţiei şi prima dintre valorile între care se face interpolare; $c : \frac{d}{10} = z$ sau $z = \frac{c \cdot 10}{d}$.

Exemplul 1. Valoarea de 0,3950 a funcţiei cosinus se situează între $\cos 66{,}7° = 0{,}3955$ şi $\cos 66{,}8° = 0{,}3939$; rezultă $d = -16 \cdot 10^{-4}$, $c = -5 \cdot 10^{-4}$, deci $z = \frac{+5 \cdot 10}{16} \approx 3$, sau $\arccos 0{,}3950 = 66{,}73°$. Datorită valorilor multiple pe care le iau funcţiile trigonometrice inverse, există şi soluţiile $\varphi = -66{,}73° \triangleq 293{,}27°$; $66{,}73° \pm n \cdot 360°$ şi $293{,}27° \pm n \cdot 360°$, $n = 1, 2, \ldots$

Exemplul 2. Ce valoare are arcsin $(-0{,}7777)$? Conform tabelei de semne sau reprezentării în cercul trigonometric, abstracţie făcînd de perioadă, există două soluţii φ_1 şi φ_2 situate în cadranele III şi IV şi care îndeplinesc condiţia $\varphi_1 + \varphi_2 = 3\pi = 540°$. Reducînd la primul cadran, rezultă $\delta = \varphi_1 - \frac{2\pi}{2}$ şi este cuprins între 51,0° şi 51,1°, deoarece $\sin 51{,}0° = 0{,}7771$ şi $\sin 51{,}1° = 0{,}7782$, cu $d = 11 \cdot 10^{-4}$, $c = 6 \cdot 10^{-4}$ rezultă $z = \frac{6 \cdot 10}{11} \approx 5$, deci $\delta = 51{,}05°$, $\varphi_1 = 231{,}05° \pm n \cdot 360°$, $\varphi_2 = 308{,}95° \pm n \cdot 360°$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

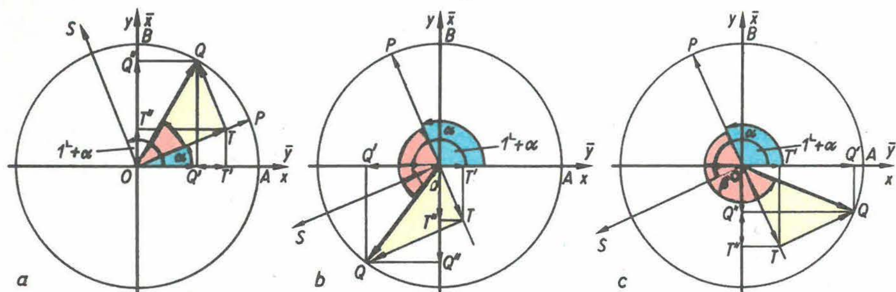
Exemplul 3. Pentru ce unghi φ este valabilă relația $\lg|\cos\varphi| = \overline{1},74435\,n$? Deoarece valoarea cosinusului este negativă, unghiurile se vor găsi în cadranele II și III. Conform regulilor de reducere a unghiului la primul cadran $\delta = \varphi_3 - \frac{2\pi}{2}$ și $\lg\cos\delta = \overline{1},74435\,p$. Dintr-o tabelă cu 5 zecimale se ia $\lg\cos 56,28° = \overline{1},74440$ și $\log\cos 56,29° = \overline{1},74428$; din $d = -12\cdot 10^{-5}$, $c = -5\cdot 10^{-5}$, $z = \frac{5\cdot 10}{12} \approx 4$ se obține $\delta = 56,284°$ și deci $\varphi_2 = 123,716° \pm n\cdot 360°$, $\varphi_3 = 236,284° \pm n\cdot 360°$.

Teoreme de adunare

Aceste teoreme de adunare ne indică modul de calcul al funcțiilor trigonometrice ale unei sume sau diferențe de unghiuri.

Teorema de adunare pentru sinus și cosinus. În cercul unitate valorile funcției cosinus, respectiv sinus ale unui unghi φ sînt reprezentate prin valorile numerice ale abscisei și respectiv ordonatei razei în direcția laturii mobile a unghiului φ. Ele reprezintă proiecțiile ortogonale ale acestei raze pe axele Ox și Oy.

Proiecția acestei raze este egală cu suma proiecțiilor a doi vectori a căror sumă este raza. În fig. 10.1.26, *a, b, c*, $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TQ}$, $\overrightarrow{OT}$ este proiecția ortogonală a laturii mobile $\overrightarrow{OQ}$ a unghiului β pe latura mobilă OP a unghiului α iar $\overrightarrow{TQ}$ este proiecția ortogonală a laturii mobile $\overrightarrow{OQ}$ a unghiului β pe direcția S, pe care o formează unghiul $\frac{\pi}{2} + \alpha$ cu axa Ox pozitivă.



10.1.26. Exemple ale teoremei de adunare pentru sinus și cosinus

Lungimea lui $\overrightarrow{OT}$ este deci $\cos\beta$ iar cea a lui $\overrightarrow{TQ}$ este $\sin\beta$. Dacă notăm mărimea proiecției ortogonale pe axa Ox cu m_x și pe axa Oy cu m_y, atunci:

$$m_x(\overrightarrow{OQ}) = m_x(\overrightarrow{OT}) + m_x(\overrightarrow{TQ}),\ \text{unde}\ m_x(\overrightarrow{OQ}) = m(\overrightarrow{OQ'}) = \cos(\alpha+\beta),$$
$$m_x(\overrightarrow{OT}) = m(\overrightarrow{OT'}) = \cos\beta\cos\alpha,$$
$$m_x(\overrightarrow{TQ}) = m(\overrightarrow{T'Q'}) = \sin\beta\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\beta\sin\alpha,$$

deci

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$
$$m_y(\overrightarrow{OQ}) = m_y(\overrightarrow{OT}) + m_y(\overrightarrow{TQ}),\ \text{unde}\ m_y(\overrightarrow{OQ}) = m_y(\overrightarrow{OQ''}) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right] = \sin(\alpha+\beta),$$
$$m_y(\overrightarrow{OT}) = m(\overrightarrow{OT''}) = \cos\beta\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha\cos\beta,$$
$$m_y(\overrightarrow{TQ}) = m(\overrightarrow{T''Q''}) = \sin\beta\cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right] = \sin\beta\cos(-\alpha) = \cos\alpha\sin\beta.$$

deci

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Aceste relaţii sînt valabile pentru orice unghiuri α şi β; cele trei figuri (fig. 10.1.26) fiind trei exemple oarecare. Sistemul de coordonate $\bar{x}O\bar{y}$, format astfel încît axa Oy pozitivă devine axa $O\bar{x}$ pozitivă, serveşte la calculul unghiurilor. În sistemul rectangular $\bar{x}O\bar{y}$, axa Ox pozitivă formează cu axa $O\bar{x}$ pozitivă un unghi egal cu $\frac{\pi}{2}$ (fig. 10.1.26) iar $\overrightarrow{OT}$ formează unghiul $\frac{\pi}{2}-\alpha$, $\overrightarrow{OQ}$ unghiul $\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)$ şi $\overrightarrow{TQ}$ unghiul $\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ cu axa $O\bar{x}$ pozitivă.

Teorema de adunare a sinusului se poate obţine fără folosirea sistemului rectangular $\bar{x}O\bar{y}$ pentru orice unghi, din teorema de adunare a cosinusului:

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right] =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos(-\beta) - \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(-\beta),$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Orice unghi β_1 se poate înlocui cu un unghi $-\beta_2$ dacă $\beta_1+\beta_2 = 2\pi$, deci

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Teoremele de adunare pentru tangentă şi cotangentă. Acestea se obţin uşor prin împărţire şi prin rearanjare

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.$$

Numărătorul şi numitorul se împart prin $\cos\alpha\cos\beta$:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}; \quad \operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

În acelaşi mod obţinem

$$\operatorname{cotg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta-1}{\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta}; \quad \operatorname{cotg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta+1}{\operatorname{cotg}\beta-\operatorname{cotg}\alpha}.$$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$	$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$	$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$	$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$
$\operatorname{cotg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta-1}{\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta}$	$\operatorname{cotg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta+1}{\operatorname{cotg}\beta-\operatorname{cotg}\alpha}$

Funcțiile trigonometrice ale unghiului dublu și ale jumătății unui unghi

$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi,\qquad \cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = 1 - 2\sin^2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1$

$\sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2},\qquad \cos\varphi = \cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2} = 2\cos^2\frac{\varphi}{2} - 1$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{2}{\operatorname{cotg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi}\qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{2}{\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2} - \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}$$

$$\operatorname{cotg} 2\varphi = \frac{\operatorname{cotg}^2\varphi - 1}{2\operatorname{cotg}\varphi} = \frac{\operatorname{cotg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi}{2}\qquad \operatorname{cotg}\varphi = \frac{\operatorname{cotg}^2\frac{\varphi}{2} - 1}{2\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}} = \frac{\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2} - \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{2}$$

$$\sin\varphi = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\varphi}{2}},\qquad \sin\frac{\varphi}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}},$$

$$\cos\varphi = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\varphi}{2}},\qquad \cos\frac{\varphi}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\varphi}{1+\cos 2\varphi}} = \frac{\sin 2\varphi}{1+\cos 2\varphi} = \frac{1-\cos 2\varphi}{\sin 2\varphi},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}} = \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} = \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi},$$

$$\operatorname{cotg}\varphi = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\varphi}{1-\cos 2\varphi}} = \frac{\sin 2\varphi}{1-\cos 2\varphi} = \frac{1+\cos 2\varphi}{\sin 2\varphi},$$

$$\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}} = \frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi} = \frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

$$\sin 2\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi};\quad \cos 2\varphi = \frac{1-\operatorname{tg}^2\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi};\quad \sin\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}};\quad \cos\varphi = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}$$

Funcțiile trigonometrice ale multiplilor unui unghi

$\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi,\qquad \cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$

$\sin 4\varphi = 4\sin\varphi\cos\varphi - 8\sin^3\cos\varphi,\qquad \cos 4\varphi = 8\cos^4\varphi - 8\cos^2\varphi + 1$

$\sin 5\varphi = 5\sin\varphi - 20\sin^3\varphi + 16\sin^5\varphi,\qquad \cos 5\varphi = 16\cos^5\varphi - 20\cos^3\varphi + 5\cos\varphi$

$$\operatorname{tg} 3\varphi = \frac{3\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}^3\varphi}{1-3\operatorname{tg}^2\varphi},\qquad \operatorname{cotg} 3\varphi = \frac{\operatorname{cotg}^3\varphi - 3\operatorname{cotg}\varphi}{3\operatorname{cotg}^2\varphi - 1}$$

$$\operatorname{tg} 4\varphi = \frac{4\operatorname{tg}\varphi - 4\operatorname{tg}^3\varphi}{1-6\operatorname{tg}^2\varphi + \operatorname{tg}^4\varphi},\qquad \operatorname{cotg} 4\varphi = \frac{\operatorname{cotg}^4\varphi - 6\operatorname{cotg}^2\varphi + 1}{4\operatorname{cotg}^3\varphi - 4\operatorname{cotg}\varphi}$$

Consecințe ale teoremelor de adunare

Cu ajutorul teoremelor de adunare se pot demonstra diferite relații dintre funcțiile trigonometrice, care sînt sistematizate într-un tabel. Cîteva exemple vor ilustra modul de obținere a acestor relații.

$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) =$
$= \sin^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta =$
$= \sin^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha(1-\cos^2\beta) =$
$= \cos^2\beta(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) - \cos^2\alpha =$
$= \cos^2\beta - \cos^2\alpha.$

$\sin 3\varphi = \sin(2\varphi+\varphi) =$
$= \sin 2\varphi\cos\varphi + \cos 2\varphi\sin\varphi =$
$= 2\sin\varphi\cos^2\varphi + (1-2\sin^2\varphi)\sin\varphi =$
$= 2\sin\varphi(1-\sin^2\varphi) + \sin\varphi - 2\sin^3\varphi =$
$= 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi.$

În $\sin(\varphi+\psi)+\sin(\varphi-\psi) = 2\sin\varphi\cos\psi$ înlocuim pe α cu $\varphi+\psi$ și β cu $\varphi-\psi$; deci $\varphi = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, $\psi = \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ și obținem:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \pm \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Sume, diferențe și produse ale unor funcții trigonometrice

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \qquad \operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \qquad \operatorname{cotg}\alpha-\operatorname{cotg}\beta = \frac{-\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\cos\alpha+\sin\alpha = \sqrt{2}\sin(45^\circ+\alpha) = \sqrt{2}\cos(45^\circ-\alpha),$$

$$\cos\alpha-\sin\alpha = \sqrt{2}\cos(45^\circ+\alpha) = \sqrt{2}\sin(45^\circ-\alpha),$$

$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \cos^2\beta-\cos^2\alpha, \qquad \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\beta-\sin^2\alpha$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)], \qquad \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)] \qquad \cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta} = \frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{cotg}\alpha-\operatorname{cotg}\beta} \qquad \operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta = \frac{\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta} = -\frac{\operatorname{cotg}\alpha-\operatorname{cotg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{cotg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{cotg}\beta}{\operatorname{cotg}\alpha+\operatorname{tg}\beta} = -\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{cotg}\beta}{\operatorname{cotg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}$$

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \frac{1}{4}[\sin(\alpha+\beta-\gamma)+\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\gamma+\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta+\gamma)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{1}{4}[\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\gamma+\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta+\gamma)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma = \frac{1}{4}[-\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma-\alpha)+\cos(\gamma+\alpha-[\beta)-\cos(\alpha+\beta+\gamma)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{1}{4}[\sin(\alpha+\beta-\gamma)-\sin(\beta+\gamma-\alpha)+\sin(\gamma+\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta+\gamma)]$$

Puterile unor funcții trigonometrice

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi) \qquad \cos^2\varphi = \frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)$$

$$\sin^3\varphi = \frac{1}{4}(3\sin\varphi - \sin 3\varphi) \qquad \cos^3\varphi = \frac{1}{4}(3\cos\varphi + \cos 3\varphi)$$

$$\sin^4\varphi = \frac{1}{8}(\cos 4\varphi - 4\cos 2\varphi + 3) \qquad \cos^4\varphi = \frac{1}{8}(\cos 4\varphi + 4\cos 2\varphi + 3)$$

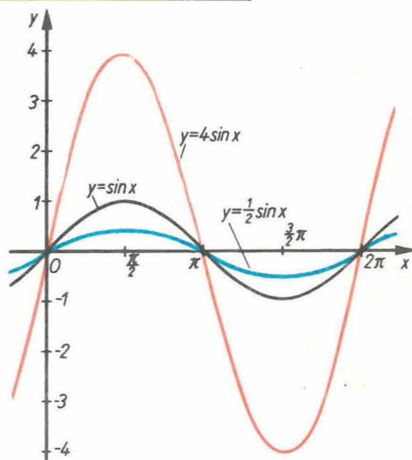
$$\sin^5\varphi = \frac{1}{16}(10\sin\varphi - 5\sin 3\varphi + \sin 5\varphi) \qquad \cos^5\varphi = \frac{1}{16}(10\cos\varphi + 5\cos 3\varphi + \cos 5\varphi)$$

Formule generale pentru sinusul și cosinusul multiplului unui unghi. În formula lui Moivre din teoria numerelor complexe $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$ (care se demonstrează prin inducție completă și folosindu-ne de faptul că $i^2 = -1$), vom dezvolta partea stîngă cu ajutorul binomului lui Newton. Prin egalarea părților reale și a celor imaginare din membrul stîng și drept vom obține:

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - C_n^2\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + C_n^4\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi - \ldots$$
$$\sin n\varphi = C_n^1\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - C_n^3\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + C_n^5\cos^{n-5}\varphi\sin^5\varphi - \ldots$$

Curba sinusoidală. Multe fenomene din natură și tehnică ca de exemplu fenomene din tehnica curentului alternativ, cea a frecvențelor înalte, din optică, acustică sau mecanică, se reduc la oscilații. Reprezentarea matematică a acestor fenomene conduce la funcții sinus sau cosinus. În aceste aplicații desigur că nu este de așteptat ca valoarea maximă a unei oscilații — *amplitudinea a* — să aibă valoarea 1, că *lungimea de undă* este mereu 2π, corespunzătoare perioadei, sau că măsurarea începe exact din momentul în care funcția sinus ia valoarea zero. Cîteva exemple arată cum se pot îndepărta aceste limitări.

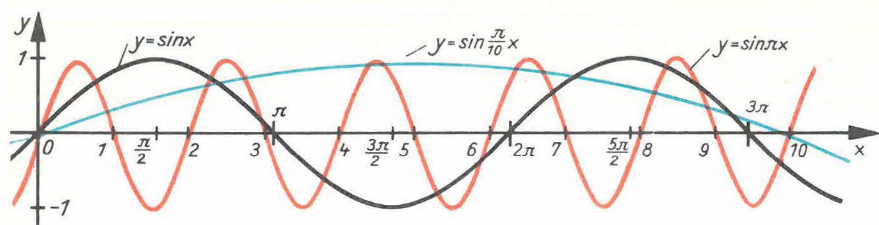
Funcția $y = a\sin x$ are *amplitudinea a* (fig. 10.1.27).



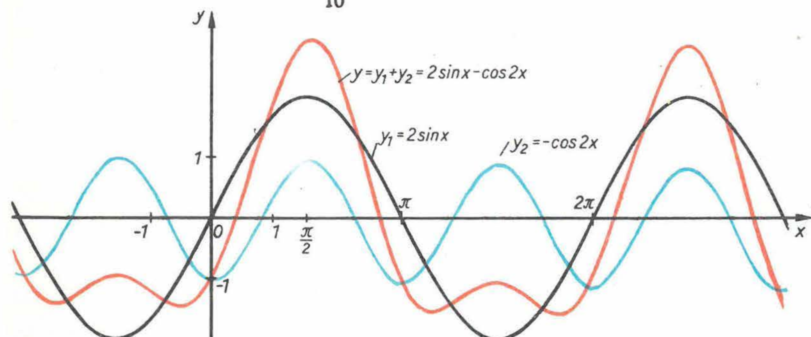
10.1.27. Graficul funcțiilor $y = \sin x$, $y = 4\sin x$ și $y = \frac{1}{2}\sin x$

Lungimea de undă λ. Cînd în funcția $y = \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$, variabila independentă x ia valori de la 0 la λ, argumentul $\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$ al funcției sinus ia valori de la 0 la 2π; în fig. 10.1.28 sînt reprezentate curbele corespunzătoare lui $\lambda = 2$ și $\lambda = 20$.

Superpoziția sau interferența. Dacă simultan acționează mai multe stări oscilante, acțiunile lor se adună; de exemplu, dacă una din aceste stări se descrie prin $y_1 = 2\sin x$, iar cealaltă prin $y_2 = -\cos 2x$, atunci pentru mișcarea rezultantă este valabil $y = y_1 + y_2 = 2\sin x - \cos 2x$ (fig. 10.1.29).



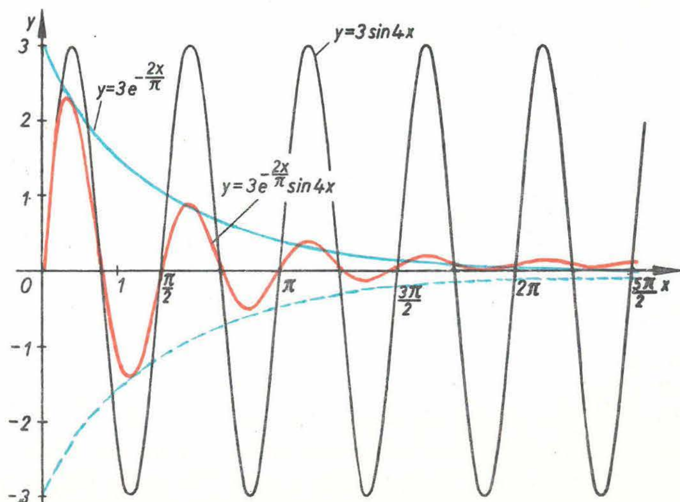
10.1.28. $y=\sin \pi x$ și $y = \sin \frac{\pi}{10} x$



10.1.29. $y = y_1 + y_2 = 2 \sin x - \cos 2x$

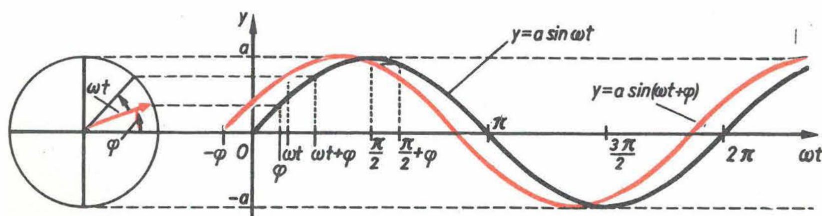
Oscilație amortizată. Atunci cînd un sistem oscilant cedează energia, amplitudinea sa scade; de exemplu o amortizare dată de funcția $a = 3e^{\frac{-2x}{\pi}}$ înseamnă că pentru $x = \frac{\pi}{2}$ valoarea oscilației este de numai $\frac{3}{e}$, pentru $x = \frac{2\pi}{2}$ este $\frac{3}{e^2}$ ș.a.m.d. În figura 10.1.30 este dată reprezentarea grafică a funcției

$$y = 3e^{\frac{-2x}{\pi}} \sin 4x.$$



10.1.30. $y=3e^{\frac{-2x}{\pi}} \sin \ 4x$

Frecvența unghiulară și faza inițială. Dacă se consideră drept variabilă independentă timpul t, atunci curba sinusoidală poate fi pusă sub forma $y = a \sin(\omega t + \varphi)$. Din faptul că pentru $\omega t = 2\pi$ se sfîrșește o întreagă oscilație rezultă că timpul necesar unei oscilații complete este $t = \frac{2\pi}{\omega}$. Acest timp se numește *perioadă a oscilației* și se notează cu T. Dacă T se măsoară în secunde, atunci $\frac{1}{T}$ reprezintă numărul de oscilații complete efectuate într-o secundă, adică *frecvența* f a oscilației: $f = \frac{1}{T}$. Frecvența unghiulară $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \frac{1}{T} = 2\pi f$ definește numărul de oscilații în timpul de 2π secunde. Faza inițială φ este unghiul cu care curba dată precede curba sinusoidală (fig. 10.1.31); pentru $t = 0$ funcția y are deja valoarea $y = \sin\varphi$. Dacă φ este negativ, oscilația se spune „întîrziată"



10.1.31. Curba sinusoidală $y = a \sin(\omega t + \varphi)$: diagrama vectorială (stînga); graficul curbei (dreapta)

Reprezentarea grafică a funcției $a \sin(\omega t + \varphi)$ este valabilă, de exemplu și pentru curba $y = \cos \omega t = a \sin(\omega t + \varphi)$ cu $a = 1$ și $\varphi = +\frac{\pi}{2}$, ceea ce înseamnă că curba cosinusului precede cu $\frac{\pi}{2}$ curba sinusului. În general, pentru o oscilație sinusoidală de o anume frecvență unghiulară ω, a și φ se pot caracteriza printr-o *diagramă vectorială,* în care a este raza cercului, pe baza căruia se poate construi curba sinusoidală, iar φ unghiul pe care vectorul îl face cu axa absciselor la momentul $t = 0$.

10.2. Ecuații trigonometrice

Ecuațiile trigonometrice sînt ecuații în care necunoscutele figurează în argumente ale funcțiilor trigonometrice. Dacă necunoscuta se află în ecuație și altfel decît sub semnul unei funcții trigonometrice, de exemplu $\operatorname{tg} x - 3x = 0$, atunci aceste ecuații se numesc *mixte.* Funcțiile trigonometrice sînt transcendente, deci și ecuațiile cu aceste funcții sînt transcendente. Nu există metode generale de rezolvare pentru aceste ecuații dar, uneori, se pot rezolva grafic sau prin metode de aproximare.

Ecuații trigonometrice simple

Tipul de bază. Dacă dintr-o ecuație dată se poate obține o valoare pentru o funcție trigonometrică, putem afla din tabele argumentul funcției, deci necunoscuta; de exemplu $\cos^3(2x) = b$, deci $x = \frac{1}{2} \arccos \sqrt[3]{b}$. Dacă necunoscuta este argumentul unei funcții trigonometrice care se

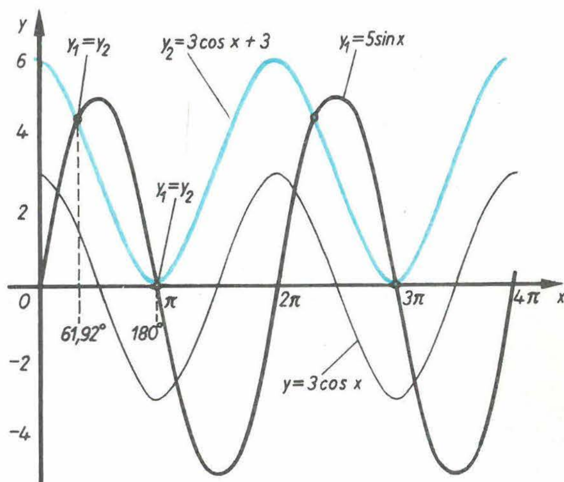
poate determina rezolvînd o ecuație algebrică, determinarea necunoscutei se face cu ajutorul tabelelor. De exemplu, în ecuația $\operatorname{tg}^2 x + p \operatorname{tg} x + q = 0$ se face substituția $\operatorname{tg} x = u$ și se rezolvă ecuația $u^2 + pu + q = 0$. Soluțiile sînt $(\operatorname{tg} x)_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$. Din tabele determinăm valorile lui x.

Dacă intervin mai multe funcții trigonometrice, dar care au același argument, de exemplu $5 \sin x - 3 \cos x = 3$, atunci exprimăm ambele funcții trigonometrice prin alte funcții, de exemplu:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}},$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Dacă intervine numai o funcție trigonometrică, dar cu argumente diferite, atunci cu ajutorul teoremelor de adunare transformăm funcțiile astfel ca să avem în expresie un argument unic.



10.2.1. Punctele de intersecție ale funcțiilor $y_1 = 5 \sin x$ și $y_2 = 3 \cos x + 3$

Exemplul 1. Diferite funcții trigonometrice (fig. 10.2.1) *ale aceluiași argument*

$$5 \sin x - 3 \cos x = 3, \quad 0 \leqslant x < 2\pi.$$

$$5 \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} - 3 \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = 3;$$

$$10 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3 + 3 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = 3 + 3 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2},$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{3}{5},$$

$$\frac{x}{2} = 30{,}96°, \qquad x = 61{,}92°.$$

Prin rezolvarea ecuației cu ajutorul formulelor acestora în care folosim $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ excludem soluția $x = \pi$ căci $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ nu este definită pentru aceste valori. Totuși $x = \pi$ este o soluție a ecuației respective. Rezultatele obținute prin rezolvarea grafică a acestei ecuații sînt abscisele punctelor de intersecție ale celor două curbe $y_1 = 5 \sin x$ și $y_2 = 3 \cos x + 3$.

Exemplul 2. Aceeași funcție trigonometrică cu argumente diferite:

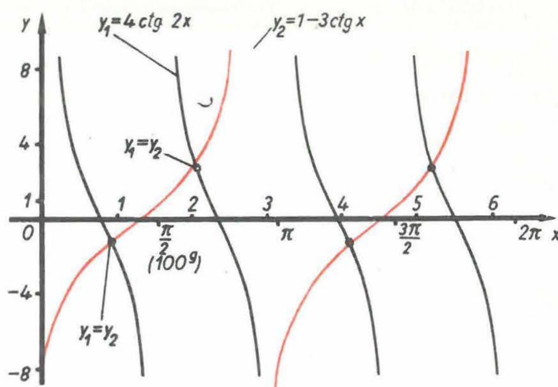
$$\frac{2 \operatorname{cotg} 2x}{1 - 3 \operatorname{cotg} x} = \frac{1}{2} \text{ (fig. 10.2.2).}$$

Condițiile în care această ecuație se poate rezolva sînt:

$$2x \neq k\pi;\ x \neq \frac{k\pi}{2}, \quad x \neq k\pi.$$

$$x \neq \operatorname{arccotg} \frac{1}{3} + k\pi, \quad k \in Z.$$

Deci $x \notin \left\{\frac{k\pi}{2}\right\} \cup \left\{\operatorname{arccotg} \frac{1}{3} + k\pi\right\}$.



10.2.2. Punctele de intersecție ale curbelor $y_1 = 4 \operatorname{cotg} 2x$ și $y_2 = 1 - 3 \operatorname{cotg} x$

$$4 \operatorname{cotg} 2x = 1 - 3 \operatorname{cotg} x,$$

$$\operatorname{cotg} 2x = \frac{\operatorname{cotg}^2 x - 1}{2 \operatorname{cotg} x}, \quad \text{deci} \quad 2\frac{\operatorname{cotg}^2 x - 1}{\operatorname{cotg} x} = 1 - 3 \operatorname{cotg} x,$$

$$5 \operatorname{cotg}^2 x - \operatorname{cotg} x - 2 = 0.$$

Notînd $\operatorname{cotg} x = u$, $u^2 - \frac{1}{5}u - \frac{2}{5} = 0$, $\quad u = \frac{1}{10} \pm \frac{\sqrt{41}}{10}$, deci $u_1 = \frac{\sqrt{41} + 1}{10}$ și $u_2 = -\frac{\sqrt{41} - 1}{10}$.

Soluții pentru $0 < x < 2\pi$	
$(\operatorname{cotg} x)_I = 0,7403$	$(\operatorname{cotg} x)_{II} = -0,5403$
$x_1 = 0,9335\ (59,43^g)$, $x_2 = 4,0751\ (259,43^g)$,	$x_3 = 2,0662\ (131,54^g)$, $x_4 = 5,2078\ (331,54^g)$.

P r o b ă. Toate valorile verifică ecuația.

Exemplul 3. Diferite funcții trigonometrice cu argumente diferite (fig. 10.2.3):

$$\sin (2x + \pi) - \sqrt{2} \cos x = 0.$$

Cu ajutorul relațiilor între cadrane obținem:

$$-\sin 2x - \sqrt{2} \cos x = 0 \text{ sau } 2 \sin x \cos x + \sqrt{2} \cos x = 0,$$

$(2 \sin x + \sqrt{2})$ | $\cos x = 0$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

Cadranul:

III $x_1 = \pi + \frac{\pi}{4}$, $x_1 = \frac{5}{4}\pi + k_1 \cdot 2\pi$.

IV $x_2 = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{7\pi}{4} + k_2 \cdot 2\pi$.

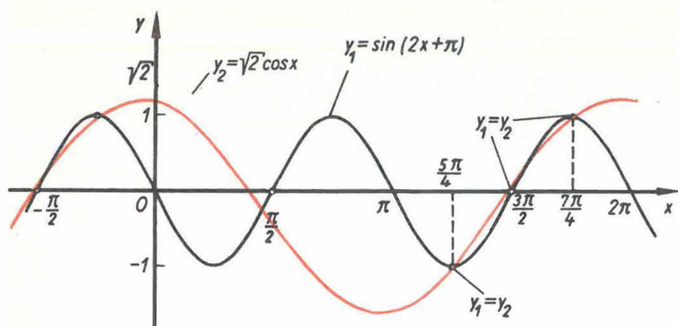
$k_1, k_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$\cos x = 0.$

$$x_3 = \frac{\pi}{2} + k_3\pi,$$

$k_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Prin verificare rezultă exactitatea soluțiilor.



10.2.3. Punctele de intersecție ale curbelor $y_1 = \sin(2x + \pi)$ și $y_2 = \sqrt{2}\cos x$

Exemplul 4. Ecuația $a\cos x + b\sin x = c$ în care $c^2 \leqslant a^2 + b^2$ poate fi rezolvată cu ajutorul teoremei de adunare pentru cosinus împărțind ambele părți prin $r = +\sqrt{a^2+b^2}$. Notăm $\frac{a}{+\sqrt{a^2+b^2}} = \cos h$, $\frac{b}{+\sqrt{a^2+b^2}} = \sin h$, $\operatorname{tg} h = \frac{b}{a}$. Obținem $\cos h\cos x + \sin h\sin x = \frac{c}{+\sqrt{a^2+b^2}}$ sau $\cos(x-h) = \frac{c}{+\sqrt{a^2+b^2}}$; $x - h = \arccos\frac{c}{+\sqrt{a^2+b^2}}$.

Unghiul auxiliar h este bine definit de $\operatorname{tg} h = b/a$. Astfel, obținem două valori pentru x cuprinse între 0 și 2π. Pentru $a = -3$, $b = 5$, $c = 3$ obținem $-3\cos x + 5\sin x = 3$, $\operatorname{tg} h = \frac{5}{-3} = \frac{\sin h}{\cos h}$. Deoarece $\sin h > 0$ și $\cos h < 0$, h se află în cadranul II, $h = 134{,}40^g$.

Din $\cos(x-h) = \frac{3}{+\sqrt{34}} = 0{,}5145$ rezultă $(x-h)_1 = 65{,}59^g$ și $(x-h)_2 = -65{,}59^g$.

Deci $x_1 = 199{,}99^g \approx 200^g$ iar $x_2 = 68{,}81^g$.

Exemplul 5. Ecuația $\cos\frac{3}{7}x + \sin x = 0$ (fig. 10.2.4) se rezolvă ușor cu ajutorul cofuncției $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ și al formulei $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;

$$\cos\frac{3x}{7} + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0,$$

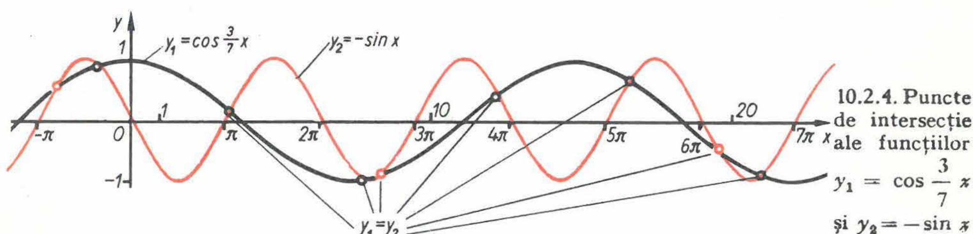
$$2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{7}x\right) \cdot \cos\left(\frac{5}{7}x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{7}x\right) = 0,$	$\cos\left(\frac{5}{7}x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$
$\frac{\pi}{4} - \frac{2}{7}x = \frac{\pi}{2} + k\pi,$	$\frac{5}{7}x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ sau $\frac{5}{7}x = \frac{3\pi}{4} + k\pi,$
$x_1 = -\frac{7}{8}\pi - \frac{7}{2}k\pi$	$x_2 = \frac{21}{20}\pi + \frac{7}{5}k\pi.$

Deoarece valorile lui k sînt 0, $\pm$ 1, $\pm$ 2, ... putem înlocui în soluția din partea stîngă pe $-k$ cu k;

$$x_1 = -\frac{7}{8}\pi + 7k\frac{\pi}{2}, \quad x_2 = \frac{21}{20}\pi + \frac{7}{5}k\pi.$$

Prin verificare rezultă exactitatea rezultatelor. De remarcat că aceste soluții pentru două valori consecutive ale lui k diferă nu cu 2π, ci cu $7\pi/2$ și respectiv $7\pi/5$.

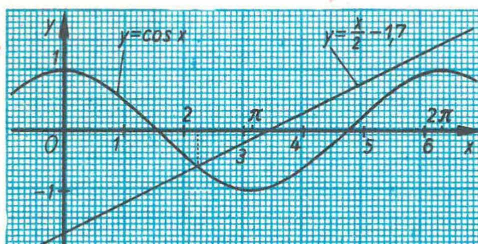


10.2.4. Puncte de intersecție ale funcțiilor $y_1 = \cos\frac{3}{7}x$ și $y_2 = -\sin x$

Ecuații trigonometrice mixte

Ecuațiile trigonometrice mixte nu se pot rezolva decît grafic sau prin iterații.

Exemplul 1. $\cos x - \frac{x}{2} + 1{,}7 = 0$. Reprezentăm grafic curbele $y_1 = \cos x$, $y_2 = \frac{x}{2} - 1{,}7$. Punctul de intersecție are abscisa $x \approx 2{,}21$. Figura 10.2.5 ne arată că nu există alte soluții reale.



10.2.5. Rezolvarea grafică a ecuației $\cos x = \frac{x}{2} - 1{,}7$

Mărind scara la care desenăm putem citi mai exact $x \approx 2{,}209$. Verificare: $\cos 2{,}209 - \frac{2{,}209}{2} + 1{,}7 = \cos 140{,}63^g + 0{,}5955 = -0{,}5958 + 0{,}5955 = -0{,}0003$.

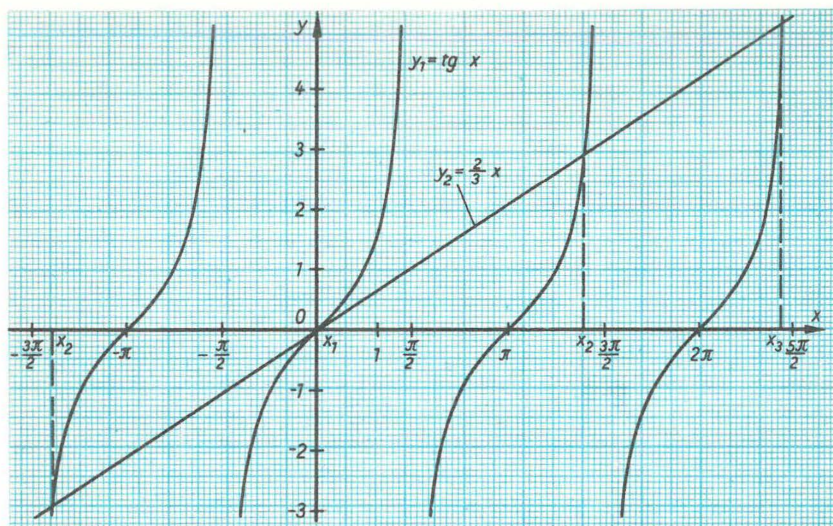
O aproximație mai bună obținem aplicînd formula de aproximare a lui Newton

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \quad f(x_0) = \cos x_0 - \frac{x_0}{2} + 1{,}7 = -0{,}0003,$$

$$f'(x_0) = -\sin x_0 - \frac{1}{2} = -1{,}3032, \quad x_1 = 2{,}2088.$$

Prin înlocuirea lui x_0 cu x_1, rezultatul se poate îmbunătăți.

Exemplul 2. $3 \operatorname{tg} x - 2x = 0$. Reprezentăm grafic curbele $y_1 = \operatorname{tg} x$, $y_2 = \frac{2}{3}x$. Punctele de intersecție au abscisele $x_1 = 0$, $x_2 = \pm 4{,}38$, $x_3 = \pm 7{,}65$, ... La valorile tot mai mari ale lui x observăm că rezultatele se apropie tot mai mult de multiplii impari ai lui $\frac{\pi}{2}$ (fig. 10.2.6).



10.2.6. Rezolvarea grafică a ecuației $3\ \mathrm{tg}\ x - 2x = 0$

Fiecărei soluții x_0 îi corespunde o soluție egală dar de semn contrar cu ea $-x_0$; în cazul $\mathrm{tg}\ x_0 = \frac{2x_0}{3}$ avem și $\mathrm{tg}\ (-x_0) = \frac{2}{3}(-x_0)$.

11. Trigonometrie plană

Funcțiile trigonometrice prezentate în trigonometrie fac posibilă folosirea unghiurilor pentru determinarea elementelor necunoscute din diferite figuri geometrice. După cum ne indică și numele, trigonometria (măsurarea a trei unghiuri) se ocupă cu rezolvarea triunghiurilor, respectiv a tuturor figurilor care se pot reduce la triunghiuri prin trasare de diagonale.

11.1. Rezolvarea triunghiurilor dreptunghice

Metode generale

În trigonometrie se dau definițiile funcțiilor trigonometrice ale unghiurilor dintr-un triunghi dreptunghic care se extind cu ajutorul cercului unitate la orice fel de unghiuri.

Aceste definiții conțin relații între laturile și unghiurile unui triunghi dreptunghic astfel încît cunoașterea a două elemente este suficientă pentru calculul celorlalte. Notăm unghiul drept cu γ, ipotenuza cu c, catetele cu a și b iar unghiurile opuse lor cu α și β. Folosim două relații din geometrie referitoare la triunghiul dreptunghic (fig. 11.1.1):

1. Teorema lui Pitagora $c^2 = a^2 + b^2$.
2. Unghiurile alăturate ipotenuzei sînt complementare: $\alpha + \beta = 90°$.

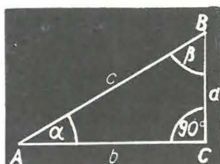
Există patru cazuri tipice pentru rezolvarea triunghiurilor dreptunghice.

I. Se dă ipotenuza c și un unghi alăturat, de exemplu α:

1. $\beta = 90° - \alpha$; 2. $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $a = c\sin\alpha$; 3. $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $b = c\cos\alpha$.

II. Se dă ipotenuza c și o catetă, de exemplu a:

1. $\sin\alpha = \frac{a}{c}$; 2. $\beta = 90° - \alpha$; 3a. $b = \sqrt{c^2 - a^2}$



11.1.1. Triunghi dreptunghic

sau cu ajutorul unghiului calculat α

3b. $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$, $b = a\operatorname{cotg}\alpha$ sau 3c. $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $b = c\cos\alpha$.

III. Se dă o catetă, de exemplu a și un unghi, de exemplu α.

1. $\beta = 90° - \alpha$; 2. $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$, $b = a\operatorname{cotg}\alpha$; 3. $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $c = \frac{a}{\sin\alpha}$;

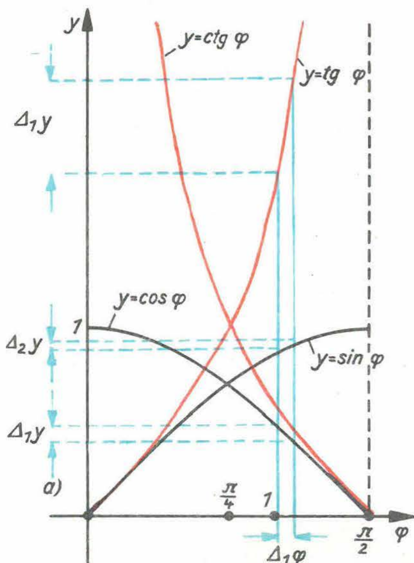
sau cu ajutorul unghiului calculat β

2a. $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$, $b = a\operatorname{tg}\beta$; 3a. $\cos\beta = \frac{a}{c}$, $c = \frac{a}{\cos\beta}$.

IV. Se dau ambele catete a, b:

1. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$; 2. $\beta = 90° - \alpha$; 3a. $c = \sqrt{a^2 + b^2}$;

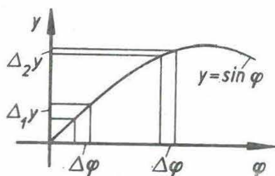
sau cu ajutorul unghiului calculat α 3b. $c = \frac{a}{\sin\alpha}$ sau 3c. $c = \frac{b}{\cos\alpha}$.

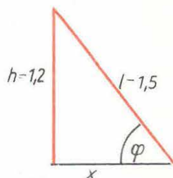


11.1.2. Exactitatea calculelor cu funcții trigonometrice

Exactitatea calculelor. În general încercăm să rezolvăm triunghiurile numai pe baza elementelor date. Pentru a evita erorile și a avea un control, rezolvăm triunghiul și cu ajutorul *elementelor calculate de noi* (fig. 11.1.2). Teoretic, trebuie să obținem aceleași rezultate cu toate că lucrăm pe căi diferite.

Un alt *control* îl constituie faptul că suma unghiurilor unui triunghi este egală cu 180°. În teoria măsurării sînt prevăzute controale pentru manevrarea funcțiilor trigonometrice. Pentru stabilirea abaterilor se ține seama că pentru o valoare mică $\Delta_1\varphi$ a unui unghi φ *eroarea* $\Delta_1 y$ va avea *diferite mărimi* pentru diferite funcții trigonometrice. După cum reiese din figură pentru funcția $y = \operatorname{tg}\varphi$ eroarea $\Delta_1 y$ va fi mai mare decît pentru $y = \cos\varphi$.





11.1.3. Înclinarea unei scări față de un perete

Invers, pentru un interval dat $\Delta_2 y$, valoarea unghiului se stabileşte cu o exactitate mai mare folosind funcţia tangentă sau cotangentă.

Din figura 11.1.2 reiese în cazul funcţiei $y = \sin \varphi$, dependenţa mărimii intervalului Δy de unghiul dat φ. Pentru unghiuri mici, apropiate de valoarea 0, Δy este mare, pentru unghiuri apropiate de $\frac{\pi}{2}$, Δy are valori mici, deci unghiurile apropiate de 0 sînt mai precis calculate cu ajutorul valorilor funcţiei sinus. Verificarea *rezultatelor* trebuie să fie în concordanţă cu *măsurătorile*. Fie de calculat unghiul pe care îl formează o scară de lungime $l = 1{,}5$ m cu orizontala, înălţimea pe peretele vertical la care trebuie să ajungă scara fiind $h = 1{,}2$ m (fig. 11.1.3).

$$\sin \varphi = \frac{1{,}2}{1{,}5} = 0{,}8, \text{ iar distanţa } x \text{ de la scară pînă la zid } x = \sqrt{1{,}5^2 - 1{,}2^2} = 0{,}90 \text{ m.}$$

Pentru verificare calculăm $x_s = 1{,}5 \cos \varphi$ şi $x_t = 1{,}2 \operatorname{cotg} \varphi$. Căutăm în tabelele cu patru zecimale valorile lui φ, obţinînd $\varphi_1 = 53°$, pentru care $x_{1s} = 0{,}903$ şi $x_{1t} = 0{,}904$. Folosind tabelele cu 7 zecimale, $\varphi_2 = 53°7'48{,}4''$, $x_{2s} = 0{,}9000000$ şi $x_{2t} = 0{,}8999996$. Distanţa de la scară la zid nu se calculează nici cu o precizie de 4 mm, nicidecum cu o precizie de 4 zecimi de milimetru.

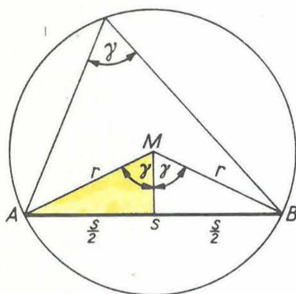
Soluţiile nu pot avea o precizie mai mare decît elementele date.

Aplicaţii

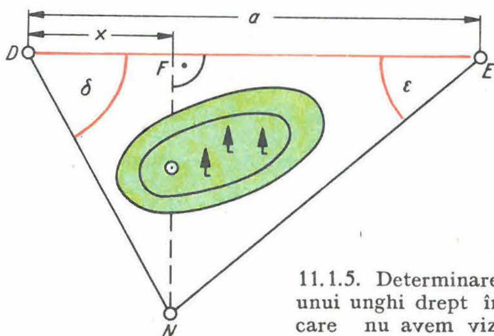
Lungimea unei coarde. Unghiul înscris subîntins ca şi unghiul la centru în cercul de rază r de aceeaşi coardă de lungime s este jumătate din acest unghi la centru. Perpendiculara coborîtă din centrul cercului pe coardă formează două triunghiuri dreptunghice congruente. Perpendiculara împarte unghiul la centru şi coarda în două părţi egale (fig. 11.1.4). Deci:

$$\sin \gamma = \frac{s}{2r}, \quad s = 2r \sin \gamma.$$

Determinarea poziţiei unui unghi drept în cazul în care nu avem vizibilitate. Între localităţile D şi E se află o conductă de apă. Perpendicular pe ea va fi construită o conductă pentru localitatea N, iar pe vîrful dealului care se găseşte între localitatea respectivă şi conductă se va construi un castel de apă. Deci trebuie să determinăm distanţa $x = \overline{DE}$, punctul de ramificaţie E nefiind vizibil din punctul N, distanţa $\overline{DE}$ fiind egală cu a. Unghiurile formate de ND



11.1.4. Coardă în cerc



11.1.5. Determinarea poziţiei unui unghi drept în cazul în care nu avem vizibilitate

şi NE cu ED (δ, respectiv ε) pot fi măsurate. Din triunghiurile dreptunghice DFN şi EFN rezultă:

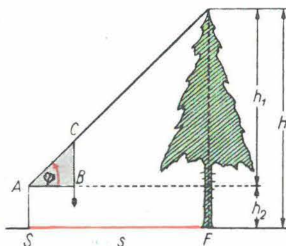
$$\overline{FN} = x \operatorname{cotg} \delta, \ \overline{FN} = (a - x) \operatorname{tg} \varepsilon, \quad x \operatorname{tg} \delta = (a - x) \operatorname{tg} \varepsilon, \text{ deci } x = a \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{\operatorname{tg} \delta + \operatorname{tg} \varepsilon}.$$

Pentru calcularea lui x cu ajutorul tabelelor de logaritmi folosim teorema de adunare:

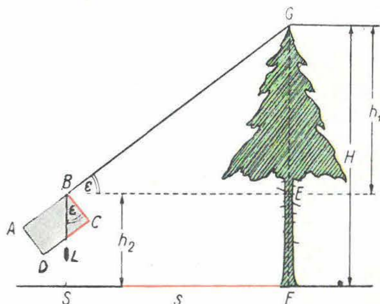
$$x = \frac{a \dfrac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon}}{\dfrac{\sin \delta}{\cos \delta} + \dfrac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon}} = \frac{a \sin \varepsilon \cos \delta \cos \varepsilon}{\cos \varepsilon (\sin \delta \cos \varepsilon + \cos \delta \sin \varepsilon)} = a \frac{\cos \delta \sin \varepsilon}{\sin (\delta + \varepsilon)}.$$

Determinarea înălțimilor. Înălțimea unui copac se poate calcula foarte ușor cunoscînd înălțimea observatorului h_2, distanța s de la punctul de unde se face măsurătoarea pînă la copac și unghiul ψ pe care îl formează direcția orizontală cu dreapta care unește ochiul observatorului cu vîrful copacului (fig. 11.1.6). Astfel $h_1 = s$ tg ψ, iar înălțimea copacului va fi atunci $H = h_1 + h_2 = s$ tg $\psi + h_2$.

Determinarea aproximativă a înălțimii. 1. Putem să renunțăm la determinarea unghiului ψ dacă reușim să situăm triunghiul *dreptunghic isoscel* ABC astfel încît vîrful copacului să fie pe prelungirea ipotenuzei. În acest caz ψ ar fi 45° și $h_1 = s$, $H = s + h_2$ (fig. 11.1.6). Această metodă este aplicabilă numai dacă se dispune de spațiu suficient pentru alegerea convenabilă a punctului de observație S.



11.1.6. Determinarea înălțimii unui copac



11.1.7. Măsurarea înălțimii în silvicultură

2. Un *dreptunghi ABCD* este ținut într-o astfel de poziție încît punctul G se află în prelungirea laturii AB a dreptunghiului. Firul cu plumb suspendat în B determină pe $\overline{CD}$ un segment $\overline{CL}$ (fig. 11.1.7). Deoarece laturile sînt perpendiculare și triunghiurile BCL și BEG sînt asemenea și unghiurile notate cu ε sînt egale.

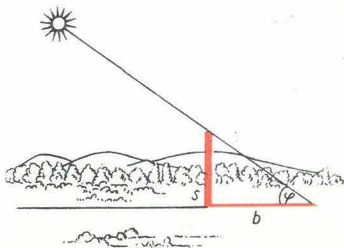
Obținem $\frac{\overline{GE}}{\overline{BE}} = \text{tg}\,\varepsilon = \frac{\overline{CL}}{\overline{BC}}$. Dacă $\overline{BC} = 10$ cm, raportul $\frac{\overline{CL}}{\overline{BC}}$ unde CL este de asemenea măsurat în centimetri este o fracție zecimală egală cu valoarea tangentei lui ε. Deci, înălțimea copacului va fi $H = s\,\text{tg}\,\varepsilon + h_2 = s\frac{\overline{CL}}{10} + h_2$.

Determinarea altitudinii Soarelui. Cu lungimea b a umbrei unui băț de lungime s pe o suprafață orizontală se calculează unghiul φ pe care îl formează razele solare cu orizontala, numit altitudinea soarelui (fig. 11.1.8).

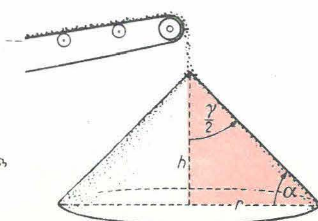
$$\text{tg}\,\varphi = \frac{s}{b}, \quad \text{cotg}\,\varphi = \frac{b}{s}.$$

Dacă bățul are lungimea de un metru, atunci valoarea în metri a lungimii umbrei ne indică valoarea cotg φ.

Unghiul format de generatoarea unei grămezi de nisip (con) cu planul bazei (fig. 11.1.9). Nisipul aruncat de pe banda rulantă formează un *con circular* de înălțime h cu raza egală cu r. Volumul poate fi calculat astfel: $V = \frac{\pi}{3} r^2 h$ unde $h = r$ tg α, deci $V = \frac{\pi}{3} r^3$ tg α; α fiind unghiul format de generatoarea grămezii cu planul bazei. Dacă în loc de α se ia unghiul γ de la vîrful conului, atunci $h = r\,\text{cotg}\frac{\gamma}{2}$ și $V = \frac{\pi r^3}{3}\text{cotg}\frac{\gamma}{2}$. Unghiul α de la baza unui con de nisip este aproximativ de 33°, iar unghiul de la baza unui vulcan de aproximativ 36°.

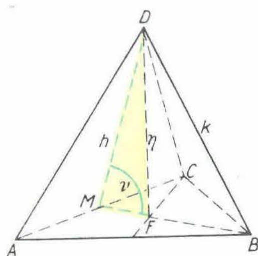


11.1.8. Altitudinea Soarelui

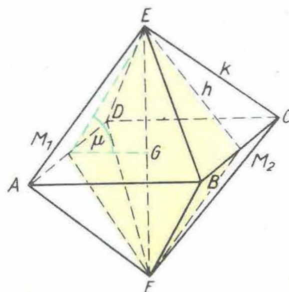


11.1.9. Unghiul de la baza conului

Unghiul de înclinare a fețelor într-un tetraedru sau octaedru regulat. Un *tetraedru* este mărginit de 4 triunghiuri echilaterale egale și de 6 muchii de lungime k. Unghiul ν format de două fețe este pus în evidență printr-un plan care conține muchia $\overline{BD}$, împarte latura AC în două părți egale și este perpendicular pe ea (fig. 11.1.10). ΔBDM este un triunghi isoscel. Laturile egale sînt apotemele triunghiurilor care formează tetraedrul: $h = \frac{1}{2} k \sqrt{3}$. Înălțimea tetraedrului este perpendiculara care împarte pe MB în raportul $\overline{MF} : \overline{FB} = 1 : 2$, deoarece într-un triunghi echilateral înălțimile sînt și mediane. În triunghiul dreptunghic MFD (fig. 11.1.10) ipotenuza este notată cu h iar cateta $\overline{MF} = \frac{1}{3} h$. Deci $\cos\nu = \frac{\frac{1}{3}h}{h} = \frac{1}{3}$ și $\nu = 70°31'44''$.



11.1.10. Tetraedru



11.1.11. Octaedru

Octaedrul este mărginit de 8 triunghiuri echilaterale și de 12 muchii egale, de lungime k. Unghiul de înclinație 2μ dintre două fețe este pus în evidență într-un plan care trece prin două vîrfuri opuse E, F și prin mijloacele M_1 și M_2 a două muchii paralele ($\overline{AD} \parallel \overline{BC}$). Suprafața plană EM_1FM_2 este un romb cu latura $h = \frac{1}{2} k \sqrt{3}$, cu diagonalele $\overline{EF} = k\sqrt{2}$ și $\overline{M_1M_2} = k$. Din triunghiul M_1GE obținem valoarea cosinusului jumătății unghiului de înclinație μ:

$$\cos\mu = \frac{\frac{1}{2}k}{\frac{1}{2}k\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3};\ \mu = 54°44'07''\ \text{sau}\ 2\mu = 109°28'14''.$$

11.2. Relații trigonometrice într-un triunghi oarecare

Elementele pe care vrem să le calculăm nu se află în general în triunghiuri dreptunghice. De aceea trebuie studiate relațiile dintre unghiurile și laturile unui triunghi oarecare. Cele mai importante relații sînt teorema sinusurilor și teorema cosinusului. Teorema cosinusului în cazul în care lucrăm cu tabele este mai puțin folosită și poate fi înlocuită cu teorema tangentelor sau cu formulele referitoare la jumătatea unghiurilor.

Teoremele trigonometriei plane

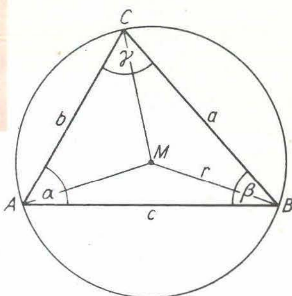
Teorema sinusurilor. Orice triunghi ABC are un *cerc circumscris* lui, al cărui centru se află la intersecția mediatoarelor (fig. 11.2.1). Laturile triunghiurilor vor fi *coarde* iar vîrfurile triunghiului se află pe cerc.

Dacă notăm cu r raza cercului circumscris, laturile vor fi $a = 2r\sin\alpha$, $b = 2r\sin\beta$, $c = 2r\sin\gamma$. Deci $2r = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$.

Teorema sinusurilor
$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ sau $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$

Într-un triunghi raportul dintre o latură și sinusul unghiului opus este egal cu diametrul cercului circumscris triunghiului.

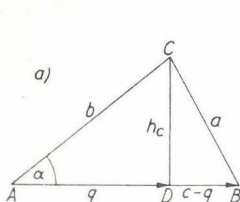
Teorema sinusurilor. Într-un triunghi raportul a două laturi este egal cu raportul sinusurilor unghiurilor opuse.

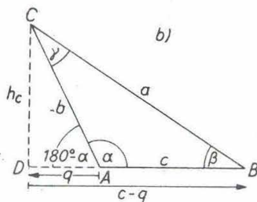


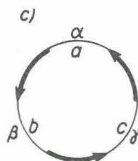
11.2.1. Teorema sinusurilor

Fiind date două laturi și un unghi opus uneia dintre ele, se calculează imediat și unghiul opus celeilalte. Fiind date a, b, α, $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{b}{a}$, $\sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha$. Fiind date două unghiuri și o latură opusă unuia, se calculează imediat și latura opusă celuilalt. În cazul în care cunoaștem b, β și γ. $\frac{c}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$ iar latura $c = b\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$. Cînd determinăm unghiul prin teorema sinusurilor aflăm două valori φ_1 și φ_2, $\varphi_1 + \varphi_2 = 180°$. Se observă, analizînd triunghiul din punct de vedere geometric, care unghi este cel căutat.

Teorema cosinusului. În triunghiul ABC notăm cu D punctul de intersecție al înălțimii h_c cu latura c și $AD = q$ este proiecția laturii b pe latura c. Această proiecție $q = b\cos\alpha$ este pozitivă în cazul lui α ascuțit și negativă pentru α obtuz. Lungimea lui DB va fi egală cu $c - q$ iar $h_c = b\sin\alpha$. Conform teoremei lui Pitagora în triunghiul dreptunghic DBC, $a^2 = h_c^2 + (c-q)^2 = b^2\sin^2\alpha + c^2 + b^2\cos^2\alpha - 2bc\cos\alpha$ sau grupînd termenii $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$. Relații corespunzătoare se obțin prin *permutări circulare*: a va trece în b, b în c și c în a; același lucru pentru unghiuri $\alpha \to \beta \to \gamma \to \alpha$ (fig. 11.2.2).







11.2.2. Teorema cosinusului

a) pentru un triunghi ascuțitunghic; b) pentru un triunghi obtuzunghic; c) permutări circulare

Teorema cosinusului	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta$, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

Teorema cosinusului. Pătratul lungimii unei laturi a unui triunghi este egal cu suma pătratelor lungimilor celorlalte două laturi minus de două ori produsul lor înmulțit cu cosinusul unghiului dintre ele.

Cu ajutorul teoremei cosinusului se poate calcula cea de a treia latură, fiind date două laturi și unghiul dintre ele. Cunoscînd lungimile celor trei laturi, se pot calcula unghiurile triunghiului:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos\beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Teorema cosinusului se mai numește *teorema lui Pitagora generalizată*.

Teorema tangentei. Aplicînd proprietatea proporțiilor, obținem din teorema sinusurilor:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \quad \frac{a-b}{a+b} = \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta} = \frac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Împărțind numărătorul și numitorul prin $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, **obținem teorema tangentei pentru laturile** a **și** b**; prin permutări circulare obținem teorema tangentei și pentru celelalte perechi de laturi:**

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}},\quad \frac{b-c}{b+c}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}},\quad \frac{c-a}{c+a}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}}.$$

Teorema tangentei	$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2},\quad \frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{180^\circ-\gamma}{2}$ $\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}=\frac{b-c}{b+c}\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2},\quad \frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{180^\circ-\alpha}{2}$ $\operatorname{tg}\frac{\gamma-\alpha}{2}=\frac{c-a}{c+a}\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2},\quad \frac{\gamma+\alpha}{2}=\frac{180^\circ-\beta}{2}$

Cu ajutorul acestei teoreme, fiind date două laturi a și b și unghiul cuprins între ele γ, se pot calcula celelalte două unghiuri α și β. Semisuma lor este cunoscută $\frac{\alpha+\beta}{2}=90^\circ-\frac{\gamma}{2}$ iar semidiferențele rezultă din teorema tangentei.

Din $\frac{\alpha+\beta}{2}=\xi$ și $\frac{\alpha-\beta}{2}=\eta$ obținem $\alpha=\xi+\eta$ și $\beta=\xi-\eta$.

Exprimarea funcțiilor trigonometrice ale unghiurilor unui triungh i cu ajutorul laturilor

Înlocuind expresia $\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ în formula $\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$, obținem $\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{b+c+a}{2}\cdot\frac{1}{bc}}$.

Formule analoage obținem pentru $\cos\frac{\beta}{2}$ și $\cos\frac{\gamma}{2}$.

Înlocuind în formulă perimetrul triunghiului prin $2s$, $a+b+c=2s$ sau $s=\frac{a+b+c}{2}$; și $s-a=\frac{1}{2}(b+c-a)$, $s-b=\frac{1}{2}(a+c-b)$, $s-c=\frac{1}{2}(a+b-c)$, formulele devin $\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)s}{bc}}$, $\cos\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)s}{ca}}$, $\cos\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)s}{ab}}$.

Înlocuind $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ din teorema cosinusului în formulele $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$, $\sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}}$ și $\sin\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\gamma}{2}}$. obținem relațiile

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\quad \sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}},\quad \sin\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}.$$

Prin împărțirea formulelor respective obținem și relațiile pentru $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ și $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$;

Formulele tangentei

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}, \quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}, \quad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}},$$

$$2s = a + b + c.$$

Pentru aplicații practice se recomandă calcularea tuturor unghiurilor α, β, γ în funcție de laturi; cunoscînd suma unghiurilor într-un triunghi avem și un control asupra exactității rezultatelor.

Cele patru cazuri de rezolvare a triunghiurilor

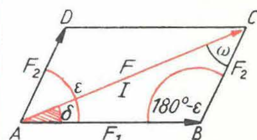
Pentru determinarea tuturor elementelor unui triunghi oarecare trebuie să fie date: o latură și două unghiuri; două laturi și un unghi opus uneia din laturi sau format de acestea; trei laturi. Metodele de rezolvare pentru aceste cazuri sînt date în cele ce urmează.

I. Se dau două unghiuri și o latură. Deoarece suma unghiurilor unui triunghi este de 180°, aflăm și cel de-al treilea unghi. Laturile necunoscute se găsesc aplicînd teorema sinusurilor, de ex. fiind date c, α, β, obținem $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$, $a = c\,\dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$ și $b = c\,\dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma}$.

Exemplu. O forță $F = 130$ N se descompune în două forțe F_1 și F_2 astfel încît F_1 să formeze cu F (fig. 11.2.3) un unghi $\delta = 18°$. Unghiul ε dintre F_1 și F_2 este egal cu 65°. În paralelogramul $ABCD$, cunoaștem diagonala $F = AC$, unghiul $\delta = 18°$ și $\omega = \varepsilon - \delta = 47°$. În triunghiul ABC

$$F_1 = F\,\frac{\sin\omega}{\sin(180° - \varepsilon)} = F\,\frac{\sin 47°}{\sin 65°}, \quad F_1 = 104{,}902 \text{ N},$$

$$F_2 = F\,\frac{\sin\delta}{\sin\varepsilon} = F\,\frac{\sin 18°}{\sin 65°}, \quad F_2 = 44{,}324 \text{ N}.$$



11.2.3. Descompunerea forței F în două componente F_1 și F_2

II. Se dau două laturi și unghiul opus uneia dintre ele. (fig. 11.2.4). Fie a, c și γ elementele cunoscute. Obținem:

$$1.\ \sin\alpha = \frac{a}{c}\sin\gamma; \quad 2.\ \beta = 180° - (\alpha + \gamma); \quad 3.\ b = c\,\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

Rezolvarea este posibilă numai în cazul cînd $\dfrac{a}{c}\sin\gamma \leqslant 1$. Din această cauză sînt posibile următoarele cazuri:

II(1) $a < c$, unghiul dat este opus laturii mai mari. Atunci există un unghi α mai mic decît γ, opus laturii mai mici, care va fi ales dintre unghiurile α_1 și α_2, $\alpha_1 + \alpha_2 = 180°$. Soluția unică va fi $\alpha_1 < \gamma$.

Exemplu. $a = 56{,}9$ m, $c = 68{,}0$ m, $\gamma = 63°57'$.

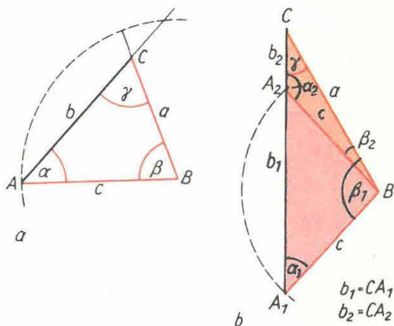
1. $\sin\alpha = \dfrac{a}{c}\sin\gamma = \dfrac{56{,}9}{68{,}0}\sin 63°57'$; $\alpha_1 = 48°45'$;

$\alpha_2 = 180° - \alpha_1 = 131°15'$ este mai mare decît γ.

2. $\beta = 180° - (\alpha + \gamma)$; $\beta = 67°18'$;

3. $b = c\,\dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma} = 68{,}0\text{ m}\cdot\dfrac{\sin 67°18'}{\sin 63°57'}$;

$b = 69{,}8$ m.



11.2.4. Rezolvarea unui triunghi determinat de două laturi și unghiul opus uneia din ele
a) o soluție; b) altă soluție

II(2) $a = c$, triunghiul este isoscel, deci $\alpha = \gamma$.

II(3) $a > c$, unghiul dat este opus laturii mai mici. Segmentul a poate să fie așa de mare încît condiția $\sin\alpha \leqslant 1$ să nu fie verificată.

II(3.1) *nu există soluție;* nu putem construi un triunghi din elementele date. De exemplu $c = 2$ cm, $a = 5$ cm, $\gamma = 75°$.

II(3.2) $\sin\alpha$ va fi egal cu 1, α va fi un unghi drept, deoarece $\alpha_2 = 180 - \alpha_1 = \alpha_1$. Problema are două soluții *confundate*, triunghiul fiind dreptunghic. De exemplu $a = 2$cm, $c = 1$ cm, $\gamma = 30°$.

II(3.3) Dacă $\sin\alpha < 1$, obținem soluțiile α_1 și $\alpha_2 = 180° - \alpha_1$. Deoarece $\sin\alpha > \sin\gamma$, avem $\alpha_1 > \gamma$ și $(180° - \alpha_1) + \gamma < 180°$, deci și α_2 verifică condițiile.
Problema are *două soluții*.

Exemplu. $a = 87{,}23$ m, $c = 65{,}95$ m, $\gamma = 30{,}42°$.

1. $\sin\alpha = \dfrac{87{,}23}{65{,}95}\sin 30{,}42°$; $\alpha_1 = 42{,}04°$, $\alpha_2 = 180° - \alpha_1 = 137{,}96°$, $\alpha_1 > \gamma$, $\alpha_2 > \gamma$.

2. $\beta_1 = 180° - (\alpha_1 + \gamma)$; $\beta_1 = 107{,}54°$, $\beta_2 = 11{,}62°$.

3. $b_1 = 65{,}95\text{ m}\,\dfrac{\sin 107{,}54°}{\sin 30{,}42°} = 126{,}0$ m și $b_2 = 65{,}95\text{ m}\cdot\dfrac{\sin 11{,}62°}{\sin 30{,}42°} = 26{,}23$ m.

III. Se dau două laturi și unghiul cuprins între ele. Se dau de exemplu b, c, α. Se poate aplica teoerema cosinusului sau teorema tangentelor: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, deci $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$. Unghiul β poate fi astfel aflat din teorema cosinusului, $\cos\beta = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$ sau din teorema sinusurilor, $\sin\beta = \dfrac{b}{a}\sin\alpha$. Obținem două valori pentru unghiul β dar numai una este adecvată din punct de vedere geometric. Din teorema tangentelor și din relația $\dfrac{\gamma + \beta}{2} = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$ obținem $\operatorname{tg}\dfrac{\gamma - \beta}{2} = \dfrac{c - b}{c + b}\operatorname{tg}\dfrac{\gamma + \beta}{2}$; din $\dfrac{\gamma + \beta}{2}$ și $\dfrac{\gamma - \beta}{2}$ se găsesc β și γ. A treia latură c poate fi determinată din teorema sinusurilor, $c = a\dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$.

Exemplu. Între localitățile R și S (fig. 11.2.5) trebuie tras un cablu în linie dreaptă printr-o pădure. Între R și S nu avem vizibilitate, dar putem găsi un punct A care are distanța $d = \overline{AR} = 2{,}473$ km față de punctul R și distanța $e = \overline{AS} = 3{,}752$ km față de punctul S. Măsurînd și unghiul $\tau = \sphericalangle RAS = 42°26'10''$, vrem să aflăm lungimea x a cablului și unghiurile ε și δ.
Pentru comparație redăm două metode de calcul:

1. $x^2 = d^2 + e^2 - 2de\cos\tau$

$x^2 = 6{,}497313$

$x = 2{,}549$ km.

2. $\sin\varepsilon = \dfrac{e}{x}\sin\tau$

$\varepsilon_1 = 83°20'00''$

$\varepsilon_2 = 96°40'00''$

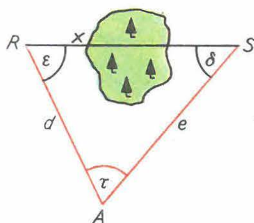
3. $\delta = 180° - (\varepsilon + \tau)$

$\delta_1 = 54°13'50''$

$\delta_2 = 40°53'50''$

Deoarece $e > x > d$ și $\varepsilon > \tau > \delta$,

aceste condiții sînt îndeplinite numai de δ_2. De aceea soluțiile vor fi x, ε_2, δ_2.



11.2.5. Determinarea distanței dintre două puncte între care nu există vizibilitate

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon - \delta}{2} = \frac{e - d}{e + d}\operatorname{tg}\frac{\varepsilon + \delta}{2}$$

1. $\varepsilon + \delta = 180° - \tau = 137°33'50''$

$\dfrac{\varepsilon + \delta}{2} = 68°46'55''$,

$\dfrac{\varepsilon - \delta}{2} = 27°53'18''$

$\varepsilon = 96°40'13''$

$\delta = 40°53'37''$

$\tau = 42°26'10''$

$\varepsilon + \delta + \tau = 180°00'00''$ (probă)

2. $x = e\dfrac{\sin\tau}{\sin\varepsilon} = 2{,}549$ km.

Diferențele dintre unghiurile obținute sînt destul de mari, datorită faptului că unghiul ε în vecinătatea lui 90° a fost aflat cu ajutorul funcției sinus, iar $\sin 96°40'00'' = 0{,}99324$,

$\sin 96°40'10'' = 0{,}99323$, $\sin 96°40'20'' = 0{,}99323$, deci nu putem preciza numărul secundelor. O precizie mai mare obţinem folosind teorema cosinusului, $\cos \varepsilon = \dfrac{x^2 + d^2 - e^2}{2xd}$; $\cos \varepsilon = - 1{,}464462 : (2 \cdot 2{,}549 \cdot 2{,}473)$ sau $\varepsilon_2' = 96°40'14''$ şi $\delta_2' = 40°53'36''$, $x = 2{,}549$ km.

IV. Se dau toate laturile triunghiului. Rezolvarea se poate face prin teorema cosinusului sau prin formulele de exprimare ale unghiurilor în funcţie de laturi:

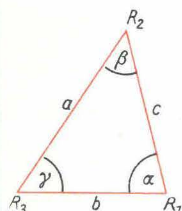
$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \text{sau} \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\,.$$

Prin permutări circulare obţinem şi valorile lui β şi γ. Ambele soluţii sînt unice şi se obţin fie din combinaţiile convenabile a şase numere $a^2\ b^2\ c^2$, $2ab$, $2ac$, $2bc$ sau a patru numere s, $s-a$, $s-b$, $s-c$. Proba calculelor se face cu ajutorul sumei unghiurilor unui triunghi.

Exemplu. Trei puncte R_1, R_2, R_3 trebuie legate prin radar. Sub ce unghiuri trebuie construiţi receptorii şi emiţătorii (fig. 11.2.6) în fiecare dintre cele trei puncte.

$\overline{R_1R_2} = c = 45{,}21$ km, $\overline{R_2R_3} = a = 52{,}46$ km, $\overline{R_3R_1} = b = 39{,}37$ km.

Teorema cosinusului



11.2.6. Rezolvarea triunghiului cunoscînd cele trei laturi

$a^2 = 2\,752{,}0516$
$b^2 = 1\,549{,}9969$
$c^2 = 2\,043{,}9441$
$b^2 + c^2 - a^2 = 841{,}8894$
$c^2 + a^2 - b^2 = 3\,245{,}9988$
$a^2 + b^2 - c^2 = 2\,258{,}1044$
$\alpha = 76°19'12''$
$\beta = 46°49'06''$
$\gamma = 56°51'42''$
$180°00'00''$

Formule prin care exprimăm valorile funcţiilor trigonometrice în funcţie de laturi

		lg
$a = 52{,}46$	$s - a = 16{,}06$	1,20575
$b = 39{,}37$	$s - b = 29{,}15$	1,46464
$c = 45{,}21$	$s - c = 23{,}31$	1,36754
$2s = 137{,}04$	$s = 68{,}52$	1,83582

$\alpha = 76°19'12''$
$\beta = 46°49'06''$
$\gamma = 56°51'42''$
$180°00'00''$

11.3. Aplicaţii

În multe domenii omul îşi precizează reflecţiile cu ajutorul relaţiilor matematice şi foloseşte, în cazul în care vrea să determine mărimi de unghiuri sau laturi ale unor figuri plane, teoreme ale trigonometriei.

Unul dintre aceste domenii în care trigonometria este foarte mult folosită este *topografia*, care în decursul timpului a fost şi un stimul pentru dezvoltarea trigonometriei. Deoarece domeniile ei de aplicabilitate sînt foarte vaste, le acordăm o importanţă deosebită şi vor fi tratate într-un capitol separat.

Aplicaţii în geometrie

Raza cercului înscris în triunghi. În triunghiul ABC bisectoarele se intersectează în centrul cercului înscris. Trasăm razele cercului în punctele de tangenţă E, F, G şi vom obţine şase triunghiuri dreptunghice. Ele sînt două cîte două congruente, deci laturile notate cu x, y, z respectiv sînt egale. Lungimile laturilor egale vor fi $x = s - a$, $y = s - b$, $z, = s - c$ unde $s = \dfrac{a + b + c}{2}$.

În triunghiul AGM, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{x} = \frac{r}{s-a}$. Folosind formula $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$, obținem

$$\frac{r}{s-a} = \sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{s(s-a)}},$$

$$r = (s-a)\sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{s(s-a)}}.$$

La același rezultat ajungem folosind $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ sau $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ în loc de $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ (fig. 11.3.1).

11.3.1. Cercul înscris în triunghi

Raza cercului înscris	$r = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{s}}$

Trasarea unui arc de cerc cînd centrul cercului este inaccesibil. Între două puncte A și B care se află la o distanță e (fig. 11.3.2) vrem să construim puncte P_i care să se afle pe un cerc de rază cunoscută r ce trece prin A și B. Centrul cercului este inaccesibil. Se cer: unghiul $\varphi = ∢\, P_iAB$ și distanța $s = \overline{P_iA}$. Fie P unul din punctele căutate. Triunghiul isoscel AMP are baza $s = 2r \sin\frac{\sigma}{2}$ și unghiul la centru σ. Coardei PB îi corespunde unghiul la centru $∢\, PMB = \varepsilon - \sigma$ și unghiul înscris φ; deci $\varphi = \frac{1}{2}(\varepsilon - \sigma)$ sau $\sigma = \varepsilon - 2\varphi$. Unghiul ε se determină din triunghiul ABM deoarece $e = 2r\sin\frac{\varepsilon}{2}$. Deci $\sin\frac{\varepsilon}{2} = \frac{e}{2r}$. Astfel, distanța s, dependentă de unghiul φ, este egală cu $s = 2r\sin\frac{\sigma}{2} = 2r\sin\left(\frac{\varepsilon}{2} - \varphi\right)$, unde $\frac{\varepsilon}{2} = \operatorname{Arcsin}\frac{e}{2r}$.

11.3.2. Trasarea unui arc de cerc

Aria unui triunghi. Înlocuind în formula ariei $A = \frac{1}{2}c \cdot h_c$ pe h_c cu $b\sin\alpha$, obținem $A = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$. Aplicînd teorema sinusurilor în formula ariei obținem următoarele formule pentru arie:

$$A = \frac{abc}{4R} = 2R^2 \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = a^2\frac{\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha} = \frac{b^2\sin\gamma\sin\alpha}{2\sin\beta} = \frac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\gamma}.$$

Prin adunarea ariilor triunghiurilor ABM, BCM, CAM din figura 11.3.1 ale căror înălțimi sînt egale cu raza cercului înscris obținem formula lui Heron pentru arie

$$A = \frac{1}{2}(cr + br + ar) = rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \text{ unde } 2s = a + b + c.$$

Aria triunghiului	$A = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} ch_c = \frac{abc}{4R} = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$
Formula lui Heron	$A = a^2 \frac{\sin\beta \sin\gamma}{2\sin\alpha} = b^2 \frac{\sin\gamma \sin\alpha}{2\sin\beta} = c^2 \frac{\sin\alpha \sin\beta}{2\sin\gamma}$
	$A = rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

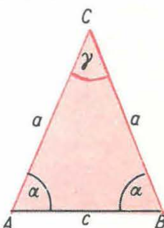
Exemplu. Să se afle aria triunghiului cu laturile $a = 345{,}8$ m, $b = 236{,}5$ m, $c = 497{,}3$ m. Calculăm $s = 539{,}8$; $s - a = 194{,}0$; $s - b = 303{,}3$ și $s - c = 42{,}5$. Folosind formula lui Heron și tabele de logaritmi cu patru zecimale, obținem $A = 36\,740$ m².

Un calcul aproximativ este recomandat întotdeauna. În acest caz, folosind rigla de calcul, obținem:

$$A = \sqrt{539{,}8 \cdot 194 \cdot 303{,}3 \cdot 42{,}5} \approx \sqrt{5{,}40 \cdot 10^2 \cdot 1{,}94 \cdot 10^2 \cdot 3{,}03 \cdot 10^2 \cdot 4{,}25 . 10} =$$
$$= 10^3\sqrt{5{,}40 \cdot 1{,}94 \cdot 3{,}03 \cdot 42{,}5} = 36\,700.$$

Poziția zecimalei s-a estimat în felul următor: $A \approx 10^3\sqrt{10 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 4{,}2} = 10^4\sqrt{12{,}6} \approx 3{,}5 \cdot 10^4$.

Aria unui triunghi isoscel. Notăm laturile egale cu a, baza cu c, unghiurile de la bază cu α și unghiul opus bazei cu γ (fig. 11.3.3). Aria va fi egală cu:



11.3.3. Aria unui triunghi isoscel

1. $A = \frac{1}{2} a^2 \sin\gamma$, unde $\gamma = 180° - 2\alpha$;

2. $A = \frac{c^2 \sin^2\alpha}{2\sin\gamma} = \frac{c^2\sin^2\alpha}{2\sin 2\alpha} = \frac{c^2\sin^2\alpha}{4\sin\alpha\cos\alpha}$, $A = \frac{c^2}{4}\operatorname{tg}\alpha$;

3. $s = a + \frac{c}{2}$, $s - a = \frac{c}{2}$, $s - c = a - \frac{c}{2}$;

$$A = \sqrt{\left(a + \frac{c}{2}\right) \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \left(a - \frac{c}{2}\right)} = \frac{c}{2}\sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}} = \frac{c}{4}\sqrt{4a^2 - c^2}$$

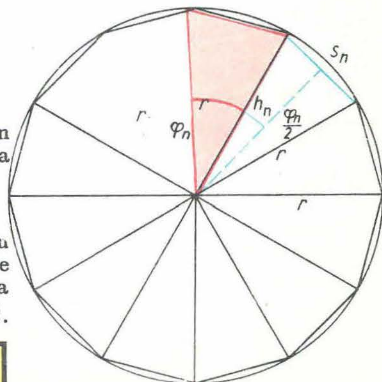
Aria unui triunghi echilateral. Lungimea unei laturi va fi egală cu a.

1. $A = \frac{1}{2} a^2 \sin 60°$, $A = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$.

2. Conform formulei lui Heron obținem: $s = \frac{3}{2} a$, $s - a = s - b = s - c = \frac{a}{2}$ și $A = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{a^4}{8}} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$.

Hexagon regulat. Deoarece poligonul este format din șase triunghiuri echilaterale cu lungimea laturii R, aria va fi egală cu $A_6 = 6\frac{\sqrt{3}}{4}R^2$, $A_6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$.

Poligon regulat cu n laturi. Aria sa este egală cu suma ariilor a n triunghiuri ale căror laturi sînt egale cu raza cercului circumscris și unghiul dintre ele egal cu a n-a parte a unghiului de 360°; $\varphi_n = 360°/n$ (fig. 11.3.4).



11.3.4. Poligon regulat cu n laturi

Poligon regulat cu n laturi	$A_n = \frac{n}{2} R^2 \sin\frac{360°}{n}$

În fiecare triunghi isoscel înălţimea h_n împarte latura s_n în două părţi egale şi unghiul φ_n la fel. Deci $s_n = 2R \sin \frac{\varphi_n}{2} = 2R \sin \frac{180°}{n}$ şi $h_n = R \cos \frac{\varphi_n}{2} = R \cos \frac{180°}{n}$, $A_n = n \frac{s_n h_n}{2} = \frac{n}{2} 2R^2 \sin \frac{180°}{n} \cos \frac{180°}{n} = \frac{n}{2} R^2 \sin \frac{360°}{n}$.

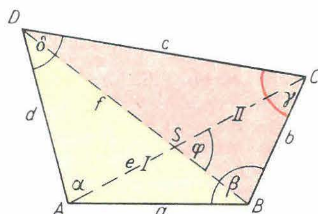
Aria unui patrulater oarecare. Un patrulater oarecare $ABCD$ este determinat de cinci elemente, cele patru laturi şi suma a două unghiuri opuse, de ex. α şi γ (fig. 11.3.5). Notăm cu s semiperimetrul

$$s = \frac{a + b + c + d}{2} \quad \text{şi cu} \quad 2\varepsilon = \alpha + \gamma.$$

Ariile triunghiurilor ABD şi BCD şi aria patrulaterului A_p vor fi:

$$A_{\mathrm{I}} = \frac{1}{2} ad \sin \alpha; \qquad A_{\mathrm{II}} = \frac{1}{2} bc \sin \gamma;$$

$$A_p = \frac{1}{2} (ad \sin \alpha + bc \sin \gamma).$$



11.3.5. Aria unui patrulater oarecare

Aplicînd teorema cosinusului, obţinem:

$$a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha = f^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \gamma$$

sau $a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2(ad \cos \alpha - bc \cos \gamma)$. Atunci $(4A_p)^2 + (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 = 4(a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd \cos 2\varepsilon)$. Deci $16 A_p^2 = (a + d + b - c)(a + d - b + c)(b + c + a - d)(b + c - a + d) - 16abcd \cos^2 \varepsilon$.

Aria unui patrulater oarecare
$A_p = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d) - abcd \cos^2 \varepsilon}$

Dacă φ este unghiul sub care se intersectează diagonalele unui patrulater, atunci suprafaţa patrulaterului va fi compusă din cele 4 triunghiuri ABS, BCS, CDS şi DAS, astfel încît

$$A_p = \frac{1}{2} [AS \cdot BS \cdot \sin (180° - \varphi) + BS \cdot CS \cdot \sin \varphi + CS \cdot DS \cdot \sin (180° - \varphi) +$$

$$+ DS \cdot AS \cdot \sin \varphi] = \frac{1}{2} [AS(BS + DS) + CS(BS + DS)] \sin \varphi =$$

$$= \frac{1}{2} [(AS + CS)(BS + DS)] \sin \varphi.$$

$$A_p = \frac{1}{2} ef \sin \varphi.$$

Deci *aria* este *jumătatea produsului diagonalelor şi sinusului unghiului format de acestea.*

Patrulater inscriptibil. Într-un patrulater inscriptibil suma unghiurilor opuse este egală cu 180°, astfel încît

$$\alpha + \gamma = 180°, \quad \varepsilon = 90°, \quad \cos \varepsilon = 0.$$

Deci $A_{pi} = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)}$. Deoarece $abcd \cos^2\varepsilon$ este mereu nenegativă, ariile patrulaterelor cu aceleaşi laturi sînt mai mici decît aria patrulaterului inscriptibil.

Patrulaterul inscriptibil are cea mai mare arie în mulţimea patrulaterelor cu aceleaşi laturi.

Aplicații în fizică

Toate mărimile fizice reprezentabile prin vectori (de ex. forța, viteza) necesită utilizarea în calcule a funcțiilor trigonometrice.

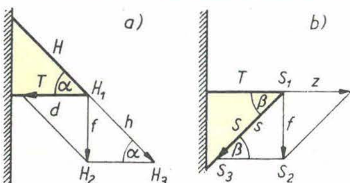
Exemplul 1. O *consolă* T este fixată perpendicular pe un perete W (fig. 11.3.6), la capătul său liber atîrnînd o sarcină de f N. Pentru siguranță se pune fie a) un *tirant* H, fie b) un *suport* S, sub unghiurile α, respectiv β, față de consolă. Ce forțe de întindere, respectiv de compresie, apar în T, H și S? Forța f este rezultanta a două forțe componente, una avînd direcția consolei T, iar cealaltă direcțiile a) tirantului H și respectiv b) a suportului S. Deoarece f este perpendiculară pe T, triunghiurile $H_1H_2H_3$ și respectiv $S_1S_2S_3$ sînt dreptunghice; a) pe direcția consolei acționează o forță de compresie $d = f \operatorname{cotg} \alpha$, iar pe direcția tirantului o forță de întindere $h = \dfrac{f}{\sin \alpha}$; b) consola este supusă la întindere cu forța $z = f \operatorname{cotg} \beta$, iar suportul la compresiune cu forța $s = \dfrac{f}{\sin \beta}$.

Exemplul 2. Un *avion* are viteza medie $v_1 = 576$ km/h și zboară din localitatea A, în direcția 23,5° est, către localitatea B, aflată la 480 km. În direcția 18° vest suflă vîntul, cu o viteză $v_2 = 20$ m/s. Pe ce rută trebuie să zboare avionul și în cît timp va ajunge în B? În absența vîntului avionul ar fi ajuns în B în $\dfrac{480}{576} = \dfrac{5}{6}$ ore, adică în 50 minute. Datorită *vîntului lateral* avionul va zbura după direcția definită de unghiul α_3 (fig. 11.3.7); conform paralelogramului forțelor, din triunghiul ACE, cunoscînd v_1, v_2 și unghiul $AEC = \alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ se poate determina unghiul direcției de zbor, $\alpha_3 - \alpha_1$. Din teorema sinusurilor rezultă

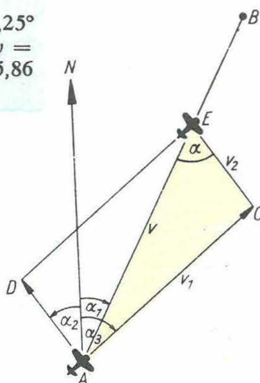
$$\sin(\alpha_3 - \alpha_1) = \sin(\alpha_1 + \alpha_2)\frac{v_2}{v_1} \quad \text{și} \quad v = v_1 \frac{\sin(180° - \alpha_2 - \alpha_3)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad \text{respectiv}$$

$\alpha_3 - \alpha_1 = 4{,}75°$; $\alpha_3 = 28{,}25°$;
$v = 174{,}4$ m/s $= 627{,}9$ km/h.

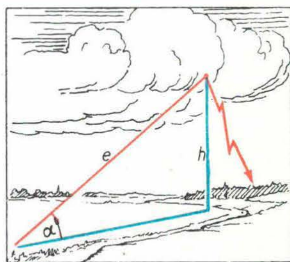
Avionul va zbura în direcția 28,25° st și va ajunge în B, cu o viteză $v = 627{,}9$ km/h în cca 46 minute (45,86 minute).



11.3.6. Consolă:
a) cu *tirant*; b) cu *suport*



11.3.7. Zborul unui avion cu vînt lateral



11.3.8. Înălțimea și distanța la care se produce un trăsnet

Exemplul 3. Dacă un *fulger* a fost văzut sub un unghi α față de orizontală, în timp ce *tunetul* este perceput de către observator după t secunde, atunci trăsnetul s-a produs la o depărtare $e = 333\,t$ metri și la o înălțime $h = 333\,t \sin \alpha$ (fig. 11.3.8). Viteza sunetului este de 333 m/s, iar timpul de propagare a luminii este neglijabil, datorită vitezei de propagare a luminii $c = 300\,000$ km/s.

Aplicații în tehnică

Legile tehnicii sînt aplicații ale legilor fizicii. Și aici, funcțiile trigonometrice și teoremele trigonometriei se întîlnesc atunci cînd unghiurile joacă vreun rol.

Mecanismul bielă-manivelă. La un mecanism bielă-manivelă poziţia *capului de cruce* K este funcţie de *unghiul de rotire al manivelei*, φ (fig. 11.3.9). Conform teoremei cosinusului, dacă r este raza manivelei şi l lungimea bielei, atunci

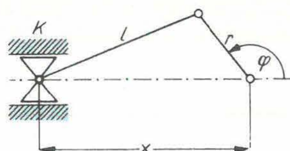
$$l^2 = x^2 + r^2 - 2xr\cos(180° - \varphi) \Rightarrow x^2 + 2rx\cos\varphi = l^2 - r^2.$$

Soluţia acestei ecuaţii este:

$$x = -r\cos\varphi + \sqrt{r^2\cos^2\varphi + l^2 - r^2} =$$

$$= -r\cos\varphi + \sqrt{r^2(\cos^2\varphi - 1) + l^2},$$

$$x = -r\cos\varphi + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\varphi}.$$



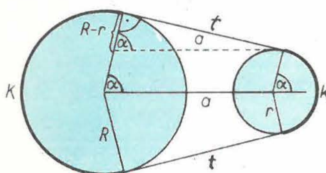
11.3.9. Mecanism bielă-manivelă

Lungimea unei curele de transmisie. Atunci cînd *roţile unei transmisii* cu curea au razele R şi r, iar *distanţa dintre axele lor* este a, se poate calcula lungimea L a curelei (fig. 11.3.10) considerînd că aceasta este perfect întinsă. Există relaţiile $t^2 = a^2 - (R - r)^2$, $\cos\alpha = \dfrac{R - r}{a}$ sau $\alpha = \text{Arccos}\,\dfrac{R - r}{a}$. De aici rezultă

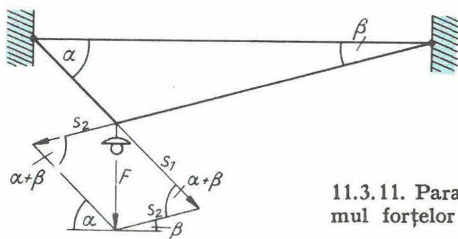
$$L = 2t + K + k = 2\sqrt{a^2 - (R - r)^2} + R(2\pi - 2\alpha) + r\cdot 2\alpha,$$

$$L = 2[\sqrt{a^2 - (R - r)^2} - \alpha(R - r) + R\pi].$$

Pentru cazul $r = \dfrac{R}{2}$ şi $a = 2R$ se obţine $L = 8{,}838\ R$.



11.3.10. Lungimea unei curele de transmisie



11.3.11. Paralelogramul forţelor

Paralelogramul forţelor. Un *corp de iluminat* este suspendat deasupra unei străzi cu ajutorul a două cabluri neegale, care fac cu orizontala unghiurile α, respectiv β. Dacă se pot neglija săgeţile celor două cabluri, atunci *forţele de întindere* din cabluri S_1 şi S_2 se determină cu teorema sinusului (fig. 11.3.11). Cu considerarea relaţiei $\sin(90° - x) = \cos x$ se obţine

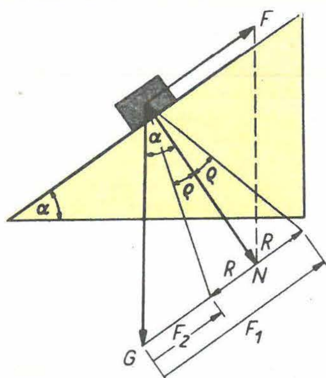
$$S_1 = F\,\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha + \beta)}, \qquad S_2 = F\,\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha + \beta)},$$

Mişcarea pe planul înclinat. Pe un plan înclinat, cu *unghiul de înclinare* α, se găseşte un corp de greutate G. Se caută forţa F_1, paralelă cu planul înclinat, necesară pentru deplasarea în sus, cu viteză constantă a corpului şi forţa F_2, paralelă cu planul înclinat, necesară pentru a împiedica corpul să alunece în jos (fig. 11.3.12). Forţa de frecare R este proporţională cu componenta normală la planul înclinat N a greutăţii corpului, $R = \mu N$; μ se numeşte *coeficient de frecare*. Se pune $\mu = \text{tg}\,\rho$; unghiul de frecare ρ rezultă ca fiind unghiul unui plan înclinat, pe care corpul considerat se găseşte la limita de alunecare. Forţa de frecare $R = N\,\text{tg}\,\rho$ se însumează algebric cu componenta paralelă cu planul înclinat, a greutăţii corpului F, rezultînd o forţă $F_1 = F + R$, respectiv $F_2 = F - R$. Conform teoremei sinusurilor există relaţiile:

$$\frac{F_1}{G} = \frac{\sin(\alpha + \rho)}{\sin(90° - \rho)}, \quad \text{respectiv } F_1 = G\,\frac{\sin(\alpha + \rho)}{\cos\rho}$$

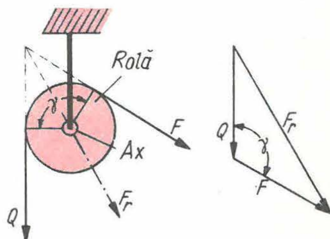
și

$$\frac{F_2}{G} = \frac{\sin(\alpha - \rho)}{\sin(90^\circ + \rho)}, \quad \text{respectiv } F_2 = G\frac{\sin(\alpha - \rho)}{\cos\rho}.$$



11.3.12. Mișcarea pe planul înclinat și triunghiul forțelor corespunzător

11.3.13. Forțe la scripete



Forțe la scripete. Pentru calculul *frecării* dintre rola și axul scripetelui trebuie determinată, în primul rînd, *forța rezultantă care acționează asupra axului*, F_r. Aceasta se poate determina din sarcina Q, forța de tragere F și unghiul de înfășurare γ folosind teorema cosinusului (fig. 11.3.13).

$$F_r = \sqrt{F^2 + Q^2 - 2FQ\cos\gamma}.$$

Dacă se neglijează frecarea, *forțele de întindere* F și Q din cablu sînt egale și deoarece $(2-2\cos\gamma) = 2(1-\cos\gamma) = 4\sin^2\frac{\gamma}{2}$, ecuația se reduce la $F_r = 2Q\sin\frac{\gamma}{2}$. Pentru $\gamma = 180^\circ$, F și Q sînt paralele și $F_r = 2Q$.

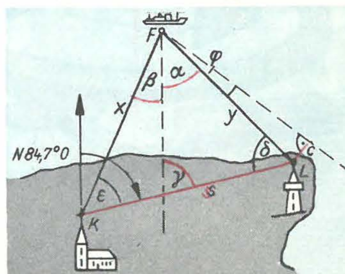
Aplicații în navigație

Pentru precizarea locului în care se găsește un vas pe mare ca și a traseului acestuia trebuie luată în considerație forma sferică a pămîntului. Calculele se vor baza deci pe teoremele trigonometriei sferice. De asemenea, metodele astronomice de stabilire a poziției se bazează pe trigonometria sferică. În cazul unor *distanțe relativ reduse*, de exemplu călătorii în apropierea țărmului, se poate neglija curbura pămîntului și deci, se poate utiliza trigonometria plană. Reperele care apar pe *hărțile marine* au precizate distanțele relative dintre ele, ca și poziția lor. Direcțiile, în special cea de deplasare a vasului se definesc față de direcția nord-sud, de exemplu N 35°E se citește *35° de la nord către est* (sau nord 35° est).

Exemplu. De pe un *vas F* se goniometrează simultan *farul L*, sub direcția S 55,3°E (sud 55,3° est) și *turla unei clădiri înalte K* sub direcția S 28,5°V (fig. 11.3.14). Conform hărții de navigație, distanța $KL = s = 33{,}25$ km și are direcția N 84,7°E.

a) Să se afle *distanțele* $FK = x$ și $FL = y$.

b) Ce *direcție* trebuie să mențină vasul pentru a trece pe lîngă farul F, la o distanță $c = 4$ mile marine $= 7{,}408$ km (1 milă marină $= 1{,}852$ km)? Din $\alpha = 55{,}3^\circ$, $\beta = 28{,}5^\circ$, $\gamma = 84{,}7^\circ$, $s = 33{,}25$ km se obține $\delta = 180^\circ - (\alpha + \gamma) = 40^\circ$, $\varepsilon = \gamma - \beta = 56{,}2^\circ$, $x = s\frac{\sin\delta}{\sin(\alpha+\beta)} =$



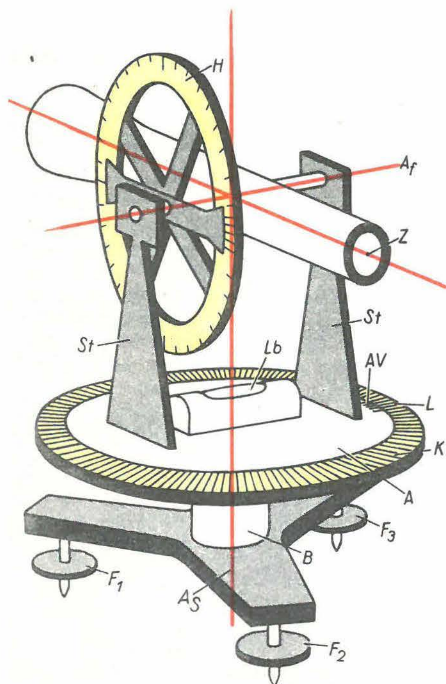
11.3.14. Ruta unui vas

$= 21,49$ km, $y = s \dfrac{\sin \varepsilon}{\sin(\alpha + \beta)} = 27,77$ km, $\sin \varphi = \dfrac{c}{y}$, $\varphi = 15,47°$. Direcţia vasului: $S(\alpha + \varphi)°E$, adică S 70,77°E.

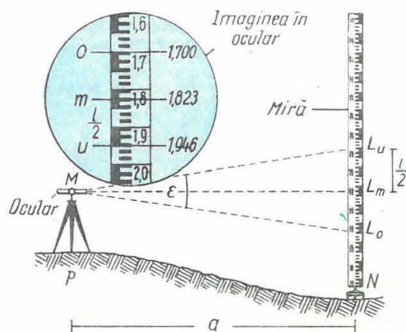
Determinarea trigonometrică a înălţimilor

Din punct de vedere geometric, triunghiurile, în care unele elemente trebuie calculate cu teoremele trigonometriei, pot fi situate oricum. Practic, la măsurători pe teren apar deosebiri între un unghi măsurat într-un plan orizontal şi un acelaşi unghi, măsurat într-un plan vertical.Deosebirile se datorează indicilor de refracţie diferiţi ai aerului, funcţie de densitatea locală a acestuia. Aceasta face ca o rază de lumină care se propagă cu un unghi relativ mare faţă de orizontală să aibă o traiectorie curbă, în locul uneia drepte. Acest fenomen se numeşte *refracţie terestră* şi împreună cu existenţa curburii pămîntului trebuie luat în consideraţie la determinarea înălţimilor ce depăşesc 200 m.

Construcţia schematică a teodolitului. Teodolitul este instrumentul de măsurare a unghiurilor în topografie. Marii varietăţi constructive, îi stă la bază o schemă simplă. Pe o placă de bază, fixată adesea de un *stativ* (fig. 11.3.15), se sprijină prin intermediul a trei *piciorușe reglabile* F o *bucşă verticală* B, cu un disc circular K, prevăzut cu o *gradaţie numerotată* în sensul acelor de ceasornic L. În bucşă se roteşte *cercul alidadă* A, un disc circular cu două ace indicatoare dispuse diametral, care poartă o *nivelă* Lb şi doi *suporţi* St, pe care se sprijină *axa* A_f *a lunetei*. Solidar cu această axă, numită şi *axă de înclinare*, se găsesc *luneta* Z şi dispozitivul indicator de citire a *cercului înălţimilor* H, solidar la rîndul său cu luneta. Cu ajutorul piciorușelor reglabile şi al nivelei Lb se aşază orizontal cercul *alidadă* A. În acest fel la un teodolit de bună calitate *axa* A_s în jurul căreia se roteşte cercul *alidadă* A va fi perfect *verticală*, *axa de înclinare* va fi *orizontală* şi *luneta* Z *perpendiculară pe ea*. Există metode pentru luarea în consideraţie, prin măsurări preliminare a unor mici abateri de la aceste condiţii, în scopul *corectării măsurărilor* propriu-zise. În principal, calităţile unui teodolit depind de precizia gradării cercurilor L şi H, ca şi de cea a *dispozitivului de citire* AV, care poate consta dintr-un ac indicator, un vernier, sau un microscop dublu; în funcţie de aceasta se pot citi unghiurile cu precizie de minute sau secunde. Pentru sporirea preciziei de măsurare a unghiului se vor respecta procedee bine precizate. Luneta este bine orientată asupra obiectului, atunci cînd imaginea acestuia se suprapune peste *reticulul său* (în cazul cel mai simplu, reticulul are forma unei cruci).



11.3.15. Teodolit



11.3.16. Tahimetrie orizontală

Nivelmentul tahimetric. Tahimetrie înseamnă o *măsurătoare de teren rapidă*; ea se utilizează la stabilirea, prin măsurători simple și rapide a poziției și înălțimii unui număr oarecare de repere, față de poziția și înălțimea, cunoscute ale unui punct P, din care se face măsurătoarea. De exemplu, se utilizează în stabilirea formei terenului, ca bază pentru un proiect de construcție. Crucea reticulară prezintă față de reperul central m, încă *două repere paralele* cu acesta, o și u echidistanțate față de m cu $\frac{p}{2}$. Aceste trei repere se suprapun peste trei puncte, L_m, L_o și L_u ale imaginii mirei plasate în punctul N (fig. 11.3.16). Segmentul de lungime $l = L_u - L_o$ de pe miră este cuprins între laturile unghiului ε, a cărui bisectoare este orizontală. Funcție de distanța focală a obiectivului f și de lungimea parcursului razei luminoase în lunetă se poate stabili distanța orizontală pînă la miră, a, cu o relație de forma $a = Cl$, unde C este constanta aparatului, în cele mai multe cazuri avînd valoarea 100. Unghiul ε rezultă din $\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} = \frac{l}{2} : a = \frac{1}{2C}$.

Dacă axa lunetei F face un unghi α cu orizontala, cînd reperul central al acesteia nu se suprapune peste imaginea reperului central al mirei L_m (fig. 11.3.17), atunci distanța orizontală a' se poate determina prin următoarele calcule:

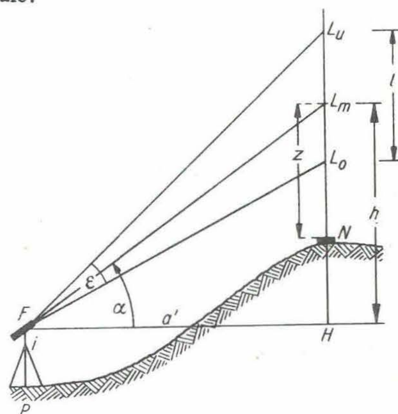
$$l = \overline{HL_u} - \overline{HL_o} = a'\left[\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right)\right];$$

$$a' = \frac{l}{\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right)}$$

sau deoarece $\sin\left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right)\cos\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right) -$

$$- \sin\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right)\cos\left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \sin\varepsilon,$$

$$a' = \frac{l\cos\left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right)\cos\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\varepsilon} =$$



11.3.17. Tahimetrie înclinată

$$= l\frac{\cos^2\alpha\cos^2\frac{\varepsilon}{2} - \sin^2\alpha\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}{2\sin\frac{\varepsilon}{2}\cos\frac{\varepsilon}{2}} = \frac{l\cos^2\alpha}{2\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}} - \frac{l}{2}\sin^2\alpha\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2},$$

sau

$$a' = lC\cos^2\alpha - \frac{l}{4C}\sin^2\alpha.$$

În această ultimă relație al doilea termen poate fi neglijat, deoarece l și $\sin^2\alpha$ sînt mult mai mici decît $C = 100$. Rezultă $a' = Cl\cos^2\alpha$ și $h = HL_m = a'\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}Cl\sin 2\alpha$. *Diferența de înălțime* dintre punctele P și N, Δh depinde de *înălțimea i la care se situează teodolitul*, față de punctul P și de lungimea segmentului $\overline{NL_m} = z$ de pe miră: $\Delta h = i + h - z$.

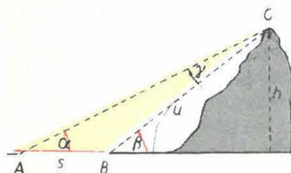
Distanța orizontală	$a' = Cl\cos^2\alpha$
Diferența de înălțime	$h = \frac{1}{2}Cl\sin 2\alpha$

Calculul înălțimilor cu ajutorul unghiurilor de elevație. În exemplele următoare se face abstracție de refracția terestră, deoarece fie reperele nu sînt mai depărtate de 200 m, fie precizia cerută de măsurătoare nu este prea mare.

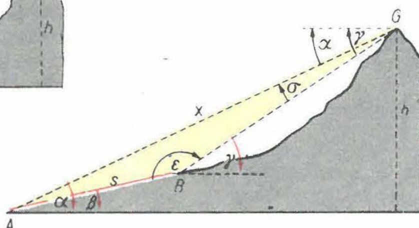
Linie de bază orizontală și unghi de elevație. Se măsoară în direcția reperului G o linie de bază orizontală, $AB = s$ și unghiurile de elevație, α și β în extremitățile acestei linii (fig. 11.3.18). Conform teoremei sinusurilor, rezultă înălțimea h:

1. $\gamma=\beta-\alpha$. 2. $u=s\dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$ și 3. $h = u\sin\beta$, deci $h = s\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$.

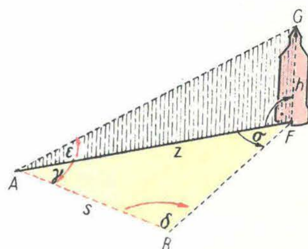
Linie de bază înclinată. Linia de bază $AB = s$ se găsește într-un plan vertical care trece prin G și face *cu orizontala un unghi* β (fig. 11.3.19). *Unghiurile de elevație* ale lui G sînt, α în A și γ în B. Diferența de înălțime dintre A și G se poate calcula conform teoremei sinusurilor. Dacă $AG = x$, rezultă $h = x\sin\alpha$, unde $x = s\dfrac{\sin\varepsilon}{\sin\sigma}$, $\varepsilon = \beta + (180° - \gamma)$ și $\sigma = \gamma - \alpha$. Înlocuind se obține $h = s\dfrac{\sin\varepsilon\sin\alpha}{\sin\sigma}$ sau $h = s\dfrac{\sin(\gamma-\beta)\sin\alpha}{\sin(\gamma-\alpha)}$.



11.3.18. Determinarea trigonometrică a înălțimilor cu linie de bază orizontală, cuprinsă în planul vertical



11.3.19. Determinarea trigonometrică a înălțimilor cu linie de bază înclinată, cuprinsă în planul vertical

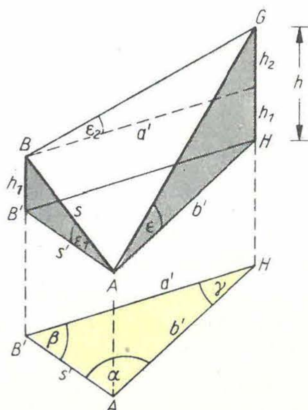


11.3.20. Determinarea trigonometrică a înălțimilor cu linie de bază orizontală

Linie de bază avînd o direcție oarecare față de reper. Din extremitățile A și B ale liniei de bază $AB = s$, care se găsește în același *plan orizontal* cu punctul de bază al reperului F, se măsoară unghiurile γ și δ; în plus din punctul A se măsoară și unghiul de elevație a punctului G, respectiv ε (fig. 11.3.20). Planul AFG este perpendicular pe planul orizontal FAB. Cu $AF = z$ se obține $h = z\operatorname{tg}\varepsilon$, unde $z = s\dfrac{\sin\delta}{\sin\sigma} = s\dfrac{\sin\delta}{\sin[180° - (\gamma+\delta)]} = s\dfrac{\sin\delta}{\sin(\gamma+\delta)}$.

Înlocuind se obține $h = s\dfrac{\sin\delta\operatorname{tg}\varepsilon}{\sin(\gamma+\delta)}$.

Dacă linia de bază $AB = s$ face un unghi ε_1 cu planul orizontal ce trece prin A (fig. 11.3.21), și în punctele A și B se măsoară unghiurile orizontale α și respectiv β dintre linia de bază și punctul G ca și unghiurile de elevație: ε_1 de la A către B; ε_2 de la B către G; ε de la A către G, atunci problema se reduce la una cunoscută. În triunghiul AHB' din planul orizontal ce trece prin A se cunosc: latura $s' = s\cos\varepsilon_1$ și unghiurile α și β. După teorema sinusurilor $a' = s'\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$; $b' = s'\dfrac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$;



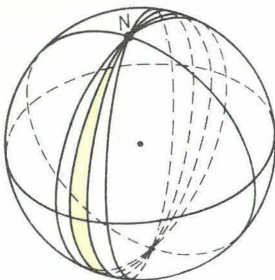
11.3.21. Determinarea trigonometrică a înălțimilor cu linie de bază înclinată

din triunghiul AHG, conținut în planul vertical se obține $h = b' \operatorname{tg} \varepsilon = s' \frac{\sin \beta \operatorname{tg} \varepsilon}{\sin (\alpha + \beta)} =$ $= s \frac{\cos \varepsilon_1 \sin \beta \operatorname{tg} \varepsilon}{\sin (\alpha + \beta)}$. Pentru verificare există relația $h = h_1 + h_2$, unde $h_1 = s \sin \varepsilon_1$ și $h_2 = a' \operatorname{tg} \varepsilon_2 = s' \frac{\sin \alpha \operatorname{tg} \varepsilon_2}{\sin (\alpha + \beta)} = s \frac{\cos \varepsilon_1 \sin \alpha \operatorname{tg} \varepsilon_2}{\sin (\alpha + \beta)}$.

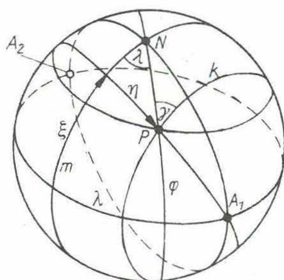
Aplicații în topografie

Ridicări topografice. Ridicările topografice au ca scop final poziționarea oricărui punct dorit de pe suprafața pămîntului; aceasta se realizează prin *coordonate* sau sub o formă grafică, prin *hărți*. Într-o primă aproximare, suprafața pămîntului se consideră sferică, iar poziționarea unui punct se face prin latitudinea φ și longitudinea λ, adică prin intersecția dintre un cerc principal, care trece prin cei doi poli (*meridian*) și un cerc ortogonal la acesta în punctul de intersecție (*paralelă*); meridianul care trece prin localitatea Greenwich (lîngă Londra) este considerat, prin convenție, ca *„meridian zero"*, celelalte meridiane măsurîndu-se către est, respectiv vest, prin distanța unghiulară λ pe care o fac cu acesta ($0<\lambda<180°$). Paralele sînt cercuri de pe sferă paralele cu ecuatorul, distanța unghiulară dintre ele φ fiind dată prin unghiul la centru măsurat pe un meridian; unghiul φ se măsoară în grade față de ecuator, atît către polul nord, cît și către polul sud ($0 < \varphi < 90°$). Acesta este un sistem de coordonate sferice (cap. 12).

Sistemul de proiecție Gauss-Krüger. O suprafață *cilindrică* sau o *suprafață conică*, după secționarea în lungul unei generatoare se pot desfășura într-o suprafață plană. Prin aceasta toate lungimile, suprafețele și unghiurile se conservă, apărînd în plan la dimensiunile lor reale. O suprafață sferică nu este desfășurabilă. Din acest motiv, Carl Friedrich GAUSS și primul director al Institutului Geodezic din Potsdam J. H. L. KRÜGER (1857—1923) au propus împărțirea suprafeței pămîntului în lenticule sferice, cuprinse între meridiane cu unghiuri la poli de cîte 6° și desfășurarea acestora după cilindri tangenți cu ele pe meridianul mediu (*meridianul care face unghiuri la pol de cîte 3°* cu meridianele ce delimitează lenticulele). În figură se prezintă aproximativ cît de mici sînt aceste porțiuni față de întreaga suprafață a pămîntului. Din acest motiv, într-o asemenea reprezentare lungimile și suprafețele se vor deosebi foarte puțin, față de valorile lor reale. Prin desfășurarea cilindrilor astfel obținuți vor rezulta imagini plane ale lenticulelor sferice. *Meridianul de tangență* dintre lenticul și cilindru, aparținînd ambelor suprafețe, va avea în reprezentarea desfășurată *dimensiunile sale reale*. Dacă un punct de pe pămînt se găsește pe acest meridian de tangență, la o distanță față de ecuator, măsurată prin unghiul ξ radiani, atunci în reprezentarea plană acest punct are coordonata $x = \xi R$, unde R este raza pămîntului. Cercuri principale, care intersectează ortogonal meridianul de tangență, de ex. în punctele A_1 și A_2 (fig. 11.3.23) conduc la reprezentări plane sub forma unor drepte perpendiculare pe axa x-ilor, adică reprezintă generatoare ale cilindrului.



11.3.22. Trei lenticule sferice învecinate



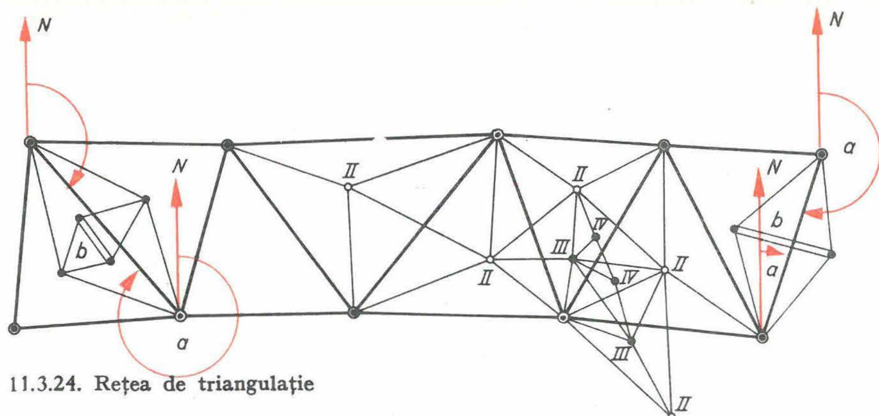
11.3.23. Coordonate Gauss-Krüger

Distanța față de meridianul de tangență m a unui punct P de pe sferă se măsoară pe acest cerc principal și ortogonal la acesta, prin unghiul η corespunzător; imaginea lui din reprezentarea plană, punctul P' are o distanță corespunzătoare y față de axa Ox. Relația dintre η și y rezultă din condiția ca sistemul de proiecție Gauss-Krüger să conserve unghiurile. Conservarea unghiurilor este asigurată atunci cînd triunghiurile de pe sferă rămîn în urma acestei transformări asemenea, adică atunci cînd *coeficientul de scară* este același pentru segmente luate în orice direcție.

Orientarea în direcția nordului. Figura explicativă pentru introducerea sistemului de coordonate Gauss-Krüger arată existența în punctul P a unui unghi γ între meridianul local și cercul k, paralel la meridianul m. Acest unghi se numește *unghi de convergență* și reprezintă devierea dintre nordul geografic și direcția nord a caroiajului hărții, pentru punctul P. *Nordul geografic* este direcția, către polul nord, în lungul meridianului care trece prin punctul P. *Direcția nord a caroiajului hărții* este direcția unei drepte care trece prin punctul P' — imaginea punctului P în reprezentarea Gauss-Krüger — și este paralelă cu axa x-ilor; pe sferă acesteia îi corespunde direcția unei tangente în punctul P, la cercul mic k. Corespunzător se poate preciza direcția unui segment prin unul din punctele sale. Unghiul a dintre nordul geografic pînă la acest segment luat în sensul acelor ceasornicului se numește *azimut*. Unghiul față de direcția nord a caroiajului în același sens de referință se numește *unghi director* ν și este dat adesea prin două puncte ale segmentului P_1 și P_2 : $\nu = (P_1P_2)$ și $(P_1P_2) = (P_2P_1) \pm 180°$. În completare trebuie arătat că uneori se folosește o a treia orientare către nord, *nordul magnetic* care datorită *declinației magnetice* este diferită de „nordul geografic". Față de nordul magnetic se stabilește *unghiul de declinație* al unei direcții oarecare.

Latitudine și longitudine. Într-un sistem de coordonate Gauss-Krüger, valorile lui x se măsoară pe meridianul de tangență de la ecuator către nord, respectiv către sud; coordonata x se numește *latitudine* și reprezintă *distanța reală față de ecuator*. Coordonata y se numește *longitudine*. Valorile pozitive ale coordonatei y desemnează puncte de pe hartă situate la est de meridianul de tangență m. Pentru a evita apariția unor coordonate y negative, se atribuie meridianului de tangență (sau meridianului mijlociu) coordonata $y =$ $= 500\,000$ m, în loc de $y = 0$ m; totodată, la această valoare se mai asociază *un număr caracteristic* (pus în fața acestei valori) prin care se precizează *lenticulul sferic* (bandă meridiană) la care se referă harta. Aceste numere caracteristice sînt 1 pentru meridianul de tangență de 3° (1 500 000 m), 2 — pentru cel de 9°, ..., $[(\lambda_m + 3) : 6)]$. Prin urmare, un punct situat la 65 370 m est față de meridianul 3° are coordonata y egală cu 1 500 000 m + 65 370 m = = 1 565 370 m. Pentru un punct situat la 74 250 m vest față de meridianul de 9°, coordonata y este 2 500 000 — 74 250 = 2 425 750 m. Invers, dacă un punct are coordonatele $x = 5\,755\,789$ m și $y = 4\,374\,981$ m, atunci $\lambda_m = 4 \cdot 6 - 3 = 21$, deci pentru poziționarea punctului se va merge, mai întîi. pe meridianul 21°, către nord 5 755 899 m și apoi, făcînd un unghi drept, către vest pe o distanță de 500 000 — 374 981 = 125 019 m. Pe *hărțile topografice* coordonatele se dau numai în valori întregi de kilometri, cu primele două cifre scrise ca și un exponent; astfel, pentru ultimul exemplu de mai sus scrierea este $^{43}74$ și $^{57}55$. Deoarece abaterile de lungime sînt maxime în jurul meridianelor, coordonatele punctelor importante se calculează suplimentar la fiecare zonă marginală lată de 0,5° din vest și est a fîșiei de meridian și anume în așa fel ca pentru punctele unei benzi late de 1°, la latitudinea de 52° cu o lățime de aproximativ 70 km, să avem cîte două coordonate atît pentru banda meridianului vestic, cît și pentru banda meridianului estic. Pe hărțile topografice 1: 5 000 și pentru lucrări de geodezie se mai folosesc și lenticule sferice de cîte 3°, în locul celor de 6°. Pentru acestea sînt valabile aceleași considerații și notații, diferind doar cifrele caracteristice; acestea sînt acum 1, 2, 3, ..., $(\lambda_m: 3)$, corespunzător meridianelor de tangență de 3°, 6°, 9° , ...

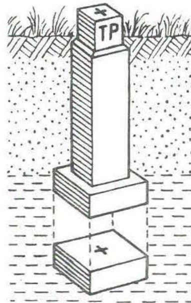
Triangulație. Coordonatele geografice și azimutul se precizează și se calculează numai pentru relativ puține puncte, utilizînd sistemul de coordonate Gauss-Krüger. Alte puncte importante, *punctele trigonometrice* (PT) se raportează la acestea, utilizînd o rețea de triunghiuri de *speță I* în care, pe cît posibil, se pot măsura toate unghiurile. În reprezentarea schematică din figura 11.3.24 există patru puncte, marcate prin direcția nord (N), pentru care se precizează coordonatele geografice și azimuturile a, ale segmentelor care unesc cîte două asemenea puncte. Lungimile acestor segmente se vor calcula printr-o *rețea de bază*; fiecare din aceste segmente se asociază la o bază b, de lungime egală cu 4 ... 10 km în cîmpie și care va fi măsurată cu cea mai mare precizie, utilizînd o *sîrmă de invar*, de 24 m lungime, întinsă prin aplicarea unei forțe de 10 N; se obțin astfel erori medii de 8 mm, la o distanță de 10 km, deci *o pre-*



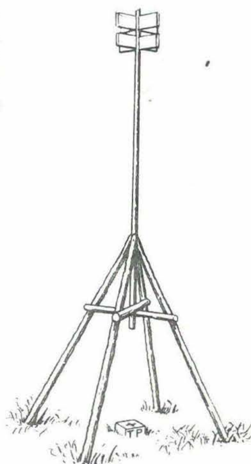
11.3.24. Rețea de triangulație

cizie de 1 : 1 250 000. Laturile rețelei de triunghiuri de spețа I au o lungime medie de 40 ... 70 km; în figură ele sînt reprezentate cu linie groasă. Între punctele trigonometrice de rangul I, precizate prin sistemul de coordonate Gauss-Krüger se implementează, prin intermediul unor măsurători simple de unghiuri, *rețeaua de ordinul al II-lea*; punctele sale sînt marcate prin numerele II. Laturile acestei rețele au lungimea medie de 20 km; cele ale *rețelei a III-a* au lungimi de 5 ... 10 km, iar cele ale *rețelei a IV-a* de 2 ... 5 km. Aceste puncte trigonometrice pot fi vîrfurile unor turnuri; în cîmpie deschisă punctele trigonometrice se realizează sub forma unor construcții din piatră, fixate prin îngroparea parțială în pămînt (fig. 11.3.25). Pentru a le putea repera de la distanțe mari, deasupra lor se construiește un reper topometric ca cel din fig. 11.3.26.

Rețelele de triangulație, ale căror triunghiuri sînt ordonate astfel încît să acopere integral o fîșie de teren se numesc lanț de triunghiuri. Un asemenea lanț de triunghiuri în lungul unui meridian—o măsurătoare de meridian — se utilizează pentru stabilirea formei Pămîntului. Prin dezvoltarea radarului și a altor metode, utilizînd propagarea undelor electromagnetice în măsurarea distanțelor cu precizie mai mare, a devenit posibil ca în locul triangulației să se folosească *trilaterația*. Aceasta din urmă se bazează pe măsurarea laturilor triunghiurilor, mult mai ușor de realizat — cu mijloace noi — decît măsurarea unghiurilor. Chiar și distanțele pînă la alte planete, pe care astronomii le măsurau pînă acum, prin măsurări de unghiuri efectuate din două locuri diferite de pe Pămînt, se măsoară astăzi direct, prin intermediul timpului de propagare al semnalului radar.



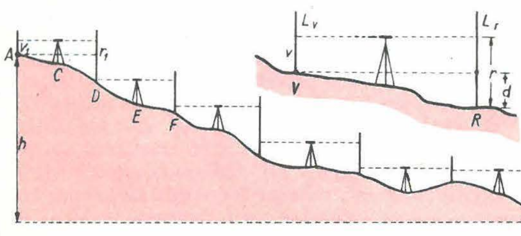
11.3.25. Punct topometric (PT)



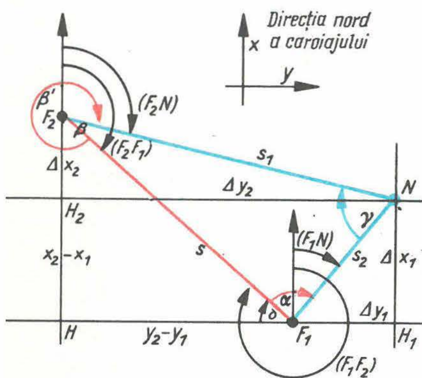
11.3.26. Reper topometric

Rețeaua de înălțimi. Două raze ce pleacă din centrul mai multor sfere concentrice intersectează suprafața fiecăreia dintre sfere în două puncte; segmentele de dreaptă dintre punctele de intersecție de pe o sferă sînt cu atît mai mari, cu cît raza sferei respective este mai mare. Datorită acestui adevăr geometric rezultă că distanța dintre două fire cu plumb, atîrnînd fiecare în cîte un puț adînc diferă, funcție de adîncimea la care se face măsurarea. Ca urmare toate măsurările de teren care se fac trebuie să fie recalculate *pentru o aceeași înălțime* (altitudine) și anume *nivelul mării*. Trebuie deci măsurată altitudinea față de un nivel zero de referință — pentru fiecare punct de reper. Prin aceasta se stabilește o rețea de *repere de înălțime* numită

rețeaua de înălțimi. Ca nivel zero, de referință servește nivelul mării măsurat la Amsterdam; raportat la acesta, în anul 1879 pe pilonul nordic al observatorului astronomic din Berlin a fost plasată o „marcă" cu altitudinea de 37,000 m, iar în anul 1912 a fost îngropată o marcă de aceeași altitudine pe șoseaua Berlin-Manschnow. Toate înălțimile raportate la aceste puncte de referință se numesc înălțimi peste „zeroul" de referință și se notează prin NN (*Normalnul*). Pentru a avea un sistem unitar de stabilire a înălțimilor în cadrul întregului sistem socialist, în anul 1958 s-a instituit un sistem de *înălțimi normalizat HN* (Normalhohen) avînd ca referință *nivelul mării la Kronstadt*. Între cele două sisteme, există relația de echivalență NN + 14 cm = HN. Măsurarea diferențelor de altitudine se realizează cu ajutorul *nivelmetrelor*. Axa lor optică trebuie să fie perfect paralelă cu *axa unei nivele cu* bulă de aer foarte sensibilă, deci să fie perfect orizontală. Îndreptînd axa nivelmetrului, mai întîi înapoi, către o miră verticală L_r situată în punctul R și apoi înainte, către mira verticală L_v, situată în punctul V (fig. 11.3.27), rezultă o diferență de înălțime între punctele V și R, $d = r - v$. Centimetrii se citesc pe miră iar milimetrii sînt fie estimați, fie măsurați ca abateri pe o placă paralelă. În partea de jos a desenului se prezintă un șir de măsurări de nivel. Pentru fiecare punct intermediar, de exemplu D, se fac măsurări întîi îndreptînd axa înainte și pe urmă înapoi prin mutarea nivelmetrului din C în E. Prin însumarea algebrică a diferențelor d obținem diferența de înălțime dintre A și B. Un astfel de șir se numește ***nivelment*** sau ***nivelment dublu*** dacă măsurările sînt repetate. Cu un bun nivelmetru eroarea medie pentru un nivelment dublu este de $\pm 0,4$ mm la distanța de un kilometru.



11.3.27. Nivelment geometric



11.3.28. Intersecție înainte

Stabilirea poziției unor puncte oarecare. Punctele cu coordonate cunoscute, de exemplu punctele trigonometrice, se numesc puncte fixe iar celelalte, a căror poziție vrem să o determinăm, se numesc puncte oarecare.

Poziția unui punct oarecare se stabilește prin raportare la *două puncte fixe* F_1 și F_2 a căror poziție este cunoscută, ca și distanța s dintre ele (fig. 11.3.28); dacă teodolitul poate fi instalat numai în punctele fixe, atunci se realizează o *intersecție înainte*. Dacă numai unul dintre aceste puncte este accesibil și în schimb este posibilă o măsurătoare de unghi în punctul a cărui poziție se determină, atunci metoda se numește *intersecție laterală*. Firește cel mai adesea se încearcă să se măsoare toate cele trei unghiuri ale triunghiului F_1F_2N, astfel ca prin suma unghiurilor să se probeze precizia măsurătorii. Din punct de vedere geometric, în triunghiul F_1F_2N se cunosc întotdeauna o latură și trei unghiuri și conform teoremei sinusurilor se pot calcula laturile s_1 și s_2:

$$s_1 = s\,\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}, \qquad s_2 = s\,\frac{\sin(360° - \beta')}{\sin\gamma}.$$

Din punct de vedere geodezic, punctele fixe F_1 și F_2 sînt precizate prin coordonatele lor, latitudinea x_1, x_2, respectiv longitudinea y_1, y_2. În triunghiul dreptunghic HF_1F_2 (fig. 11.3.28), făcînd diferența coordonatelor $y_2 - y_1$ și $x_2 - x_1$ se poate calcula unghiul direcției (F_1F_2) și lungimea segmentului $\overline{F_1F_2}$. În plus, unghiul direcției F_1F_2 se va măsura, în sensul acelor de ceasornic, începînd de la direcția nord a caroiajului. Lungimile laturilor s_1 și s_2, calcu-

late cu teorema sinusurilor, servesc la determinarea, din triunghiurile dreptunghice F_2NH_2 și F_1H_1N, a diferențelor de coordonate Δy_1, Δx_1, Δx_2, Δy_2 care adunate la coordonatele punctului F_1 sau la cele ale lui F_2 determină coordonatele punctului N. Pentru verificare, calculul coordonatelor noului punct N se face de două ori.

Exemplu. Fie date $x_1 = 2\,524\,950{,}98$, $y_1 = 5\,711\,619{,}35$ și $x_2 = 2\,525\,616{,}57$, $y_2 = 5\,710\,664{,}92$ și unghiurile $\alpha = 61°13'33''$ și $\beta = 328°32'15''$ sub care se vede punctul N, de coordonate necunoscute, din extremitățile segmentului s.

1. *Unghiul* $\gamma = 180° - \alpha - (360° - \beta')$.

$\beta = 360° - \beta' = 31°27'45''$,
$\gamma = 87°18'42''$.

2. *Unghiul direcției* (F_1F_2):

$$\operatorname{tg}(F_1F_2) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

$$\overline{F_1F_2} = \frac{x_2 - x_1}{\cos(F_1F_2)} = \frac{y_2 - y_1}{\sin(F_1F_2)}.$$

$$y_2 - y_1 = -954{,}43$$
$$x_2 - x_1 = +665{,}59$$
$$(F_1F_2) = 304°53'24''$$
$$\delta = 34°53'24''$$
$$\operatorname{tg}(F_1F_2) = -\operatorname{cotg}\delta$$
$$\cos(F_1F_2) = \sin\delta,$$
$$\sin(F_1F_2) = -\cos\delta,$$
$$\overline{F_1F_2} = 1163{,}6$$

3. *Lungimea laturilor* s_1 *și* s_2:

$$s_1 = \overline{F_1F_2}\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \overline{F_2N}, \qquad s_1 = 1\,021{,}0 = \overline{F_2N},$$

$$s_2 = \overline{F_1F_2}\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \overline{F_1N}. \qquad s_2 = 608{,}0 = \overline{F_1N}$$

4. *Determinarea coordonatelor cu punctul* F_1 ca bază:

$$(F_1N) = (F_1F_2) + \alpha,$$
$$x_N - x_1 = \overline{F_1N}\cos(F_1N) = \Delta x_1,$$
$$y_N - y_1 = \overline{F_1N}\sin(F_1N) = \Delta y_1,$$

$$(F_1N) = 366°06'57'' = 6°06'57''$$
$$\Delta x_1 = +604{,}53, \quad \Delta y_1 = +64{,}78$$
$$x_N = {}^{25}25\,555{,}51,$$
$$y_N = {}^{57}11\,684{,}13$$

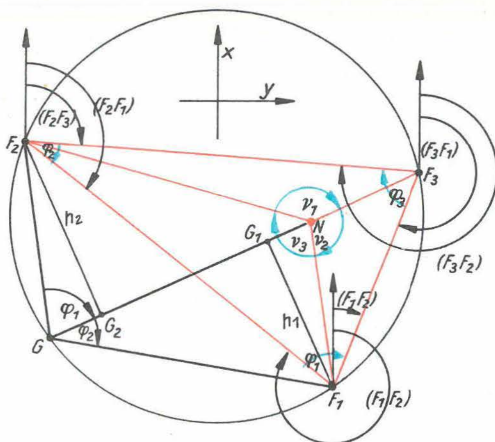
5. *Determinarea coordonatelor cu punctul* F_2 *ca bază*:

$$(F_2N) = (F_2F_1) + \beta';$$
$$x_N - x_2 = \overline{F_2N}\cos(F_2N) = \Delta x_2,$$
$$y_N - y_2 = \overline{F_2N}\sin(F_2N) = \Delta y_2.$$

$$(F_2F_1) = 124°53'24'',$$
$$(F_2N) = 453°25'39'', \quad (F_2N) = 93°25'39'',$$
$$\Delta x_2 = -61{,}04,$$
$$\Delta y_2 = +1019{,}21,$$
$$x_N = {}^{25}25\,555{,}53,$$
$$y_N = {}^{57}11684{,}13.$$

Intersecție înapoi. Dacă sînt date trei puncte fixe, F_1, F_2, F_3 și este posibilă o observare numai din noul punct, N (vezi fig. 11.3.29), atunci se spune că se face o intersecție înapoi. Punctul N trebuie astfel ales încît *să nu se găsească pe cercul circumscris triunghiului* $F_1F_2F_3$. Rezultatele cele mai exacte se obțin cînd punctul N este situat în interiorul triunghiului $F_1F_2F_3$. Unghiurile care trebuie calculate sînt φ_1 în F_1, φ_2 în F_2 și φ_3 în F_3, iar unghiurile măsurate în N sînt $\sphericalangle F_2NF_3 = \nu_1$, $\sphericalangle F_3NF_1 = \nu_2$ și $\sphericalangle F_1NF_2 = \nu_3$. O soluție realizabilă cu calculatorul se obține plecînd de la coordonatele centrului de greutate S al triunghiului dat:

$$x = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \; s_y = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$



11.3.29. Intersecție înapoi

În plus, vîrfurile au *ponderi egale fată de liniile mediane*. Dacă însă vîrfurilor li se atribuie ponderi diferite g_1, g_2, g_3, rezultă alte secante ale unghiurilor triunghiului, care pot să se găsească chiar și în afara acestuia, în cazul în care unele ponderi au valori negative. Punctul N de intersecție al acestor secante are atunci coordonatele

$$x = \frac{g_1x_1 + g_2x_2 + g_3x_3}{g_1 + g_2 + g_3}, \quad y = \frac{g_1y_1 + g_2y_2 + g_3y_3}{g_1 + g_2 + g_3}.$$

Ponderile se pot obține din considerentul de natură mecanică, anume că în raport cu o secantă a unui unghi al triunghiului, celelalte două vîrfuri să aibă momente egale. Fie G punctul de intersecție al acestei secante cu cercul circumscris triunghiului și G_1, respectiv G_2, picioarele perpendicularelor h_1 și h_2 coborîte din F_1 și F_2 pe această secantă. Momentele vîrfurilor F_1, respectiv F_2 sînt egale între ele: $g_1h_1 = g_2h_2$ sau $g_1 : g_2 = h_2 : h_1 = \frac{h_2}{\overline{GN}} : \frac{h_1}{\overline{GN}}$, unde

$$\frac{h_2}{\overline{GN}} = \frac{h_2}{\overline{GG_2} + \overline{G_2N}} = \frac{1}{\dfrac{\overline{GG_2}}{h_2} + \dfrac{\overline{G_2N}}{h_2}} = \frac{1}{\operatorname{cotg} \varphi_1 - \operatorname{cotg} \nu_1},$$

$$\frac{h_1}{\overline{GN}} = \frac{h_1}{\overline{GG_1} + \overline{G_1N}} = \frac{1}{\dfrac{\overline{GG_1}}{h_1} + \dfrac{\overline{G_1N}}{h_1}} = \frac{1}{\operatorname{cotg} \varphi_2 - \operatorname{cotg} \nu_2}.$$

Prin permutări ciclice se obține:

$$g_1 : g_2 : g_3 = \frac{1}{\operatorname{cotg} \varphi_1 - \operatorname{cotg} \nu_1} : \frac{1}{\operatorname{cotg} \varphi_2 - \operatorname{cotg} \nu_2} : \frac{1}{\operatorname{cotg} \varphi_3 - \operatorname{cotg} \nu_3}.$$

Deoarece un coeficient de proporționalitate arbitrar nu are influență asupra coordonatelor punctului N, acestuia i se poate atribui valoarea 1. Ponderile sînt deci:

$$g_1 = \frac{1}{\operatorname{cotg} \varphi_1 - \operatorname{cotg} \nu_1}, \; g_2 = \frac{1}{\operatorname{cotg} \varphi_2 - \operatorname{cotg} \nu_2}, \; g_3 = \frac{1}{\operatorname{cotg} \varphi_3 - \operatorname{cotg} \nu_3}.$$

Plecînd de la coordonatele punctelor fixe F_1, F_2, F_3, se obține (a se compara cu intersecția înainte):

$$x_1 = 2\,524\,950{,}98,\quad x_2 = 2\,525\,616{,}57,\quad x_3 = 2\,525\,555{,}51,$$
$$y_1 = 5\,711\,619{,}35,\quad y_2 = 5\,710\,664{,}92,\quad y_3 = 5\,711\,684{,}14,$$
$$(F_1F_2) = 304°53'24'',\quad (F_2F_3) + \varphi_2 = (F_2F_1),\quad (F_2F_3) = 93°25'39'',$$
$$(F_3F_1) + \varphi_3 = (F_3F_2),\quad (F_3F_1) = 186°06'57'',\quad (F_1F_2) + \varphi_1 = (F_1F_3),$$

Valorile numerice ale ponderilor sînt $g_1 = 1{,}10806$, $g_2 = 0{,}7767$, $g_3 = 0{,}74946$ și coordonatele punctului nou $x = 2\,525\,249{,}55$, $y = 5\,711\,518{,}37$.

Intersecția înapoi are o deosebită importanță pentru stabilirea poziției vapoarelor și avioanelor.

calculat	cotangenta	măsurat	cotangenta
$\varphi_2 = 31°27'45''$	1,63425	$\nu_2 = 153°12'22''$	− 1,98019
$\varphi_3 = 87°18'42''$	0,0469547	$\nu_3 = 97°20'08''$	− 0,128734
$\varphi_1 = 61°13'33''$	0,549176	$\nu_1 = 109°27'30''$	− 0,353300
180°00'00''		360°00'00''	

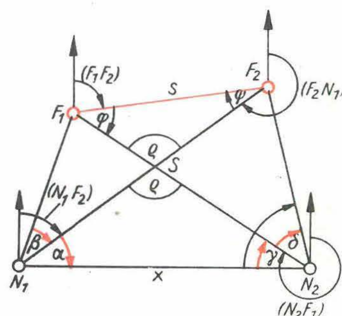
Problema hanseatică. Intersecția înapoi are o importanță deosebită la determinarea pozițiilor a două puncte fixe dar inaccesibile F_1 și F_2, de exemplu vîrfurile a două turnuri; se pot stabili coordonatele a două noi puncte N_1 și N_2 dacă din fiecare dintre acestea se pot vedea ambele puncte fixe și celălalt punct nou (fig. 11.3.30). Corespunzător notațiilor din figură, soluția rezultă din teorema sinusurilor dacă se reușește să se calculeze unghiurile φ și ψ. Deoarece unghiul ρ are aceeași valoare în triunghiurile N_1N_2S și F_1F_2S, există relația

$$\frac{1}{2}(\varphi + \psi) = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma) = \varepsilon_1.$$

Semidiferența unghiurilor căutate se găsește utilizînd *unghiul auxiliar* η în modul următor:

$$\Delta F_1F_2N_1:\ \overline{N_1F_1} = s\,\frac{\sin\psi}{\sin\beta};$$

$$\Delta F_1N_2N_1:\ \overline{N_1N_2} = \overline{N_1F_1}\,\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\gamma} =$$



11.3.30. Problema hanseatică

$$= s\,\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\psi}{\sin\beta\sin\gamma};\quad \Delta F_1F_2N_2:\ \overline{N_2F_2} = s\,\frac{\sin\varphi}{\sin\delta};$$

$$\Delta F_2N_2N_1:\ \overline{N_1N_2} = \overline{N_2F_2}\,\frac{\sin(\alpha+\gamma+\delta)}{\sin\alpha} = s\,\frac{\sin(\alpha+\gamma+\delta)\sin\varphi}{\sin\alpha\sin\delta}$$

deoarece $\overline{N_1N_2} = \overline{N_1N_2}$, deci $\dfrac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \dfrac{\sin\alpha\sin\delta\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma\sin(\alpha+\gamma+\delta)} = \operatorname{cotg}\eta.$

Unghiul ajutător η devine cunoscut prin aceasta, pînă la un multiplu al unghiului de 180°. Conform relațiilor operațiilor corespunzătoare de adunare și scădere ca și relațiilor goniometrice, cu observația că $\operatorname{cotg} 45° = 1$, se obține

$$\frac{\sin\varphi - \sin\psi}{\sin\varphi + \sin\psi} = \frac{\operatorname{cotg}\eta - 1}{\operatorname{cotg}\eta + 1},\qquad \frac{2\cos\frac{1}{2}(\varphi+\psi)\sin\frac{1}{2}(\varphi-\psi)}{2\sin\frac{1}{2}(\varphi+\psi)\cos\frac{1}{2}(\varphi+\psi)} = \frac{\operatorname{cotg}45°\operatorname{cotg}\eta - 1}{\operatorname{cotg}\eta + \operatorname{cotg}45°},$$

$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi-\psi) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi+\psi)\operatorname{cotg}(45° + \eta)$, ceea ce înseamnă că $\frac{1}{2}(\varphi - \psi) = \varepsilon_2$ și cu

aceasta $\varphi = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $\psi = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$. Distanţele $\overline{F_1N_1}$, $\overline{N_1N_2}$ şi $\overline{N_2F_2}$ se pot acum calcula. Pentru unghiurile direcţiilor se găseşte

$$(F_1N_2) = (F_1F_2) + \varphi,$$

$$(N_2F_1) = (F_1N_2) + 180°,$$

$$(N_2F_2) = (N_2F_1) + \delta,$$

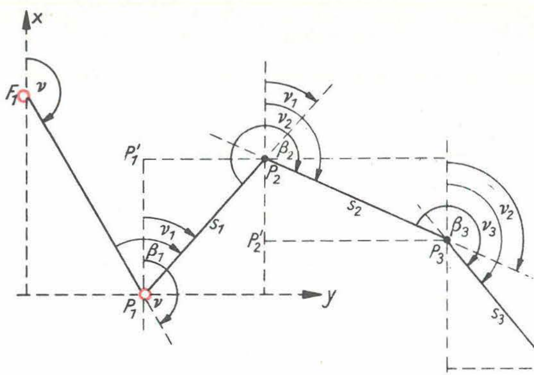
$$(N_2N_1) = (N_2F_1) - \gamma.$$

$$(F_2N_1) = (F_2F_1) - \psi,$$

$$(N_2F_1) = (F_2N_1) + 180°,$$

$$(N_1F_1) = (N_1F_2) - \beta,$$

$$(N_1N_2) = (N_1F_2) + \alpha,$$



11.3.31. Arc poligonal

Cunoscînd unghiurile de direcţie şi distanţele, rezultă diferenţele de coordonate (a se compara cu intersecţia înainte) şi cu şirul de coordonate ale punctelor $F_1 \to N_1 \to N_2 \to F_2$ care trebuie să regăsească pentru F_2 valorile deja cunoscute ale coordonatelor sale.

Drumuiri. Prin raportare la puncte trigonometrice precizate, se pot calcula prin măsurători de distanţe şi de unghiuri, coordonatele altor puncte. Dacă plecînd din punctul cunoscut P_1 sînt precizate *vîrfurile drumuirii* $P_2, P_3, \ldots, P_n$ şi *distanţele* $s_1 = \overline{P_1P_2}$, $s_2 = \overline{P_2P_3}$ ş.a.m.d. măsurate cu ruleta, se pot măsura în fiecare punct *unghiurile de refracţie* $\beta_1, \beta_2, \ldots$ (fig. 11.3.31), adică diferenţa dintre direcţiile precedentă şi următoare. Pentru prima măsurătoare în punctul P_1 se utilizează drept direcţie precedentă, cea către un alt punct fix F_1. Prin măsurarea unghiului de refracţie în punctul P_1 drumuirea va fi terminată pe o direcţie deja cunoscută *(măsurătoare de închidere)*. Precizia măsurătorii de drumuire se poate mări substanţial atunci cînd coordonatele ultimului punct P_n sînt cunoscute şi cînd de la el poate fi văzut un alt punct fix F_2. Drumuirea leagă astfel ambele direcţii date (F_1P_1) şi (P_nF_2); ultima măsurătoare făcută în NP_n se mai numeşte şi *îmbinare.* Calcularea *unghiului direcţiei* se desfăşoară prin adunarea unghiurilor de refracţie:

$$(P_1F_1) = (F_1P_1) \pm 180° \qquad (P_1P_2) = (P_1F_1) + \beta_1,$$

$$(P_2P_1) = (P_1P_2) \pm 180° \qquad (P_2P_3) = (P_2P_1) + \beta_2 \text{ ş.a.m.d.}$$

Diferenţa de coordonate Δx_i şi Δy_i ale punctului P_i faţă de punctul P_{i+1} rezultă prin transformarea coordonatelor polare (P_iP_{i+1}), s_i în coordonate carteziene, de exemplu

$$\Delta x_1 = x_2 - x_1 = \overline{P_1P_1'} = s_1 \cos (P_1P_2)$$

şi

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = \overline{P_1'P_2} = s_1 \sin (P_1P_2). \quad \text{ş.a.m.d.}$$

Semnele *diferenţelor dintre coordonate* depind de mărimea unghiului de direcţie; în figură acestea sînt desemnate prin $\nu_i = (P_iP_{i+1})$; $\nu_1 = (P_1P_2)$ este situat în cadranul I, $\nu_2 = (P_2P_3)$ şi $\nu_3 = (P_3P_4)$ în cadranul II, deci Δx_1 este pozitiv, Δx_2 şi Δx_3 sînt, din contră, negativi.

12. Trigonometrie sferică

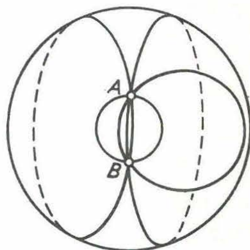
După cum arată denumirea, *trigonometria sferică* are ca obiect studiul triunghiurilor de pe sferă. Aceasta s-a dezvoltat din necesitățile navigației și astronomiei în special în scopul determinării poziției punctelor și distanțelor pe sfera cerească sau pe globul pămîntesc. Chiar coordonatele Gauss-Krüger care stau la baza măsurătorilor geodezice sînt inspirate din măsurători astronomice.

12.1. Cercuri mari, cercuri mici și fusuri sferice

Axa unui glob la fel ca și orice altă dreaptă ce trece prin centrul globului, sau al unei mingi sferice, taie suprafața acestuia după un diametru egal cu dublul unei raze. Un plan perpendicular pe un diametru taie suprafața globului numai atunci cînd distanța lui la centrul M este mai mică decît raza R. Dacă această distanță este egală cu raza R, atunci planul atinge sfera și se numește *plan tangent*. Intersecția unui plan cu o sferă este un cerc al cărui centru F este piciorul perpendicularei coborîte din centrul sferei M pe plan (cînd planul trece prin M, centrul cercului de intersecție este chiar M).

Distanța fiecărui punct de intersecție S la centrul M este raza sferei R, distanța r de la un astfel de punct la proiecția F este $r = \sqrt{R^2 - l^2}$ $(l = MF)$, deci constantă.

Prin două puncte A și B care se găsesc pe o sferă și nu sînt diametral opuse se poate duce un *fascicul de plane* (fig. 12.1.1), care taie sfera după un fascicul de cercuri. Printre acestea există un cel mai mic cerc, cel care are pe AB drept diametru și cel mai mare cerc al cărui centru coincide cu centrul sferei. Acesta din urmă a cărui rază coincide cu raza sferei se numește *cerc mare* al sferei; toate celelalte sînt *cercuri mici*. Dacă se rotesc toate planele fasciculului împreună cu cercurile de intersecție, astfel încît să ajungă în planul cercului mare, se obține în acest plan un fascicul de cercuri prin punctele A și B. Cel mai mic arc între A și B pe fiecare din aceste cercuri este evident cu atît mai mic cu cît raza r este mai mare. Acest arc este minim pentru cercul mare cînd $r = R$. Cu mijloacele geometriei diferențiale se poate arăta că arcul AB al unui cerc mare este cel mai scurt drum între A și B nu numai pe toate cercurile ci chiar printre toate legăturile pe sferă. Acest arc este o porțiune dintr-o linie geodezică.



12.1.1. Cerc dus prin punctele A și B ale unei sfere

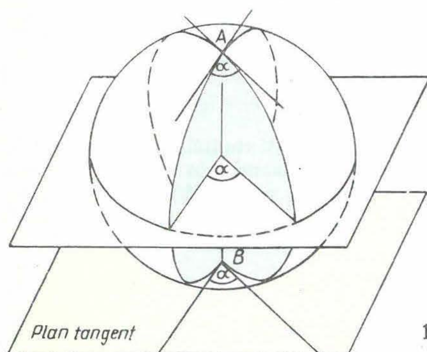
Cerc mare. Toate distanțele dintre punctele aflate pe sferă se măsoară pe arce de cercuri mari. Pe sfere cu rază mare, aceste distanțe sînt destul de bine aproximate prin distanța pe o linie dreaptă ce trece prin cele două puncte. Lungimea arcului de cerc AB între punctele A și B depinde, după teoremele geometriei plane, de mărimea razei R și de unghiul la centru corespunzător, care poate fi măsurat în grade sau în radiani și care se notează de regulă cu litere mici din alfabetul latin, de exemplu $\widehat{a}$ sau $a°$.

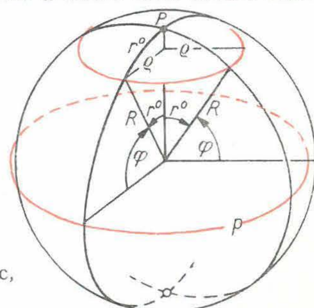
Două cercuri mari se intersectează în două puncte A și B care sînt extremități ale unui diametru. Astfel de puncte în care sfera este tăiată de o dreaptă ce trece prin centrul ei se numesc

Arc de cerc mare	$\widehat{AB} = R\widehat{a} = \frac{\pi R}{180°} \cdot a°$

diametral opuse sau *poli*. Cercul mare al cărui plan este perpendicular pe linia polilor se numește *cerc polar*. Dacă se stabilește un sens de parcurgere a cercului polar, atunci se pot deosebi un pol drept și unul stîng.

Orice plan perpendicular pe diametrul AB taie (fig. 12.1.2) planele a două cercuri mari prin A și B după cîte o dreaptă care reprezintă respectiv cîte o latură a unghiului α format de cele două plane. Tangentele într-un pol la ambele cercuri mari sînt perpendiculare pe diametrul AB și deci formează același unghi α. Unghiul acesta este *unghiul α dintre două cercuri mari.*





12.1.3. Cerc sferic, cerc paralel

12.1.2. Unghiul α dintre două cercuri mari

Cercul sferic. Toate punctele unei sfere care au aceeași distanță, măsurată pe sferă, la un punct P al sferei se găsesc pe un cerc care se numește *cerc sferic*. Distanța constantă se numește *rază sferică* și punctul P *centru sferic*. De exemplu toate paralele de latitudine φ sînt cercuri sferice. Ele au raza sferică $90° - \varphi$ și polul este centrul lor sferic. Cel mai mare cerc sferic este cercul polar p, pentru care polul este centrul sferic; raza sa sferică este $\frac{\pi}{2}$ sau $90°$. Celelalte cercuri sferice sînt cercuri mici care se obțin prin intersecția sferei cu plane paralele cu planul cercului polar. Dacă raza sferică este $r°$ și raza sferei R, atunci cercul sferic (fig. 12.1.3) are în planul de secțiune raza $\rho = R\cos(90°-r°)$ și deci lungimea $2\pi\rho = 2\pi R\cos(90°-r°)$; o paralelă are deci lungimea $2\pi\rho = 2\pi R\cos\varphi$.

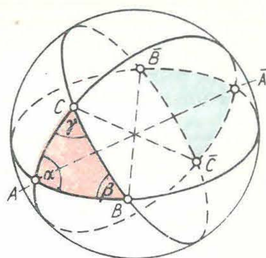
Fusuri sferice. Două cercuri mari au în comun o pereche de puncte diametral opuse și împart suprafața sferei în patru biunghiuri sau fusuri sferice. Fiecare dintre acestea are două laturi egale de mărime $s = 180°$, respectiv π. Aria acestor fusuri este determinată de unghiul α dintre cercurile mari. Proiecția Gauss-Krüger folosește fusuri sferice ale căror unghiuri sînt de 6°. Pentru un unghi de 90°, respectiv $\frac{\pi}{2}$, aria A_0 a fusului sferic este un sfert din aria sferei, adică πR^2; pentru un unghi de $\alpha°$, respectiv $\widehat{\alpha}$ se obține cu ajutorul regulii de trei simplă $A = \pi R^2\alpha°/90°$, respectiv $A = 2R^2\widehat{\alpha}$. O bandă meridiană Gauss-Krüger va avea aria $A = \pi R^2 6°/90° = \pi R^2/15 = 8\,501\,665$ km² (cînd se consideră $R = 6\,371{,}221$ km).

Aria fusului sferic	$A = 2R^2\alpha = \pi R^2 \cdot \frac{\alpha°}{90°}$

12.2. Triunghiul sferic

Fiind date trei puncte A, B și C pe o sferă astfel încît să nu fie două cîte două diametral opuse și nici toate trei pe același cerc mare, există trei cercuri mari care unesc cîte două din aceste puncte și se intersectează și în punctele diametral opuse $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$. Suprafața sferei se împarte astfel în opt părți, fiecare mărginită de trei arce de cerc mare fiecare mai mic decît π (fig. 12.2.1). Aceste porțiuni de sferă se numesc triunghiuri sferice, mai precis, *triunghiuri euleriene*, spre a le deosebi de triunghiuri în care pot să existe laturi mai mari decît π; de exemplu, pe

figură triunghiurile cu laturile AB, BC și $C\bar{A}\bar{C}A$. Acest triunghi neeulerian se deosebește de triunghiul eulerian ABC numai prin emisfera mărginită de cercul mare $C\bar{A}\bar{C}A$. De aceea se vor considera aici numai triunghiuri euleriene. Unghiurile acestui triunghi α, β, γ sînt unghiurile formate de planele cercurilor mari care se intersectează în vîrful unghiului considerat, respectiv unghiul celor două tangente duse prin vîrful respectiv la cele două cercuri mari. Un triunghi eulerian nu are unghiuri mari mari decît π.



12.2.1. Triunghi sferic

Aria triunghiului sferic. Triunghiurile sferice determinate de trei puncte sînt două cîte două simetrice față de centrul sferei și deci au arii egale, de exemplu (fig. 12.2.1).

$$\Delta ABC = \Delta \bar{A}\bar{B}C \text{ sau } \Delta AB\bar{C} = \Delta \bar{A}\bar{C}C.$$

Fiecare triunghi care are cu triunghiul ABC o latură comună îl completează pe acesta în așa fel încît să se obțină un unghi sferic a cărui arie să se poată determina din:

$$\Delta ABC + \Delta BC\bar{A} = 2R^2\widehat{\alpha}, \quad \Delta ABC + \Delta CA\bar{B} = 2R^2\widehat{\beta}, \quad \Delta ABC + \Delta AB\bar{C} = 2R^2\widehat{\gamma}$$

$$3\,\Delta ABC + [\Delta BC\bar{A} + \Delta CA\bar{B} + \Delta AB\bar{C}] = 2R^2(\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma}).$$

Datorită simetriei față de centru:

$$\Delta ABC + [\Delta BC\bar{A} + \Delta CA\bar{B} + \Delta AB\bar{C}] = \Delta ABC + \Delta BC\bar{A} + \Delta CA\bar{B} + \Delta \bar{A}\bar{B}C =$$

$$= 2\pi R^2, \text{ deci } 2\Delta ABC + 2\pi R^2 = 2R^2(\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma}), \text{ sau}$$

$$\Delta ABC = R^2(\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} - \pi) = \frac{\pi R^2}{180^\circ}(\alpha^\circ + \beta^\circ + \gamma^\circ - 180^\circ).$$

Diferența dintre suma unghiurilor și π se numește *exces sferic* ε. Se obține:

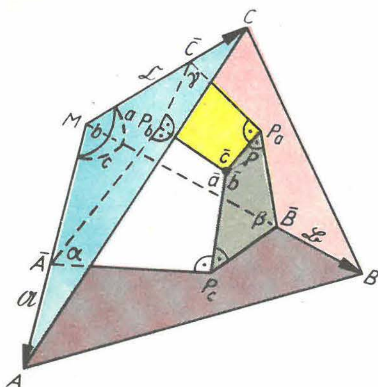
Aria triunghiului sferic	$A_D = \widehat{\varepsilon} R^2$ respectiv $A_D = \frac{\pi R^2}{180^\circ} \cdot \varepsilon$ $\widehat{\varepsilon} = \widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} - \pi = \alpha^\circ + \beta^\circ + \gamma^\circ - 180^\circ$

În orice triunghi sferic de arie nenulă suma unghiurilor este mai mare decît două unghiuri drepte; de exemplu într-un triunghi eulerian ale cărui vîrfuri sînt poli ai laturilor opuse, suma unghiurilor este egală cu trei unghiuri drepte $\frac{3}{2}\pi = 270^\circ$.

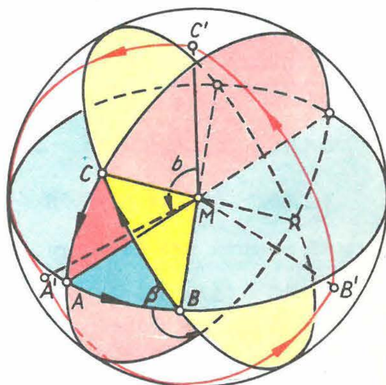
Triunghiuri polare. Considerînd vectorii **A B C** care unesc vîrfurile A, B și C cu centrul sferei M, se atașează fiecărui triunghi sferic un unghi poliedru cu trei laturi. Sfere cu raze diferite și cu centrul în M taie semidreptele determinate de vectorii **A, B** și **C** după triunghiuri sferice asemenea, care au unghiuri și laturi egale. Se poate deci presupune că vectorii au lungimea 1. Dintr-un punct P din interiorul unghiului poliedru se coboară perpendiculare pe fețele laterale ale acestuia; fie P_a, P_b, P_c picioarele acestora. Aceste perpendiculare determină ***unghiul poliedru polar*** al unghiului poliedru inițial. Laturile acestuia se măsoară prin unghiurile $\bar{c}$, $\bar{a}$ și $\bar{b}$; $\sphericalangle P_aPP_b = \bar{c}$, $\sphericalangle P_bPP_c = \bar{a}$, $\sphericalangle P_cPP_a = \bar{b}$ (fig. 12.2.2). Fața, de exemplu, PP_aBP_c este perpendiculară pe fețele MBC și MAB ale unghiului poliedru inițial, deci perpendiculară și pe dreapta lor de intersecție în cazul nostru **B**. Unghiul $P_a\bar{B}P_c$ este unghiul β dintre fețele plane a și c. În patrulaterul $PP_a\bar{B}P_c$ are loc: $\bar{b} + \beta = 180^\circ$ deoarece celelalte două unghiuri sînt drepte. Analog se găsește $\bar{c} + \gamma = 180^\circ$ și $\bar{a} + \alpha = 180^\circ$. Alegînd în unghiul polar un punct, pentru simplitate punctul M, atunci perpendicularele coborîte din acest punct pe fețele $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ ale unghiului poliedru polar vor fi vectorii **A, B, C** cu picioarele perpendicularelor $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$. Unghiul poliedru inițial $MABC$ este deci unghi polar al unghiului său polar; fețele lui laterale a, b,

respectiv c sînt perpendiculare pe segmentele $\overline{PP_a}$, $\overline{PP_b}$, respectiv $\overline{PP_c}$; în patrulaterele $M\bar{B}P_a\bar{C}$, $M\bar{C}P_b\bar{A}$, respectiv $M\bar{A}P_c\bar{B}$, $\sphericalangle\ \bar{B}P_a\bar{C} = \bar{\alpha}$, $\sphericalangle\ \bar{C}P_b\bar{A} = \bar{\beta}$, respectiv $\sphericalangle \bar{A}P_c\bar{B} = \bar{\gamma}$ și pentru acestea are loc $\bar{\alpha} + a = 180°$, $\bar{\beta} + b = 180°$, $\bar{\gamma} + c = 180°$, deoarece celelalte două unghiuri sînt drepte.

Relațiile între fețele și unghiurile unui unghi poliedru și ale unghiului poliedru polar
$\bar{a} + \alpha = 180°$, $\bar{b} + \beta = 180°$, $\bar{c} + \gamma = 180°$ $\bar{\alpha} + a = 180°$, $\bar{\beta} + b = 180°$, $\bar{\gamma} + c = 180°$



12.2.2. Unghiul polar $PP_aP_bP_c$ al unghiului triedru $MABC$



12.2.3. Triunghi sferic, unghi triedru, triunghi polar și unghi poliedru polar

Dacă punctul P, ales arbitrar este chiar M, atunci perpendicularele PP_a, PP_b, respectiv PP_c devin perpendiculare pe fețele a, b, respectiv c, și taie sfera în două puncte diametral opuse. Se consideră punctele diametral opuse A', B', C' ca vîrfuri ale unui triunghi sferic care sînt poli stîngi ai laturilor triunghiului pentru sensul de parcurgere următor: $A \to B$, $B \to C$, $C \to A$. Triunghiul sferic $A'B'C'$ se numește *triunghi polar* al celui dat; între laturile și unghiurile celor două triunghiuri au loc relațiile găsite (fig. 12.2.3).

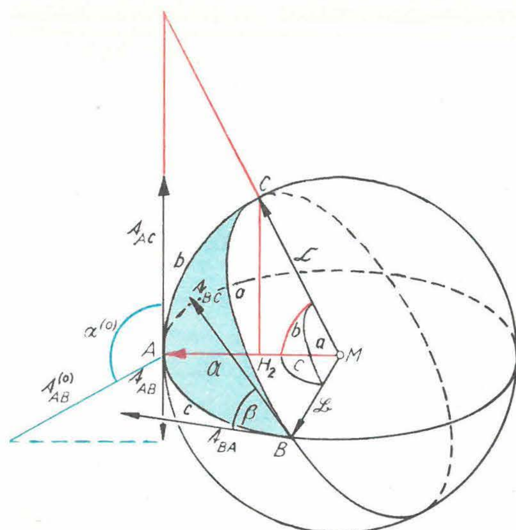
Principalele teoreme pentru rezolvarea triunghiului sferic

Relațiile între cosinusurile laturilor și relații între cosinusurile unghiurilor. Fie pe o sferă de rază 1 și centrul M un triunghi sferic ABC, unde A, B și C sînt extremitățile vectorilor **A**, **B**, **C** ce pornesc din origine și pentru care $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}| = |\mathbf{C}| = 1$, $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \cos c$, $(\mathbf{B}, \mathbf{C}) = \cos a$ și $(\mathbf{C}, \mathbf{A}) = \cos b$.

Pe tangentele la cercurile mari duse prin vîrfuri se dau vectorii de mărime 1, $\mathbf{t}_{AC}$, $\mathbf{t}_{AB}$, $\mathbf{t}_{BA}$, $\mathbf{t}_{BC}$, $\mathbf{t}_{CB}$ și $\mathbf{t}_{CA}$. Fiecare pereche de astfel de vectori determină un plan tangent, în care se măsoară unghiurile triunghiului:

$$\sin\alpha = |\mathbf{t}_{AB} \times \mathbf{t}_{AC}|, \quad \sin\beta = |\mathbf{t}_{BC} \times \mathbf{t}_{BA}| \quad \sin\gamma = |\mathbf{t}_{CA} \times \mathbf{t}_{CB}|.$$

Pe fig. 12. 2. 4. apare latura $b = \widehat{AC}$ în mărime adevărată iar planul tangent prin $\mathbf{t}_{AC}$ și $\mathbf{t}^0_{AB}$ este perpendicular pe planul desenului; dacă se rotește acest plan în raport cu axa $\mathbf{t}_{AC}$ în planul desenului, atunci unghiul α între $\mathbf{t}_{AC}$ și $\mathbf{t}^{(0)}_{AB}$ va apărea în mărime adevărată $\alpha^{(0)}$. În planul determinat de doi vectori, de exemplu **A** și **C**, tangenta $\mathbf{t}_{AC}$ taie prelungirea celuilalt vector **C** în H_1. Pe fi-



12.2.4. Reprezentarea vectorială a triunghiului sferic

gura 12.2.4 triunghiul AMH_1 se găsește în planul figurii. Aplicînd teorema privind fasciculele de drepte cu punctul ajutător H_2, rezultă $/H_1: MC = MA: MH_2$, $MH_1 = 1: \cos b$ și $AH_1 = \operatorname{tg} b$. Prin adunarea vectorilor se obține $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{MH_1}$ sau $\mathbf{A} + \mathbf{t}_{AC} \operatorname{tg} b = \dfrac{\mathbf{C}}{\cos b}$, respectiv $\mathbf{t}_{AC} \operatorname{tg} b = \dfrac{\mathbf{C}}{\cos b} - \mathbf{A}$. În planul determinat de $\mathbf{A}$ și $\mathbf{B}$ are loc în mod analog $\mathbf{t}_{AB} \operatorname{tg} c = \dfrac{\mathbf{B}}{\cos c} - \mathbf{A}$. Înmulțind cele două relații vectoriale membru cu membru se obține

$$(\mathbf{t}_{AC} \cdot \mathbf{t}_{AB}) \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c = \frac{\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}}{\cos b \cos c} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} - \frac{\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}}{\cos b} - \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}}{\cos c},$$

$$\cos \alpha \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c = \frac{\cos a}{\cos b \cos c} + 1 - \frac{\cos b}{\cos b} - \frac{\cos c}{\cos c},$$

$$\cos \alpha \sin b \sin c = \cos a - \cos b \cos c.$$

Relații între cosinusurile laturilor
$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$
$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos \beta$
$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$

Prin permutări circulare se obțin *relațiile privind cosinusurile laturilor* cînd unghiurile și laturile sînt mai mari decît π, respectiv $180°$.

Pentru triunghiul polar $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ cu ajutorul acestei teoreme se obține de exemplu: $\cos \bar{a} = \cos \bar{b} \cos \bar{c} + \sin \bar{b} \sin \bar{c} \cos \bar{\alpha}$ și din relațiile dintre un triunghi și triunghiul său polar: $\bar{a} = 180° - \alpha$, $\bar{b} = 180° - \beta$, $\bar{c} = 180° - \gamma$, $\bar{\alpha} = 180° - a$ rezultă

$$-\cos \alpha = (-\cos \beta)(-\cos \gamma) + \sin \beta \sin \gamma (-\cos a)$$

de unde prin permutări circulare se obțin *relațiile între cosinusurile unghiurilor.*

Relații între cosinusurile unghiurilor	
	$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$
	$\cos \beta = -\cos \gamma \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha \cos b$
	$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c$

Relații între sinusurile laturilor. Pentru deducerea relațiilor între cosinusurile laturilor s-au folosit relațiile $\mathbf{t}_{AB} \operatorname{tg} c = \dfrac{\mathbf{B}}{\cos c} - \mathbf{A}$ și $\mathbf{t}_{AC} \operatorname{tg} b = \dfrac{\mathbf{C}}{\cos b} - \mathbf{A}$. Introducînd aceste valori în produsul vectorial $\mathbf{t}_{AB} \times \mathbf{t}_{AC} = \sin \alpha \cdot \mathbf{A}$, se obține

$$\sin b \sin c \cdot \mathbf{A} \sin \alpha = \mathbf{B} \times \mathbf{C} - \cos b (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) - \cos c (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) + \cos b \cos c (\mathbf{A} \times \mathbf{A}),$$

unde $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0$ și vectorii $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ și $\mathbf{A} \times \mathbf{C}$ sînt perpendiculari pe $\mathbf{A}$. Din $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) = 0$ și $\mathbf{A}(\mathbf{A} \times \mathbf{C}) = 0$ se obțin prin înmulțirea scalară cu $\mathbf{A}$ și prin permutări circulare cele trei condiții:

$$\sin b \sin c \sin \alpha = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}), \quad \sin c \sin a \sin \beta = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \text{ și } \sin a \sin b \sin \gamma = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}).$$

Datorită distributivității înmulțirii scalare și vectoriale, membrii din dreapta ai acestor egalități sînt egali și deci din

$$\sin a \sin b \sin \alpha = \sin c \sin a \sin \beta = $$
$$= \sin a \sin b \sin \gamma$$

se obțin relațiile între sinusuri:

Relații între sinusuri
$\sin a : \sin b : \sin c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$

Relații pentru semiunghiuri și semilaturi. Corespunzător relațiilor din trigonometria plană se pot deduce și în trigonometria sferică relații cu ajutorul cărora cunoscînd trei laturi să se deducă unghiurile, respectiv cunoscînd trei unghiuri să se deducă laturile. Cu ajutorul relațiilor trigonometrice simple, din relațiile între cosiunsurile laturilor se obține:

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos\alpha) = \frac{1}{2} \frac{\sin b \sin c + \cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} =$$

$$= \frac{\cos a - \cos(b+c)}{2 \sin b \sin c} = -\frac{\cos(b+c) - \cos a}{2 \sin b \sin c} =$$

$$= \frac{\sin \frac{1}{2}(b+c+a) \sin \frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b \sin c} = \frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos\alpha) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin b \sin c + \cos b \cos c - \cos a}{\sin b \sin c} =$$

$$= \frac{\cos(b-c) - \cos a}{2 \sin b \sin c} =$$

$$= \frac{\sin \frac{1}{2}(a+c-b) \sin \frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin b \sin c} = \frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}.$$

S-au folosit transformările

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

$$\cos \varphi - \cos \psi = $$
$$= -2 \sin \frac{1}{2}(\varphi + \psi) \sin \frac{1}{2}(\varphi - \psi)$$

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

$$s - a = \frac{1}{2}(b + c - a)$$

$$s - b = \frac{1}{2}(c + a - b)$$

$$s - c = \frac{1}{2}(a + b - c)$$

Din $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} : \cos \frac{\alpha}{2}$ se obțin *relațiile pentru jumătățile de unghiuri*

Relații pentru semiunghiuri	
	$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}}$, $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-c)\sin(s-a)}{\sin s \sin(s-b)}}$
	$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin s \sin(s-c)}}$, unde $2s = a + b + c$

Relațiile pentru jumătățile de laturi se obțin prin transformare polară din relațiile dintre jumătățile de unghiuri. Din relațiile $\operatorname{tg}^2 \frac{\bar\beta}{2} = \frac{\sin(\bar s - \bar c)\sin(\bar s - \bar a)}{\sin \bar s \sin(\bar s - \bar b)}$ valabile în triunghiul polar $\bar A \bar B \bar C$ și din $\sigma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$, $\bar\beta = 180° - b$, $\bar a = 180° - \alpha$, $\bar b = 180° - \beta$, $\bar c = 180° - \gamma$, $\bar s = \frac{1}{2}(\bar a + \bar b + \bar c) = 270° - \sigma$, $\bar s - \bar a = 90° - (\sigma - \alpha)$, $\bar s - \bar b = 90° - (\sigma - \beta)$, $\bar s - \bar c = 90° - (\sigma - \gamma)$, se obține $\operatorname{ctg}^2 \frac{b}{2} = \frac{\cos(\sigma - \gamma)\cos(\sigma - \alpha)}{-\cos \sigma \cos(\sigma - \beta)}$.

Relații între semilaturi	$\operatorname{tg}\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{-\cos\sigma\cos(\sigma-\beta)}{\cos(\sigma-\gamma)\cos(\sigma-\alpha)}}$, $\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{-\cos\sigma\cos(\sigma-\gamma)}{\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)}}$, $\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}}$, unde $2\sigma = \alpha+\beta+\gamma$

Analogii neperiene. Pentru rezolvarea triunghiurilor sferice cu ajutorul logaritmilor se folosesc analogiile neperiene. Ele se deduc din relațiile pentru semiunghiuri, respectiv semilaturi, folosind relații trigonometrice în special pe cele privind suma și diferența funcțiilor trigonometrice. Este suficient să dăm aici numai cîte una din aceste formule, celelalte obținîndu-se prin permutări circulare.

Analogii neperiene (diagramă: cerc cu α, a, β, b, c, γ)	1a) $\operatorname{tg}\frac{a}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2} = \operatorname{tg}\frac{b+c}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}$; 1b); 1c) 2a) $\operatorname{tg}\frac{a}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2} = \operatorname{tg}\frac{b-c}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}$; 2b); 2c) 3a) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{b-c}{2} = \operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{b+c}{2}$; 3b); 3c) 4a) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\sin\frac{b-c}{2} = \operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{b+c}{2}$; 4b); 4c)

Problemele de bază privind triunghiurile sferice

Spre deosebire de triunghiul în plan, triunghiul sferic este determinat prin cunoașterea a trei unghiuri. În legătură cu aceasta, se ridică șase probleme fundamentale și tot în această ordine de idei se ridică și problema legăturii între trigonometria sferică și trigonometria plană. Trei puncte în spațiu, care nu sînt în linie dreaptă, determină un plan și în acest plan un triunghi. În același timp există o infinitate de sfere pe a căror suprafață se găsesc cele trei puncte. Ordonîndu-le după mărimea razelor R, curburile respective descresc și triunghiul sferic se apropie de un triunghi plan; în particular unghiurile pe sferă se apropie cînd $R \to \infty$ de unghiuri obișnuite și excesul sferic devine oricît de mic. Lungimilor laturilor $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ ale triunghiului plan le corespund în triunghiul sferic arcele $\frac{\bar{a}}{R}$, $\frac{\bar{b}}{R}$ și $\frac{\bar{c}}{R}$ măsurate în unități de arc. În formula obținută de matematicianul elvețian Simon L'HUILIER (1750—1840)

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{1}{2}s\,\operatorname{tg}\frac{1}{2}(s-a)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(s-b)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(s-c)}$$

funcțiile tangentă se pot înlocui cu arcele unghiurilor corespunzătoare,

$$\frac{\widehat{\varepsilon}}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\bar{s}}{R}\cdot\frac{\bar{s}-\bar{a}}{R}\cdot\frac{\bar{s}-\bar{b}}{R}\,\frac{\bar{s}-\bar{c}}{R}}$$

acestea fiind foarte mici. Din expresia ariei A a triunghiului sferic se obține atunci formula lui Heron pentru un triunghi plan:

$$A = \widehat{\varepsilon}R^2 = \frac{\widehat{\varepsilon}}{4}\cdot 4R^2 = \sqrt{\bar{s}(\bar{s}-\bar{a})(\bar{s}-\bar{b})(\bar{s}-\bar{c})}.$$

Pentru R mare, dar finit, matematicianul francez Adrien-Marie LEGENDRE (1752—1833) a găsit teorema:

Teorema lui Legendre. Un triunghi sferic cu laturi mici, și deci și cu exces mic, are aria aproximativ egală cu cea a unui triunghi plan cu laturi egale. Fiecare unghi al triunghiului plan este mai mic decît latura corespunzătoare a triunghiului sferic, cu o treime din exces.

Cu ajutorul formulei lui L'Huilier se poate calcula excesul sferic ε pentru un triunghi pe pămînt (raza R) cu laturile $a = 50$ km, $b = 60$ km, și $c = 70$ km, deci un triunghi care leagă aproximativ localitățile Kyffhäuser, Inselberg și Weimar. Lungimile laturilor în unități de arc vor fi $\widehat{a} = a/R$, $\widehat{b} = b/R$, $\widehat{c} = c/R$ și în unități de unghi $a^\circ = 360^\circ a/(2\pi R)$, $b^\circ = 360^\circ b/(2\pi R)$, $c = 360^\circ c/(2\pi R)$ obținute prin înmulțirea valorii respective, de exemplu $\widehat{a}$ cu 206 264,8 deoarece

Km	Radiani	Secunde	$s/2 = 24'16{,}85''$
50	0,0078479	1618,75″	$(s-a)/2 = 10'47{,}47''$
60	0,0094173	1942,46″	$(s-b)/2 = 8'5{,}62''$
70	0,0109869	2266,21″	$(s-c)/2 = 5'23{,}75''$

unei unități de arc îi corespund 206 264,8″ unități de unghi. Se obține de aici excesul sferic $\varepsilon = 7{,}6''$. După teorema lui Legendre triunghiul poate fi privit ca triunghi sferic atît timp cît precizia unghiului măsurat nu este mai mică decît $\frac{\varepsilon}{3} \approx 2{,}5''$.

Trecerea la trigonometria plană. Pentru trecerea la limită cînd $R \to \infty$ se dezvoltă funcțiile trigonometrice în serie convergentă. Se notează $\frac{\bar{a}}{\bar{R}} = q_a$, $\frac{\bar{b}}{\bar{R}} = q_b$, $\frac{\bar{c}}{R} = q_c$ și prin δ_i mărimile care în dezvoltare tind la zero odată cu $\frac{1}{R^4}$. Se obține astfel: $\sin q_a = q_a - \frac{1}{3!} q_a^3 + \ldots = q_a\left[1 - \frac{1}{6} q_a^2 + \delta_1\right]$ și $\cos q_a = 1 - \frac{1}{2!} q_a^2 + \delta_2$. Din teorema sinusurilor din trigonometria sferică rezultă

$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = \bar{a}\left[1 - \frac{1}{6}q_a^2 + \delta_1\right] : \bar{b}\left[1 - \frac{1}{6}q_b^2 + \delta_3\right] : \bar{c}\left[1 - \frac{1}{6}q_c^2 + \delta_5\right].$$

La limită se va obține $\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = \bar{a} : \bar{b} : \bar{c}$ adică teorema sinusurilor din trigonometria plană. Din teorema cosinusului a trigonometriei sferice se obține de asemenea teorema corespunzătoare din trigonometria plană:

$$\left[1 - \frac{1}{2}q_a^2 + \delta_2\right] = \left[1 - \frac{1}{2}q_b^2 + \delta_4\right]\left[1 - \frac{1}{2}q_c^2 + \delta_6\right] +$$

$$+ q_b q_c \cos\alpha \left[1 - \frac{1}{6}q_b^2 + \delta_3\right]\left[1 - \frac{1}{6}q_c^2 + \delta_5\right],$$

$$-\frac{1}{2}q_a^2 + \delta_2 = -\frac{1}{2}(q_b^2 + q_c^2) - \delta_{4.6} + q_b q_c \cos\alpha\left[1 - \frac{1}{6}(q_b^2 + q_c^2) + \delta_{3.5}\right],$$

$$\bar{a}^2 = \bar{b}^2 + \bar{c}^2 - 2\bar{b}\bar{c}\cos\alpha.$$

Relații generale în triunghiul sferic eulerian. Deoarece într-un astfel de triunghi nici un unghi și nici o latură nu sînt mai mari decît π, respectiv 180°, argumentele se obțin din funcțiile tangentă, cotangentă și cosinus univoc și pentru sinus biunivoc. Cînd rezultă două argumente, atunci soluția corespunzătoare din punct de vedere geometric se separă dintre cele posibile cu ajutorul unor inegalități.

1. *Într-un triunghi sferic eulerian suma unghiurilor se găsește între* π *și* 3π *iar suma laturilor între* 0 *și* 2π:

$$\pi < \widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} < 3\pi \quad \text{și} \quad 0 < \widehat{a} + \widehat{b} + \widehat{c} < 2\pi$$

respectiv

$$180^\circ < \alpha + \beta + \gamma < 540^\circ \quad \text{și} \quad 0 < a + b + c < 360^\circ.$$

2. *Latura mai mare se opune unghiului mai mare.*

Dacă $a > b$, atunci în analogia neperiană 4c) $\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\gamma \sin\frac{1}{2}(a - b) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha - \beta)\sin\frac{1}{2}(a + b)$, adică $\sin\frac{1}{2}(a - b) > 0$ și deoarece $\sin\frac{1}{2}(a + b) > 0$ și $\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\gamma > 0$, rezultă că și $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha - \beta) > 0$. Aceasta înseamnă că $\alpha - \beta > 0$ sau $\alpha > \beta$.

3. Suma a două laturi este mai mare decît a treia. Diferența a două laturi este mai mică decît a treia.

Fiecărui triunghi sferic îi corespunde un unghi poliedru. Acesta degenerează într-un sector circular cînd suma a două laturi este egală cu a treia și este imposibil ca suma a două laturi să fie mai mică decît a treia. Dacă însă diferența a două laturi a și b este mai mare sau egală cu a treia, c, $a - b \geqslant c$, rezultă $a \geqslant b + c$, ceea ce contrazice prima parte a teoremei.

4. Suma a două unghiuri este mai mică decît al treilea mărit cu π, respectiv 180°.

După cum s-a mai arătat, în triunghiul polar $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$:

$$\bar{a} + \bar{b} > \bar{c} \quad \text{și} \quad \bar{a} - \bar{b} < \bar{c},$$

Din $\bar{a} = 180° - \alpha$, $\bar{b} = 180° - \beta$, $\bar{c} = 180° - \gamma$ rezultă pentru triunghiul ABC:
$180° - \alpha + 180° - \beta > 180° - \gamma$, $180° - \alpha - 180° + \beta < 180° - \gamma$,
$180° + \gamma > \alpha + \beta$, respectiv $\beta + \gamma < 180° + \alpha$.

5. Dacă suma a două laturi este mai mare (mai mică) decît două unghiuri drepte, atunci și suma unghiurilor opuse acestor două laturi este mai mare (mai mică) decît două unghiuri drepte.

În analogia neperiană 3c) $\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}(a-b) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(a+b)$ fie $a + b > \pi$, deci $\cos\frac{1}{2}(a+b) < 0$. Cum într-un triunghi sferic euclidian $\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\gamma$ și $\cos\frac{1}{2}(a-b)$ sînt pozitive, rezultă $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta) < 0$ și deci $\frac{1}{2}(\alpha+\beta) > \pi$ sau $\alpha + \beta > \pi$. Analog rezultă din $a + b < \pi$ inegalitatea $\alpha + \beta < \pi$; pentru $a + b = \pi$ rezultă $\alpha + \beta = \pi$.

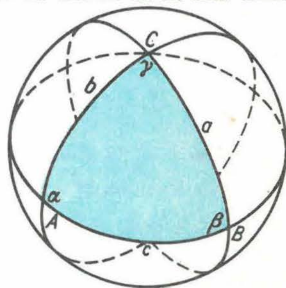
Cazul 1a pentru rezolvarea triunghiului sferic. Fiind dat triunghiul sferic ABC în care se cunosc laturile a, b, c, se caută unghiurile α, β, γ. Suma a două laturi trebuie să fie mai mare decît a treia și suma celor trei laturi mai mică decît 360°. Soluția se obține din teorema cosinusului laturilor

$$\cos\alpha = (\cos a - \cos b\cos c)/(\sin b \sin c)\ \ldots$$

și respectiv din relațiile pentru semiunghiuri

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c), \quad \cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}}.$$

Prin permutări circulare se obțin formule pentru $\cos\frac{1}{2}\beta$ și $\cos\frac{1}{2}\gamma$.



12.2.5. Triunghi sferic format cu trei laturi, respectiv trei unghiuri

Cazul 1b. În triunghiul sferic ABC sînt date unghiurile α, β și γ astfel încît suma a două dintre aceste unghiuri este mai mică decît celălalt plus 180° iar suma tuturor unghiurilor este cuprinsă între 180° și 540°. Atunci laturile se calculează fie din relația dintre cosinusurile unghiurilor $\cos a = (\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma)/(\sin\beta\sin\gamma)$, ..., fie din relația dintre semilaturi, de exemplu:

$$2\sigma = \alpha + \beta + \gamma, \quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}}, \ldots$$

Cazul 2a. În triunghiul sferic ABC se cunosc două laturi și unghiul cuprins între acestea, de exemplu b, c și α. Din relația între cosinusurile laturilor se obține a treia latură

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b \sin c \cos\alpha.$$

Cu ajutorul acesteia, din relațiile între sinusuri se obțin cele două unghiuri căutate β și γ:

$$\sin\beta = \sin b\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin a} \quad \text{și} \quad \sin\gamma = \sin c\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin a}.$$

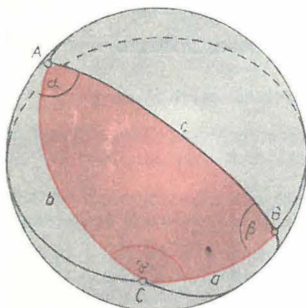
Pentru fiecare valoare a funcției sinus se obțin două argumente care sînt suplimentare. Unghiul căutat se determină din propoziția după care dreptei mai mari i se opune unghiul mai mare. Astfel, γ se alege în așa fel încît $\gamma \gtrless \alpha$ după cum $c \gtrless a$. Pentru calcule logaritmice se folosesc analogiile neperiene. Din 3a) și 4a) se obține

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\beta + \gamma) = \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} (b - c) \Big/ \cos \frac{1}{2} (b + c)$$

și

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\beta - \gamma) = \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \alpha \cdot \sin \frac{1}{2} (b - c) \Big/ \sin \frac{1}{2} (b + c)$$

cu ajutorul cărora se calculează unghiurile $\frac{1}{2} (\beta + \gamma)$ și $\frac{1}{2} (\beta - \gamma)$ și deci β și γ. Latura căutată, a se obține din teorema sinusurilor $\sin a = \sin \alpha \sin b / \sin \beta$; dintre cele două valori ale funcției arcsinus se consideră cea care este mai mare, respectiv mai mică decît c după cum α este mai mare, respectiv mai mic decît γ.



12.2.6. Rezolvarea triunghiului sferic cu laturile $a = 52{,}5°$, $b = 107{,}8°$ și $\gamma = 141{,}5°$

Exemplu. Fie date $a = 52{,}5°$, $b = 107{,}8°$, $\gamma = 141{,}5°$ (fig. 12.2.6). Din analogiile neperiene 3c) și 4c) rezultă

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha + \beta) = \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \gamma \cdot \cos \frac{1}{2} (a - b) \Big/ \cos \frac{1}{2} (a + b),$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\alpha - \beta) = \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \gamma \cdot \sin \frac{1}{2} (a - b) \Big/ \sin \frac{1}{2} (a + b).$$

	lg sin	lg cotg	lg cos
$\frac{1}{2}(a-b) = -27{,}65°$	9,6666 *n*		9,9473
$a - b = -55{,}3°$			
$b = 107{,}8°$			
$a = 52{,}5°$			
$a + b = 160{,}3°$			
$\frac{1}{2}(a+b) = 80{,}15°$	9,9936		9,2331
	9,6730 *n*		0,7142
$\frac{1}{2}\gamma = 70{,}75°$		9,5431	
	lg tg		lg tg
$\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = -9{,}34°$	9,2161 *n*		0,2573
$\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 61{,}06°$			
$\alpha = 51{,}72°$			
$\beta = 70{,}40°$			
$\gamma = 141{,}5°$			
$\alpha + \beta + \gamma = 263{,}62°$			
$\varepsilon = 83{,}62°$			

$\sin c = \sin \gamma \cdot \sin a / \sin \alpha$

$\lg \sin \gamma =$	9,7941
$\lg \sin a =$	9,8995
	9,6936
$\lg \sin \alpha =$	9,8948
$\lg \sin c =$	9,7988
$c_1 =$	38,99°
$c_2 =$	141,01°

$\alpha < \gamma \rightarrow a < c$

Soluția: $c_2 = 141{,}01°$

Cazul 2b. Se dau în triunghiul sferic două unghiuri și latura alăturată lor, de exemplu β, γ și a. Problema este polara problemei 2a). Elementele necunoscute rezultă direct din formule.

I. Din relația dintre cosinusurile unghiurilor rezultă α: $\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a$; din relația dintre sinusuri rezultă b, respectiv c: $\sin b = \sin\beta\sin a/\sin\alpha$, respectiv $\sin c = \sin\gamma\sin a/\sin\alpha$, unde $b \gtrless a$ după cum $\beta \gtrless \alpha$ și $c \gtrless a$, după cum $\gamma \gtrless \alpha$.

II. Din analogiile neperiene 1a) și 2a) se obțin laturile b și c:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(b+c) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\Big/\cos\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$$

și

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(b-c) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\Big/\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$$

și din teorema sinusurilor

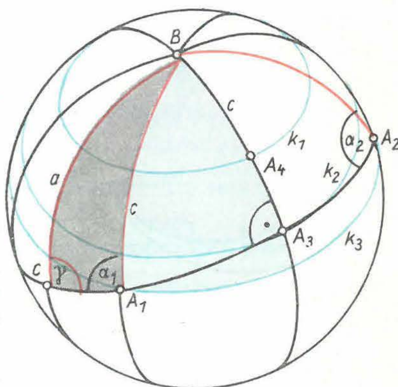
$$\sin\alpha = \sin a\sin\beta/\sin b,$$

unde $\alpha \gtrless \beta$ după cum $a \gtrless b$.

Cazul 3a. Dacă în triunghiul sferic ABC se cunosc două laturi și un unghi opus, de exemplu a, c și γ, atunci la rezolvarea triunghiului nu se pot obține soluții, sau se pot obține una sau două soluții (fig. 12.2.7). Pe figură sînt reprezentate trei arce sferice k_1, k_2 și k_3 care trec prin B, au diferite raze sferice și ilustrează cele trei posibilități în rezolvarea acestui caz. Cercul k_1 cu raza $\widehat{BA_4}$ nu are nici un punct de intersecție cu cercul mare prin C și A_2; k_2 este tangent acestui cerc în punctul A_3 iar k_3 îl taie în A_1 și A_2. Dacă $c = \widehat{BA_3}$, se obține o soluție, triunghiul dreptunghic A_3BC. Dacă $\widehat{BA_1} = \widehat{BA_2} = c$, atunci se obțin triunghiurile A_1BC și A_2BC. Cum triunghiul A_2BA_1 este echilateral, rezultă $\alpha_2 = \sphericalangle BA_1A_2$ sau $\alpha_1 = 180° - \alpha_2$. Unghiurile α_1 și α_2 se calculează folosind relația între sinusuri $\sin\alpha = \sin a\sin\gamma/\sin c$ cu $\sin\alpha_1 = \sin\alpha_2$. Pentru fiecare valoare a unghiului α se calculează cu ajutorul analogiilor neperiene 2b) și 4b), latura b și unghiul β, obținîndu-se o singură valoare:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}b = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(c-a)\sin\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)\Big/\sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha),$$

$$\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\beta = \operatorname{tg}\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)\sin\frac{1}{2}(c+a)\Big/\sin\frac{1}{2}(c-a).$$



12·2.7. Triunghi sferic construit cu laturile a, c și un unghi opus γ

Discuția analitică a cazurilor posibile se face cu un procedeu analog celui din trigonometria plană, cu ajutorul relației $\sin\alpha = \sin a\cdot\sin\gamma/\sin c$ (fig 12.2.8).

I. $(\sin a\sin\gamma/\sin c) > 1$, deci $\sin\alpha > 1$, nu există soluție reală.

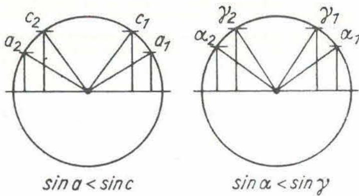
II. $(\sin a\sin\gamma/\sin c) = 1$, $\sin\alpha = 1$, $\alpha = \pi/2$, o soluție, de exemplu triunghiul A_3BC.

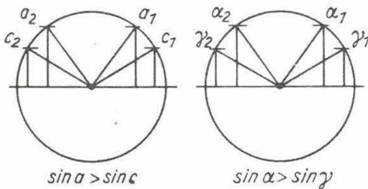
III. $\sin\alpha = (\sin a\sin\gamma/\sin c) < 1$

III (1). $\sin a < \sin c \rightarrow \sin\alpha < \sin\gamma$, o soluție deoarece pentru orice triplet de valori date (a_i, c_i, γ_i), $i = 1, 2, \ldots$ valoarea lui α este unic determinată prin $\alpha \gtrless \gamma$ după cum $a \gtrless c$ (fig. 12.2.8).

III (2). $\sin a = \sin c \rightarrow \sin\alpha = \sin\gamma$, o soluție [v.III (1)].

III (3). $\sin a > \sin c \rightarrow \sin\alpha > \sin\gamma$, două soluții sau $a > c \rightarrow \alpha > \gamma$, adică $c = c_1$ ascuțit $\rightarrow$





12.2.8. Discuția cazului 3a

$\rightarrow \gamma = \gamma_1$ ascuțit și soluțiile sînt α_1, $\alpha_2 = 180° - \alpha_1$ sau $a < c \rightarrow \alpha < \gamma$, adică $c = c_2$ obtuz $\rightarrow \gamma = \gamma_2$ obtuz și soluțiile sînt α_1, $\alpha_2 = 180° - \alpha_1$ (fig. 12.2.8).

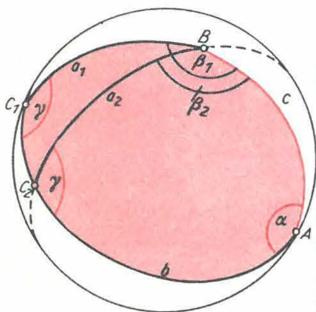
Cazul 3b. Problema polară. Se cere rezolvarea unui triunghi sferic ABC cînd se cunosc două unghiuri și o latură opusă, de exemplu α, γ și c. În mod analog se ajunge la o discuție a cazurilor. Se va prezenta aici numai modul de calcul fără să se intre în amănuntele discuției.

1. $\sin a = \sin \alpha \cdot \sin c / \sin \gamma$.

2. $\operatorname{tg} \frac{1}{2} b = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (c - a) \sin \frac{1}{2} (\gamma + \alpha) \Big/ \sin \frac{1}{2} (\gamma - \alpha)$.

3. $\operatorname{cotg} \frac{1}{2} \beta = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\gamma - \alpha) \sin \frac{1}{2} (c + a) \Big| \sin \frac{1}{2} (c - a)$.

Exemplu. Se dau $c = 96{,}5°$, $\alpha = 101{,}2°$, $\gamma = 102{,}1°$; se cer a, b, β (fig. 12.2.9).



1.

$\sin a = \sin \alpha \sin c / \sin \gamma$

	lg sin α =	9,9916
+	lg sin c =	9,9972
		19,9888
−	lg sin γ =	9,9902
	lg sin a =	9,9986

$a_1 = 85{,}40°$, $a_2 = 94{,}60°$

Deoarece $\sin \alpha > \sin \gamma$, ne aflăm în cazul III (3) cu $\alpha < \gamma$, deci vom avea două soluții.

1a)

90,95°	$(c + a)/2$	95,55°
48,25°	$c/2$	48,25°
42,70°	$a/2$	47,30°
5,55°	$(c - a)/2$	0,95°
101,65°	$(\gamma + \alpha)/2$	101,65°
51,05°	$\gamma/2$	51,05°
50,60°	$\gamma/2$	50,60°
0,45°	$(\gamma - \alpha)/2$	0,45°

12.2.9. Triunghi sferic cu latura $c = 96{,}5°$, $\alpha = 101{,}2°$ și $\gamma = 102{,}1°$

2.

8,9876	lg tg[$(c-a)/2$]	8,2196
+ 9,9910	lg sin [$(\gamma+\alpha)/2$]	+ 9,9910
8,9786		8,2106
− 7,8951	lg sin [$(\gamma-\alpha)/2$]	− 7,8951
1,0835	lg tg $b/2$	0,3155
85,28°	$b/2$	64,19°
170,56°	b	128,38°

3.

7,8951	lg tg [$(\gamma-\alpha)/2$]	7,8951
+ 9,9999	lg sin [$(c+a)/2$]	+ 9,9980
7,8950		7,8931
− 8,9855	lg sin $(c - a)/2$	− 8,2196
8,9095	lg cotg ($\beta/2$)	9,6735
85,34°	$\beta/2$	64,75°
170,68°	β	129,50°

Triunghiul sferic dreptunghic

La fel ca în trigonometria plană și în trigonometria sferică relațiile fundamentale în triunghiul sferic dreptunghic se simplifică. Transformata prin polare a unui triunghi sferic dreptunghic este un triunghi cu o latură de 90° în care un vîrf se găsește pe polara unui alt vîrf. Triunghiurile sferice cu o latură de 90° apar foarte rar și nu se vor studia în mod special.

Regula lui Neper. În triunghiul sferic ABC fie unghiul γ de 90°; laturile a și b vor fi catete și c ipotenuză (fig. 12.2.10). Deoarece $\sin 90° = 1$ și $\cos 90° = 0$, relațiile generale pentru triunghiul sferic se vor simplifica astfel.

Relațiile dintre sinusuri: $\sin a = \sin \alpha \sin c/\sin 90°$,

1. $\sin a = \sin \alpha \sin c$, (1) $\cos(90° - a) = \sin \alpha \sin c$;

2. $\sin b = \sin \beta \sin c$, (2) $\cos(90° - b) = \sin \beta \sin c$.

Relațiile dintre cosinusurile laturilor: $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos 90°$,

3. $\cos c = \cos a \cos b$, (3) $\cos c = \sin(90° - a)\sin(90° - b)$.

Relațiile dintre cosinusurile unghiurilor: $\cos \alpha = -\cos \beta \cos 90° + \sin \beta \sin 90° \cos a$,

4. $\cos \alpha = \sin \beta \cos a$, (4) $\cos \alpha = \sin(90° - a) \sin \beta$,
5. $\cos \beta = -\cos 90° \cos \alpha + \sin 90° \sin \alpha \cos b$,
   $\cos \beta = \sin \alpha \cos b$, (5) $\cos \beta = \sin(90° - b) \sin \alpha$.

Din aceste cinci relații se mai pot deduce următoarele:
6. din 4: $\cos a = \operatorname{cotg} \alpha \cdot \sin \alpha/\sin \beta$, din 5: $\cos b = \operatorname{cotg} \beta \sin \beta/\sin \alpha$ și din 3: rezultă $\cos c = \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta$, (6) $\cos c = \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta$.

7. din 1: $\sin \alpha = \sin a/\sin c$ și din 3: $\cos b = \cos c/\cos a$; ținînd seama de 5 rezultă $\cos \beta = \operatorname{tg} a \operatorname{cotg} c$, (7) $\cos \beta = \operatorname{cotg}(90° - a) \cos c$.

8. din 2: $\sin \beta = \sin b/\sin c$ și din 3: $\cos a = \cos c/\cos b$ și ținîndu-se seama de 4 rezultă $\cos \alpha = \operatorname{tg} b \operatorname{cotg} c$, (8) $\cos \alpha = \operatorname{cotg}(90° - b) \operatorname{cotg} c$.

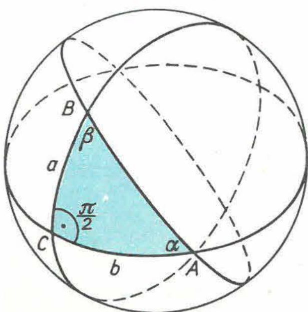
9. din 5: $\sin \alpha = \cos \beta/\cos b$ și din 2: $\sin c = \sin b/\sin \beta$ rezultă ținîndu-se seama de 1: $\sin a = \operatorname{tg} b \operatorname{cotg} \beta$, (9) $\cos(90° - a) = \operatorname{cotg}(90° - b) \operatorname{cotg} \beta$.

10. din 4: $\sin \beta = \cos \alpha/\cos a$ și din 1: $\sin c = \sin a/\sin \alpha$; ținîndu-se seama de 2: $\sin b = \operatorname{tg} a \operatorname{cotg} \alpha$, (10) $\cos(90° - b) = \operatorname{cotg}(90° - a) \operatorname{cotg} \alpha$

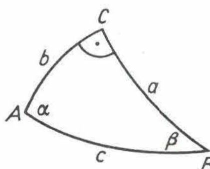
Neper a cuprins aceste zece formule notate cu (1) pînă la (10) în regula care îi poartă numele.

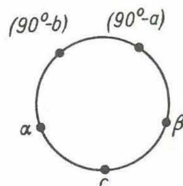
Regula lui Neper. În triunghiul sferic dreptunghic cosinusul unui element sferic este egal cu produsul cotangentelor elementelor alăturate sau egal cu produsul sinusurilor elementelor nealăturate, lăsînd la o parte unghiul drept și înlocuind catetele prin complementele lor.

Pentru a putea aplica cu ușurință această regulă se desenează un triunghi simplificat în care γ este unghi drept. Deoarece pentru a aplica regula lui Neper trebuie să deosebim numai elementele alăturate și nealăturate, atunci se poate folosi o figură închisă mai simplă pe care sînt



12.2.10. Triunghi sferic dreptunghic ABC





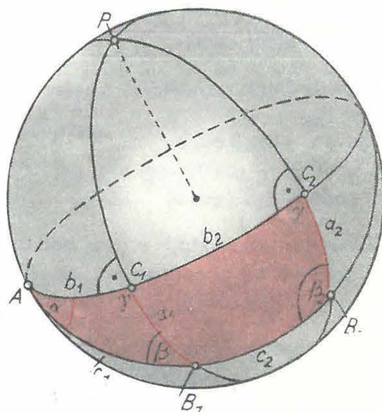
12.2.11. Poziția elementelor cînd se aplică regula lui Neper

reprezentate în ordine ciclică elementele triunghiului, cu catetele a și b înlocuite prin $90° - a$ și $90° - b$ (fig. 12.2.11). La folosirea acestor reguli se obțin valori unice pentru toate argumentele funcțiilor trigonometrice în afară de argumentele sinusurilor pentru care se obțin două valori.

Exemplu. Fie date cateta $a = 38{,}4°$ și unghiul opus ei $\alpha = 42{,}9°$. În acest caz se găsesc două soluții; din $\sin b = \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{tg} a$, două valori b_1 și $b_2 = 180° - b_1$, din $\cos \alpha = \cos a \sin \beta$ două valori pentru β care mai pot fi calculate și din $\cos \beta = \sin \alpha \cos b$. Ipotenuza c se poate determina din $\cos \alpha = \operatorname{cotg} c \operatorname{tg} b$ (fig. 22.2.12).

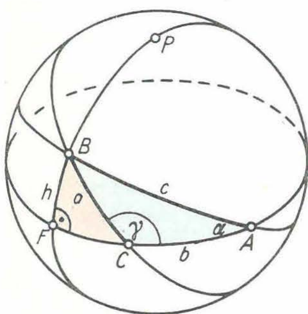
$\lg \operatorname{cotg} \alpha =$	0,0319
$\lg \operatorname{tg} a =$	9,8990
$\lg \sin b =$	9,9309
$b_1 =$	58,52°
$b_2 =$	121,48°
$\lg \cos \alpha =$	9,8648
$\lg \operatorname{cotg} b_{1,2} =$	9,7870
$\lg \operatorname{cotg} c =$	9,6518
$c_1 =$	65,85°
$c_2 =$	114,15°

$\lg \cos \alpha =$	9,8648
$\lg \cos a =$	9,8941
$\lg \sin \beta =$	9,9707
$\beta_1 =$	69,2°
$\beta_2 =$	110,8°



12.2.12. Triunghi sferic dreptunghic construit cu cateta a și unghiul opus α

Înălțimi. Cu ajutorul regulii lui Neper se pot calcula înălțimile triunghiului sferic. Acestea se măsoară pe un cerc mare dus printr-un vîrf, perpendicular pe latura opusă. Înălțimea dă atunci distanța măsurată pe sferă de la un vîrf la latura opusă. O înălțime împarte un triunghi sferic oarecare în două triunghiuri dreptunghice și deci poate fi rezolvat după regula lui Neper. În acest mod se pot deduce și analogiile neperiene. În unele aplicații noțiunea de înălțime are o mare importanță. De exemplu pe figura 12.2.13 se reprezintă cazul cînd cercul mare prin A, C și F este ecuatorul și B poziția unui vapor. Înălțimea h reprezintă în acest caz latitudinea geografică a locului în care se află vaporul. Dacă B este polul nord și un vapor sau avion se deplasează pe cercul mare determinat de A și C, atunci h ne dă cea mai scurtă distanță pînă la pol.



Exemplu. În triunghi se dau laturile $c = 84°$, $a = 42{,}7°$ și unghiul $\gamma = 135°$ (fig. 12.2.13). Înălțimea $h = \widehat{BF}$ a laturii b se găsește în afara triunghiului deoarece unghiul γ este obtuz. Din relația sinusurilor $\sin \alpha = \sin \gamma \sin a / \sin c$ se obțin pentru α cel puțin două valori α_1 și α_2. Deoarece laturii mai mici i se opune unghiul mai mic rezultă că numai α_1 poate fi soluție.

$\lg \sin \gamma =$	9,8495
$\lg \sin a =$	9,8313
	9,6808
$\lg \sin c =$	9,9976
$\lg \sin \alpha =$	9,6832
$\alpha_1 =$	28,83°
$\alpha_2 =$	151,17°

12.2.13. Triunghi sferic ABC cu laturile $a = 42{,}7°$, $c = 84°$ și unghiul opus $\gamma = 135°$

În triunghiurile dreptunghice ABF și CBF se dau ipotenuza și un unghi; cu regula lui Neper se obține:

1. $\cos \alpha = \operatorname{cotg} c \operatorname{tg} \widehat{AF}$,

$\operatorname{tg} \widehat{AF} =$	$\cos \alpha \operatorname{tg} c$,
$\lg \cos \alpha =$	9,9425,
$\lg \operatorname{tg} c =$	0,9784,
$\lg \operatorname{tg} \widehat{AF} =$	0,9209,
$\widehat{AF} =$	83,16°

2. $\cos (180° - \gamma) = \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{tg} \widehat{CF}$,

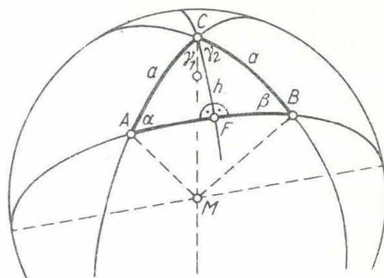
$\operatorname{tg} \widehat{CF} =$	$\cos (180° - \gamma) \operatorname{tg} a$,
$\lg \cos (180° - \gamma) =$	9,8495,
$\lg \operatorname{tg} a =$	9,9651,
$\lg \operatorname{tg} \widehat{CF} =$	9,8146,
$\widehat{CF} =$	33,12°.

Latura b are deci mărimea $\widehat{AF} - \widehat{CF} = 50{,}04°$. Din relația sinusului în triunghiul ABC se obține β:

$$\sin\beta = \frac{\sin b \sin\gamma}{\sin c}.$$

$\lg \sin b =$	9,8845
$\lg \sin\gamma =$	9,8495
	9,7340
$\lg \sin c =$	9,9976
$\lg \sin\beta =$	9,7364
$\beta_1 =$	33,02°
$\beta_2 =$	146,98°.

Deoarece β trebuie să fie mai mic decît α, numai $\beta_1 = 33{,}02°$ este soluție.



12.2.14. Triunghi sferic isoscel

Triunghiuri sferice isoscele. Dacă triunghiul sferic ABC are două laturi egale, de exemplu $a = b$, atunci triunghiul se zice isoscel. Fie F piciorul înălțimii h pe cea de a treia latură (fig. 12.2.14). Calculînd înălțimea cu regula lui Neper, în triunghiurile AFC și BFC trebuie să se obțină aceeași valoare; din $a = b$ rezultă $\alpha = \beta$. Din $a = b$ și $\alpha = \beta$ rezultă că și $\widehat{AF} = \widehat{FB}$, respectiv $\gamma_1 = \gamma_2$. Se obține astfel rezultatul următor analog cu cel din geometria plană.

Într-un triungi sferic isoscel înălțimea împarte în două părți egale unghiul aflat în vîrful din care pornește și latura opusă acestui vîrf; înălțimea este mediatoare și axă de simetrie. Unghiurile de la bază sînt egale.

Un rezultat analog rezultă și pentru triunghiul sferic cu două unghiuri egale. Un astfel de triunghi va fi și isoscel.

12.3. Aplicații ale trigonometriei sferice

Dintre aplicațiile trigonometriei sferice, două sînt deosebit de importante: aplicațiile în geografia matematică și cele din astronomie.

Geografia matematică

În realitate forma Pămîntului este neregulată și este denumită geoid. Abaterile de la o formă care se pretează unor calcule matematice sînt mici în comparație cu mărimile ce intervin. Din analiza traiectoriilor sateliților artificiali ai pămîntului a rezultat că geoidul se apropie cel mai mult de un elipsoid cu trei axe. Diferența dintre axele din planul ecuatorial este așa de mică încît nu a putut fi stabilită prin măsurătorile pămîntului făcute pînă în prezent. În geodezie pămîntul este considerat un elipsoid de rotație. Primele calcule mai precise în această direcție se datoresc lui Friedrich Wilhelm Bessel (1784 — 1846). În anul 1924 a fost recunoscut pe plan internațional elipsoidul stabilit prin calcule de către John Hayford (1868 — 1925). Ultimele valori au fost găsite de Feodosi Nikolaievici Krasovski (1878—1948); ele se folosesc în lucrările de geodezie în U.R.S.S.

Elipsoidul pămîntesc	Raza ecuatorială a	Raza polară b	$(a - b)/a$
Hayford	6378,388 km	6356,912 km	1/297
Krasovski	6378,245 km	6356,863 km	1/298,3

Într-o primă aproximare, Pămîntul poate fi considerat o sferă (glob); raza medie a Pămîntului este: $R = 6371{,}221$ km [$\lg R = 3{,}8042227$] sau $R = 3959{,}740$ mile.

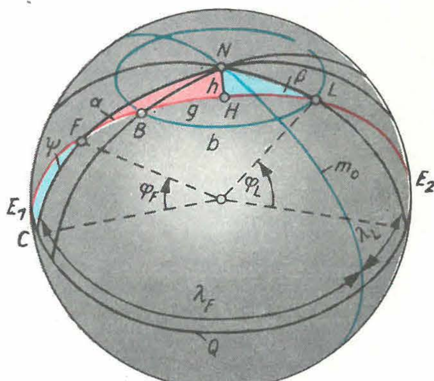
Unități de măsură pe globul pămîntesc

1° pe un cerc mare	111,20 km
1° pe ecuator	111,32 km
1 milă geografică $= \frac{1}{15}$ dintr-un grad pe ecuator	7,422 km
Lungimea arcului unui sfert de meridian	10 002,288 km
Lungimea medie a unui grad pe meridian	111,137 km
1 milă marină	1,852 km
1 nod = 1 milă marină/oră	1,852 km/h

După cum s-a procedat și pentru deducerea coordonatelor Gauss-Krüger în trigonometria plană, un punct pe sfera pămîntească (glob) este determinat prin longitudinea λ și latitudinea φ. Meridianele sînt cercuri mari, nu însă și paralelele; raza unei paralele ρ este $\rho = R \cos \varphi$; distanțele pe glob se măsoară pe cercuri mari deoarece acestea sînt geodezice și reprezintă drumul cel mai scurt; ele mai sînt denumite ortodrome. Unghiurile făcute cu un meridian se numesc *unghiuri de drum.*

Determinarea distanțelor și direcțiilor. Fie P_1 și P_2 două poziții pe glob determinate prin latitudinea φ și longitudinea λ. Se poate calcula pentru aceste puncte distanța dintre ele pe un cerc mare și unghiul dintre acest cerc și meridianele ce trec prin P_1, respectiv P_2. Soluția se obține cu ajutorul formulelor de rezolvare a triunghiurilor sferice și cu regula lui Neper.

Exemplu. Un avion cu viteza de zbor de 800 km/h trebuie să zboare de la Leningrad ($\varphi_L = 59{,}9°$ N; $\lambda_L = 30{,}3°$E $= -30{,}3°$) la San Francisco ($\varphi_F = 37{,}8°$N; $\lambda_F = 122{,}4°$V $= +122{,}4°$) pe cel mai scurt drum, adică pe arcul de cerc mare $\widehat{LF}$ (fig. 12.3.1). Pe meridianul fiecăruia dintre aceste locuri distanța la ecuator este dată de latitudinea geografică φ. Arcul de meridian de la fiecare loc la polul nord N este $90° - \varphi$ pentru cele două locuri indicate $\widehat{LN} = 90° - \varphi_L = 30{,}1°$, respectiv $\widehat{FN} = 90 - \varphi_F = 52{,}2°$. Aceste arce formează cu arcul de cerc mare $\widehat{LF}$ un triunghi sferic în care unghiul $\Delta\lambda$ dintre cele două meridiane este cunoscut, $\Delta\lambda = \lambda_F - \lambda_L = 122{,}4° + 30{,}3° = 152{,}7°$. Triunghiul sferic este dat prin două laturi și unghiul cuprins între ele. Arcul de cerc mare $g = \widehat{LF}$ se găsește din relația dintre cosinusurile laturilor.



12.3.1. Traiectoria de zbor de la Leningrad la San Francisco (schemă)

$$\cos g = \cos(90° - \varphi_L)\cos(90° - \varphi_F) + \sin(90° - \varphi_L)\sin(90° - \varphi_F)\cos\Delta\lambda,$$
$$\cos g = \sin\varphi_L \sin\varphi_F + \cos\varphi_L \cos\varphi_F \cos\Delta\lambda.$$

$\lg\sin\varphi_L =$	9,9371	$\lg\cos\varphi_L =$	9,7003	$\lg 2\pi =$	0,7982
$\lg\sin\varphi_F =$	9,7874	$\lg\cos\varphi_F =$	9,8977	$\lg R =$	3,8042
$\lg u =$	9,7245	$\lg\cos\Delta\lambda =$	9,9487 n	$\lg g =$	1,9017
$u =$	0,5304	$\lg v =$	9,5467 n		6,5041
$+v =$	− 0,3522	$v =$	− 0,3522	$\lg 360° =$	2,5563
$\cos g = u + v =$	+ 0,1782			$\lg \bar{g} =$	3,9478
$g =$	79,74°			$\bar{g} =$	8868 km

Acest arc are lungimea $\bar{g} = 2\pi R g/360° = 8\,868$ km dacă se folosește pentru R valoarea aproximativă 6 371 km și deci cu viteza indicată poate fi parcurs în 11 ore (mai precis 11,08 h). Unghiurile α și β în triunghiul sferic se obțin din teorema sinusurilor. Avionul pleacă din Leningrad cu unghiul de drum N 21,61° V și prin unghiul N13,52°E, ajunge la San Francisco cu unghiul de drum S 13,52°V. Fiecare meridian intersectează traiectoria de zbor sub un alt unghi. Unghiul de drum crește continuu de la N21,61° V cu 144,87° pînă la unghiul de drum final de S13,52°V. Într-un punct H al traiectoriei de zbor, direcția de zbor este îndreptată spre vest. În acest punct avionul este cel mai aproape de polul nord. Punctul H este piciorul perpendicularei coborîte din pol pe latura $\widehat{LF}$. Înălțimea h împarte triunghiul în două triunghiuri dreptunghice. În triunghiul LNH cu ajutorul regulii lui Neper se pot calcula h și unghiul $\lambda_1 = \sphericalangle LNH$. În dreptul meridianului de longitudine $\lambda_H = 40,78°$ V, avionul zboară drept către vest, el s-a apopiat de pol cu 1 183 km. Paralela Leningradului va fi intersectată în B sub același unghi ca în Leningrad; unghiul de drum este în acest moment de S 21,61°V. Meridianul punctului B are longitudinea $\lambda_B = \lambda_H + \lambda_1 = 40,78° + 71,08° = 111,86°$ V, coordonatele geografice ale punctului B vor fi deci $\varphi_B = 59,9°$ N și $\lambda_B = 111,86°$V. Arcul $\widehat{BH} = \widehat{LH}$ se obține din triunghiul dreptunghic LNH cu ajutorul regulii lui Neper.

$\sin\alpha = \cos\varphi_L \cdot \sin\Delta\lambda/\sin g$		
$\sin\beta = \cos\varphi_F \cdot \sin\Delta\lambda/\sin g$		
$\lg\sin\beta$ =	9,5662	→ $\beta = 21,61°$
$\lg\cos\varphi_F$ =	9,8977	
$\lg\sin\Delta\lambda$ = 9,6615		
$\lg\sin g$ = 9,9930	→ 9,6685	
$\lg\cos\varphi_L$ =	9,7003	
$\lg\sin\alpha$ =	9,3688	→ $\alpha = 13,52°$

$\cos(90° - \varphi_L) = \operatorname{cotg}\lambda_1 \operatorname{cotg}\beta$,	$\operatorname{cotg}\lambda_1 = \operatorname{tg}\beta\sin\varphi_L$	$\cos\beta = \operatorname{tg}\widehat{LH}\operatorname{tg}\varphi_L$
$\cos(90° - h) = \sin(90° - \varphi_L)\sin\beta$,	$\sin h = \cos\varphi_L\sin\beta$	$\operatorname{tg}\widehat{LH} = \operatorname{cotg}\varphi_L\cos\beta$
$\lg\operatorname{tg}\beta$ = 9,5978	$\lg\sin\beta$ = 9,5662	$\lg\operatorname{cotg}\varphi_L$ = 9,7632
$\lg\sin\varphi_L$ = 9,9371	$\lg\cos\varphi_L$ = 9,7003	$\lg\cos\beta$ = 9,9684
$\lg\operatorname{cotg}\lambda_1$ = 9,5349	$\lg\sin h$ = 9,2665	$\lg\operatorname{tg}\widehat{LH}$ = 9,7316
λ_1 = 71,08°	h = 10,64°	$\widehat{LH}$ = 28,33°
$-\lambda_L$ = − 30,3°	$\lg 2\pi R$ = 4,6024	$\lg(2\pi R/360°)$ = 2,0461
λ_H = 40,78°V	− lg 360° = − 2,5563	$\lg\widehat{LH}$ = 1,4522
	2,0461	3,4983
	$\lg h$ = 1,0269	
	$\lg\bar{h}$ = 3,0730	$\overline{LH}$ = 3 150 km
	$\bar{h}$ = 1183 km	

Abia în punctul B, adică după un drum de $\widehat{LB} = 6\,300$ km și după un timp de zbor de 7h 52 min 30s (7,875 ore) avionul se îndreaptă spre latitudinile sudice. Punctul B, avionul l-ar fi putut atinge și pe paralele de latitudine $\varphi = 59,9°$N care trece prin Leningrad. Toate meridianele ar fi fost intersectate cu același unghi de drum, sub un unghi drept. Drumul b de la L la B ar fi fost însă mai lung, nemaifiind situat pe ortodromă (cerc mare) ci pe loxodromă (curbă cu unghi de drum constant). Raza ρ a paralelei este $\rho = R\cos\varphi_L$. Arcului b îi corespunde unghiul la centru $\Delta\lambda$, deci $\bar{b} = 2\pi R\cos\varphi_L \cdot \dfrac{\Delta\lambda}{360°}$. Se obține $\bar{b} = 8\,516$ km în loc de 6 300 km pe ortodromă, diferența fiind de 2 216 km. Zborul ar fi durat cu 2 h 45 min mai mult.

$\lg(2\pi R/360°)$ =	2,0461
$\lg\cos\varphi_L$ =	9,7003
$\lg\Delta\lambda$ =	2,1838
$\lg\bar{b}$ =	3,9302
$\bar{b}$ =	8516 km

Un corp care parcurge aceeași traiectorie însă cu viteza unui satelit artificial $v = 8$ km/s are nevoie pentru a parcurge $\widehat{LB}$ de numai 787,5 s = 13 min 7,5 s și ajunge la San Francisco după 1108,5 s sau 18 min 28,5 s dacă se neglijează frecarea. Traiectoria lui intersectează ecuatorul în două puncte E_1 și E_2 care apar ca intersecția a două cercuri mari cu un diametru al sferei. Dacă se notează cu C punctul de intersecție al meridianului, ce trece prin San Francisco, cu ecuatorul, atunci triunghiul E_1CF este dreptunghic în C. Sînt cunoscute în acest triunghi unghiul $\psi = 13,52°$ și latura $CF = \varphi_F$. Cu regula lui Neper se găsește latura $\widehat{CE_1}$.

$\sin\varphi_F$	$\doteq$	$\operatorname{cotg}\alpha \operatorname{tg}\widehat{E_1C}$
$\operatorname{tg}\widehat{E_1C}$	$=$	$\operatorname{tg}\alpha\sin\varphi_F$
$\lg\operatorname{tg}\alpha$	$=$	$9{,}3811$
$\lg\sin\varphi_F$	$=$	$\underline{9{,}7874}$
$\lg\operatorname{tg}\widehat{E_1C}$	$=$	$9{,}1685$
$\widehat{E_1C}$	$=$	$8{,}39°$

Punctul E_1 are coordonatele $\varphi_{E_1} = 0$, $\lambda_{E_1} = \lambda_F + 8{,}39° = 130{,}79°\text{V}$ iar E_2 are coordonatele $\varphi_{E_2} = 0$, $\lambda_{E_2} = (130{,}79° + 180°)\ \text{V} = 310{,}79°\text{V}$ sau $\lambda_{E_2} = 49{,}21°\ \text{E}$.

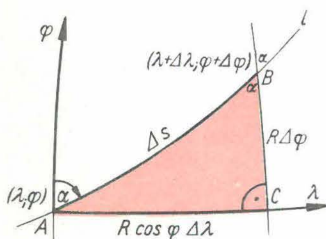
Loxodrome. Avantajul pentru un vapor sau un avion de a parcurge ortodroma — drumul cel mai scurt — este însoțit de dezavantajul obligației de a-și schimba unghiul de drum în fiecare moment. O curbă care intersectează toate meridianele sub același unghi de drum α se numește *loxodromă*. O paralelă este o loxodromă cu unghiul de drum $\alpha = 90°$, un meridian pentru $\alpha = 0°$. În cazul general, dacă α este un unghi de drum oarecare, atunci există o curbă pe care o funcție transcendentă stabilește legătura între latitudinea φ și longitudinea λ. Dacă se consideră două puncte alăturate pe o loxodromă (fig. 12.3.2), cu coordonatele (λ, φ) și $(\lambda+\Delta\lambda;\ \varphi+\Delta\varphi)$ și se consideră prin punctul A paralela cu raza $\rho = R\cos\varphi$, atunci arcele $\widehat{AC} = R\cos\varphi\,\Delta\lambda$, $\widehat{CB} = R\Delta\varphi$ și $\widehat{AB} = \Delta s$ formează un triunghi dreptunghic ABC care nu este sferic (numai $R\Delta\varphi$ se găsește pe un cerc mare) însă poate fi considerat plan atunci cînd $\Delta\varphi$ și $\Delta\lambda$ sînt alese suficient de mici. În acest triunghi există relațiile

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta\lambda\cos\varphi}{\Delta\varphi} \quad \text{și} \quad \Delta s\cos\alpha = R\Delta\varphi.$$

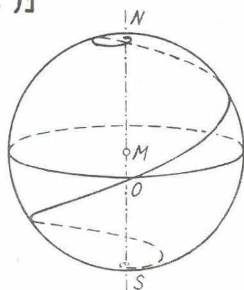
La limită, cînd $\Delta\varphi \to 0$, aceste relații se transformă în ecuațiile diferențiale $\dfrac{d\lambda}{d\varphi} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\varphi}$ și $\dfrac{ds}{d\varphi} = \dfrac{R}{\cos\alpha}$ în care variabilele se pot ușor separa. Din prima se obține, prin integrare, ecuația loxodromei:

$$d\lambda = \operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{d\varphi}{\cos\varphi}, \quad \lambda = \operatorname{tg}\alpha\left[\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)+C\right],$$

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \operatorname{tg}\alpha\left[\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_2}{2}\right) - \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_1}{4}\right)\right],$$



12.3.2. Derivarea loxodromei



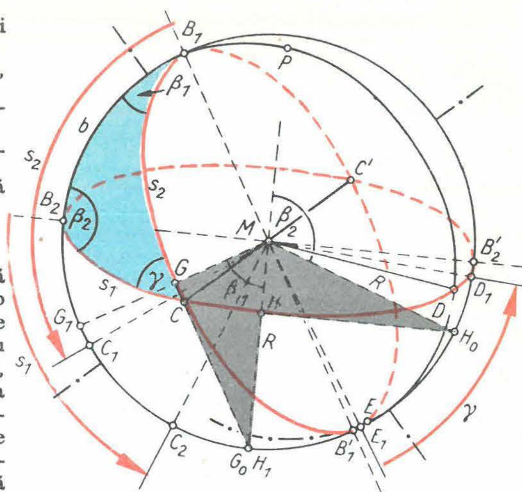
12.3.3. Loxodromă

iar din a doua se obține lungimea arcului de loxodromă, s:

$$ds = \frac{R}{\cos\alpha}\cdot d\varphi, \quad s = \frac{R}{\cos\alpha}\cdot(\varphi_2 - \varphi_1)\cdot$$

O discuție mai profundă a primei ecuații arată că loxodroma se apropie de polul cercului mare care taie perpendicular meridianul ce trece prin acest punct, avînd o traiectorie spirală cu bucle din ce în ce mai mici, fără să-l atingă însă (punct asimptotic). Modificarea latitudinii φ de-a lungul curbei scade progresiv (fig. 12.3.3). După a doua ecuație, traiectoria de zbor a unui avion care taie la ecuator un meridian sub unghiul de drum α are pînă ce atinge latitudinea φ, lungimea $s = R\varphi/\cos\alpha$, deci este cu atît mai lungă cu cît unghiul α este mai mare. Pentru un

zbor la polul nord $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$ cu un unghi de drum constant $\alpha = 60°$ de exemplu, se obține $s = 2R\frac{\pi}{2} = \pi R$, pe cînd drumul cel mai scurt de-a lungul unui meridian este $s = R\frac{\pi}{2}$; drumul pe loxodromă are deci lungimea dublă.



12.3.4. Metoda grafică de relevment extern

Relevmente. Prin *relevment* se determină poziția unui vapor, avion sau a unui alt corp cunoscîndu-se direcția indicată de semnale care se propagă rectiliniu și care de regulă nu sînt optice. Din punct de vedere geometric, procedeul are la bază aceeași schemă ca procedeul intersecției directe, respectiv indirecte, din trigonometria plană. Acum este vorba de un relevment extern cînd semnalele sînt recepționate și prelucrate de două stații terestre fixe, și de un relevment intern cînd determinarea direcției și poziției se face de către obiect, semnalele fiind transmise de stații terestre cunoscute.

Practic se folosesc numai semnale radio. Deoarece în tehnica măsurătorilor, prin măsurători repetate și prin nivelare, se obține valoarea cea mai probabilă a mărimii măsurate, rezultă că tehnica relevmentelor se bazează pe o determinare a direcțiilor cu precizie suficient de mare. În acest scop se mai folosesc proprietățile fizice ale undelor ca de exemplu, interferență, oscilații și alte metode ca radarul. În general, relevmentul se referă la obiecte în mișcare; determinarea poziției se va face deci cu ajutorul tabelelor, a metodelor grafice și cu aparate electronice, pentru ca rezultatul să se obțină în timpul cît obiectul relevat se găsește încă în apropierea poziției determinate. Din punct de vedere practic, relevmentul este o metodă tehnică și fizică; ne vom mulțumi să dăm aici o metodă grafică simplă.

Metoda grafică de relevment extern. Pentru a obține figuri mai clare se ia baza b de 60°. Unghiurile β_1 și β_2 alăturate acestei baze în punctele B_1 și B_2 se obțin prin măsurare: $\beta_1 = 60°$ și $\beta_2 = 110°$. Proiecția pămîntului se alege în așa fel încît cercul mare prin B_1 și B_2 să se proiecteze ca cerc (fig. 12.3.4), $\sphericalangle B_2MB_1 = 60°$. Cercul mare prin B_1 (și prin punctul diametral opus B_1') și prin punctul căutat C se proiectează sub o elipsă, a cărei axă mare este B_1B_1' și a cărei axă mică este perpendiculară în M pe B_1B_1'.

Lungimea axei mari este proiecția razei sferice $R = \overline{MG'}$ care se obține ca intersecția a două plane: 1. planul cercului mare prin B_1CB_1' care are înclinarea β_1 față de planul desenului și 2. planul de proiecție care este perpendicular în M pe π și B_1B_1'. Dacă G este proiecția lui G', atunci $\Delta\, MG'G$ este un triunghi dreptunghic în care se cunoaște ipotenuza $\overline{MG'} = R$ și unghiul $G'MG = \beta_1$, unde $MG \perp B_1B_1'$. Pe figură se proiectează acest triunghi în planul desenului, $\Delta\, MGG_0$ în care apare lungimea $\overline{MG}$ a semiaxei mici (în general $G_0 \neq H_1$). Cunoscînd semiaxa mare MB_1 și semiaxa mică MG, se poate construi orice punct de pe elipsă (proiecția cercului mare prin B_1, G și B_1') cu o precizie dată. Pentru cercul mare prin punctele B_2 și B_2' al cărui plan are înclinarea β_2 față de planul desenului, sînt valabile considerații analoage. Se construiesc astfel succesiv: perpendiculare în M pe B_2B_2', unghiul β_2, punctul] de intersecție H_0 al laturii unghiului cu cercul de rază R, perpendiculara din H_0 pe perpendiculara în M pe B_2B_2' care ne dă pe H; $\overline{MH}$ este după poziție și mărime cea mai mică semiaxă a elipsei căutate. Intersecția C a celor două elipse este punctul căutat.

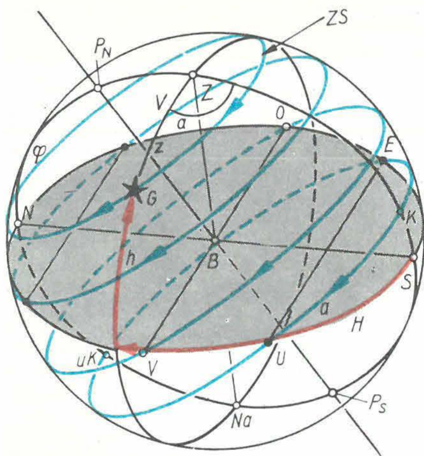
Pentru a găsi valorile adevărate ale laturilor $s_1 = \widehat{B_2C}$ și $s_2 = \widehat{B_1C}$ trebuie proiectate cercurile mari în planul desenului. Proiecția fiecărui punct al cercului mare se deplasează pe o perpendiculară pe axa mare; de exemplu C spre C_1, respectiv C_2; se găsește $\sphericalangle B_1MC_1 = s_2$, $\sphericalangle B_2MC_2 = s_1$ și unghiul de înclinație γ al planelor celor două cercuri mari se poate determina pe figură.

Ambele plane se intersectează după dreapta CMC'. Cercul polar cu polul C taie ambele cercuri mari sub un unghi drept, în punctele D și E. Arcul $\widehat{DE}$ corespunde unghiului γ. Prin rotația cercului polar în jurul unui diametru, în planul desenului se găsește valoarea adevărată a unghiului γ; $\sphericalangle E_1MD_1 = \gamma$.

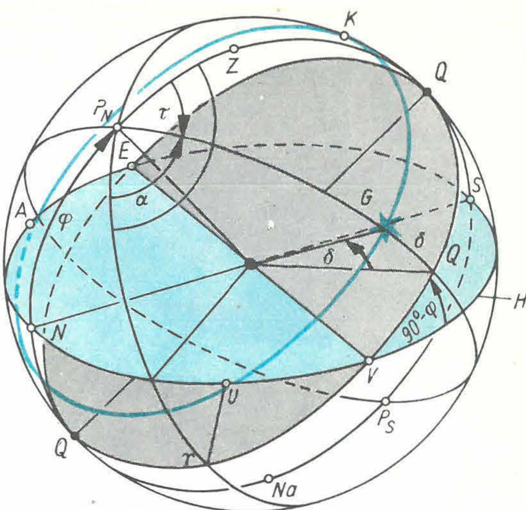
Astronomia sferică

Pe lîngă determinarea poziției vapoarelor și avioanelor prin relevment, se mai folosește încă și azi orientarea după stele. Înainte, aceasta era unica metodă de orientare pentru navigația pe mare. Și exploratorii ținuturilor necunoscute foloseau tot această metodă de orientare. Măsurările necesare se făceau cu busola, teodolitul, sextantul sau alte instrumente asemănătoare pentru măsurarea unghiurilor, ca și cu ajutorul cronometrului. Cunoașterea celor mai simple configurații stelare este suficientă pentru o orientare aproximativă. Pentru determinarea precisă a poziției, sînt necesare date privind poziția unor stele care se găsesc ușor ca și asupra mișcării Soarelui, a Lunii, a planetelor și referirea acestor date la sistemul de coordonate astronomice. Datele din astronomia sferică necesare scopurilor navigației apar în anuarele nautice și astronomice; sistemele de coordonate folosite în navigație sînt sistemul de coordonate *orizontale* și sistemul de coordonate *ecuatoriale*. Ca dealtfel toate sistemele de coordonate astronomice, acestea rezultă din aceea că cerul înstelat apare unui observator ca o parte a unei sfere imense, sfera cerească aparentă. Pe această sferă poziția unui punct este dată de două coordonate (analoge longitudinii și latitudinii de pe globul terestru). Ca sistem de referință pentru aceste date se poate lua orice *cerc mare* cu *polii* săi (*pol* și *polară*); pe acest cerc, dintr-un punct fixat se măsoară unghiurile într-o direcție stabilită. A doua coordonată se măsoară însă pe un cerc mare perpendicular pe primul care trece prin pol și prin punctul a cărui poziție se determină.

Sistemul de coordonate orizontale. Unui observator B aflat pe mare sau într-o regiune plană îi apare cerul pe timp de noapte ca o emisferă mărginită de orizontul H (fig. 12.3.5). Din punct de vedere matematic *orizontul* (aparent) este cercul în care planul tangent la Pămînt, în locul de observație, intersectează sfera cerească. Raza Pămîntului este neglijabilă față de distanțele dintre principalele stele. Orizontul aparent coincide deci cu orizontul adevărat care apare ca intersecție a unui plan dus prin centrul Pămîntului paralel cu planul tangent. Polii orizontului sînt *zenitul* Z vertical deasupra observatorului și *nadirul* Na, ca punct diametrul opus al zenitului. Observatorului îi apare mișcarea stelelor pe o traiectorie care începe la orizont (răsăritul A), crește pînă la o înălțime maximă, *punctul de culminație* K și scade apoi pînă la un punct U (apusul) și apoi trece *dedesubtul liniei orizontului* și se închide trecînd prin punctul uK opus punctului de culminație. Cercul mare care trece prin punctele de culminație ale tuturor stelelor se numește *meridian ceresc*. Există stele, numite *circumpolare* ZS, a căror orbită (traiectorie) se găsește în întregime peste orizont. Toate constelațiile astrale descriu în decursul unei zile un *cerc mic* pe cer; orbitele lor sînt paralele. Centrele acestor cercuri se găsesc pe o dreaptă numită *axa cercului* sau *axa lumii*. Aceasta intersectează sfera cerească în două puncte, *polul nord ceresc* P_N și *polul sud ceresc* P_S. Această mișcare circulară a astrelor este aparentă, ea este urmarea rotației Pămîntului în jurul axei sale și polii cerești sînt ficși fiind indicați de axa Pămîntului. Direcția observatorului în raport cu polul ceresc este paralelă cu axa Pămîntului și va fi deci pentru un observator aflat la polul nord al Pămîntului perpendiculară pe orizont iar pentru un observator la ecuatorul Pămîntului orizontală. Dacă ne imaginăm că planul tangent alunecă de-a lungul unui meridian terestru de la ecuator la polul nord, atunci *înălțimea polului ceresc* crește continuu de la 0° la 90° și este egală cu *latitudinea geografică*. Înălțimile h se măsoară pe *cercuri mari* prin zenit și nadir, numite *verticale* V, care sînt perpendiculare pe orizont; ele au valorile: la orizont 0°, la zenit +90° și la nadir −90°. Prin măsurarea înălțimii polului ceresc, *înălțimea polului*, se obține latitudinea geografică a observatorului. Intersecția verticalei prin polul ceresc cu orizontul se numește *punctul nord* N. Diametral opus acestuia se găsește la orizont *punctul sud* S; observatorul privind spre punctul nord are la dreapta perpendicular pe direcția privirii punctul est E și la stînga punctul vest V. Direcțiile indicate de aceste puncte sînt cele patru direcții cardinale Nord, Sud, Est și Vest. Ele se determină prin coborîrea perpendicularei din polul ceresc (Nord) sau prin stabilirea verticalei punctelor în care o stea fixă culminează; direcția nord împarte în două părți egale unghiul dintre două verticale în care steaua fixă are aceeași înălțime. Pe lîngă înălțimea h încă o coordonată este *azimutul a*. *Azimutul* se măsoară din punctul de observație ca unghi făcut de planul meridian și planul vertical al stelei și crește de la polul sud (0°) în sensul mișcării diurne aparente a stelei spre Vest, Nord, Est pînă la 360°. Azimutul apare ca un arc pe orizont sau ca un unghi în punctul zenit. În locul



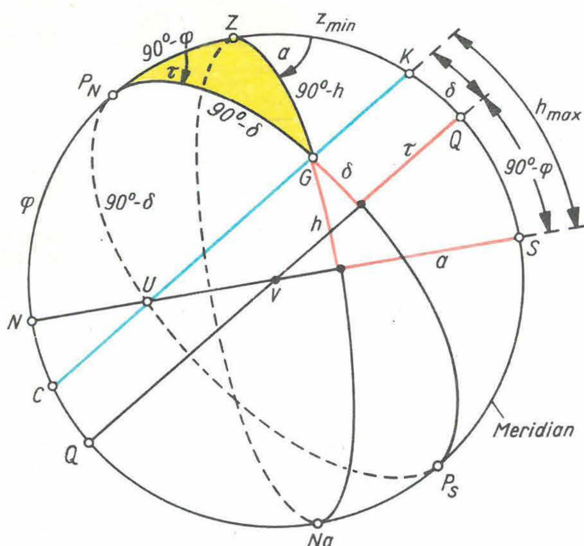
12.3.5. Sistem de coordonate orizontal



12.3.6. Sistem de coordonate ecuatorial

înălțimii se folosește uneori unghiul complementar acesteia (*distanța zenitală z*) măsurată din zenit: $h + z = 90°$.

Sistemul ecuatorial. Deoarece toate stelele se mișcă în jurul polului ceresc pe cercuri paralele, distanța acestuia la fiecare dintre aceste cercuri trebuie să fie constantă. Dintre acestea se alege ca cerc de bază *cercul mare polar* polului ceresc și i se dă denumirea de *ecuator Q* deoarece el reprezintă intersecția dintre planul ecuatorului terestru cu sfera cerească. Pe bolta cerească ecuatorul trece aproximativ în constelația Peștilor, prin cea mai înaltă dintre stelele ce formează centura constelației Orion, și prin steaua Altair din constelația Vulturului. Ecuatorul taie orizontul în punctul Vest și punctul Est (fig. 12.3.6) și are față de orizont înclinația $90° - \varphi$. Înălțimea unei stele peste orizont se numește *declinația* δ și se măsoară pe un cerc mare numit *cerc orar* care trece prin polii cerești P_N și P_S și deci este perpendicular pe ecuator. Ca a doua coordonată să ia *unghiul orar* τ, adică unghiul dintre cercul orar și meridianul ceresc M, unde steaua culminează. Meridianul trece prin punctul Nord și punctul Sud, prin zenit Z și nadir Na și prin polii cerești P_N și P_S; el reprezintă intersecția planului meridianului locului cu sfera cerească. Unghiul orar se măsoară pornind de la meridian în sensul mișcării diurne aparente a stelei de la 0° pînă la 360°, respectiv de la 0 h la 24 h; punctul Vest are deci unghiul orar 90°, respectiv 6 h. *Sistemul de coordonate ecuatoriale* sau *orare*, cum mai este denumit uneori, este independent de latitudinea locului de observație, deoarece declinația se referă la ecuator. Direcția nulă începînd cu care se măsoară unghiul orar este însă determinată de meridianul locului observatorului și deci depinde de longitudinea geografică; de exemplu unghiul orar al aceleiași stele este la același moment, pentru Moscova mai mare decît pentru Berlin, deoarece din cauza rotației pămîntului, steaua culminează la Moscova cu 1 h 36 min 47 s = 96,8 min mai devreme decît la Berlin. Deoarece la 24 h corespund în grade 360°, diferența dintre unghiurile orare este $96{,}8° : 4 = 24{,}2°$, adică Moscova este cu $\Delta\lambda = 24{,}2°$ mai la Est decît Berlin. Pentru a face și a doua coordonată din sistemul ecuatorial independentă de locul de observație se marchează un punct al ecuatorului ceresc. Acest punct, numit *punct vernal* ♈ participă împreună cu ecuatorul la mișcarea aparentă a boltei cerești; din această cauză unghiul măsurat pe ecuator pornind din acest punct în direcția opusă rotației aparente pînă la cercul orar al stelei este constant. Acest unghi se numește *ascensiunea dreaptă* α. *Ascensiunea dreaptă* α și *declinația* δ sînt coordonatele celui de-al doilea sistem de coordonate ecuatoriale. Poziția aproximativă a punctului vernal se găsește pe ecuatorul ceresc considerînd cercul orar al stelei polare (P_N) prin extremitatea dreaptă a constelației Casiopeia care are forma lui W.



12.3.7. Sistemul orizontal și primul sistem ecuatorial

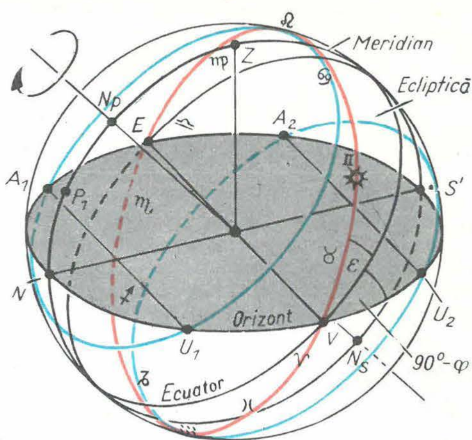
Relațiii între sistemele de coordonate orizontale și orare. Reprezentînd cele două ssiteme de coordonate pe aceeași figură (fig. 12.3.7) se observă că orizontul și ecuatorul se intersectează în punctul Est și în punctul Vest. Prin astrul G trece unghiul orar și cercul vertical; orbita stelei este paralelă cu ecuatorul; ea atinge în K punctul de culminație superior și în C punctul de culminație inferior. A este răsăritul și U apusul. Înălțimea polului ceresc P_N deasupra orizontului este latitudinea geografică a locului O de observație, $\widehat{NP_N} = \varphi$. Figura a rezultat pin proiecția ortogonală a figurii reprezentînd *sistemul ecuatorial*, pe planul meridianului prin N, P_N, Z, K, Q și S; cercul orar al punctului vernal ♈ nu se găsește pe figură, se reprezintă însă cercul vertical al astrului G prin zenit Z și nadir Na. Punctele E și A se găsesc în spatele punctelor V și U și din această cauză nu sînt vizibile. Unghiurile φ, $90° - \varphi$ și δ apar în mărime adevărată.

Înălțimea de culminație. Cînd astrul G culminează în K, el atinge înălțimea maximă h_{max} și are în același timp distanța zenitală minimă z_{min}. Deoarece ecuatorul formează unghiul $90° - \varphi$ cu orizontul, rezultă $\varphi = \delta + z_{min}$ și pentru înălțimea de culminație $h_{max} + z_{min} = 90°$ sau $h_{max} = 90° - \varphi + \delta$. Cunoscîndu-se înălțimea de culminație h_{max} a unui astru se poate determina latitudinea φ cînd se cunoaște declinația δ sau invers, din cunoașterea latitudinii φ se determină declinația δ.

Triunghiul nautic. Pentru o poziție oarecare a astrului G cele două sisteme sînt legate prin triunghiul nautic avînd vîrfurile în G, în polul ceresc P_N și în zenitul Z. El se compune din: latura $\widehat{GZ} = 90° - h$ (distanța zenitală), $\widehat{GP_N} = 90° - \delta$, $\widehat{ZP_N} = 90° - \varphi$ și din unghiurile din Z și P_N. Atît azimutul a cu vîrful în Z, cît și unghiul orar τ cu vîrful în P_N se măsoară de la meridian în sensul mișcării diurne a astrului. Deoarece pe figură s-a reprezentat poziția lui G după culminația sa, unghiurile vor avea mărimile $\sphericalangle GZP_N = 180° - a$ și $\sphericalangle ZP_NG = \tau$. Dacă pe figura 12.3.8 s-a reprezentat partea din sfera cerească aflată în spatele planului meridian, atunci astrul G s-ar fi aflat înainte de culminație, V s-ar fi înlocuit cu E și U cu A și unghiurile triunghiului nautic ar fi fost: $\sphericalangle GZP_N = a - 180°$ și $\sphericalangle ZP_NG = 360° - \tau$.

Orbita Soarelui. În momentul *echinocțiului de primăvară* soarele se găsește în punctul vernal ♈, răsare la ora 6 în punctul Est, se deplasează pe cer aproximativ de-a lungul ecuatorului și apune la ora 6 seara în punctul Vest. Ascensiunea dreaptă și declinația Soarelui $\alpha_{\odot}$, respectiv $\delta_{\odot}$, spre deosebire de cele ale altor stele fixe, nu sînt constante; ascensiunea dreaptă a Soarelui este în continuă creștere, iar declinația scade între 22 decembrie și 22 iunie. Din cauza creșterii acensiunii drepte (fig. 12.3.8), Soarele atinge meridianul pămîntesc în fiecare zi mai tîrziu decît punctul vernal. În decursul unui an, această întîrziere devine de o zi. Pe cînd punctul vernal și toate stelele fixe culminează de 366 ori, soarele culminează numai de 365 ori. Din cauza declinației crescînde a soarelui, punctele de răsărit A și de apus U sînt mutate mai spre nord cu A_1 și U_1. Zilele devin mai lungi pînă la solstițiul de vară. Atunci Soarele are declinația maximă $\delta = 23°26'$ *(tropicul racului)*. După aceea, declinația descrește, devine nulă la începutul toamnei, și la momentul solstițiului de iarnă devine 23°26' *(tropicul capricornului)* și apoi la începutul

primăverii este din nou nulă. Orbita Soarelui pe cer nu este un cerc, ca în cazul celorlalte stele fixe, ci o spirală dublă cu 365 de bucle care ocupă o zonă de lăţimea 2 · 23°26′. În decursul unui an, Soarele parcurge 13 constelaţii care din cauza sistemului duodecimal se reduc la 12. Aceste constelaţii se găsesc pe un cerc mare în regiunea orbitei anuale evidente a Soarelui. Această orbită se numeşte *ecliptică*. Aceste *constelaţii* sînt Berbecul, Taurul, Gemenii, Racul, Leul, Fecioara, Balanţa, Scorpionul, Săgetătorul, Capricornul, Vărsătorul, Peştii. Ecliptica taie ecuatorul în punctul vernal şi în punctul opus acestuia, ***punctul autumnal***, sub unghiul $\varepsilon = 23°26'$. Mişcarea aparentă a soarelui pe ecliptică este urmarea mişcării Pămîntului în jurul Soarelui. Cele 12 constelaţii se găsesc în planul orbitei Pămîntului în jurul Soarelui. Un sistem de coordonate cu ecliptica drept polară are ca sistem de refe-



12.3.8. Mişcarea aparentă a Soarelui în decursul unui an

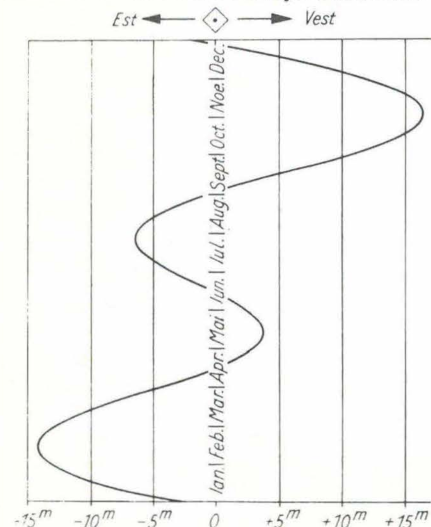
12.3.9. Bolta cerească nordică

rință planul orbitei Pămîntului. Roiul de stele din Calea Lactee se găsește pe un alt cerc mare care formează planul de bază al *sistemului galactic*. Acesta este cel mai indicat sistem de coordonate pentru descrierea repartiție stelelor în Calea Lactee (fig. 12.9.3).

Calculul timpului. Măsurarea intervalelor de timp necesită ceasuri care pot fi controlate și reglate prin procedee periodice. Rotația pămîntului în jurul axei sale s-a dovedit foarte regulată; o stea fixă sau punctul vernal ♈ pe orbita sa aparentă pe ecuatorul ceresc poate servi ca arătător al unui ceas foarte precis. Observațiile făcute cu ceasuri de cuarț sau atomice au arătat că această rotație nu este complet uniformă. Lungimea zilei se schimbă datorită deplasărilor de mase și altor fenomene din interiorul Pămîntului ca și datorită fenomenelor meteorologice la suprafața pămîntului. Calculul timpului s-a stabilit prin convenții internaționale pe baza duratei parcurgerii tropicului în mișcarea Pămîntului în jurul Soarelui. Prin *an tropic* se înțelege durata dintre două treceri succesive a Soarelui prin punctul vernal. Această perioadă este variabilă dar variația ei este neglijabilă (o secundă în 1 000 de ani); prin alegerea unei perioade determinate, valabile pentru un timp fix, se alege un an tropic determinat. Timpul socotit astfel este absolut uniform și se numește *timpul efemeridelor* sau *timp newtonian*, deoarece el este folosit în astronomie pentru calculul coordonatelor corpurilor cerești, a efemeridelor. În acest fel, secunda s-a definit ca a 31 556 925,9747-a parte a anului tropic pentru 1900, ianuarie 0, ora 12, timpul efemeridelor; după calendar, 1900 ianuarie 0 este 31.12.1899.

Timp stelar. Durata de timp dintre două culminații succesive ale Berbecului se numește *zi stelară*. Ea se împarte în 24 h (*ore stelare*) fiecare avînd 60 min (*minute stelare*) a cîte 60 s* (*secunde stelare*). Ziua stelară începe cu culminația punctului vernal. Unghiul orar t_Υ al punctului vernal exprimat în unități de timp este timpul stelar. El este același pentru toate punctele aflate pe același meridian terestru (*timp stelar local*) mai mare pentru locurile estice, mai mic pentru cele vestice. Din timpul stelar local la același moment pentru două locuri diferite t_1 și t_2 se poate calcula diferența de latitudine a celor două locuri $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$. Unei diferențe de timp stelar $\Delta t = t_2 - t_1$ de 24 h* îi corespunde o diferență de latitudine $\Delta\lambda = 360°$, deci unei ore h*, 15°, unui minut stelar 15′ și unei secunde stelare 15″. Invers unui grad îi corespunde o diferență de latitudine 24 h*/360 = 1 h*/15 = 4 min*. Deci, cînd punctul vernal culminează la Leipzig $\lambda = 12{,}4°$E, la Ulan Bator ($\lambda = 106{,}9°$E) este timpul stelar (106,9 — 12,4) · 4 min = 378 min* = 6h* 18 min*.

Ziua solară. Deoarece viața omului este organizată după Soare și acesta, poate fi luat ca indicator al timpului, respectiv arătător de ceasornic. Incovenientul acestui procedeu este că orbita anuală a Soarelui traversează ecliptica. De asemenea, datorită neuniformității mișcării Pămîntului în jurul Soarelui pe elipsa lui Kepler, viteza Soarelui pe ecliptică nu este constantă. Pentru a înlătura acest neajuns se introduce pe lîngă soarele real un *soare mediu* a cărui ascensiune dreaptă α_m crește uniform de la 0° la 360° în decursul unui an. Unghiul orar t_m al acestui soare mediu determină un timp solar mediu sau timp mediu t_m spre deosebire de unghiul orar al soarelui real care determină timpul real t_s. Diferența $t_s - t_m = ET$ se numește *ecuația timpului*. Pe figura 12.3.10 se vede poziția soarelui real atunci cînd soarele mediu culminează; dacă de exemplu ecuația timpului este negativă, adică $t_m > t^*$, atunci soarele mediu va culmina deja pe cînd soarele real se va găsi încă la est de meridian. Legătura dintre durata unei zile stelare și durata unei zile solare rezultă din aceea că un an tropic în timp stelar are 366,2422 zile, pe cînd în timp mediu 365,2422 zile. Se obține: 24 ore timp mediu = 24 h* 3 min* 56,55536s*; 24 h* = 23 h + 56 min 4,09058 s timp mediu; 1 h timp mediu = 1,002737909 h*, 1 h* = 0,997269564 h timp mediu.



12.3.10. Ecuația timpului $t_s - t_m = ET$ în decursul unui an; ◇ soare mediu

Timp zonal. Este de la sine înțeles că atît timpul real cît și timpul mediu reprezintă un *timp local*, că numai locurile aflate pe același meridian terestru au același timp local. Această consecință a naturii, foarte incomodă pentru comunicații, s-a atenuat stabilindu-se că toate locurile aflate într-o

zonă adică într-un fus sferic cu diferența de latitudine de 15°, să aibă același timp cu meridianul central al zonei. Timpul mediu al meridianului de la Greenwich $\lambda = 0$ se numește *ora Greenwich*, cel al meridianului $\lambda = -15°$ sau $\lambda = 15°$E *ora Europei centrale*.

Exemplul 1. La 18.11 înainte de amiază un vapor se găsește la $\varphi = 54°57'$N. Se observă înălțimea soarelui $h_s = 9°15'$. Cronometrul vasului indică ora Greenwich 8 h 58 min 20 s, anuarul nautic indică $\delta_s = -19°12'$ și ecuația timpului + 14 min 50 s. Pe ce meridian se găsește vaporul?

În triunghiul nautic (fig. 12.3.11) — zenit Z, pol P_N, soare S — se cunosc laturile $\widehat{ZS} = 90° - h = 80°45'$, $\widehat{ZP_N} = 90° - \varphi = 35°03'$, $\widehat{SP_N} = 90° - \delta = 100°12'$. Diferența t' pînă la 360° a unghiului orar t se găsește din relația dintre semiunghiuri:

$$\sin \frac{1}{2} t' = \sqrt{\left[\frac{\sin(s - [90° - \varphi])\sin(s - [90° - \delta])}{\sin(90° - \varphi)\sin(90° - \delta)}\right]}.$$

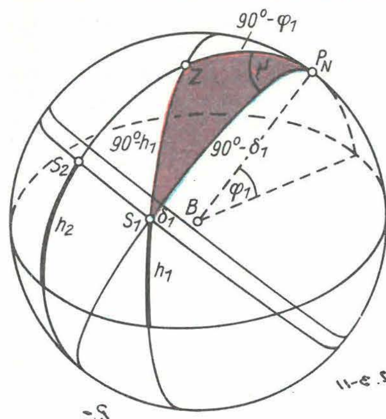
		lg sin
$90° - h =$	$80°45'$	9,98950
$90° - \varphi =$	$35°03'$	+ 8,76015
$90° - \delta =$	$109°12'$	8,74965
$2s =$	$225°00'$	− 9,75913
$s =$	$112°30'$	− 9,97515
$s - [90° - \varphi] =$	$77°27'$	9,01537
$s - [90° - \delta] =$	$3°18'$	9,50768
$\frac{1}{2} t' =$	$18°46'34''$	
$t' =$	$37°33'8'' = 2$ h 30 min 13 s	

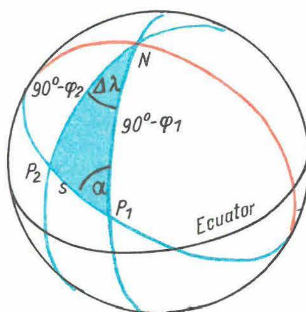
Observația are loc cu 2 h 30 min 13 s înainte de culminația soarelui real, deci la 12h − 2 h 30 min 13 s = 9 h 29 min 47 s. Ora locală va fi însă cu 14 min 50 s mai mică, adică 9 h 14 min 57 s. Diferența față de ora Europei centrale este 9h 14 min 57 s − 8 h 58 min 20 s = 16 min 37 s, respectiv 16° 37' : 4 = 4°9'15". Vaporul se afla la $\lambda = 4°9'15''$E și 54°57'N.

Exemplul 2. De pe un vapor aflat în oceanul Pacific la nord de ecuator se măsoară la ora Greenwich 18 h 50 min înălțimea soarelui $h = 21{,}7°$, declinația soarelui dată de anuarul nautic este $\delta_1 = -10{,}15°$ și ecuația timpului + 15 min 3 s. După ce parcurge o distanță de 15,2 mile marine pe cercul mare determinat de direcția N 67,5°V, soarele culminează la înălțimea $h_2 = 35°$ la o declinație $\delta_2 = -10{,}21°$. Care sînt coordonatele locului de observație?

Pentru înălțimea de culminație are loc:

$$h_{max} = h_2 = 90° - \varphi_2 + \delta_2 \quad \text{sau} \quad \varphi_2 = 90° + \delta_2 - h_2, \quad \text{adică} \quad \varphi_2 = 44{,}79°.$$





12.3.11. Reprezentare schematică a globului ceresc (stînga) și a globului pămîntesc (dreapta)

Pe suprafața pămîntului prin cele două locuri de observație P_1 și P_2 și prin polul nord N trece un triunghi sferic P_1NP_2. Cu un unghi de drum $\alpha = 67{,}5°$ în punctul P_1 vaporul va parcurge între cele două locuri de observație distanța $\widehat{P_1P_2} = 15{,}2$ mile marine $= 15{,}2 \cdot 1{,}852$ km, arcul

$$s = \frac{360 \cdot 15{,}2 \cdot 1{,}852}{2\pi R} = 0{,}253°.$$

Latura $\widehat{P_2N}$ opusă unghiului de drum α este $90° - \varphi_2 = 45,21°$; din relația sinusurilor se găsește $\Delta\lambda$, $\sin \Delta\lambda = \sin s \sin \alpha/\sin (90° - \varphi_2)$; se obține $\Delta\lambda = 0,329°$. În același triunghi din analogia neperiană 2a) rezultă:

$$\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(90° - \varphi_1) = \mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(90° - \varphi_2 - s)\sin\frac{1}{2}(\alpha + \Delta\lambda)\Big/\sin\frac{1}{2}(\alpha - \Delta\lambda),\text{ deci } 90° - \varphi_1 = 45,3°,\text{ adică } \varphi_1 = 44,7°.$$

În triunghiul nautic ZP_NS_1 al primului observator sînt cunoscute cele trei laturi $\widehat{ZS_1} = 90° - h_1$, $\widehat{ZP_N} = 90° - \varphi_1$ și $\widehat{P_NS_1} = 90° - \delta_1$; din relația sinusurilor laturilor se calculează de aici unghiul t' care împreună cu unghiul orar t face 360°:

$$\cos t' = \frac{\sin h_1 - \sin \varphi_1 \sin \delta_1}{\cos \varphi_1 \cos \delta_1};\text{ se obține } t' = 45,13° = 3,01\text{ h} = 3\text{h } 0\text{ min } 36\text{ s}.$$

Pentru prima observație timpul local real era de 12 h — 3 h 0 min 36 s sau 8h 59 min 24 s sau timpul local mediu era de 8 h 44 min 21 s deoarece $t_m = t_s - ET$. Față de timpul mediu local Greenwich diferența de timp este 18 h 50 min — 8 h 44 min 21 s = 10 h 05 min 39s sau 10,094 h; diferența de longitudine va fi deci 10,094 · 15° = 151,41°. Deoarece Greenwich se găsește la est de P_1, longitudinea lui P_1 va fi $\lambda_1 = 151,41°$V și cea a lui P_2: $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda = 151,74°$.

13. Geometria analitică a planului

Proprietățile figurilor geometrice pot fi cercetate și cu ajutorul calculului algebric, raportînd figura la un sistem de referință și făcînd să corespundă unui punct un număr real, două sau trei numere reale, după cum ne aflăm pe dreaptă, în plan sau în spațiu. În felul acesta, proprietățile geometrice se traduc prin ecuații, iar rezolvarea problemelor se face folosind metode algebrice. Ramura aceasta a matematicii se numește *geometrie analitică* și este o adevărată sinteză între număr și punct, căci ea cuprinde și punctul de vedere geometric, care se referă în special la formele figurilor și punctul de vedere algebric care distinge în primul rînd măsurile mărimilor geometrice. Geometria analitică este o creație a timpurilor moderne.

Se consideră ca dată a creării ei anul 1637, cînd filozoful, matematicianul și fizicianul R. DESCARTES (1596—1650) a publicat lucrarea sa „*La Géométrie*". În partea a treia a acestei lucrări se găsesc principiile de bază ale geometriei analitice. Cu puțin timp înainte, Pierre de FERMAT în

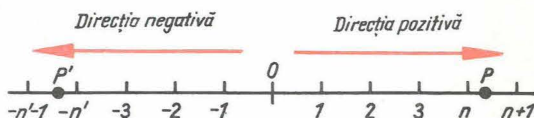
lucrarea „*Ad locos planos et solidos isagoge*" (Introducere în studiul locurilor geometrice în plan și în spațiu) a indicat anumite metode ale geometriei analitice. Progresul a fost lent. Primul tratat de geometrie analitică mai apropiat de zilele noastre a fost scris de Leonhard EULER (1707—1783). Denumirea de geometrie analitică a fost dată de S. F. LACROIX în 1797, iar prima carte didactică de geometrie analitică a fost scrisă de J. BRET în 1802.

13.1. Sisteme de coordonate în plan

Împletirea între gîndirile geometrică și algebrică se oglindește în faptul că figurile geometrice pot fi interpretate ca mulțimi de puncte. Punctelor le sînt atașate valori numerice, care le deosebesc între ele. O curbă sau o dreaptă este imaginea unei mulțimi de puncte între care există anumite relații. Imaginea unei ecuații liniare cu două variabile este o dreaptă, iar imaginea unei ecuații de gradul doi este o conică.

La baza geometriei analitice stă posibilitatea atașării fiecărui punct al dreptei *a unui număr și numai unul*. Pentru a localiza un punct pe o dreaptă este suficient un singur număr. În plan sau în spațiu sînt necesare două, respectiv trei numere pentru a localiza un punct. Aceste numere atașate punctului se numesc *coordonate*.

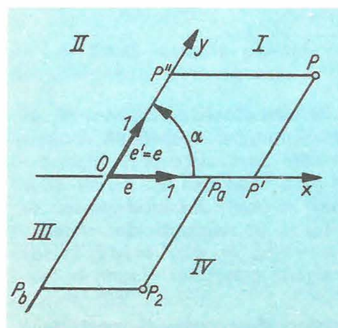
Axa numerelor. Un punct P este unic determinat pe o dreaptă pe care s-au fixat o *origine* O (din latinescul *origo*) și un segment *unitate* $e = \overrightarrow{O1}$. Această dreaptă se numește *axă*. Aplicăm acest segment unitate la dreapta originii de un număr oarecare de ori atașînd capetelor numerele întregi pozitive 1, 2, ... și la stînga originii atașînd numerele întregi -1, -2, ... Deci vom avea două sensuri pe axă: *pozitiv* și *negativ* (fig. 13.1.1). Un punct P este o astfel de extremitate sau se găsește între două extremități, de exemplu n și $n+1$; există întotdeauna un număr real x astfel încît distanța OP să fie $x \cdot e$. Pentru x pozitiv, $n \leqslant x \leqslant n+1$, iar pentru x negativ $-n' \geqslant x \geqslant -n' - 1$. Numărul x este *coordonata* punctului P. Invers, orice număr real x determină în mod unic un punct P pe axa numerelor prin ecuația $m(OP) = xe$, unde $m(OP) = |OP|$ dacă $x > 0$ și $m(OP) = -|OP|$ dacă $x < 0$.



13.1.1. Axa numerelor

Sisteme paralele de coordonate

Sisteme paralele de coordonate oblice. Pentru a stabili poziția unui punct în plan sînt necesare două drepte care au *originile* O și O' și vectorii unitate $e = \overrightarrow{O1}$ și $e' = \overrightarrow{O'1'}$, deoarece planul are două dimensiuni. În cazul în care $O = O'$ le numim *axe ale sistemului de coordonate*, axele Ox și Oy fiind numite respectiv *axa absciselor* și *axa ordonatelor*. Dacă axele fac un unghi $\alpha \neq 90°$ între ele, sistemul se numește *oblic*. Dacă axa Ox poate fi suprapusă cu Oy prin rotire cu un unghi α în sens trigonometric, sistemul de coordonate se numește *drept* și *stîng* în caz contrar. Planul este împărțit de axele de coordonate în patru cadrane. Paralelele duse la axe din punctul P intersectează axa OX în P' și OY în P''. Coordonatele x și y (fig. 13.1.2) ale acestor puncte pe axe sînt *coordonatele* punctului P. Diferitelor puncte P le sînt atașate perechi de numere diferite (x, y). Invers, pentru fiecare pereche de numere (a, b) putem găsi pe axele de coordonate punctele P_a și P_b astfel că $\overline{OP_a} = ae$ și $\overline{OP_b} = be'$. Paralele la axe prin aceste puncte P_a și P_b se intersectează în P_2 care are coordonatele (a, b). Punctele de pe Ox au coordonatele $(x, 0)$, cele de pe



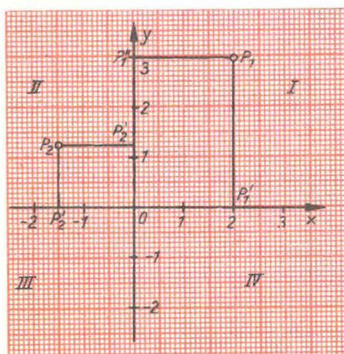
13.1.2. Sistem oblic de coordonate

Semne		Punctul se află în cadranul
Abscisă	Ordonată	
+	+	I
−	+	II
−	−	III
+	−	IV

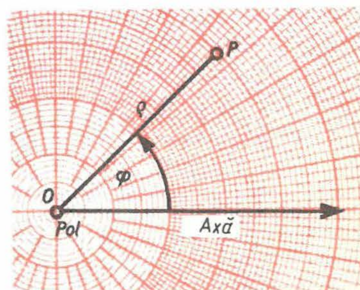
$Oy(0, y)$ iar originea (0, 0). În fiecare cadran coordonatele au diferite semne pe care le găsim în tabelul alăturat.

Sistem paralel de coordonate rectangulare, coordonate carteziene. Într-un sistem de coordonate carteziene axele sînt perpendiculare, iar *unitățile de măsură egale*. Astfel, cele două paralele la axe duse printr-un punct P sînt perpendiculare între ele și perpendiculare pe axe. În general se folosesc sisteme de coordonate rectangulare, de regulă drepte. În topografie se folosesc însă sisteme rectangulare stîngi (cap. 11).

Exemplu. P_1 din figura 13.1.3 are coordonatele $x_1 = +2$ și $y_1 = +3$ iar P_2, avînd coordonatele $x_2 = -\dfrac{3}{2}$ și $y_2 = +\dfrac{5}{4}$ nu poate avea decît poziția din figură. Originea are coordonatele (0, 0).



13.1.3. Sistem paralel de coordonate rectangulare



13.1.4. Coordonate polare ale punctului P: $\varphi = 45°$ și $\rho = 4$.

Sistemul de coordonate polare

Sistemul de coordonate polare. Un sistem de coordonate polare se definește printr-un punct O, *numit pol* sau *origine*, și printr-o semiaxă dusă prin pol numită *axă polară*. Poziția unui punct P din plan este determinată dacă se cunosc: distanța $\rho = OP$ de la *pol* la punctul considerat și unghiul φ pe care-l face axa polară cu semidreapta OP, socotit în sens pozitiv (fig. 13.1.4).

Numerele ρ și φ se numesc *coordonate polare* ale punctului P, ρ se numește *raza vectoare* a punctului P sau *modul* și poate lua numai valori nenegative; φ se numește *fază*, *amplitudine* sau *argument* și poate avea valori între 0 și 2π. Pentru punctul O, $\rho = 0$ și φ este nedeterminat.

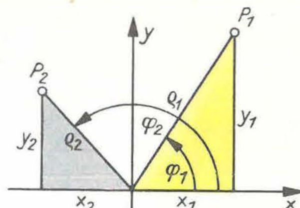
Trecerea de la un sistem de coordonate la altul

O figură geometrică poate fi reprezentată în două sisteme de coordonate diferite K_1 și K_2, de exemplu sistem cartezian și sistem de coordonate polare. Vom găsi deci două ecuații $f_1(x, y) = 0$ și $f_2(\xi, \eta) = 0$. În loc de a deduce ambele ecuații în cele două sisteme de coordonate putem deduce numai una dintre ecuații și să o obținem pe a doua din ea. Avem de-a face atunci cu o *transformare* a unui sistem în celălalt. Coordonatele (x, y) ale unui punct în sistemul de coordonate K_1 se vor transforma în coordonatele (ξ, η) în sistemul de coordonate K_2 și invers. Dacă *ecuațiile de transformare* sînt ecuațiile $x = t_1(\xi, \eta)$ și $y = t_2(\xi, \eta)$ iar ecuațiile de transformare *inversă* $\xi = \tau_1(x, y)$ și $\eta = \tau_2(x, y)$, atunci ecuațiile $f(x, y) = 0$ și $f(\xi, \eta) = 0$ se transformă una în alta.

Transformarea unui sistem de coordonate polare într-un sistem de coordonate carteziene și invers (fig. 13.1.5). Pentru simplificare presupunem că ambele sisteme de coordonate au aceeași origine și axa Ox comună. Un punct P în sistemul de coordonate polare are coordo-

natele (ρ, φ) iar în sistemul cartezian (x, y). Din relațiile stabilite în trigonometrie $x = \rho \cos \varphi$ și $y = \rho \sin \varphi$, obținem relațiile

$x=\rho \cos \varphi$ $y=\rho \sin \varphi$	$x^2+y^2=\rho^2$ $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$	$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$



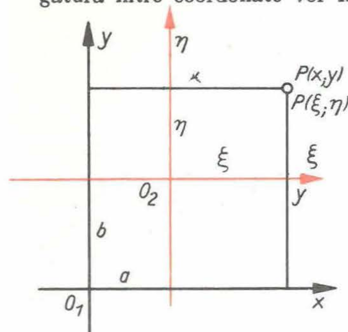
13.1.5. Relațiile dintre coordonatele carteziene și polare

Exemplul 1. Dacă P_1 are coordonatele în sistemul de coordonate rectangulare (3, 4), atunci $\rho_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$; $\cos \varphi_1 = \frac{3}{5} = 0,6$; $\sin \varphi_1 = \frac{4}{5} = 0,8$. Din tabelele trigonometrice obținem $\varphi_1 = 53,13°$. Deci P_1 va avea coordonatele în sistemul de coordonate polare $\rho_1 = 5$ și $\varphi_1 = 53,13°$.

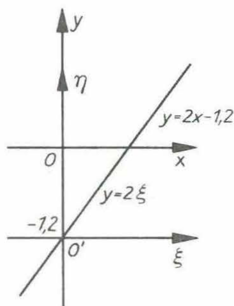
Exemplul 2. P_2 are coordonatele polare $\rho_2 = 3$, $\varphi_2 = 120°$ iar prin trecerea la coordonatele carteziene $x_2 = 3 \cos 120°$ și $y_2 = 3 \sin 120°$. Prin folosirea tabelelor trigonometrice vom obține $x_2 = -\frac{3}{2}$ și $y_2 = \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

Exemplul 3. În coordonate polare ecuația cercului de rază r este dată de $\rho = r$ și $0 \leqslant \rho < 2\pi$. Prin aplicarea ecuațiilor de transformare la sistemul de coordonate carteziene vom obține $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = r$ și deci $x^2 + y^2 = r^2$.

Translația unui sistem de coordonate rectangulare. Un punct P are în două sisteme de coordonate carteziene K_1 și K_2 coordonatele x și y, respectiv ξ și η. Axele sînt alese astfel încît sînt paralele iar originea O_2 a sistemului K_2 are în K_1 coordonatele $(a; b)$. Relațiile de legătură între coordonate vor fi $x = a + \xi$, $y = b + \eta$ (fig. 13.1.6), sau $\xi = x - a$, $\eta = y - b$.



13.1.6. Două sisteme paralele de coordonate rectangulare



13.1.7. Transformarea ecuației unei drepte

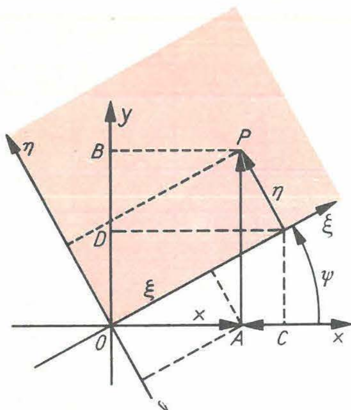
Transformarea de coordonate prin translație	$x = a + \xi$ $y = b + \eta$
Transformare inversă	$\xi = x - a$ $\eta = y - b$

Aceste formule de transformare sînt independente de cadranul în care se află originea noului sistem de coordonate; de exemplu dacă a și b sînt pozitivi, atunci translația se face spre dreapta în sus; dacă sînt însă negativi, ea se face spre stînga în jos.

Exemplul 1. Să transformăm sistemul xO_1y astfel încît originea sistemului paralel cu el $\xi O_2 \eta$ să se afle în punctul $P(4, -2,5)$. Deci $a = 4$, $b = -2,5$ iar ecuațiile de transformare vor fi $x = 4 + \xi$, $y = -2,5 + \eta$.

Exemplul 2. O dreaptă are ecuația în sistemul de coordonate xOy, $y = 2x - 1,2$. În punctul de intersecție cu axa Oy $(0; -1,2)$ fixăm originea O' a noului sistem de coordonate $\xi O' \eta$. Deoarece $a = 0$ și $b = -1,2$, ecuațiile de transformare vor fi $x = \xi$ și $y = \eta - 1,2$. Dreapta va avea în noul sistem de coordonate ecuația $\eta - 1,2 = 2\xi - 1,2$ sau simplificînd $\eta = 2\xi$ (fig. 13.1.7).

Rotirea unui sistem de coordonate rectangulare (fig. 13.1.8). Sistemul de coordonate xOy va fi rotit în jurul originii în sensul pozitiv trigonometric cu un unghi ψ. Noul sistem de coor-



13.1.8. Rotirea unui sistem de coordonate

donate va fi $\xi O \eta$. Un punct P are coordonatele în vechiul sistem (x, y) iar în noul sistem (ξ, η). Proiecția coordonatei ξ pe axa Ox va fi $\overrightarrow{OC} = \xi \cos \psi$ iar proiecția coordonatei η pe axa Ox va fi $\overrightarrow{CA} = \eta \cos\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) = -\eta \sin \psi$. Efectuăm *însumarea vectorilor*: $x = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA} = \xi \cos \psi - \eta \sin \psi$. Unghiul dintre axa $O\xi$ și axa Oy va fi $\frac{\pi}{2} - \psi$ iar cel dintre axa $O\eta$ și axa Oy va fi $\frac{\pi}{2} - \psi - \frac{\pi}{2} = -\psi$. Deci proiecțiile coordonatelor ξ și η pe axa Oy vor fi $\overrightarrow{OD} = \xi \cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \xi \sin \psi$ și $\overrightarrow{DB} = \eta \cos(-\psi) = \eta \cos \psi_1$. Însumînd cei doi vectori, ecuația de transformare a ordonatelor va fi:

$$y = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DB} = \xi \sin \psi + \eta \cos \psi.$$

Ecuațiile de transformare a sistemului de coordonate xOy prin rotirea cu un unghi ψ	$x = \xi \cos \psi - \eta \sin \psi$	$\xi = x \cos \psi + y \sin \psi$
	$y = \xi \sin \psi + \eta \cos \psi$	$\eta = -x \sin \psi + y \cos \psi$

Formulele pentru ξ și η le obținem prin rotirea sistemului de coordonate $\xi O \eta$ cu unghiul $-\psi$.

Exemplu. Ce coordonate are punctul $P(2; 4)$ într-un nou sistem de coordonate obținut prin rotirea cu un unghi $\psi = 30°$? Vechile coordonate sînt

$$x = 2,\ y = 4$$

$$\sin \psi = \frac{1}{2},\ \cos \psi = \frac{1}{2}\sqrt{3};\ \text{deci}$$

$$\xi = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 + \sqrt{3},$$

$$\eta = -2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = -1 + 2\sqrt{3}.$$

Indicație. Printr-o translație a unui sistem paralel de coordonate se pot obține ecuații mai simple ale curbelor. Prin rotirea sistemului de axe xOy este întotdeauna posibil ca dintr-o ecuație de gradul doi în x și y să eliminăm termenul mixt xy (vezi Discuția ecuației de gradul doi). Se va folosi în cazul acesta transformarea de axe principale. Rotind sistemul de axe cu un unghi ψ de 45° ecuația $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$ va avea o formă mai simplă, adică nu va mai conține *termenul* xy:

$$x = \xi \cos 45° - \eta \sin 45° = (\xi - \eta)\frac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$y = \xi \sin 45° + \eta \cos 45° = (\xi + \eta)\frac{1}{2}\sqrt{2},$$

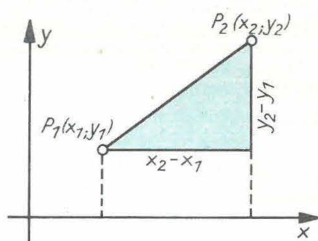
deci prin înlocuirea în ecuația dată avem

$$\frac{1}{2}(\xi^2 - 2\xi\eta + \eta^2) + \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2) + \frac{1}{2}(\xi^2 + 2\xi\eta + \eta^2) - 3 = 0 \quad \text{sau} \quad 3\xi^2 + \eta^2 - 6 = 0.$$

13.2. Punct și dreaptă

Segmente și raportul în care un punct împarte un segment

Distanța dintre două puncte. Mărimea distanței dintre două puncte se măsoară în geometria pură cu rigla iar în geometria analitică se determină cu ușurință în *funcție de coordonate*. Distanța dintre două puncte $P_1(x_1, y_1)$ și $P_2(x_2, y_2)$ în sistemul de coordonate rectangulare xOy se calculează aplicînd teorema lui Pitagora (fig. 13.2.1).



13.2.1. Distanța dintre două puncte

Distanța dintre punctele P_1 și P_2	$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Exemple. 1. Fiind date $P_1(1;\ 8)$ și $P_2(4;\ 2)$, avem $\overline{P_1P_2} = \sqrt{(4-1)^2 + (2-8)^2} = \sqrt{3^2 + (-6)^2} = \sqrt{45} \approx 6{,}71$.

2. Fiind date punctele $P_3(-3, -2)$ și $P_4(-6, -1)$, distanța $\overline{P_3P_4} = \sqrt{(-6+3)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{10} \approx 3{,}16$.

3. Care este diferența de drum dintre P_1 și P_4 în linie dreaptă sau trecînd și prin P_2 și P_3?

$\overline{P_1P_4} = \sqrt{130} \approx 11{,}40$,

$\overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \overline{P_3P_4} = \sqrt{45} + \sqrt{65} + \sqrt{10} \approx 6{,}71 + 8{,}06 + 3{,}16 = 17{,}93$.

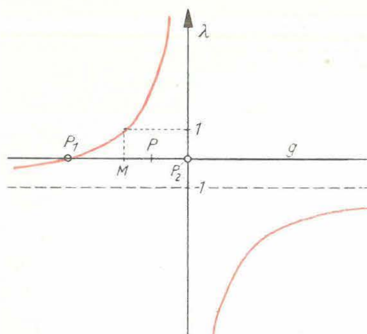
Deci diferența va fi $17{,}93 - 11{,}40 = 6{,}53$.

Raportul în care un punct împarte un segment dat (fig. 13.2.2). Un punct P care se găsește pe segmentul $\overrightarrow{P_1P_2}$ împarte segmentul în raportul $\overrightarrow{P_1P} : \overrightarrow{PP_2} = \lambda$; λ depinde nu numai de mărimea lui P_1P și PP_2 ci și de orientarea segmentelor, adică $\overrightarrow{P_1P} = -\overrightarrow{PP_1}$. Dacă punctul P *se găsește între punctele* P_1 și P_2, λ va fi *pozitiv* deoarece $\overrightarrow{P_1P}$ și $\overrightarrow{PP_2}$ au aceeași direcție. Dar cînd punctul P este *exterior segmentului* P_1P_2, raportul va fi *negativ*. λ este monoton crescător cînd punctul P parcurge segmentul $\overrightarrow{P_1P}$, deoarece în raportul $\lambda = \dfrac{\overrightarrow{P_1P}}{\overrightarrow{PP_2}}$ numărătorul crește și numitorul scade. În cazul în care P coincide cu P_1, $\lambda = 0$; cînd P este mijlocul segmentului $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\lambda = 1$. iar cînd P se apropie oricît de mult de P_2, $\lambda \to +\infty$. Cînd P este un punct exterior dreptei $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\lambda = \dfrac{\overrightarrow{P_1P}}{\overrightarrow{PP_2}}$ va fi negativ. În cazul cînd P este foarte distanțat, de P_1 și P_2, λ va tinde către -1: În cazul cînd P se apropie de P_1 în direcția $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overline{PP_2} = \overline{PP_1} + \overline{P_1P_2} > \overline{PP_1}$, λ va crește de la -1 spre 0. Cînd P se apropie în sens invers de P_2, $\overline{P_1P} = \overline{P_1P_2} + \overline{P_2P} > \overline{P_2P}$, adică $|\lambda| > 1$; $\overline{PP_2} \to 0$, λ va tinde către $-\infty$. Deci P parcurgînd toată dreapta reală, valorile lui λ vor fi

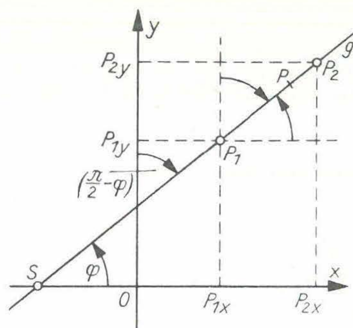
P	$-\infty$		P_1		M		P_2			$+\infty$
λ	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$ | $-\infty$		$\nearrow$	-1

Ecuațiile dreptei

Direcția unei drepte (fig. 13.2.3). O dreaptă orientată g formează cu axa Ox pozitivă un unghi $\sphericalangle(x, g) = \varphi$, iar cu axa Oy pozitivă un unghi $\sphericalangle(y, g) = \dfrac{\pi}{2} - \varphi$. Fie P_1, P_2 două puncte pe această dreaptă, astfel ca $\overrightarrow{P_1P_2}$ să fie pozitiv. Prin aceste puncte trasăm drepte paralele cu axele



13.2.2. Valoarea raportului de diviziune λ cînd un punct P parcurge o dreaptă



13.2.3. Ecuația dreptei și raportul în care un punct P împarte segmentul $\overrightarrow{P_1P_2}$.

care le vor intersecta în punctele P_{1x}, P_{2x}, respectiv P_{1y}, P_{2y}. *Proiecțiile segmentului $\overrightarrow{P_1P_2}$ pe axe* vor fi exprimate în funcție de unghiul φ astfel:

$$\overrightarrow{P_{1x}P_{2x}} = \overrightarrow{P_1P_2}\cos\varphi \quad \text{și} \quad \overrightarrow{P_{1y}P_{2y}} = \overrightarrow{P_1P_2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \overrightarrow{P_1P_2}\sin\varphi .$$

Dacă (x_1, y_1), respectiv (x_2, y_2) sînt coordonatele punctelor P_1 și P_2, atunci

$$x_1 + \overrightarrow{P_{1x}P_{2x}} = x_2,\ x_2 - x_1 = \overrightarrow{P_{1x}P_{2x}} \text{ și } y_1 + \overrightarrow{P_{1y}P_{2y}} = y_2,\ y_2 - y_1 = \overrightarrow{P_{1y}P_{2y}};$$

deoarece $\overline{P_1P_2} = +\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, obținem

$$\cos\varphi = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}; \quad \sin\varphi = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}.$$

Unghiul φ poate fi determinat cu ajutorul coordonatelor punctelor P_1 și P_2; el poate lua valori între 0 și 2π. Cel mai bine îl determinăm cu ajutorul tangentei

$$m = \operatorname{tg}\varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Bazîndu-ne pe faptul că arctg φ este *funcția inversă* funcției tg φ luăm pentru φ, valoarea cuprinsă între $-\frac{\pi}{2}$ și $\frac{\pi}{2}$. Valoarea m se numește *panta* dreptei g.

Ecuația unei drepte. Dacă punctul P împarte segmentul $\overrightarrow{P_1P_2}$ (fig. 13.2.4) în raportul $\lambda = \dfrac{\overrightarrow{P_1P}}{\overrightarrow{PP_2}}$, atunci aplicînd rezultatele de mai sus avem

$$x - x_1 = \overrightarrow{P_1P}\cos\varphi \quad \text{și} \quad y - y_1 = \overrightarrow{P_1P}\sin\varphi$$

$$x_2 - x = \overrightarrow{PP_2}\cos\varphi \quad \text{și} \quad y_2 - y = \overrightarrow{PP_2}\sin\varphi.$$

Pentru valoarea raportului obținem

$$\lambda = \overrightarrow{P_1P} : \overrightarrow{PP_2} = (x - x_1)/\cos\varphi : (x_2 - x)/\cos\varphi = (x - x_1) : (x_2 - x)$$

sau

$$\lambda = \overrightarrow{P_1P} : \overrightarrow{PP_2} = (y - y_1)/\sin\varphi : (y_2 - y)/\sin\varphi = (y - y_1) : (y_2 - y).$$

Cînd λ ia valori între $-\infty$ și $+\infty$, punctul P parcurge dreapta g. Dacă coordonatele x și y ale unui punct P verifică ecuația $(x - x_1):(x_2 - x) = (y - y_1):(y_2 - y)$, punctul P se află pe dreaptă. Coordonatele (x, y) se numesc coordonate curente. Prin aplicarea proprietăților proporțiilor, din $a:b = c:d$ rezultă $a:(a + b) = c:(c + d)$. În cazul nostru ecuația va avea forma $(x-x_1):(x_2-x_1) = (y - y_1):(y_2 - y_1)$. Prin schimbarea termenilor proporției obținem *ecuația carteziană a dreptei determinate de două puncte.*

Ecuația carteziană a dreptei determinate de două puncte:
$(y - y_1):(x - x_1) = (y_2 - y_1):(x_2 - x_1)$

Cunoscînd *coeficientul unghiular* $m = (y_2 - y_1):(x_2 - x_1)$ *al unei drepte și un punct P al dreptei*, putem stabili *ecuația dreptei* care trece printr-un punct și are panta dată.

Ecuația dreptei care trece printr-un punct și are panta dată:
$y - y_1 = m(x - x_1)$

Din compararea celor două ecuații rezultă $\operatorname{tg}\varphi = m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ și în funcție de poziția punctelor P_1 și P_2 poate lua toate valorile între $-\infty$ și $+\infty$.

Cazurile particulare sînt cele în care $y_2 - y_1 = 0$ și $x_2 - x_1 = 0$.

În primul caz $\operatorname{tg}\varphi=0$, $\varphi=0$, sau $180°$ și dreapta este paralelă cu axa Ox și are ecuația $y=y_1$; aceasta înseamnă că pentru orice valoare a abscisei x a punctului P de pe dreaptă, *ordonata va fi constantă și egală* cu y_1. Dreapta este paralelă cu axa Ox.

În cazul al doilea $\operatorname{tg}\varphi = \pm\infty$ și $\varphi = 90°$ sau $270°$. Deci ecuația dreptei va fi $x = x_1$ și dreapta este paralelă cu axa Oy. Ecuațiile axelor Ox și Oy vor fi următoarele: $y=0$ și respectiv $x = 0$. Din egalitățile $\lambda = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x}$ și $\lambda = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y}$ se pot calcula coordonatele x, y ale punctului P care împarte segmentul $\overrightarrow{P_1P_2}$ în raportul λ. Din $\lambda x_2 - \lambda x = x - x_1$ obținem $x = (x_1 + \lambda x_2)/(1 + \lambda)$. *Mijlocul M al segmentului* $\overline{P_1P_2}$ va avea coordonatele $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$ deoarece $\lambda = +1$.

Coordonatele punctului P care împarte segmentul $\overrightarrow{P_1P_2}$ în raportul λ	$x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$, $y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$

Exemplul 1. Direcția φ *a segmentului* $\overrightarrow{P_1P_2}$.

a) Fiind date punctele $P_1(2; 3)$ și $P_2(7, 8)$:

$$\cos\varphi = \frac{7 - 2}{\sqrt{(7 - 2)^2 + (8 - 3)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5^2 + 5^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{8 - 3}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Unghiul direcției este $\varphi = 45°$.

b) Fiind date $P_1(-1; -2)$ și $P_2(0; 8)$:

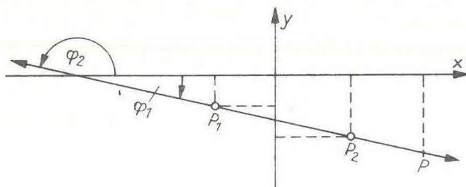
$$\cos\varphi = \frac{0 + 1}{\sqrt{(0 + 1)^2 + (8 + 2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{101}}, \qquad \sin\varphi = \frac{8 + 2}{\sqrt{101}} = \frac{10}{\sqrt{101}};$$

$\operatorname{tg}\varphi = 10$. Unghiul direcției este $\varphi = 84{,}3°$.

c) Fiind date $P_1(2; -3)$ și $P_2(-3; +5)$:

$$\cos\varphi = \frac{-3 - 2}{\sqrt{(-3-2)^2 + (5 + 3)^2}} = \frac{-5}{\sqrt{89}}, \qquad \sin\varphi = \frac{8}{\sqrt{89}};$$

$\operatorname{tg}\varphi = -\dfrac{8}{5} = -1{,}6$. Cadranul II, $\varphi = 180° - 58° = 122°$.



13.2.4. Dreapta dusă prin punctele $P_1(-4; -2)$ și $P_2(5; -4)$

Exemplul 2. Să se afle coordonatele punctului T care împarte segmentul mărginit de punctele $P_1(3; -2)$ și $P_2(-5; 4)$ astfel încît $\overrightarrow{P_1T} : \overrightarrow{TP_2} = 2 : 3$. Deoarece $\lambda = \frac{2}{3}$, avem

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = \frac{3 + \frac{2}{3}(-5)}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{9-10}{5} = -\frac{1}{5}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} = \frac{-2 + \frac{2}{3}\cdot 4}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{-6+8}{5} = \frac{2}{5}; \quad T\left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right).$$

Segmentul este împărțit în două părți egale ($\lambda = +1$) de punctul $M(-1; 1)$.

Exemplul 3. Ecuația dreptei care trece prin punctele $P_1(-4; -2)$ și $P_2(5; -4)$ va fi

$$\frac{y+2}{x+4} = \frac{-4+2}{5+4} \quad \text{sau} \quad y = -\frac{2}{9}x - \frac{26}{9}.$$

Panta dreptei va fi $m = -\frac{2}{9} = -0;2222... = \text{tg}\ \varphi$. Unghiul φ_1 va avea valoarea $\varphi_1 = -12,53°$. sau $\varphi_2 = 180° - 12,53° = 167,47°$, valoarea principală este $\varphi = -12,53°$. *Punctul* P_3, care se află la o distanță de $3|P_1P_2|$ de punctul P_2, *împarte segmentul* $\overrightarrow{P_1P_2}$ *în raportul* $\lambda = \overrightarrow{P_1P_3}/\overrightarrow{P_3P_2} = 4|P_1P_2|/(-3|P_1P_2|) = -\frac{4}{3}$. Punctul P_3 va avea coordonatele:

$$x_3 = \frac{x_1 - \frac{4}{3}x_2}{1 - \frac{4}{3}} = \frac{-4 - \frac{4}{3}\cdot 5}{-\frac{1}{3}} = 12 + 20 = 32$$

și

$$y_3 = \frac{y_1 - \frac{4}{3}y_2}{1 - \frac{4}{3}} = \frac{-2 - \frac{4}{3}(-4)}{-\frac{1}{3}} = -16 + 6 = -10.$$

Exemplul 4. Să se afle ecuația dreptei care trece prin punctul $P_1(3, 4)$ și formează cu Ox un unghi egal cu 60°. Deoarece $x_1 = 3$; $y_1 = 4$; $\text{tg}\ \alpha = m = \text{tg}\ 60° = \sqrt{3}$, ecuația dreptei va fi

$$y - 4 = \sqrt{3}(x-3) \text{ și prin rearanjarea termenilor}$$

$$y = \sqrt{3}\cdot x + 4 - 3\sqrt{3}.$$

Ecuația dreptei sub formă explicită. În ultimele exemple ecuațiile dreptelor au fost redate în forma $y = ax + b$. În general, orice ecuație a unei drepte poate fi scrisă sub forma aceasta, în afară de cele ale dreptelor paralele cu Oy. Din ecuația dreptei determinate de un punct și coeficientul unghiular obținem

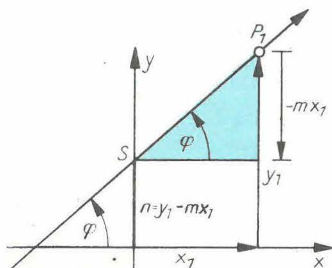
$$y - y_1 = m(x - x_1) = mx - mx_1 \text{ sau}$$
$$y = mx + (y_1 - mx_1),$$
$$y = mx + n, \text{ unde } n = y_1 - mx_1.$$

Ecuația dreptei sub formă explicită	$y = mx + n$

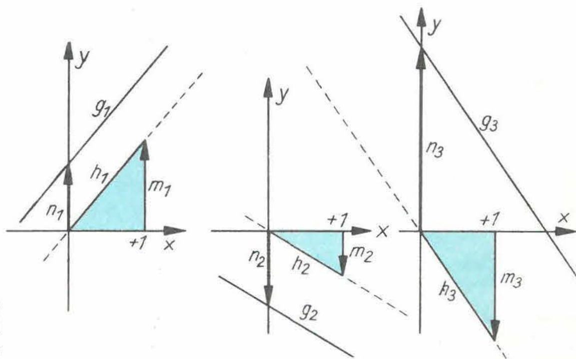
m se numește *coeficientul unghiular* și n *ordonata la origine* (fig. 13.2.5.).

O dreaptă paralelă la Oy are ecuația $x = x_1$. Deoarece $m = \operatorname{tg} \varphi$, mx_1 va reprezenta diferența dintre ordonata punctului P_1 și a punctului de intersecție S a dreptei cu axa Oy; $n = y_1 - mx_1$ este deci ordonata lui S. Dacă $x = 0$, y_s va fi egal cu n.

Fie o dreaptă $y = mx$ în care facem pe $x = 1$; deci y va avea valoarea m. Dreapta care are ecuația $y = mx + n$ este o *translație paralelă* a dreptei $y = mx$ cu n pe axa Oy. Construcția unei drepte g se va face în felul următor. Ducem o paralelă la axa Oy prin punctul $(1, 0)$ pe care construim un segment orientat de mărime m. Unind originea cu capătul segmentului m, obținem dreapta h care are panta egală cu m. Paralela la h dusă prin punctul de coordonate $(0, n)$ de pe axa Oy va fi dreapta căutată g (fig. 13.2.6).



13.2.5. Obținerea ecuației dreptei sub formă explicită din ecuația dreptei care trece printr-un punct și are panta dată

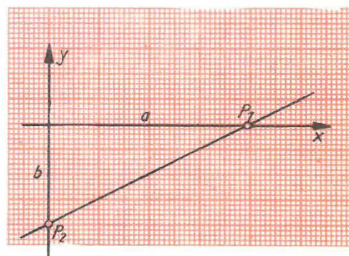


13.2.6. Trei exemple pentru ecuația sub formă explicită $y = mx + n$

Ecuația dreptei prin tăieturi (fig. 13.2.7). Dreapta poate fi determinată de punctele unde ea taie axele, de coordonate $P_1(a, 0)$ și $P_2(0, b)$. Înlocuind cele două puncte în ecuația dreptei ce trece prin două puncte, obținem

$$\frac{y - 0}{x - a} = \frac{b - 0}{0 - a} \quad \text{sau prin rearanjare} \quad \frac{y}{b} = -\frac{x}{a} + 1$$

sau $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$



13.2.7. Ecuația dreptei prin tăieturi

Ecuația dreptei prin tăieturi	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

Exemple. 1. Să se scrie ecuația dreptei care determină pe axele Ox și Oy segmentele $a = 4$ și $b = -2$. Ecuația dreptei prin tăieturi va fi $\frac{x}{4} + \frac{y}{-2} = 1$ sau sub formă explicită $y = \frac{x}{2} - 2$.

2. Ecuația dreptei prin tăieturi se poate scrie sub formă explicită. Din $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ obținem $y = -\frac{b}{a}x + b$. Deci $m = -\frac{b}{a}$ și $n = b$.

3. Care sînt punctele în care dreapta $y = -\frac{4}{3}x + 8$ taie axele de coordonate?

Din formulele de la exemplul 2 rezultă că $b = 8$ și $a = 6$.

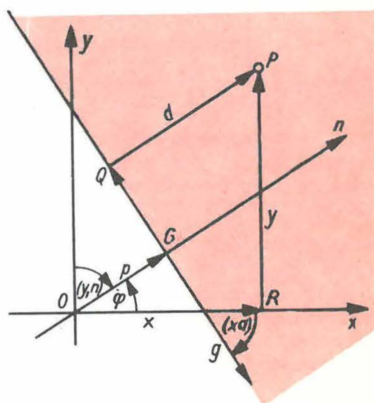
Ecuația normală a dreptei (Hesse). Această ecuație a fost dedusă de Otto HESSE (1811—1874). Printr-o *dreaptă orientată* g se va împărți planul în două părți și se va

socoti pozitivă acea parte a planului care se află în stînga dreptei. Trasăm o normală n astfel orientată încît unghiul (g, n) să aibă valoarea $+90$. Pe această normală se poate preciza *distanța p de la origine la dreapta g*; $\overrightarrow{OG} = p$, unde G este punctul de intersecție a normalei cu dreapta g. În figura 13.2.8. această distanță p este pozitivă. În cazul în care originea s-ar afla în planul desemnat de noi pozitiv, distanța p ar fi negativă, iar în cazul în care originea O coincide cu G, $p = 0$.

Fie φ unghiul format de axa Ox cu normala, $\varphi = \sphericalangle (x, n)$. Atunci unghiul format de axa Ox cu dreapta va fi $\sphericalangle(x, g) = \sphericalangle (x, n) - \frac{\pi}{2} = \varphi - \frac{\pi}{2}$. Unghiul (y, n) va fi egal cu $\frac{\pi}{2} - \varphi$. Unghiul φ poate să ia orice valoare în intervalul $[0, 2\pi)$. Punctul P are coordonatele carteziene $x = \overrightarrow{OR}$ și $y = \overrightarrow{RP}$ și *distanța $d = \overrightarrow{QP}$ la dreapta g*. Punctul O poate fi unit cu punctul P prin suma de vectori $\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GQ} + \overrightarrow{QP}$ sau $\overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RP}$. Proiecțiile lor pe normală trebuie să fie egale:

$$p + 0 + d = x \cos \varphi + y \cos (y, n) = x \cos \varphi + y \sin \varphi \quad \text{sau} \quad d = x \cos \varphi + y \sin \varphi - p$$

Punctele P care se află în partea pozitivă a planului au distanța d față de dreapta g pozitivă iar cele care se află în partea negativă au distanța negativă.



13.2.8. Ecuația normală a dreptei

Punctele de pe dreaptă vor avea $d = 0$ și deci ecuația dreptei va fi $x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0$.

Ecuația normală a dreptei	$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0$

Paralelele la dreapta g care se află *la o distanță* $\pm\delta$ vor avea ecuațiile

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - (p \pm \delta) = 0.$$

În cazul în care $\delta = -p$ una din *paralele va trece prin origine* și ecuația sa va fi

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = 0$$

sau $y = -x \operatorname{cotg} \varphi = x \operatorname{tg} \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = mx.$

Dacă $\delta > p$, atunci una dintre paralele se află de cealaltă parte a originii și $p' = p - \delta$ are o valoare negativă.

Exemplul 1. Să se scrie ecuația normală a dreptei care are distanța $p = 3$ (fig. 13.2.9) față de origine și unghiul normalei cu axa Ox egal cu 30°. Deci $x \cos 30° + y \sin 30° - 3 = 0$ sau $x \frac{\sqrt{3}}{2} + y \frac{1}{2} - 3 = 0$ este ecuația normală a dreptei care se scrie sub formă explicită $y = -\sqrt{3}x + 6$. Distanțele de la punctele P_1 (5; 7) și $P_2(-1; -3)$ la dreapta g vor fi

$$d_1 = \frac{5}{2}\sqrt{3} + \frac{7}{2} - 3 = 2{,}5\sqrt{3} + 0{,}5 \approx 4{,}33 + 0{,}5 = 4{,}83;$$

$$d_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2} - 3 = -\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + 4{,}5\right) \approx -(0{,}87 + 4{,}5) = -5{,}37.$$

Paralelele p_2 și p_1 care se află la o distanță $\delta = \pm 6$ față de g vor avea ecuațiile

$$x \frac{1}{2}\sqrt{3} + y \frac{1}{2} - 9 = 0 \quad \text{și} \quad x \frac{\sqrt{3}}{2} + y \frac{1}{2} + 3 = 0.$$

În a doua ecuație p este negativ.

Antiparalela care are $p_1 > 0$ și normala $n' = -n$ va avea ecuația $-x \frac{\sqrt{3}}{2} - y \frac{1}{2} - 3 = 0$ sau $x \cos 210° + y \sin 210° - 3 = 0$.

Exemplul 2. Dreapta h (fig. 13.2.10) taie axele Ox și Oy în punctele $P_1(-5, 0)$ și $P_2(0; 8)$ și formează cu axa Ox unghiul a cărui tangentă este egală cu $\frac{8}{5} = 1{,}6$,

$$\operatorname{tg}(x, h) = \frac{8}{5} = 1{,}6, \quad \text{deci} \quad \sphericalangle(x, h) = 58°.$$

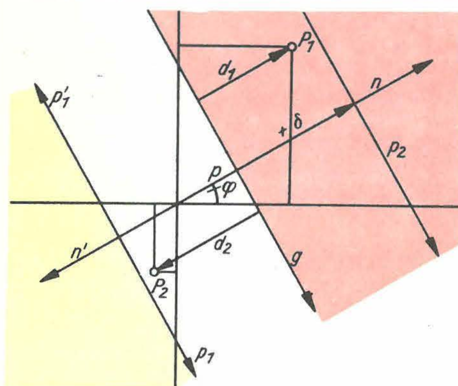
Deoarece $\sphericalangle(x, h) = \varphi - \frac{\pi}{2}$, φ va fi egal cu $\varphi = 58° + 90° = 148°$. În ecuația normală $x \cos 148° + y \sin 148° - p = 0$, p va fi proiecția lui $\overrightarrow{OP_1}$ sau $\overrightarrow{OP_2}$ pe normala n:

$$p = \overrightarrow{OP_1} \cos 148° = (-5) \cdot (-\sin 58°) = 5 \cdot 0{,}8480 \approx 4{,}24,$$

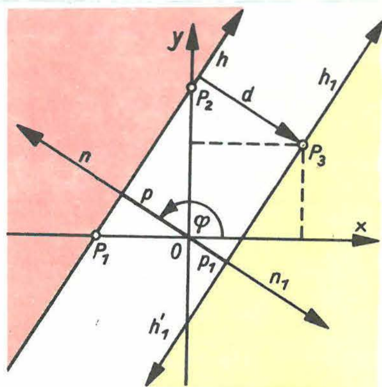
sau $$p = \overrightarrow{OP_2} \cos (148° - 90°) = 8 \cos 58° = 8 \cdot 0{,}5299 \approx 4{,}24.$$

Deci ecuația dreptei va fi $-x \cdot 0{,}85 + y \cdot 0{,}53 - 4{,}24 = 0$.

Punctul P_3 de coordonate $(6; 5)$ are distanța față de dreapta h egală cu $d = -6 \cdot 0{,}85 + 5 \cdot 0{,}53 - 4{,}24 = -5{,}09 + 2{,}65 - 4{,}24 \approx -6{,}68$. Această distanță este cu $p_1 = 6{,}68 - 4{,}24 = 2{,}44$ mai mare decît p. Paralela h_1 prin P_3 la h are ecuația $-x \cdot 0{,}85 + y \cdot 0{,}53 + 2{,}44 = 0$ și antiparalela sa h_1' cu $n_1 = -n$ va avea ecuația $x \cos(148° + 180) + y \sin(148° + 180°) - 2{,}44$ sau $0 = x \cdot 0{,}85 - y \cdot 0{,}53 - 2{,}44 = 0$.



13.2.9. Exemplul 1: dreapta scrisă sub formă normală: $\varphi = 30°$, $p = 3$



13.2.10. Exemplul 2: ecuația drepte sub forma normală

Ecuația generală a dreptei. Într-un sistem de coordonate carteziene rectangulare, orice dreaptă este definită de ecuația de gradul întîi $Ax + By + C = 0$ în care A, B, C sînt numere reale; A și B nu pot fi simultan egale cu zero. În cazul în care $A = 0$ și $B \neq 0$ ecuația $By + C = 0$, $y = -\frac{C}{B}$ este o paralelă la axa Ox la o distanță egală cu $-\frac{C}{B}$. Dacă $A \neq 0$ și $B = 0$, ecuația $x = -\frac{C}{A}$ este o paralelă la Oy, la o distanță egală cu $-\frac{C}{A}$. Dacă A și B sînt diferiți de 0, atunci $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ este ecuația dreptei care are coeficientul unghiular $m = -\frac{A}{B}$ și ordonata la origine $n = -\frac{C}{B}$. Pentru $C = 0$, dreapta va trece prin origine și va avea panta egală cu $-\frac{A}{B}$. Definim ca *pozitiv semiplanul* care conține totalitatea punctelor $P(x, y)$ cu următoarea proprietate: coordonatele punctelor introduse în ecuația $Ax + By + C = f(x, y)$ dau un $f(x, y)$ pozitiv.

În exemplul 2 funcţia $5y - 8x - 40 = f(x, y)$ are o valoare negativă în cazul punctului $P_3(6; 5)$; $25-48-40 = -63$, deci punctul P_3 se află în semiplanul negativ. Sensul unei drepte este pozitiv dacă punctele aflate la stînga sa sînt din semiplanul pozitiv.

Înmulţim ecuaţia $Ax + By + C = 0$ cu $\frac{\varepsilon}{\sqrt{A^2 + B^2}}$,

unde $\varepsilon = \pm 1$; ecuaţia obţinută

$$\frac{\varepsilon A x}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{\varepsilon B y}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{\varepsilon C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

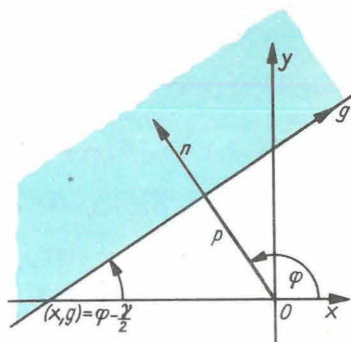
este *normată*, adică suma pătratelor coeficienţilor lui x şi y este egală cu 1; ecuaţia obişnuită

$$\left(\frac{\varepsilon A}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right)^2 = 1.$$

În această ecuaţie notăm

$$\frac{\varepsilon A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos\varphi, \quad \frac{\varepsilon B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sin\varphi,$$

$$\frac{\varepsilon C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = -p.$$



13.2.11. Normalizarea ecuaţiei $3y - 2x - 4 = 0$

Ecuaţia astfel obţinută se numeşte *ecuaţia normală* a dreptei.

Exemplu. Să se transforme ecuaţia $3y - 2x - 4 = 0$ (fig. 13.2.11) într-o ecuaţie normală. Originea (0, 0) aparţine semiplanului negativ, deoarece $3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 4 = -4$. Deoarece $A = -2$, $B = +3$, $C = -4$, trebuie să împărţim fiecare coeficient prin $\sqrt{4 + 9} == \sqrt{13}$. Deci ecuaţia normală a dreptei va fi $-\frac{2}{\sqrt{13}}x + \frac{3}{\sqrt{13}}y - \frac{4}{\sqrt{13}} = 0$, şi $\cos\varphi = -\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\sin\varphi = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{3}{2} = -1{,}5$, $\varphi = 123{,}68°$; $p = \frac{+4}{\sqrt{13}}$.

Din forma explicită a ecuaţiei $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$ obţinem pentru control $m = \operatorname{tg}(x, g) = \frac{2}{3}$, $\sphericalangle(x, g) = 33{,}69°$, deci $\varphi - \frac{\pi}{2} = 33{,}69°$, $\varphi = 123°{,}69°$.

Poziţia unui punct faţă de o dreaptă

Un punct $P(x, y)$ se află pe o dreaptă d, sau dreapta d trece prin punctul $P(x, y)$ dacă coordonatele punctului x şi y verifică ecuaţia dreptei.

Fie dreapta $y = 2x - 7$ şi punctul $P_1(4; 1)$. *Ecuaţia este verificată* pentru $x_1 = 4$ şi $y_1 = 1$; $1 = 2 \cdot 4 - 7$ şi deci punctul P_1 se află pe dreaptă. Punctul $P_2(2; 4)$ nu se află pe dreaptă deoarece coordonatele sale $x_2 = 2$ şi $y_2 = 4$ nu verifică ecuaţia dreptei: $4 \neq 2 \cdot 2 - 7$.

Un punct $P_1(x_1; y_1)$ se află pe dreaptă dacă coordonatele sale x_1 şi y_1 verifică ecuaţia dreptei.

Exemple. *1.* Punctul $P(2; 3)$ nu se află pe dreapta $2x - \frac{1}{4}y + 8 = 0$ deoarece $2 \cdot 2 - \frac{1}{4} \cdot 3 + 8 \neq 0$.

2. Dreapta $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 17 = 0$ nu trece prin origine, deoarece $\frac{0}{2} + \frac{0}{3} - 17 \neq 0$.

3. Punctul $P_1(57; 88)$ se află pe dreapta $y - 8 = 2(x - 17)$ deoarece $88-8 = 2(57-17)$.

4. Ecuația dreptei care trece prin punctele $P_1\left(0;\ \frac{3}{2}\right)$ și $P_2\left(2;\ \frac{5}{2}\right)$ este următoarea:

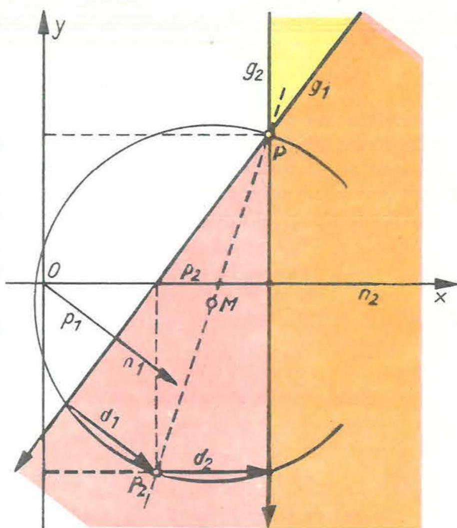
$$\frac{y-\frac{3}{2}}{x-0}=\frac{\frac{5}{2}-\frac{3}{2}}{2} \quad \text{sau} \quad y=\frac{x}{2}+\frac{3}{2}.$$

Această dreaptă intersectează axa Ox în punctul S de coordonate -3 și 0. Valoarea $x_0=-3$ anulează funcția.

5. Punctul P_1 de abscisă $x_1=5$ care se află pe dreapta $y=\frac{2}{3}x-2$ trebuie să aibă ordonata $y_1=\frac{2}{3}x_1-2=\frac{10}{3}-2=\frac{4}{3}$.

6. Prin punctul $P_1(6;\ 4)$ trebuie construită o dreaptă care are o distanță $d=3$ față de punctul $P_2(3;\ -5)$.

Geometric problema se rezolvă cu ajutorul *cercului lui Thales* cu diametrul $\overline{P_1P_2}$. Obținem *două drepte* g_1 și g_2 a căror distanță este $d_1=+3$ și respectiv $d_2=-3$, ținînd seama de orientarea perpendicularei față de origine (fig. 13.2.12). Totodată constatăm că *distanța d trebuie să fie mai mică* decît mărimea segmentului $\overline{P_1P_2}$ ca să existe o soluție. În $x\cos\varphi+y\sin\varphi-p=0$ trebuie determinate mărimile $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ și p. Dreapta aceasta trebuie să treacă prin punctul $P_1(6;4)$ și să aibă distanța $d=\pm 3$ față de punctul $P_2(3;\ -5)$



13.2.12. Dreptele g_1, respectiv g_2 care trec prin punctul P_1 și au distanța d_1, respectiv d_2 față de P_2

$$\left|\begin{array}{l} 6\cos\varphi+4\sin\varphi-p=0 \\ 3\cos\varphi-5\sin\varphi-p=\pm 3 \end{array}\right| \begin{array}{l} + \\ - \end{array} \rightarrow 3\cos\varphi+9\sin\varphi=\mp 3$$

$$\cos\varphi=\mp 1-3\sin\varphi$$

$$\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$$

$$1\pm 6\sin\varphi+9\sin^2\varphi+\sin^2\varphi=1$$

$$10\sin^2\varphi\pm 6\sin\varphi=0$$

$$\sin\varphi_1=0;\quad \sin\varphi_2=\mp\frac{3}{5}$$

$$\cos\varphi_1=\mp 1;\quad \cos\varphi_2=\pm\frac{4}{5}$$

$$p_1=\mp 6;\quad p_2=\pm 2\frac{2}{5}$$

Prin înlocuirea în ecuație a lui $\cos\varphi_1=1$, $\sin\varphi_1=0$, $p_1=6$ și respectiv a lui $\cos\varphi_2=\frac{4}{5}$, $\sin\varphi_2=-\frac{3}{5}$, $p_2=2\frac{2}{5}$, obținem două ecuații: $\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y-2\frac{2}{5}=0$ și $x-6=0$ sau scrise sub formă explicită $y=\frac{4}{3}x-4$ și $x=6$. Introducînd coordonatele originii $x=0$, $y=0$ în cele două funcții $f_1(x,y)=-\frac{3}{5}\cdot y+\frac{4}{5}x-2\frac{2}{5}$, $f_2(x,y)=x-6$, rezultă că originea se află față de ambele drepte în partea negativă a planului.

13.3. Poziția relativă a mai multor drepte

Se știe din geometria plană că poziția a două drepte într-un plan poate fi descrisă prin noțiunile de paralelism și distanță, respectiv punct de intersecție și unghi a două drepte. În geometria analitică noțiunile de mai sus se obțin din ecuațiile dreptelor. Direcțiile a două drepte scrise sub forma explicită $y = m_1x + n_1$ și $y = m_2x + n_2$ sînt date de coeficienții unghiulari m_1 și m_2. Dreptele sînt paralele în cazul în care m_1 este egal cu m_2.

Scrise sub forma normală $x \cos \varphi_1 + y \sin \varphi_1 - p_1 = 0$ și $x \cos \varphi_2 + y \sin \varphi_2 - p_2 = 0$, dreptele sînt paralele în cazul cînd coeficienții termenilor liniari sînt proporționali: $\cos \varphi_1 = \varkappa \cos \varphi_2$ și $\sin \varphi_1 = \varkappa \sin \varphi_2$. Aceeași condiție este valabilă și în cazul ecuațiilor generale ale dreptelor, scrise deci sub forma: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ și $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$.

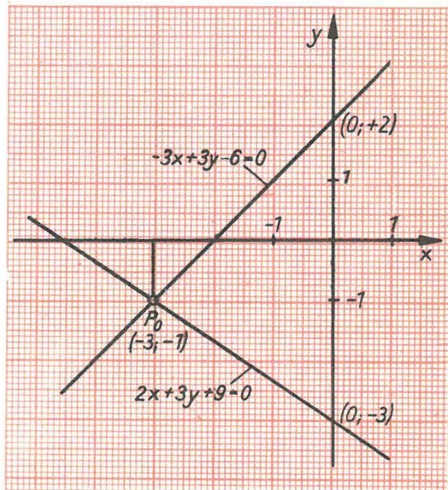
În general se poate afirma că *coeficienții ecuației A, B, C* desemnează *poziția dreptei*. Ei sînt constanți, iar x și y variabile.

Punct de intersecție și unghi de intersecție

Stabilirea punctului de intersecție. Fie două drepte $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ și $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Ele sînt concurente dacă se intersectează într-un punct $P_0(x_0, y_0)$. Coordonatele punctului P_0 trebuie să verifice ambele ecuații, deci x_0, y_0 trebuie să fie soluția unică a sistemului format din cele două ecuații:

$$\left.\begin{aligned} A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0 \\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

În cazul în care sistemul nu are soluție, dreptele sînt paralele, iar cînd sistemul are o infinitate de soluții, atunci dreptele sînt confundate.



13.3.1. Stabilirea punctului de intersecție

Exemplul 1. În care punct se intersectează dreptele $-3x + 3y - 6 = 0$ și $2x + 3y + 9 = 0$ (fig. 13.3.1)?
Rezolvarea sistemului se face după următoarea schemă:

$$\left.\begin{aligned} -3x_0 + 3y_0 - 6 = 0 \\ 2x_0 + 3y_0 + 9 = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow 5x_0 + 15 = 0, \quad x_0 = -3$$

$$-3(-3) + 3y_0 - 6 = 0$$

$$y_0 = -1$$

Dreptele se intersectează în punctul $P_0(-3; -1$

Exemplul 2. Să găsim punctul de intersecție a două drepte scrise sub forma explicită: $y = -3x + 14$, $y = -x - 1$. Folosim ca metodă de rezolvare a sistemului metoda substituției. Punctul de intersecție este $P_0(7{,}5; -8{,}5)$.

Exemplul 3. Dreptele $3x + y - 7 = 0$ și $2x - y - 3 = 2$ se intersectează în punctul $P_0(2; 1)$.

Exemplul 4. Dreptele $2x - 3y + 5 = 0$ şi $3y - 2x + 2 = 0$ sînt paralele. Originea se află pentru ambele drepte în partea pozitivă a planului. Sistemul de ecuaţii îl transcriem sub formă normală:

$$\left.\begin{aligned} 2x_0 - 3x_0 + 5 &= 0 \\ -2x_0 + 3y_0 + 2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} +\frac{2x_0}{\sqrt{13}} - \frac{3y_0}{\sqrt{13}} + \frac{5}{\sqrt{13}} &= 0 \\ -\frac{2x_0}{\sqrt{13}} + \frac{3y_0}{\sqrt{13}} + \frac{2}{\sqrt{13}} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Dreptele au distanţa dintre ele egală cu $7/\sqrt{13}$.

Exemplul 5. Ecuaţiile $0{,}8x + 0{,}4y - 1{,}2 = 0$ şi $2x + y - 3=0$ reprezintă aceeaşi dreaptă; prima ecuaţie se obţine din a doua prin împărţire cu 5/2.

Sistemul format din cele două ecuaţii are o infinitate de soluţii.

Exemplul 6. Dreptele $y = 2x - 8$ şi $y = 2x + 12$ sînt paralele deoarece $m_1 = 2 = m_2$; de asemenea şi dreptele $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$ şi $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ sînt paralele deoarece din forma explicită $y = -\frac{3}{2}x + 6$ şi respectiv $y = -\frac{3}{2}x + 3$ reiese că au acelaşi coeficient unghiular.

Exemplul 7. Să se găsească ecuaţia dreptei care trece prin punctul $P_1(2; -1)$ şi este paralelă cu dreapta $y = 2x - 3$. Folosind formula ecuaţiei dreptei care trece printr-un punct şi are direcţia dată, putem scrie ecuaţia dreptei care trece prin P_1 cu $m= 2$: $y + 1 = 2(x - 2)$.

Unghiul a două drepte (fig. 13.3.2). Fie $x \cos \varphi_1 + y \sin \varphi_1 - p_1 = 0$ şi $x \cos \varphi_2 + y \sin \varphi_2 - p_2 = 0$ ecuaţiile a două drepte g_1 şi g_2; ele se taie sub un unghi $\psi = \sphericalangle(g_1, g_2) = \varphi_2 - \varphi_1$. Ecuaţiile dreptelor g_1 şi g_2 scrise sub forma explicită sînt $y = m_1x + n_1$ şi $y = m_2x + n_2$, unde $m_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$ şi $m_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$ în care $\alpha_1 = \sphericalangle(x, g_1)$, $\alpha_2 = \sphericalangle(x, g_2)$ şi deci $\sphericalangle(g_1, g_2) = \sphericalangle(x, g_2) - \sphericalangle(x, g_1) = \alpha_2 - \alpha_1$. Conform teoremei de adunare pentru tangentă obţinem

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_2 \operatorname{tg} \alpha_1} \quad \text{sau} \quad \boxed{\operatorname{tg} \psi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}}$$

Prin inversarea dreptelor obţinem $\psi' = \sphericalangle(g_2, g_1) = \alpha_1 - \alpha_2 = -\psi$ sau $\psi' = \pi - \psi$.

Condiţia de ortogonalitate	$m_1 = -\frac{1}{m_2}$

Această relaţie ne indică condiţiile ca două drepte să fie *paralele* sau *perpendiculare*: pentru $\psi = 0$ obţinem $m_1 = m_2$ iar pentru $\psi = 90°$, $1 + m_1m_2 = 0$.

Exemplul 1. Dreptele $y - 2 = 5(x - 13)$ şi $y = -\frac{1}{5}x + 18$ sînt perpendiculare deoarece $m_1 = 5$ şi $m_2 = -\frac{1}{5}$, deci $m_2 = -\frac{1}{m_1}$.

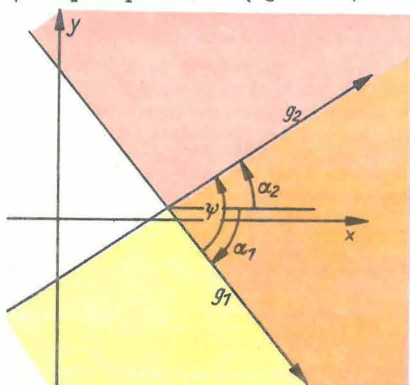
Exemplul 2. Să se afle ecuaţia dreptei perpendiculare pe dreapta $y = -\frac{2}{3}x + 3$ şi care trece prin punctul $P(1, 1)$. Dreapta dată are panta $m_1 = -\frac{2}{3}$, deci $m_2 = -\frac{1}{m_1} = \frac{3}{2}$ şi ecuaţia dreptei va fi $y - 1 = \frac{3}{2}(x - 1)$ sau $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.

Exemplul 3. Dreptele $y = -2x + 16$ și $y = -\frac{3}{5}x + \frac{3}{5}$ *se intersectează sub unghiul* $\psi = 32{,}48°$, deoarece din $m_1 = -2$ și $m_2 = -\frac{3}{5}$ rezultă că $\operatorname{tg}\psi = \dfrac{-\frac{3}{5}+2}{1+2\cdot\frac{3}{5}} = \frac{7}{11} = 0{,}6364$ care corespunde unghiului de $32{,}48°$.

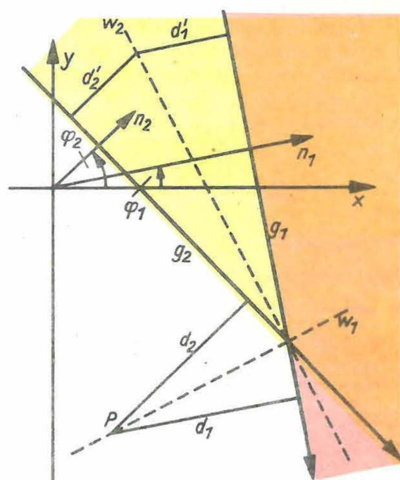
Putem afla unghiul ψ altfel. Din $m_1 = -2 = \operatorname{tg}\alpha_1$ obținem $\alpha_1 = -63{,}43°$ și din $m_2 = -0{,}6 = \operatorname{tg}\alpha_2$ obținem $\alpha_2 = -30{,}96°$, deci $\psi = \alpha_2 - \alpha_1 = -30{,}96° + 63{,}43° = 32{,}47°$.

Exemplul 4. Dreptele $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$ și $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$ scrise sub formă normală sînt $y = -\frac{5}{4}x + 5$ și respectiv $y = \frac{2}{3}x - 2$. Din $m_1 = -\frac{5}{4}$ și $m_2 = +\frac{2}{3}$ obținem $\operatorname{tg}\psi = \dfrac{\frac{2}{3}+\frac{5}{4}}{1-\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}} = \dfrac{8+15}{12-10} = \dfrac{23}{2} = 11{,}5$. Unghiul lor de intersecție este $\psi = 85{,}03°$.

Verificarea se poate face astfel: $\operatorname{tg}\alpha_1 = -\frac{5}{4}$, $\alpha_1 = -51{,}34°$; $\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{2}{3}$, $\alpha_2 = +33{,}69°$, $\psi = \alpha_2 - \alpha_1 = 85{,}03°$ (fig. 13.3.2).



13.3.2. Dreptele $x/4 + y/5 = 1$, respectiv $x/3 - y/2 = 1$ și unghiul lor de intersecție



13.3.3. Determinarea bisectoarelor

Pentru determinarea ecuației unei drepte care trece printr-un punct și intersectează o altă dreaptă sub un unghi ψ facem următorul raționament: cunoaștem m_1 și $\operatorname{tg}\psi$, deci îl aflăm pe m_2, $m_2 = \dfrac{m_1 + \operatorname{tg}\psi}{1 - m_1\operatorname{tg}\psi}$ și scriem ecuația dreptei care trece printr-un punct și și are panta cunoscută.

Ecuațiile bisectoarelor. La intersecția dreptelor g_1 și g_2 apar patru unghiuri, două cîte două opuse la vîrf. Acestor patru unghiuri le corespund două bisectoare w_1 și w_2, care reprezintă

locurile geometrice ale punctelor egal depărtate de laturile unghiurilor. Dreptele g_1 și g_2 au ecuațiile $x \cos \varphi_1 + y \sin \varphi_1 - p_1 = 0$ și $x \cos \varphi_2 + y \sin \varphi_2 - p_2 = 0$, w_1 este bisectoarea unghiului care se află în *partea pozitivă a planului față de cele două drepte.* Orice punct al lui w_1 are distanțele d_1 și respectiv d_2 la cele două drepte, pozitive (fig. 13.3.3). În *unghiul opus la vîrf* distanțele de la un punct P al bisectoarei w_1 la cele două drepte sînt negative. În ecuațiile $d_1 = \varepsilon_1(x \cos \varphi_1 + y \sin \varphi_1 - p_1)$ și $d_2 = \varepsilon_2(x \cos \varphi_2 + y \sin \varphi_2 - p_2)$, $\varepsilon_1 = \pm 1$ și $\varepsilon_2 = \pm 1$ *au același semn.* Din egalitatea $d_1 = d_2$ reiese ecuația bisectoarei w_1:

$$x(\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) + y (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2) - (p_1 - p_2) = 0.$$

În celelalte două unghiuri distanțele de la bisectoarea w_2 la cele două drepte vor fi de semne contrare, adică $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$ și $d_1' = -d_2'$. Deci ecuația bisectoarei w_2 va fi $x(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) + y(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2) - (p_1 + p_2) = 0$.

Ecuațiile bisectoarelor unghiurilor formate prin intersecția a două drepte	$x(\cos \varphi_1 \pm \cos \varphi_2) + y(\sin \varphi_1 \pm \sin \varphi_2) - (p_1 \pm p_2) = 0$. Semnul negativ se alege pentru bisectoarea unghiului care aparține ambelor semiplane pozitive.

Exemplu. Ecuațiile generale ale dreptelor $x + y - 2 = 0$ și $7x + y - 32 = 0$ se scriu sub forma normală $\frac{1}{\sqrt{2}} x + \frac{1}{\sqrt{2}} y - \frac{2}{\sqrt{2}} = 0$, respectiv $\frac{7}{5\sqrt{2}} x + \frac{1}{5\sqrt{2}} y - \frac{32}{5\sqrt{2}} = 0$. Ecuațiile celor două bisectoare vor fi

$$x\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{7}{5\sqrt{2}}\right) + y\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{5\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \pm \frac{32}{5\sqrt{2}}\right) = 0.$$

Aducînd la același numitor, acestea devin

$$x(5 \pm 7) + y(5 \pm 1) - (10 \pm 32) = 0.$$

Scrise sub forma explicită, vor fi

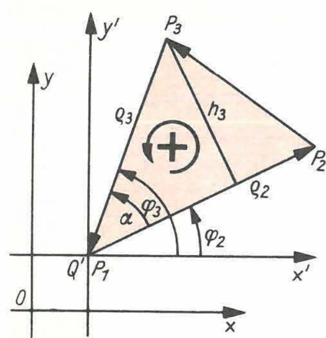
$$y = \frac{1}{2} x - \frac{11}{2}, \quad y = -2x + 7.$$

Triunghi și poligon

Aria unui triunghi. Fie $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ și $P_3(x_3, y_3)$ vîrfurile unui triunghi (fig. 13.3.4). Aria triunghiului se calculează conform formulei $A = \frac{1}{2} \overline{P_1P_2} \cdot h_3 = \frac{1}{2} \overline{P_1P_2} \cdot \overline{P_1P_3} \sin \alpha$, unde h_3 este distanța dintre punctul P_3 și dreapta P_1P_2 și α unghiul dintre segmentele $\overrightarrow{P_1P_2}$ și $\overrightarrow{P_1P_3}$ care se consideră *în sensul de rotire a sistemului de coordonate.*

Dacă sensul de rotire este sensul pozitiv matematic (trigonometric), atunci P_3 se află la stînga lui $\overrightarrow{P_1P_2}$ și prin parcurgerea perimetrului în ordinea $P_1 \to P_2 \to P_3$ suprafața triunghiului se află la stînga și deci sinusul este pozitiv. *Dacă sensul de rotire este invers,* suprafața se află la dreapta, iar aria triunghiului va fi negativă.

Printr-o *translație* $x' = x - x_1$, $y' = y - y_1$ vom introduce un nou sistem de coordonate K' în care P_1 va fi origine. Punctele P_2 și P_3 au *coordonatele polare* ρ_2, φ_2 și ρ_3, φ_3; atunci $2A = \rho_2\rho_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2) = \rho_2 \cos\varphi_2 \cdot \rho_3 \sin\varphi_3 - \rho_2 \sin\varphi_2 \cdot \rho_3 \cos\varphi_3 =$



13.3.4. Aria unui triunghi

$$= x_2'y_3' - y_2'x_3' = \begin{vmatrix} x_2' & y_2' \\ x_3' & y_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ 0 & x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 2A.$$

Aria A a unui triunghi cu vîrfurile $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$
$A = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$

Dacă dezvoltăm determinantul după coloana a doua și ordonăm termenii, obținem o expresie în care indicii fiecăruia dintre cei trei termeni pot fi schimbați prin *permutări ciclice*.

Dacă P_3 se află pe segmentul P_1P_2, *aria va fi egală cu* 0, $A = 0$.

$$x_3(y_1 - y_2) - y_3(x_1 - x_2) + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0$$

sau
$$y_3 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}x_3 + \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_1 - x_2}$$

care este *ecuația dreptei* prin punctele P_1 și P_2 sub forma explicită cum reiese și din figura geometrică. Condiția ca *trei puncte* să fie *coliniare* este $A = 0$.

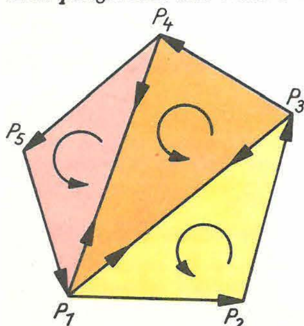
Exemplu. Triunghiul cu vîrfurile $P_1(2, 1)$, $P_2(6, 3)$, $P_3(4, 7)$ are aria

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}[2(3-7) + 6(7-1) + 4(1-3)] = \frac{1}{2}[-8 + 36 - 8] = 10.$$

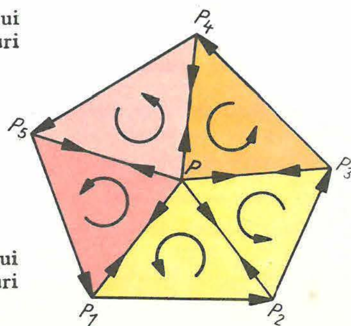
Triunghiul $P_4(-4; -5)$, $P_5(5; -3)$, $P_6(6; 2)$ are aria

$$A = \frac{1}{2}[-4(-3-2) + 5(2+5) + 6(-5+3)] = \frac{1}{2}(20 + 35 - 12) = 21{,}5.$$

Aria unui poligon. Într-un *poligon convex* segmentul de dreaptă $\overline{P_xP_y}$ care unește două puncte interioare P_x și P_y nu conține decît puncte *interioare*. Toate diagonalele trasate dintr-un vîrf al unui poligon convex cu n laturi se află în interiorul poligonului și îl împarte în $n-2$ *triunghiuri* care două cîte două au cîte o diagonală comună. Laturile fiecărui triunghi sînt parcurse în sensul pozitiv trigonometric, ca urmare și poligonul se parcurge în același sens. Fiecare diagonală se parcurge în triunghiurile alăturate care o conțin în sensuri contrare. *Aria poligonului este suma ariilor triunghiurilor* (fig. 13.3.5).



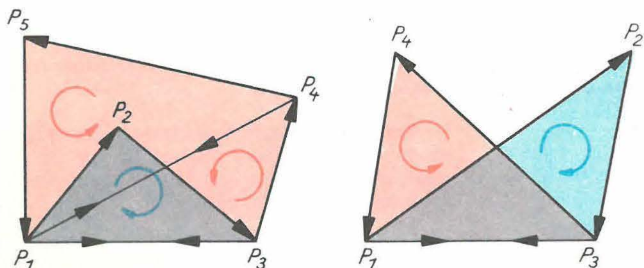
13.3.5. Descompunerea unui poligon convex cu n laturi în $n - 2$ triunghiuri



13.3.6. Descompunerea unui poligon convex cu n laturi în n triunghiuri

Putem împărți suprafața poligonului în n triunghiuri, unind un punct P interior cu vîrfurile poligonului. Laturile triunghiului din interiorul poligonului se parcurg de cîte două ori în sensuri diferite. Aria poligonului este egală cu suma ariilor triunghiurilor (fig. 13.3.6).

Și *poligoanele neconvexe* se pot împărți în triunghiuri, dar vor apărea laturi sau diagonale care vor conține și puncte exterioare poligonului. Dacă calculăm ariile orientate ale triunghiurilor, atunci *aria poligonului va fi suma algebrică a ariilor triunghiurilor* în cazul în care laturile poligonului *nu se intersectează*. La calcularea ariei pentagonului $P_1P_2P_3P_4P_5$, triunghiurile $P_1P_3P_4$, $P_1P_4P_5$ vor avea aria pozitivă și triunghiul $P_1P_2P_3$ va avea aria negativă (fig. 13.3.7).



13.3.7. Descompunerea unui poligon neconvex cu cinci, respectiv patru laturi în trei, respectiv două triunghiuri

Laturile patrulaterului $P_1P_2P_3P_4$ din figură se intersectează. Și pentru el vom calcula aria orientată, care se compune dintr-o parte *pozitivă* (roșie) și una *negativă* (albastră). Aria unui patrulater care are 2 laturi paralele și egale, iar celelalte două se intersectează va avea valoarea 0.

Centrul de greutate al unui triunghi. În triunghiul cu vîrfurile $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$ și $P_3(x_3, y_3)$ mijloacele laturilor vor avea coordonatele (fig. 13.3.8)

$$M_3\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \quad \frac{y_1+y_2}{2}\right), \quad M_1\left(\frac{x_2+x_3}{2}; \quad \frac{y_2+y_3}{2}\right) \quad \text{și} \quad M_2\left(\frac{x_3+x_1}{2}; \quad \frac{y_3+y_1}{2}\right)$$

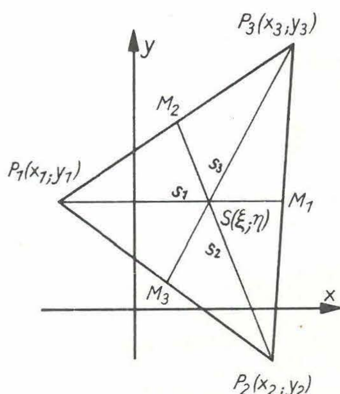
Medianele $s_3 = \overline{P_3M_3}$, $s_1 = \overline{P_1M_1}$, $s_2 = \overline{P_2M_2}$ vor fi împărțite prin punctele S_3, S_1, S_2 în rapoartele $\lambda_3, \lambda_1, \lambda_2$. Coordonatele punctelor vor fi

$$\xi_3 = \frac{x_3 + \lambda_3 \cdot \dfrac{x_1+x_2}{2}}{1+\lambda_3}, \quad \eta_3 = \frac{y_3 + \lambda_3 \cdot \dfrac{y_1+y_2}{2}}{1+\lambda_3}$$

$$\xi_1 = \frac{x_1 + \lambda_1 \cdot \dfrac{x_2+x_3}{2}}{1+\lambda_1}, \quad \eta_1 = \frac{y_1 + \lambda_1 \cdot \dfrac{y_2+y_3}{2}}{1+\lambda_1}$$

$$\xi_2 = \frac{x_2 + \lambda_2 \cdot \dfrac{x_3+x_1}{2}}{1+\lambda_2}, \quad \eta_2 = \frac{y_2 + \lambda_2 \cdot \dfrac{y_3+y_1}{2}}{1+\lambda_2}$$

Dacă $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$, coordonatele vor fi aceleași, deci $S = S_1 = S_2 = S_3$.



13.3.8. Centrul de greutate al unui triunghi

Cele trei mediane se intersectează într-un punct S, numit centru de greutate care împarte medianele în raportul $\overline{P_iS}: \overline{SM_i} = 2: 1$.

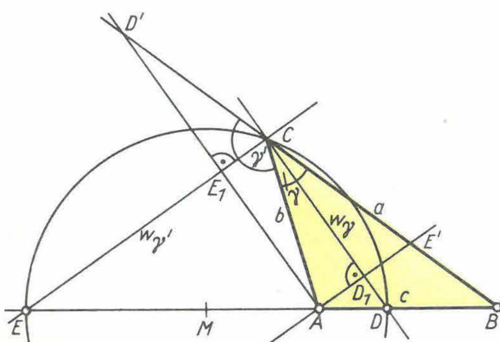
Coordonatele centrului de greutate constituie media aritmetică a coordonatelor vîrfurilor triunghiului.

Coordonatele centrului de greutate	$\xi = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad \eta = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$

Exemplu. În triunghiul $P_1(-5;\ 3)$, $P_2(-2;\ -1)$ și $P_3(7;\ 8)$, coordonatele centrului de greutate sînt

$$\xi = \frac{-5 - 2 + 7}{3} = 0, \quad \eta = \frac{3 - 1 + 8}{3} = 3\ \frac{1}{3}.$$

Teorema lui Apollonius. Pentru demonstrarea acestei teoreme ne folosim de o lemă care ne arată proprietatea bisectoarelor unghiurilor triunghiului.



13.3.9. Bisectoarele unghiului interior γ și a celui exterior γ'

Într-un triunghi, bisectoarea interioară cît și cea exterioară împart latura opusă unghiului într-un raport egal cu raportul laturilor alăturate unghiului.

În figura 13.3.9, *bisectoarele* ω_γ și $\omega_{\gamma'}$ ale unghiurilor γ și γ' sînt *perpendiculare* deoarece γ și γ' sînt unghiuri suplimentare. Paralelele AD' și AE' prin punctul A la bisectoare le intersectează în punctele D_1 și E_1 *sub un unghi drept*. Din congruența triunghiurilor $\Delta AD_1C \cong \Delta E'D_1C$ și $\Delta AE_1C \cong \Delta D'E_1C$ reiese *egalitatea laturilor* $\overline{CE'} = \overline{CA} = \overline{CD'}$. Dreptele BD' și BE sînt intersectate de paralelele $AD' \parallel DC$ ca și de $CE \parallel E'A$. Deci vom avea:

1. $\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{D'C} : \overline{CB} = \overline{CA} : \overline{CB}$ și
2. $\overline{AE} : \overline{EB} = \overline{E'C} : \overline{CB} = \overline{CA} : \overline{CB}$.

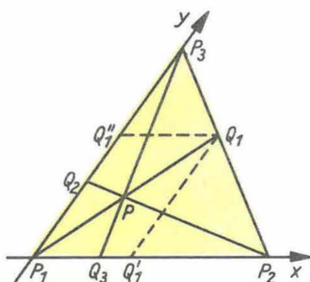
Ținînd seama de *direcția segmentelor* pe latura c, constatăm că $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DB}$ și $\overrightarrow{EB}$ au aceeași direcție pe cînd $\overrightarrow{AE}$ are direcția contrară. Raportul în care punctul D împarte segmentul AB are aceeași valoare absolută ca și raportul în care îl împarte punctul E dar are semnul schimbat. $\lambda_1 = (ABD) = \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = +(b : a)$ și $\lambda_2 = (ABE) = \frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{EB}} = -(b : a)$. Două puncte D și E care împart segmentul $\overrightarrow{AB}$ în același raport se numesc *puncte conjugate armonic* iar raportul celor două rapoarte este egal cu $-1 = [+(b : a)] : [-(b : a)]$.

Teorema lui Apollonius. Locul geometric al vîrfurilor C_i al triunghiurilor ABC_i cu o latură fixă $\overline{AB}$ iar celelalte aflate în raportul $\overline{AC_i} : \overline{BC_i} = \lambda$ este cercul lui Thales avînd $\overline{DE}$ ca diametru, D și E fiind punctele care împart latura $\overline{AB}$ în raportul λ.

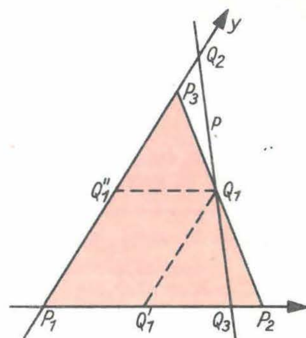
Privind figura folosită la demonstrarea teoremei lui Apollonius în care $\overline{AB}$ și punctele D și E sînt date, constatăm că afară de triunghiul $\overline{ABC}$ există și altele $\overline{ABC_i}$ cu proprietatea că bisectoarele unghiului γ și γ' trec prin punctele D și E. Dreptele $\overline{C_iD}$ și $\overline{C_iE}$ trebuie să fie

perpendiculare pentru a fi bisectoare; deci punctele C_i trebuie să se găsească pe cercul lui Thales de diametru $\overline{DE}$. Pentru toate aceste puncte raportul distanțelor la punctele fixe A și B, $b_i : a_i = \lambda$ are aceeași valoare ca și raportul $\lambda = \overrightarrow{AD} : \overrightarrow{DB}$.

Teorema lui Ceva și teorema lui Menelaus. Aceste teoreme poartă numele lui Giovanni CEVA (1648—1734) și al lui MENELAUS din Alexandria (98 î.e.n.) Caracterul lor dual reiese din compararea problemelor ce apar în cele două teoreme.



13.3.10. Teorema lui Ceva



13.3.11. Teorema lui Menelaus

Teorema lui Ceva

Care sînt condițiile pe care trebuie să le îndeplinească trei drepte ca să se intersecteze într-un punct, dreptele trecînd prin vîrfurile unui triunghi dar neconfundîndu-se cu laturile sale (fig. 13.3.10)?

Teorema lui Menelaus

Care sînt condițiile pe care trebuie să le îndeplinească trei puncte aflate fiecare pe cîte o latură a unui triunghi astfel ca nici unul să coincidă cu vreun vîrf al triunghiului ca să fie coliniare?

Teorema lui Ceva. Trei drepte, fiecare trecînd printr-un vîrf al unui triunghi, se intersectează într-un punct numai dacă produsul rapoartelor în care ele împart laturile opuse este egal cu 1.

Notăm vîrfurile triunghiului cu P_1, P_2, P_3 și intersecțiile dreptelor care pleacă din vîrfurile triunghiului cu laturile opuse, cu Q_1, Q_2, Q_3. Se vor forma rapoartele: $\lambda_1 = \overrightarrow{P_2Q_1} : \overrightarrow{Q_1P_3}$; $\lambda_2 = \overrightarrow{P_3Q_2} : \overrightarrow{Q_2P_1}$; $\lambda_3 = \overrightarrow{P_1Q_3} : \overrightarrow{Q_3P_2}$. Punctul P_1 este originea; direcția axei Ox este direcția lui P_1P_2 și cea a lui Oy este a lui P_1P_3. Stabilim coordonatele lui $P_2(1;\ 0)$ și a lui $P_3(0;\ 1)$. Calcularea coordonatelor punctelor Q_2, Q_3, Q_1 se face în felul următor:

$$\overrightarrow{P_1Q_2} : \overrightarrow{Q_2P_3} = 1 : \lambda_2 \quad \text{sau} \quad \overrightarrow{P_1Q_2} : \overrightarrow{P_1P_3} = 1 : (1 + \lambda_2) = y_2;\ \ x_2 = 0;$$
$$\overrightarrow{P_1Q_3} : \overrightarrow{Q_3P_2} = \lambda_3 \quad \text{sau} \quad \overrightarrow{P_1Q_3} : \overrightarrow{P_1P_2} = \lambda_3 : (1 + \lambda_3) = x_3;\ \ y_3 = 0;$$
$$\overrightarrow{P_1Q_1'} : \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_3Q_1} : \overrightarrow{P_3P_2} = 1 : (1 + \lambda_1) = x_1;$$
$$\overrightarrow{P_1Q_1''} : \overrightarrow{P_1P_3} = \overrightarrow{P_2Q_1} : \overrightarrow{P_2P_3} = \lambda_1 : (1 + \lambda_1) = y_1.$$

Coordonatele x, y ale punctului de intersecție P vor trebui să satisfacă următoarele ecuații:

(1) Dreapta prin Q_1, P și P_1: $\dfrac{y_1 - 0}{x_1 - 0} = \dfrac{y}{x}$ sau $\lambda_1 = \dfrac{y}{x}$;

(2) Dreapta prin Q_2, P și P_2: $\dfrac{y_2 - 0}{x_2 - 1} = \dfrac{y}{x - 1}$ sau $\dfrac{\dfrac{1}{1 + \lambda_2}}{-1} = \dfrac{y}{x - 1}$;

(3) Dreapta prin Q_3, P și P_3: $\dfrac{y_3 - 1}{x_3} = \dfrac{y - 1}{x}$ sau $\dfrac{-1}{\dfrac{\lambda_3}{1 + \lambda_3}} = \dfrac{y - 1}{x}$.

Prin eliminarea lui y din (1), (2) și (3), obținem:

$$(2') \quad -\frac{1}{1+\lambda_2} = \frac{x\lambda_1}{x-1}, \quad 1 - x = x(\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2), \quad x = \frac{1}{1+\lambda_1+\lambda_1\lambda_2};$$

$$(3') \quad -\frac{1+\lambda_3}{\lambda_3} = \frac{x\lambda_1 - 1}{x}, \quad x + x\lambda_3 = \lambda_3 - x\lambda_1\lambda_3, \quad x = \frac{\lambda_3}{1+\lambda_3+\lambda_1\lambda_3}$$

Prin eliminarea lui x din (2') și (3') obținem

$$\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1 + \lambda_3 + \lambda_1\lambda_3, \quad \text{deci} \quad \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1.$$

Teorema lui Menelaus. O dreaptă intersectează laturile unui triunghi astfel încît produsul rapoartelor în care punctele ei de intersecție împart laturile triunghiului are valoarea -1.

Ca și în cazul teoremei lui Ceva

$$\lambda_1 = \overrightarrow{P_2Q_1} : \overrightarrow{Q_1P_3}, \quad \lambda_2 = \overrightarrow{P_3Q_2} : \overrightarrow{Q_2P_1}, \quad \lambda_3 = \overrightarrow{P_1Q_3} : \overrightarrow{Q_3P_2}$$

sînt rapoartele în care punctele de intersecție împart laturile; vîrfurile triunghiului au coordonatele $P_1(0;\ 0)$, $P_2(1,\ 0)$, $P_3(0,\ 1)$. Coordonatele punctelor de intersecție sînt aceleași, numai raportul λ_2 este negativ. Punctele Q_1, Q_2, Q_3 ca să fie coliniare trebuie să îndeplinească condiția:

$$(y_2 - y_3) : (x_2 - x_3) = (y_1 - y_3) : (x_1 - x_3),$$

$$\frac{1}{1+\lambda_2} : \frac{-\lambda_3}{1+\lambda_3} = \frac{\lambda_1}{1+\lambda_1} : \left(\frac{1}{1+\lambda_1} - \frac{\lambda_3}{1+\lambda_3}\right);$$

$$-(1+\lambda_3)/[\lambda_3(1+\lambda_2)] = \lambda_1(1+\lambda_2)/[1+\lambda_3 - \lambda_3(1+\lambda_1)],$$

$$-(1+\lambda_3) + \lambda_3(1+\lambda_1) = \lambda_1\lambda_3(1+\lambda_2),$$

$$-1 - \lambda_3 + \lambda_3 + \lambda_1\lambda_3 = \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3,$$

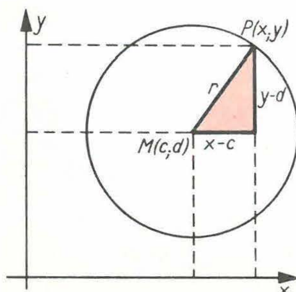
$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -1.$$

	Q_1	Q_2	Q_3
x	$\frac{1}{1+\lambda_1}$	0	$\frac{\lambda_3}{1+\lambda_3}$
y	$\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}$	$\frac{1}{1+\lambda_2}$	0

13.4. Cercul

Ecuațiile cercului

Ecuațiile unui cerc în coordonate rectangulare. Cercul este locul geometric al tuturor punctelor $P(x\ y)$ care se află la o distanță constantă r de un punct fix $M(c, d)$; M se numește *centrul* cercului și r *raza* cercului (fig. 13.4.1).



Conform teoremei lui Pitagora obținem ecuația cercului $r^2 = (x-c)^2 + (y-d)^2$. Dacă centrul cercului se află în origine, atunci $c = d = 0$ și cercul are ecuația $x^2 + y^2 = r^2$.

Ecuația generală a cercului Centrul $M(c,\ d)$ Raza r	$(x-c)^2 + (y-d)^2 = r^2$
Ecuația cercului cu centrul în origine și de rază r	$x^2 + y^2 = r^2$

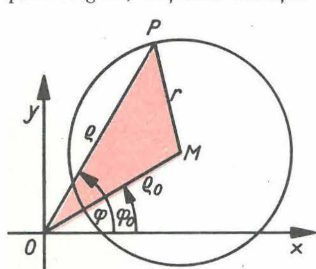
13.4.1. Deducerea ecuației cercului

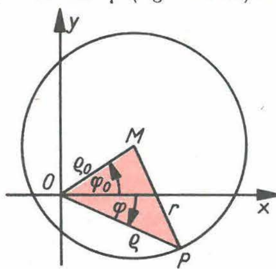
Exemplul 1. Cercul cu centrul M (4; 3) și raza $r = 2$ are ecuația $(x-4)^2+(y-3)^2 = 2^2$.

Exemplul 2. Punctul P_0 (1; 2) nu se află pe cercul $(x - 0{,}5)^2 + (y - 2)^2 = 5^2$, deoarece coordonatele sale $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ nu verifică ecuația: $(1 - 0{,}5)^2 + (2 - 2)^2 \neq 25$.

Exemplul 3. Care sînt ordonatele punctelor P_1 și P_2 care au abscisa egală cu 6 și se află pe cercul $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 61$? Fie y_1 și y_2 ordonatele punctelor $P_1(6;\ y_1)$ și $P_2(6;\ y_2)$. Înlocuind pe $x = 6$ în ecuație și rezolvînd ecuația, obținem $y - 2 = \pm\sqrt{61 - (6 - 1)^2}$, deci $y_1 = 8$, $y_2 = -4$.

Ecuația cercului în coordonate polare. Centrul M al cercului de rază r are în sistemul de coordonate polare coordonatele $M(\rho_0, \varphi_0)$. Un punct oarecare P de pe cerc are coordonatele $P(\rho;\ \varphi)$. În triunghiul OMP, $\overline{MP} = r$ și $\overline{OM} = \rho_0$ au valori fixe; ρ variază în funcție de unghiul φ între valorile $\rho_{min} = |\rho_0 - r|$ și $\rho_{max} = \rho_0 + r$. Conform *teoremei cosinusului*, $\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho_0\rho \cos(\varphi - \varphi_0) = r^2$. Dacă centrul cercului se află pe axa polară și cercul trece prin origine, obținem ecuația $\rho = 2r \cos \varphi$ (fig. 13.4.2).





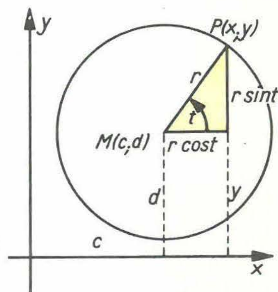
Ecuația cercului de rază r și centru M (ρ_0, φ_0)
$\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0) = \varphi$
Caz particular $\rho = 2r \cos \varphi$

13.4.2. Deducerea ecuației cercului în coordonate polare

Exemplu. Dacă $M(4;\ 30°)$ și $r = 3$, atunci ecuația cercului în coordonate polare va fi $\rho^2 + 16 - 2\rho \cdot 4 \cos(\varphi - 30°) = 9$, deci $\rho^2 - 8\rho \cos(\varphi - 30°) + 7 = 0$.

Ecuațiile parametrice ale cercului. Dacă x și y sînt socotite funcții de *un parametru t*, $x = \varphi_1(t)$ și $y = \varphi_2(t)$, atunci reprezentarea obținută se numește parametrică. Ecuațiile parametrice, ale cercului sînt $x = c + r \cos t$ și $y = d + r \sin t$, unde t este unghiul dintre direcția pozitivă a axei Ox și raza trasată în punctul de pe cerc $P(x, y)$.

Ecuațiile parametrice ale cercului de rază r și centru $M(c;\ d)$.	$x = c + r \cos t$ $y = d + r \sin t$



13.4.3. Deducerea ecuațiilor parametrice ale cercului

Exemplu. Ecuațiile parametrice ale cercului cu centrul $M(3;\ 4)$ și de rază $r = 2$ vor fi $x = 3 + 2 \cos t$ $y = 4 + 2 \sin t$.

Cerc și dreaptă

Fie cercul $(x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2$ și dreapta $y = mx + n$. Coordonatele x_0, y_0 ale *punctului de intersecție* P_0 trebuie să verifice atît ecuația cercului cît și ecuația dreptei. Obținem următorul *sistem de ecuații*: $(x_0 - c)^2 + (y_0 - d)^2 = r^2$; $mx_0 + n = y_0$. Prin înlocuire, ridicare la pătrat și ordonare obținem o ecuație de gradul doi, de forma $x_0 + 2px_0 + q = 0$ care are drept soluții $x_0 = -p \pm \sqrt{p^2 - q}$ (v. cap. 4). În funcție de semnul discriminantului, $D = p^2 - q$ avem *două soluții reale* $(D > 0)$, *o soluție reală* $(D = 0)$ sau *două soluții complexe* $(D < 0)$.

Interpretarea geometrică este următoarea:

Dreapta intersectează cercul în *două* puncte, într-unul singur sau în nici unul, adică este *secantă, tangentă sau exterioară cercului.*

Exemplul 1. Fie dreapta $y = -x + 9$ şi cercul $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 40$. Coordonatele punctelor de intersecţie se obţin din sistemul

$$\begin{vmatrix} (x_0 - 3)^2 + (y_0 - 2)^2 = 40 \\ y_0 = -x_0 + 9 \end{vmatrix} \rightarrow (x_0 - 3)^2 + (-x_0 + 7)^2 = 40$$

$$2x_0^2 - 20x_0 = -18$$

$$x_{01} = 9;\ y_{01} = 1$$

$$y_{01} = 0;\ y_{02} = 8$$

Deci, punctele de intersecţie sînt:

$P_1(9;\ 0)$ şi $P_2(1;\ 8)$.

Exemplul 2. Fie dreapta $y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{5}$ şi cercul $x^2 + y^2 = 25$. Prin înlocuire, obţinem o ecuaţie de gradul doi al cărei discriminant $D = 5 - 5 = 0$:

$$x^2 + \frac{x^2}{4} + \frac{125}{4} - \frac{5}{2}\sqrt{5}x = 25,$$

$$\frac{5}{4}x^2 - \frac{5}{2}\sqrt{5}x = \frac{-25}{4},$$

$$x^2 - 2\sqrt{5}\,x = -5,$$

$$(x - \sqrt{5})^2 = 0,$$

$$x_1 = x_2 = \sqrt{5}.$$

Dreapta intersectează cercul într-un singur punct $x_0 = \sqrt{5}, y_0 = 2\sqrt{5}$.

Exemplul 3. Dreapta $x = 6$ nu are nici un punct comun cu cercul $x^2 + y^2 = 25$. Prin înlocuire obţinem ecuaţia de gradul doi în y: $36 + y^2 = 25$ al cărei discriminant $D = 25 - 36 = -11$ este negativ, deci ecuaţia nu are soluţii reale.

Normala cercului. Raza care uneşte centrul cercului cu un punct de pe cerc este *perpendiculară* pe tangenta la cerc în punctul respectiv. Dreapta pe care se află raza se numeşte de aceea normala la cerc în punctul de tangenţă. Pentru punctul $P_1(x_1, y_1)$ care se află pe cercul $(x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2$, $\frac{y_1 - d}{x_1 - c}$ este direcţia normalei iar $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{d - y_1}{c - x_1}$ sau $y - y_1 = \frac{y_1 - d}{x_1 - c}(x - x_1)$ sînt ecuaţiile normalei.

Ecuaţia normalei care trece prin punctul $P_1(x_1;\ y_1)$	$y - y_1 = \frac{y_1 - d}{x_1 - c}(x - x_1)$
Ecuaţia normalei care trece prin punctul $P_1(x_1, y_1)$ pentru un cerc cu centrul în origine	$y - y_1 = \frac{y_1}{x_1}(x - x_1)$

Exemplu. Ecuaţia normalei în punctul $P_1(5, -3)$ la cercul $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ este $y + 3 = \frac{-3 - 1}{5 - 2}(x - 5)$ sau $y = -\frac{4}{3}x + \frac{11}{3}$.

Tangenta la cerc. Fie punctul $P_1(x_1, y_1)$ care se află pe cercul $(x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2$. Panta razei care intersectează cercul în punctul respectiv este $m_1 = \frac{y_1 - d}{x_1 - c}$ iar *panta tangentei* $m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{x_1 - c}{y_1 - d}$.

Deci, sub forma *ecuației unei drepte care trece printr-un punct fix și are o direcție dată*, ecuația tangentei va fi $y - y_1 = -\dfrac{x_1 - c}{y_1 - d}(x - x_1)$, de unde

$$yy_1 - y_1^2 - yd + y_1 d = -xx_1 + x_1^2 + cx - cx_1,$$

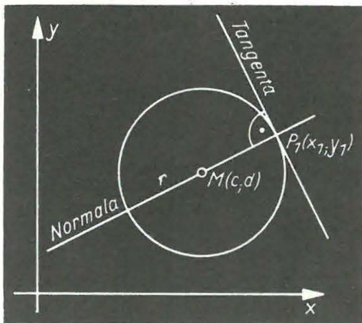
$$xx_1 + yy_1 - cx - dy = x_1^2 + y_1^2 - cx_1 - dy_1.$$

Adunăm în fiecare parte a egalității expresia $c^2 + d^2 - cx_1 - dy_1$ deoarece P_1 se află pe cerc, adică $(x_1 - c)^2 + (y_1 - d)^2 = r^2$, obținem ecuația tangentei $(x - c)\,x_1 - (x - c)\,c + (y - d)y_1 - (y - d)d = r^2$ sau $(x - c)(x_1 - c) + (y - d)(y_1 - d) = r^2$.

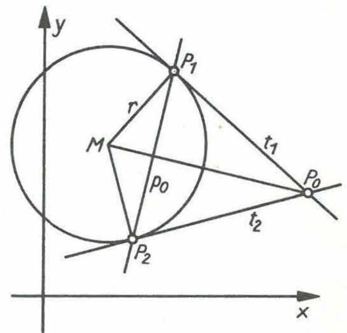
Ecuația tangentei în punctul $P_1(x_1, y_1)$ la un cerc oarecare și la un cerc cu centrul în origine	$(x - c)(x_1 - c) + (y - d)(y_1 - d) = r^2$ $xx_1 + yy_1 = r^2$

Exemplu. Ecuația tangentei la cercul $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ în punctul $P(5;\ -3)$ este $(x - 2)(5 - 2) + (y - 1)(-3 - 1) = 25$ sau $3(x - 2) - 4(y - 1) = 25$ sau sub formă normală $y = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{27}{4}$.

Cu ajutorul *calculului diferențial* obținem panta tangentei, diferențiind ecuația cercului în punctul x_1. Deoarece $(x - c)^2 + (y - d)^2 = r^2$, obținem $2(x - c) + 2(y - d)\,y' = 0$ sau $y_1' = -\dfrac{x - c}{y - d}$. Panta tangentei în punctul de tangență $P_1(x_1, y_1)$ este $y_1' = -\dfrac{x_1 - c}{y_1 - d}$ (fig. 13.4.4).



13.4.4. Tangentă la cerc într-un punct



13.4.5. Tangente dintr-un punct exterior la cerc

Tangente dintr-un punct exterior la cerc. Fie $M(c, d)$ centrul cercului de rază r și $P_0(x_0;y_0)$ un punct exterior cercului; atunci există două tangente la cerc duse din acel punct. *Punctele de tangență* vor fi $P_1(x_1, y_1)$ și $P_2(x_2, y_2)$. Ecuațiile $(x - c)(x_1 - c) + (y - d)(y_1 - d) = r^2$ și $(x - c)(x_2 - c) + (y - d)(y_2 - d) - r^2$ sînt verificate de coordonatele punctului $P_0(x_0, y_0)$, $(x_0 - c)(x_1 - c) + (y_0 - d)(y_1 - d) = r^2$ și $(x_0 - c)(x_2 - c) + (y_0 - d)(y_2 - d) = r^2$.

Ecuația $(x_0 - c)(x - c) + (y_0 - d)(y - d) = r^2$ este verificată și de coordonatele punctului $P_1(x_1\ y_1)$ și de cele ale lui $P_2(x_2, y_2)$. Ecuația aceasta reprezintă dreapta care trece prin cele două puncte și se numește *polara* punctului P_0 față de cerc, și este determinată de raza r, polul $P_0(x_0, y_0)$ și coordonatele $M(c, d)$ ale centrului cercului. Punctele de intersecție ale polarei cu cercul sînt *punctele de tangență* a două tangente duse din P_0 la cerc. Cunoscînd coordonatele polului $P_0(x_0, y_0)$ și ale unui punct de tangență și bazîndu-ne pe ecuația dreptei care trece prin două puncte, putem scrie ecuația tangentei (fig. 13.4.5).

Exemplu. Să se afle ecuațiile tangentelor la cercul $(x + 2)^2 + y^2 = 5$ duse din punctu $P_0(3; 5)$. Ecuația polarei este $(3 + 2)(x + 2) + (5 - 0)(y - 0) = 5$ sau efectuînd calculele $y = -x - 1$. Punctele de intersecție ale polarei cu cercul le aflăm rezolvînd ecuația de gradul doi: $x^2 + 4x + 4 + x^2 + 2x + 1 = 5$, de unde $x_1 = 0$, $x_2 = -3$. Deci punctele de tangență vor fi $P_1(0; -1)$ și $P_2(-3; 2)$ Ecuația tangentei în P_1 va fi $y = 2x - 1$ iar cea în P_2 va fi $y = \frac{1}{2} x + \frac{7}{2}$.

Două cercuri

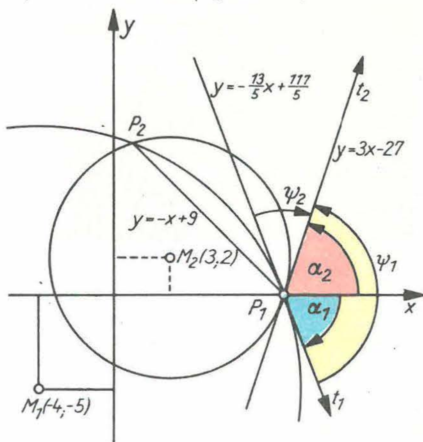
Intersecția a două cercuri. Două cercuri, ale căror ecuații sînt $(x - c_1)^2 + (y - d_1)^2 = r_1$ și $(x - c_2)^2 + (y - d_2)^2 = r_2^2$, pot avea *două puncte, un punct sau nici un punct comun.* Pentru aflarea eventualelor puncte de intersecție, trebuie să rezolvăm sistemul

$$(x_0 - c_1)^2 + (y_0 - d_1)^2 = r_1^2$$
$$(x_0 - c_2)^2 + (y_0 - d_2)^2 = r_2^2$$

În cazul în care sistemul are *două soluții reale* x_{01}, y_{01} și x_{02}, y_{02}, atunci punctele $P_1(x_{01}; y_{01})$ și $P_2(x_{02}, y_{02})$ sînt punctele de intersecție ale cercurilor; *dacă are o soluție,* atunci cercurile sînt tangente în punctul respectiv. În cazul în care sistemul *nu are soluții reale,* cercurile nu au nici un punct comun.

Exemplu. Fie cercurile $(x + 4)^2 + (y + 5)^2 = 194$ și $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 40$. Prin scăderea celor două ecuații obținem $x + y = 9$ care este ecuația *coardei comune.* Punctele de intersecție ale ei cu unul dintre cercuri sînt totodată și punctele de intersecție ale celor două cercuri, respectiv $P_1(9; 0)$ și $P_2(1, 8)$.

Unghiul sub care se intersectează două cercuri. Acest unghi este unghiul pe care-l formează *tangentele* la cele două cercuri în punctul de intersecție a cercurilor (fig. 13.4.6).



13.4.6. Puncte de intersecție și unghiul sub care se intersectează două cercuri

Exemplu. Cercurile $(x + 4)^2 + (y + 5)^2 = 194$ și $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 40$ se intersectează în punctul $P_1(9; 0)$. Tangentele au următoarele ecuații:

$$(9 + 4)(x + 4) + 5(y + 5) = 194$$

și $$(9 - 3)(x - 3) + (-2)(y - 2) = 40$$

sau sub forma normală

$y = -\frac{13}{5} x + \frac{117}{5}$ și $y = 3x - 27$. Din ecuațiile tangentelor obținem $m_1 = -\frac{13}{5}$ și $m_2 = 3$. Tangenta unghiului sub care se intersectează cele două cercuri este $\operatorname{tg} \psi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = -\frac{14}{17}$; obținem $\psi_2 = -39{,}47°$, respectiv $\psi_1 = 140{,}53°$; din $m_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{13}{5}$ obținem $\alpha_1 = -68{,}96°$; din $m_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 = 3$ obținem $\alpha_2 = 71{,}57°$; pentru $\psi = \alpha_2 - \alpha_1$ obținem $140{,}53°$.

13.5. Conice

Conicele ca intersecții ale unei suprafețe conice cu plane

Din antichitate conicele erau definite ca intersecții ale unui plan E cu un con regulat. Curbele rezultate din intersecție vor fi, cerc, elipsă, hiperbolă și parabolă. Dacă planul de secțiune E conține vîrful conului dublu, atunci secțiunea este reprezentată printr-un *punct*, vîrful Z sau o *generatoare* cînd planul E este tangent conului, sau *două generatoaare care se intersectează* în punctul Z dacă planul E conține în afara lui Z și puncte interioare ale conului. Acestea sînt denumite și *conice degenerate*. Dacă planul E nu conține vîrful Z, dar este perpendicular pe înălțimea conului, atunci figura rezultată prin intersecție este un cerc; dacă planul E este paralel cu o generatoare, atunci figura este o parabolă; în cazul în care planul E nu este nici perpendicular pe înălțimea conului, nici paralel cu o generatoare, figura va fi o elipsă cînd planul intersectează numai generatoare ale unui con și este hiperbolă cînd intersectează generatoarele și de o parte și de alta a lui Z. Toate conicele nedegenerate pot fi privite ca *imagini în perspectivă* în care Z este centrul perspectivei. *Pe fiecare generatoare se află un punct al conicei și numai unul* — în afară de trei excepții pe care le eliminăm cu ajutorul noțiunii de punct impropriu (punct la infinit) al unei drepte. Generatoarea m_0 paralelă cu planul de secțiune E, în cazul *parabolei*, se va întîlni cu paralela dusă prin vîrful parabolei în punctul de la infinit; paralela SF prin vîrf se numește *axa parabolei*. În cazul hiperbolei ne vom ocupa de cele două generatoare, în care un plan E' paralel la E, dus prin vîrful Z, taie conul dublu. În geometria proiectivă cele două plane E și E' au comune o dreaptă $\bar{g}$ (dreapta de la infinit) și cele două generatoare se intersectează cu $\bar{g}$ în punctul de la infinit care este punct al hiperbolei cît și al oricăror paralele la aceste generatoare. Astfel de paralele duse prin centrul hiperbolei se numesc *asimptote*.

Sferele lui Dandelin. Matematicianul belgian Pierre DANDELIN (1794—1847) a fost primul care a folosit, pentru deducerea proprietăților conicelor, sfere care sînt tangente atît conului cît și planului de secțiune.

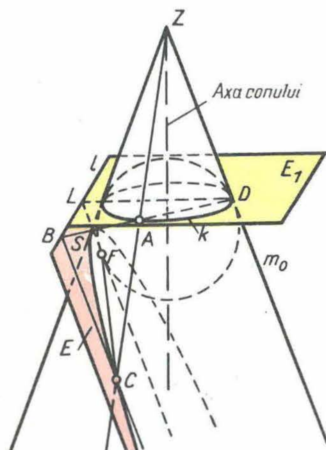
Parabola. Dacă planul de secțiune E este paralel la generatoarea m_0, există numai *o sferă* care este tangentă conului și planului E; diametrul ei este egal cu distanța de la dreapta m_0 la planul E (fig. 13.5.1). Sfera este tangentă la plan într-un punct F și la con de-a lungul unui cerc k intersectat de m_0 în punctul D. Planul E_1 dus prin cercul k taie planul E după o dreaptă l, care se numește *directoare* și este perpendiculară pe planul Σ care conține generatoarea m_0 și axa conului. Planul Σ intersectează planul de secțiune E după *axa parabolei*; punctul parabolei care se află pe axă se numește *vîrful parabolei*. Prin rotirea planului Σ în jurul generatoarei m_0 obținem pe planul E drepte de intersecție, de exemplu BC, care sînt paralele cu axa parabolei, adică perpendiculare pe directoarea l. Conul intersectează planul Σ_A obținut prin rotirea în jurul lui m_0 după altă generatoare care trece prin punctele Z, A și C; A se află pe cercul k și C pe una din dreptele de intersecție; C este astfel un punct al parabolei. Segmentele $\overline{CF}$ și $\overline{CA}$ sînt egale deoarece sînt tangente la sferă duse din punctul C; la fel $\overline{CA}$ și $\overline{CB}$ sînt egale. Dreptele $\overline{ZC}$ și $\overline{DB}$ se intersectează în A și sînt intersectate de paralelele $\overline{BC}$ și $\overline{DZ}$, deci $\overline{BC} : \overline{CA} = \overline{DZ} : \overline{ZA} = 1$, deci $\overline{BC} = \overline{CA}$.

Parabola este locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de un punct fix F și de o dreaptă fixă l. Raportul $\overline{CF} : \overline{CB} = \varepsilon$ are valoarea 1 și se numește excentricitate numerică.

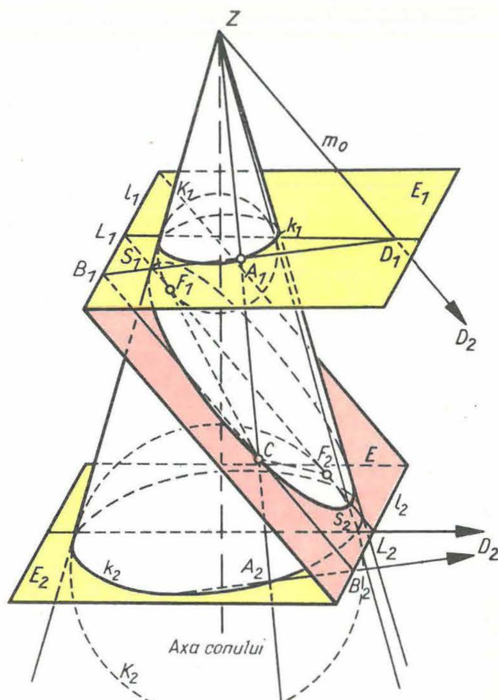
Elipsa și hiperbola. Dacă planul de secțiune E nu este paralel cu nici o generatoare, atunci există două sfere numite sferele lui Dandelin tangente planului E în punctele F_1 și F_2 și conului după cercurile k_1, respectiv k_2. Planele E_1 și E_2 care conțin aceste cercuri intersectează planul de secțiune E după două paralele, directoarele l_1, respectiv l_2. Planul Σ perpendicular pe directoare și care trece prin axa conului intersectează planul de secțiune după axa elipsei sau hiperbolei.

O paralelă la axa conicei m_0 aflată în planul Σ, trasată prin vîrful conului, intersectează planele E_1 în D_1 și E_2 în D_2. Dacă rotim acest plan Σ în jurul dreptei m_0, atunci dreapta de intersecție a lui cu E, de exemplu B_1B_2, va fi paralelă cu axa conicei, deci perpendiculară pe cele două directoare l_1 și l_2. Planul rotit Σ_A conține generatoarea ZA_1A_2; punctul de intersecție C a lui

B_1B_2 cu A_1A_2 este un punct al conicei. Segmentele $\overline{CF_1}$ și $\overline{CA_1}$ sînt egale deoarece sînt tangente din punctul C la sfera K_1; la fel $\overline{CF_2} = \overline{CA_2}$. Datorită poziției sferelor K_1 și K_2 în raport cu planul de secțiune E vom avea pentru elipsă $\overline{CF_1} + \overline{CF_2} = \overline{A_1A_2}$ iar pentru hiperbolă $\overline{CF_1} - \overline{CF_2} = \overline{A_1A_2}$ (fig. 13.5.2 și 13.5.3).



13.5.1. Parabola ca secțiune conică



13.5.2. Elipsa ca secțiune conică

Elipsa este locul geometric al tuturor punctelor C din plan, pentru care suma distanțelor la două puncte fixe F_1 și F_2 (focare) este constantă; datorită simetriei, această constantă ($2a$) este egală cu distanța dintre punctele S_1 și S_2 ale elipsei, aflate în planul Σ și numite vîrfuri.

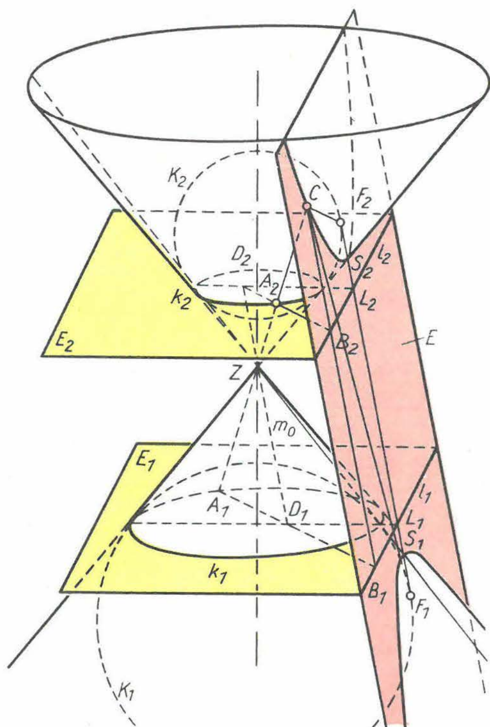
Hiperbola este locul geometric al tuturor punctelor C din plan pentru care diferența distanțelor la două puncte fixe F_1 și F_2 (focare) este constantă. Pentru cele două vîrfuri S_1 și S_2 din Σ avem $\overline{S_1S_2} = 2a = \overline{A_1A_2}$.

În planul Σ_A, obținut printr-o rotație în jurul lui m_0, dreptele ZC și B_1D_1 se intersectează în A_1 iar B_1C este paralela la ZD_1. Vom avea $\overline{CA_1} : \overline{CB_1} = \overline{ZA_1} : \overline{ZD_1} = \overline{CF_1} : \overline{CB_1} = \varepsilon$.

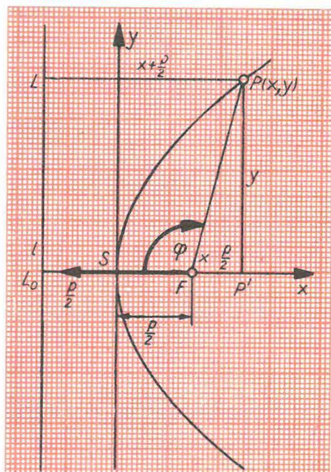
Raportul dintre distanța $\overline{CF_1}$ a unui punct C de pe conică la focarul F_1 și distanța $\overline{CB_1}$ de al punctul C la directoarea l_1 este o constantă ε (excentricitatea numerică); valoarea excentricității numerice este în cazul elipsei $0 < \varepsilon < 1 (\overline{ZA_1} < \overline{ZD_1})$ iar în cazul hiperbolei $\varepsilon > 1 (\overline{ZA_1} > \overline{ZD_1})$.

Ecuațiile conicelor. Pentru a obține o expresie analitică a conicelor trebuie găsit un sistem de coordonate corespunzător. Conicele sînt conform descrierii *simetrice față de axe*. Elipsa și hiperbola vor fi, conform celor de mai sus, *simetrice și față de mediatoarea segmentului* F_1F_2; punctul de intersecție cu axa conicei este centrul conicei. De aceea, alegem cel mai bine un *sistem de coordonate cartezian* pentru descrierea elipsei și hiperbolei. Axa Ox va fi axa conicei, iar axa Oy va fi mediatoarea segmentului F_1F_2, deci perpendiculara în punctul M. Spunem că în acest caz *conica are centrul în origine*. În cazul în care axa Ox este axa conicei dar axa Oy este tangenta dusă în vîrful conicei spunem că ecuația conicei este *raportată la vîrf*.

Conicele se pot exprima și în coordonate polare. Axa polară o așezăm pe axa conicei iar drept pol luăm focarul. Un caz special reprezintă hiperbola, unde putem folosi și un sistem de coordonate care are drept axe cele două asimptote.



13.5.3. Hiperbola ca secțiune conică



13.5.4. Deducerea ecuației parabolei

Ecuațiile parabolei

Ecuația parabolei cu vîrful în origine. Alegem sistemul de coordonate astfel încît axa Ox coincide cu *axa parabolei*, iar axa Oy coincide cu *tangenta la vîrful parabolei*

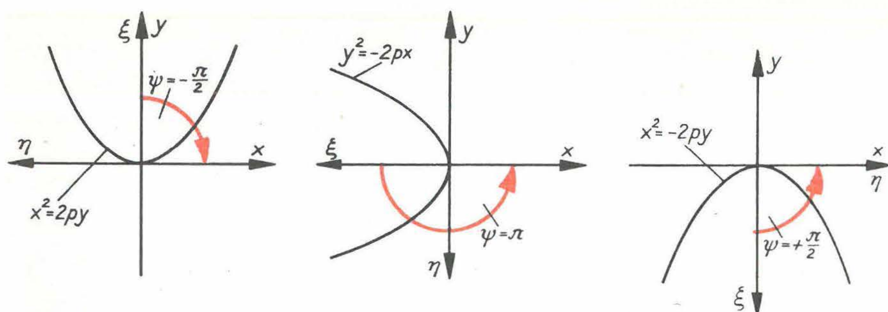
Fiecare punct al parabolei este egal depărtat de *focarul F* și de *directoarea l* a parabolei. Deci vîrful S va împărți distanța $\overline{FL}$ dintre focar și directoare în două părți egale. Valoarea absolută a distanței dintre focar și directoare se va numi *semiparametrul p*. Focarul va avea deci coordonatele $\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$. Conform definiției parabolei, distanța $\overline{FP}$ de la focar la un punct $P(x, y)$ al parabolei, $\overrightarrow{FP} = \sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2}$ va fi egală cu $\overline{FL} = \frac{p}{2} + x$ care reprezintă distanța de la punctul F la directoare (fig. 13.5.4).

$$\left(\frac{p}{2} + x\right)^2 = y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2, \text{ deci } y^2 = 2px.$$

Ecuația parabolei cu vîrful în origine	$y^2 = 2px$

Ecuația ne indică faptul că axa Ox este și axă de simetrie, vîrful se află în origine iar pentru orice $x > 0$ există două puncte pe parabolă ale căror ordonate au valori opuse. Semiparametrul p ne indică *forma parabolei*. Cu cît p este mai mic, cu atît focarul și directoarea se apropie de axa Oy și valoarea lui y crește mai încet. În cazul în care $p \to 0$, parabola degenerează în axa Ox iar în cazul în care $p \to \infty$, parabola degenerează în axa Oy.

Și ecuațiile $x^2 = 2py$, $y^2 = -2px$ și $x^2 = -2py$ cu $p > 0$ reprezintă parabole, după cum ne arată și figura 13.5.5. Parabola $\eta^2 = 2p\xi$ prin rotația sistemului de coordonare $\xi O\eta$ cu un unghi ψ se va transforma într-una din ecuațiile de mai sus. Ecuațiile de transformare vor fi $\xi = x\cos\psi - y\sin\psi$ și $\eta = x\sin\psi + y\cos\psi$.



13.5.5. Poziția parabolei $\eta^2 = 2p\xi$ după rotația sistemului $\xi O \eta$

Parabolă	ψ	Ecuații de transformare	Ecuația transformată	Fig.	Interval	
					pentru x	pentru y
$\eta^2 = 2p\xi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\xi = y, \quad \eta = -x$	$x^2 = 2py$	a	$-\infty < x < +\infty$	$0 \leqslant y < +\infty$
$\eta^2 = 2p\xi$	$+\pi$	$\xi = -x, \quad \eta = -y$	$y^2 = -2px$	b	$-\infty < x \leqslant 0$	$-\infty < y < +\infty$
$\eta^2 = 2p\xi$	$+\frac{\pi}{2}$	$\xi = -y, \quad \eta = x$	$x^2 = -2py$	c	$-\infty < x < +\infty$	$-\infty < y \leqslant 0$

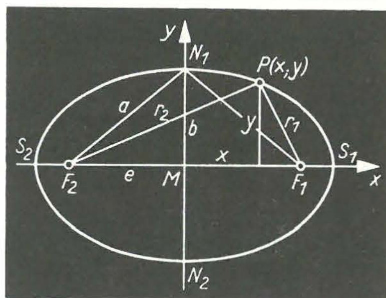
Dacă vîrful parabolei are coordonatele $(c; d)$, ecuația parabolei pentru $p > 0$ va avea una din formele:

$$(y - d)^2 = 2p(x - c); \qquad (x - c)^2 = 2p(y - d);$$
$$(y - d)^2 = -2p(x - c); \qquad (x - c)^2 = -2p(y - d).$$

Exemplul 1. Să se afle ecuația parabolei cu vîrful în origine, axa Ox fiind axa parabolei, și care trece prin punctul $P_0(2, 4)$. Coordonatele punctului P_0 verifică ecuația $y^2 = 2px$, $4^2 = 2p \cdot 2$. Deci $p = 4$. Ecuația parabolei va fi $y^2 = 8x$.

Exemplul 2. Să se afle ecuația parabolei care are *vîrful* în punctul S (2, 3), trece prin punctul $P_0(4, 1)$ și are deschiderea îndreptată în jos. Ecuația $(x - 2)^2 = -2p(y - 3)$ este verificată de punctul P_0, $(4 - 2)^2 = -2p(1 - 3)$, deci $p = 1$. Ecuația parabolei va fi $(x - 2)^2 = -2(y - 3)$. Coordonatele focarului vor fi $F(2; 2{,}5)$.

Ecuațiile elipsei



13.5.6. Ecuația elipsei cu centrul în origine

Ecuația elipsei cu centrul în origine. Axa Ox a sistemului cartezian este și *axa elipsei*, iar axa Oy este perpendiculară pe *mijlocul* M al segmentului $\overline{S_1S_2}$ care unește vîrfurile elipsei. Axa Oy taie elipsa în două puncte N_1 și N_2. Notăm $\overline{S_1S_2} = 2a$ axa mare a elipsei, $\overline{N_1N_2} = 2b$ axa mică a elipsei iar $F_1F_2/2 = e$ *excentricitatea liniară*. Deoarece $\overline{N_1F_1} + \overline{N_1F_2} = 2a$ (fig. 13.5.6), aceste drepte formează un triunghi dreptunghic, în care $e^2 + b^2 = a^2$. Focarele vor avea coordonatele $F_1(+e, 0)$ și $F_2(-e, 0)$. Distanțele de la un punct oarecare al elipsei $P(x, y)$ la focare vor fi $\overline{PF_1} = r_1 = \sqrt{y^2 + (e - x)^2}$ și $\overline{PF_2} = r_2 = \sqrt{y^2 + (e + x)^2}$. Conform definiției elipsei, $r_1 + r_2 = 2a$; $r_1 = 2a - r_2$.

Înlocuind valorile lui r_1 și r_2 și ridicînd la pătrat, se obține

$y^2 + (e - x)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(y^2 + (e + x)^2} + y^2 + (e + x)^2$ sau $a\sqrt{y^2 + (e + x)^2} = a^2 + ex$.

Ridicînd din nou la pătrat și înlocuind, se obține $e^2 = a^2 - b^2$

$a^2y^2 + a^2e^2 + 2a^2ex + a^2x^2 = a^4 + 2a^2ex + e^2x^2;\quad a^2y^2 + a^4 - a^2b^2 + a^2x^2 = a^4 + a^2x^2 - b^2x^2$

sau $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

Ecuația elipsei cu centrul în origine	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

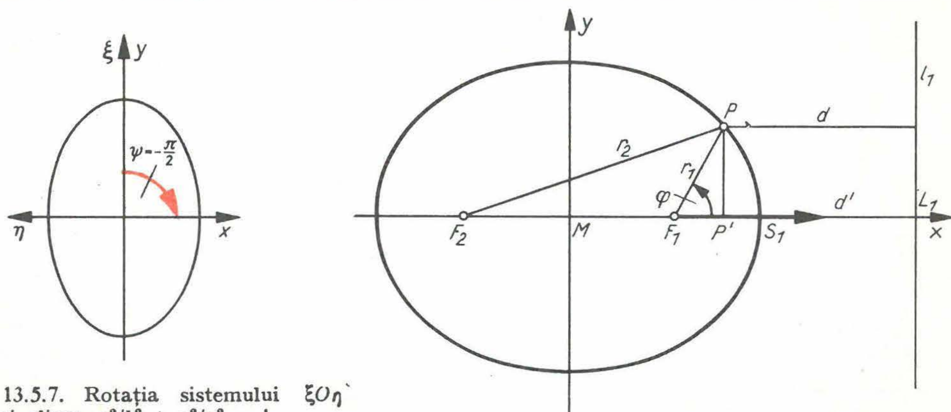
Ecuația $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$, unde $a > b$. reprezintă elipsa obținută prin rotirea sistemului de axe de coordonate $\xi O \eta$ cu $\psi = -\dfrac{\pi}{2}$. Elipsa $\dfrac{\xi^2}{a^2} + \dfrac{\eta^2}{b^2} = 1$ va fi transformată prin ecuațiile de transformare $\xi = y$, $\eta = -x$ în ecuația $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ (fig. 13.5.7).

În cazul în care printr-o translație paralelă centrul elipsei va avea coordonatele (c, d), ecuația elipsei pentru $a > b$ va avea una din formele:

$$\frac{(x - c)^2}{a^2} + \frac{(y - d)^2}{b^2} = 1 \quad \text{sau} \quad \frac{(x - c)^2}{b^2} + \frac{(y - d)^2}{a^2} = 1.$$

Exemplul 1. Ecuația elipsei cu centrul în origine și semiaxele 3 și 4 va avea una din formele $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, respectiv $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$. În primul caz, axa mare se va afla pe axa Ox și în cazul al doilea pe axa Oy.

Exemplul 2. Să se scrie ecuația elipsei cu centrul în origine și semiaxa 5 și care trece prin punctul $P_0(3, -8)$. Deoarece $8 > 5$, $b = 5$ va fi semiaxa mică. Prin înlocuirea lui $x_0 = 3$, $y_0 = -8$ în ecuația elipsei, obținem semiaxa mare: $\dfrac{3^2}{5^2} + \dfrac{(-8)^2}{a^2} = 1$, $\dfrac{64}{a^2} = \dfrac{25 - 9}{25} = \dfrac{16}{25}$; $a = \sqrt{25 \cdot \dfrac{64}{16}} = 10$. Deci ecuația elipsei va fi $\dfrac{x^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{10^2} = 1$.



13.5.7. Rotația sistemului $\xi O \eta$ și elipsa $x^2/b^2 + y^2/a^2 = 1$

13.5.8. Excentricitatea numerică a elipsei; r_1 și φ sînt coordonatele polare ale punctului P

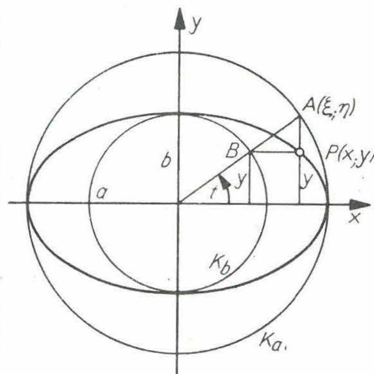
Excentricitate numerică. Dacă definim elipsa ca locul geometric al punctelor P, a căror distanță $\overline{PF}$ la focarul F și distanța d la directoarea l se află într-un raport constant ε $(0 < \varepsilon < 1)$, atunci bazîndu-ne pe faptul că conicele sînt secțiuni plane printr-un con, constatăm că directoarea este perpendiculară pe axă. În figura 13.5.8 sînt reprezentate focarul F_1 și directoarea l_1. Punctul $P(x, y)$ al elipsei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ are distanțele la focarele F_1 și F_2, r_1 și r_2 respectiv și distanța d la directoarea l. Din teorema lui Pitagora aplicată în triunghiurile $PP'F_2$ și $PP'F_1$ rezultă: $r_2^2 = r_1^2 + (2e)^2 - 2 \cdot 2e(e - x) = r_1^2 + 4e^2 - 4e^2 + 4ex$ sau $r_2^2 - r_1^2 = 4ex$. Deoarece $r_2 + r_1 = 2a$, $r_2 - r_1 = 2x\frac{e}{a}$, deci $r_2 = a + \frac{e}{a}x$ și $r_1 = a - \frac{e}{a}x$. Conform definiției, r_1 este egal cu produsul $d\varepsilon$, unde atît d cît și ε sînt încă necunoscute. Notăm distanța de la vîrful S_1 la directoarea l_1 cu $d' = \overline{S_1L_1}$. Din $d\varepsilon = (d' + a - x)\varepsilon = a - \frac{e}{a}x$ și $(d' + a)\varepsilon = a$ obținem $\varepsilon x = \frac{e}{a}x$, deci $\varepsilon = \frac{e}{a}$ și $d' = \frac{a}{\varepsilon} - a = \frac{a}{e}(a - e)$, respectiv $d' + a = \frac{a}{\varepsilon} = \frac{a^2}{e}$.

Directoarea are deci de la origine distanța $d' + a = \frac{a}{\varepsilon} = \frac{a^2}{e}$. *Excentricitatea numerică* are valoarea $\varepsilon = \frac{e}{a}$ și $d = r_1 : \varepsilon$ sau $d = \frac{a}{\varepsilon} - x$. În figură d' este construit după raportul $d' : a = (a - e) : e$.

Ecuațiile parametrice ale elipsei. Elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ este imaginea unui cerc $\xi^2 + \eta^2 = a^2$ în urma unei transformări afine $\xi = x$, $\eta = \frac{ya}{b}$.

Construcția elipsei se face în felul următor. Se construiesc două cercuri concentrice cu razele a și b. Prin *punctele de intersecție A și B ale unei semidrepte duse din origine* cu cele două cercuri se duc drepte paralele cu axele. Intersecția acestor paralele va fi un punct P al elipsei. Se observă că se respectă condiția $y : \eta = b : a$. Dacă notăm cu t unghiul format de rază cu axa Ox, reprezentarea parametrică a elipsei va fi $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ care verifică ecuația elipsei (fig. 13.5.9).

Ecuațiile parametrice ale elipsei	$x = a\cos t,\ y = b\sin t$



13.5.9. Reprezentarea parametrică a elipsei

Ecuațiile hiperbolei

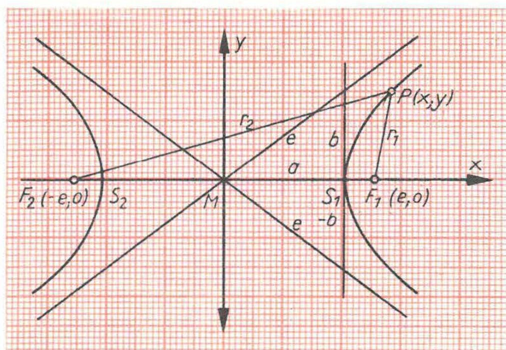
Ca și elipsa, hiperbola este *simetrică* față de axa care trece prin *vîrfurile* S_1 și S_2 ca și față de perpendiculara pe *mijlocul* M al segmentului S_1S_2, $\overline{MS_1} = \overline{MS_2}$. Distanța $\overline{MS_1}$ o notăm cu a iar $\overline{MF_1} = \overline{MF_2}$ cu e. Semiaxa mică nu există la hiperbolă, dar deoarece $e > a$, b se poate calcula din $b^2 = e^2 - a^2$.

Ecuația hiperbolei cu centrul în origine. Datorită proprietăților sale de simetrie, hiperbola este foarte bine precizată într-un sistem de coordonate carteziene, axa Ox fiind axa hiperbolei iar axa Oy perpendiculara în M pe $\overline{S_1S_2}$. Focarele au coordonatele $F_1(+e;\ 0)$ și $F_2(-e;\ 0)$ (fig. 13.5.10). Un punct al hiperbolei are distanțele la focare

$$\overline{PF_1} = r_1 = \sqrt{y^2 + (x - e)^2}$$

și

$$\overline{PF_2} = r_2 = \sqrt{y^2 + (e + x)^2}$$



13.5.10. Ecuația hiperbolei cu centrul în origine

Conform definiției hiperbolei $r_2 - r_1 = 2a$ sau $r_2 = 2a + r_1$. Înlocuind pe r_1 și r_2 cu valorile găsite, se obține

$y^2 + (e + x)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{y^2 + (x - e)^2} + y^2 + (e - x)^2$ sau $ex - a^2 = a\sqrt{y^2 + (x - e)^2}$.

Ridicăm din nou la pătrat;

$$e^2x^2 + a^4 - 2a^2ex = a^2y^2 + a^2x^2 - 2a^2ex + a^2e^2.$$

Deoarece $e^2 = a^2 + b^2$, se obține $a^2x^2 + b^2x^2 + a^4 = a^2y^2 + a^2x^2 + a^4 + a^2b^2$ sau $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Ecuația hiperbolei cu centrul în origine	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Semnificația lui b se recunoaște imediat din următoarea formă a ecuației:

$$y^2a^2 = b^2(x^2 - a^2),$$

$$\frac{y}{x} = \pm \frac{b}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}.$$

Asimptotele hiperbolei	$y = \pm x \cdot \frac{b}{a}$

Limita acestei expresii pentru $x \to \infty$ este $\lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \pm \frac{b}{a}$. Dreptele $\eta = \pm \frac{b}{a}\xi$, care au ca direcție limita aceasta, sînt asimptotele hiperbolei.

Datorită proprietății de simetrie este suficient să privim reprezentarea grafică a hiperbolei $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (fig. 13.5.11) și a dreptei $\eta = \frac{b}{a}\xi$ în primul cadran. O perpendiculară pe axa Ox dintr-un punct $P(\xi, \eta)$, unde $\xi > a$, taie hiperbola într-un punct $P(x; y)$. Din relațiile $\xi = x$; $\eta = \frac{bx}{a}$ și $y = \frac{bx}{a}\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$ rezultă $y < \eta$, deoarece factorul $\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$ este mai mic decît 1. Diferența $\eta - y$ este cu atît mai mică cu cît x este mai mare, deoarece, dacă folosim ecuația hiperbolei sub forma $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^{-1}$, cînd $x \to \infty$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \to \infty$ și $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^{-1} = 0$ sau $\frac{bx}{a} - y = \eta - y \to 0$ pentru $x \to \infty$.

Pentru valori mari ale lui x, hiperbola se apropie de dreapta $\eta = \frac{b}{a}\xi$, care este o asimptotă a hiperbolei. Unghiul de înclinație față de axa Ox se va calcula din triunghiul dreptunghic care are catetele a și b și ipotenuza e.

Și ecuația $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ în care a este semiaxa principală și se află pe Oy reprezintă o hiperbolă, care se obține prin rotirea sistemului de coordonate $\xi O \eta$ cu un unghi $\psi = -\frac{\pi}{2}$.

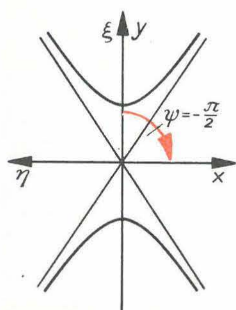
Prin transformarea $\xi = y$ și $\eta = -x$ hiperbola $\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = 1$ devine $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$

Dacă după o translație paralelă a sistemului de coordonate centrul hiperbolei va avea coordonatele (c, d), ecuația hiperbolei va avea una din formele:

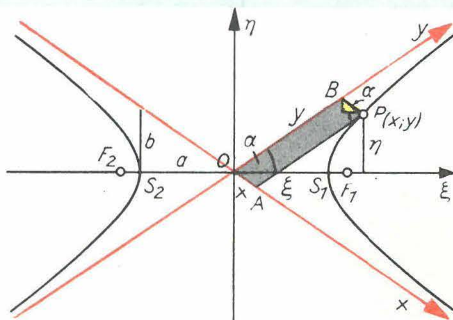
$$\frac{(x - c)^2}{a^2} - \frac{(y - d)^2}{b^2} = 1 \quad \text{sau} \quad \frac{(y - d)^2}{a^2} - \frac{(x - c)^2}{b^2} = 1.$$

Exemplu. Hiperbola $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$ are *vîrfurile* $S_1(5;\ 0)$ și $S_2(-5;\ 0)$, *focarele* $F_1\ (\sqrt{25+4};\ 0)$ și $F_2\ (-\sqrt{29};\ 0)$ și *asimptotele* $y = \pm \frac{2}{5}x$.

Hiperbola $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{4} = 1$ are *vîrfurile* $S_3(0;\ 5)$ și $S_4\ (0;\ -5)$, *focarele* $F_3\ (0; \sqrt{29})$ și $F_4(0;\ -\sqrt{29})$ și *asimptotele* $y = \pm \frac{5}{2}x$.



13.5.11. Rotația sistemului $\xi O\eta$ și hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



13.5.12. Ecuația hiperbolei raportată la asimptote

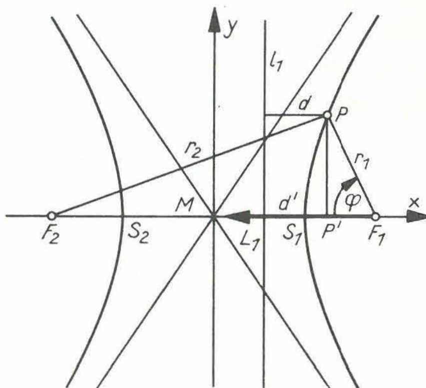
Ecuația hiperbolei raportată la asimptote. Ecuația hiperbolei are o formă foarte simplă cînd luăm ca axe de coordonate asimptotele (fig. 13.5.12). Fie ξ și η coordonatele în sistemul de coordonate cartezian și x și y în sistemul de coordonate care are ca axe asimptotele. Ecuația hiperbolei cu centrul în origine va fi $\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = 1$ și $\eta = \pm \frac{b}{a}\xi$ vor fi ecuațiile asimptotelor. Vom avea $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$. Între coordonate există relațiile

$$\left.\begin{aligned}\eta &= y\sin\alpha - x\sin\alpha\\ \xi &= x\cos\alpha + y\cos\alpha\end{aligned}\right\}\quad \text{sau}\quad \left.\begin{aligned}\eta &= (y-x)\sin\alpha\\ \xi &= (y+x)\cos\alpha\end{aligned}\right\}$$

Introducînd aceste relații în ecuația hiperbolei, obținem

$$\frac{(y+x)^2\cos^2\alpha}{a^2} - \frac{(y-x)^2\sin^2\alpha}{b^2} = 1$$

sau $(y+x)^2 b^2\cos^2\alpha - (y-x)^2 a^2\sin^2\alpha = a^2b^2$. Deoarece $b^2\cos^2\alpha = a^2\sin^2\alpha$, obținem $2xy(b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha) = a^2b^2$ și de aici $4xy\cos^2\alpha = a^2$ și $4xy\sin^2\alpha = b^2$. Prin adunare $4xy = a^2 + b^2$ și înlocuind $\sin 2\alpha = \frac{2ab}{a^2+b^2}$ obținem $xy\sin 2\alpha = \frac{ab}{2}$ Din această ecuație rezultă că paralelogramul $OAPB$ are aria constantă.



13.5.13. Excentricitatea hiperbolei

Ecuația hiperbolei raportată la asimptote va avea forma $xy =$ const. *Invers, orice funcție de acest tip va reprezenta o hiperbolă.*

Ecuația hiperbolei raportată la asimptote	$xy = \frac{a^2+b^2}{4} = \frac{e^2}{4} =$ con

Excentricitate numerică. Dacă definim hiperbola ca locul geometric al punctelor P la care raportul dintre distanța PF la focar și distanța d la directoarea respectivă este o constantă $\varepsilon > 1$, atunci bazîndu-ne pe faptul că conicele sînt secțiuni plane printr-un con, constatăm că directoarea este perpendiculară pe axă. În figura 13.5.13 sînt reprezentate focarul F_1 și directoarea l_1. Punctul $P(x; y)$ al hiperbolei $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ are distanțele la focare r_1, respectiv r_2 iar față de directoare, distanța d. În triunghiul F_1F_2P aplicăm *teorema lui Pitagora*: $r_2^2 = r_1^2 + (2e)^2 - 2 \cdot 2e(e - x)$ sau $r_2^2 - r_1^2 = 4ex$. Deoarece $r_2 - r_1 = 2a$; $r_2 + r_1$ va fi egal cu $2x \frac{e}{a}$ și deci $r_2 = a + \frac{e}{a} x$ și $r_1 = \frac{e}{a} x - a$.

Din definiția de mai sus rezultă că $d\varepsilon = r_1$. Notăm distanța de la vîrful S_1 la directoarea l_1 cu $d' = \overline{S_1L_1}$; atunci din relațiile $d\varepsilon = (d' - a + x)\, e = \frac{e}{a} x - a$, $(d' - a)\varepsilon = -a$ rezultă $\varepsilon x = \frac{e}{a} x$, deci $\varepsilon = \frac{e}{a}$ și $d' = a - \frac{a}{\varepsilon} = \frac{a}{e}(e - a)$. Distanța de la origine la *directoare* va fi $a - d' = \frac{a}{\varepsilon} = \frac{a^2}{e}$.

Excentricitatea numerică va avea valoarea $\varepsilon = \frac{e}{a}$ iar $d = r_1 : \varepsilon$ sau $d = x - \frac{a}{e}$.

Conica și dreapta

Puncte de intersecție a unei conice cu o dreaptă. La deducerea conicelor cu ajutorul sferelor lui Dandelin ca secțiuni ale unei suprafețe conice am constatat că *fiecărui punct al cercului de tangență k* al sferei lui Dandelin îi corespunde *un punct P' al conicei*. Unei drepte g din planele E_1, respectiv E_2 îi corespunde de asemenea o dreaptă g din planul E, care este o dreaptă rezultată din intersecția planului E și un alt plan dus prin dreapta g și vîrful Z. Ca în orice proiecție, punctele de intersecție din planele E_1 și E_2 au corespondente tot puncte de intersecție în planul E.

După cum dreapta g intersectează, este tangentă sau este exterioară cercurilor k_1 sau k_2, dreapta g' proiectată va fi secantă, tangentă sau exterioară conicei; pot să existe puncte pe cerc ale căror proiecții sînt puncte de la infinit. Astfel:

1. În cazul parabolei, acesta este punctul D al lui k; el are cea mai mare distanță față de directoarea l (vezi fig. 13.5.1). *Fiecare secantă a cercului k prin punctul D* are ca proiecție o *paralelă la axa parabolei* (de ex. DA are paralelela BC); ea va tăia parabola în punctul C. *Tangenta în punctul D* la cercul k este paralelă la directoare; proiecția sa este *dreapta de la infinit a planului E*.

2. În cazul *hiperbolei*, un plan dus prin vîrful Z al conului paralel la planul de secțiune E taie cercul în două puncte P_2 și P_3 ale căror proiecții sînt punctele de la infinit ale asimptotelor. Dreapta care unește aceste două puncte are ca proiecție *dreapta de la infinit a planului de intersecție E*. *O secantă* la unul din aceste două cercuri k_1, respectiv k_2 dusă prin punctul P_2 are ca proiecție o *asimptotă* care taie hiperbola numai într-un singur punct finit. *Tangentele* la cerc în P_2, respectiv P_3 se proiectează în *asimptote*. Punctul lor de intersecție este imaginea inversă a centrului C al hiperbolei.

La determinarea punctului de intersecție dintre o conică și o dreaptă ne dăm seama imediat din ecuația carteziană a dreptei dacă avem numai un singur punct de intersecție ($m_p = 0$) la o parabolă, $m_h = \pm b/a$ în cazul hiperbolei). În toate celelalte cazuri, prin introducerea valorilor lui y din ecuația dreptei în ecuația conicei, obținem o ecuație de gradul doi, al cărei discriminant ne dă indicații asupra numărului de puncte de intersecție.

Exemplul 1. Pentru determinarea *punctelor de intersecție a dreptei* $y = -\frac{1}{2} x + 2$ cu parabola $x^2 = 4y$, trebuie rezolvat sistemul format din cele două ecuații. Prin substituție obținem ecuația $x^2 = -2x + 8$ care are soluțiile $x_1 = 2$, $x_2 = -4$ și $y_1 = 1$, $y_2 = 4$.

Punctele de intersecție sînt deci $P_1(2, 1)$ și $P_2(-4, 4)$.

Exemplul 2. *Conica* $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$ este raportată la *axe* deoarece în ecuație nu intervine termenul cu xy. Ecuația poate fi scrisă sub forma $16x^2 + 32x + 16 + 25y^2 - 100y + 100 - 16 - 100 - 284 = 0$ sau $16(x+1)^2 + 25(y-2)^2 = 400$ sau $\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$. *Centrul* M al conicei are coordonatele $M(-1, 2)$. Dreapta $5y = 28x - 62$ intersectează elipsa în punctele $P_1\left(2, -\frac{6}{5}\right)$ și $P_2\left(3, \frac{22}{5}\right)$, deoarece prin substituire obținem ecuația $x^2 - 5x + 6 = 0$ cu soluțiile $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Pantele tangentelor. Ecuațiile tangentelor la conice. Ecuațiile tangentelor la parabolă, elipsă, hiperbolă se pot obține ca și cele ale tangentelor la cerc prin metodele folosite în geometria analitică. Totuși este mai ușor să folosim *calculul diferențial*. Derivarea ecuației conicei într-un punct x_1 ne indică *panta tangentei* în punctul $P_1(x_1, y_1)$ al conicei, unde y_1 este ordonata corespunzătoare lui x_1. Cunoscînd panta, putem scrie ecuația tangentei în punctul $P_1(x_1, y_1)$. Ecuația *parabolei* $y^2 = 2px$ devine după diferențiere $2yy' = 2p$ sau $y' = \frac{p}{y}$ iar direcția tangentei în punctul P_1 va fi $y_1' = \frac{p}{y_1}$. Deci ecuația tangentei va fi:

$$y_1' = \frac{y - y_1}{x - x_1} \quad \text{sau} \quad \frac{px}{y_1} - \frac{px_1}{y_1} = y - y_1,$$

$$px - px_1 = yy_1 - y_1^2 = yy_1 - 2px_1, \quad \text{deci} \quad p(x + x_1) = yy_1.$$

În cazul *elipsei* și *hiperbolei* $P_1(x_1, y_1)$ fiind punctul conicei în care vrem să ducem tangenta, panta și ecuațiile tangentelor vor fi următoarele;

$$\frac{x_1^2}{a^2} \pm \frac{y_1^2}{b^2} = 1; \quad \frac{2x_1}{a^2} \pm \frac{2y_1y_1'}{b^2} = 0; \quad y_1 = \mp \frac{b^2x_1}{a^2y_1},$$

$$y_1'(x - x_1) = y - y_1, \quad \mp \frac{b^2xx_1}{a^2y_1} \pm \frac{x_1^2}{a^2} \cdot \frac{b^2}{y_1} = y - y_1,$$

$$\frac{xx_1}{a^2} \pm \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} \pm \frac{y_1^2}{b^2} \quad \text{sau} \quad \frac{xx_1}{a^2} \pm \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Această metodă este denumită dedublare.

Direcția tangentei (panta) și ecuația tangentei se pot deduce și pentru parabolele $x^2 = 2py$, $y^2 = -2px$, $x^2 = -2py$, elipsa $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ și hiperbola $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$. Următorul tabel ne prezintă cazurile cele mai importante.

Conica Vîrful S Centrul M	Ecuația	Panta tangentei în punctul $P_1(x_1;\ y_1)$	Ecuația tangentei în punctul $P_1(x_1;\ y_1)$
parabolă			
$S(0;\ 0)$	$y^2 = 2px$	p/y_1	$yy_1 = p(x + x_1)$
$S(c;\ d)$	$(y-d)^2 = 2p(x-c)$	$p/(y_1 - d)$	$(y-d)(y_1-d) = p(x - c + x_1 - c)$
elipsă			
$M(0;\ 0)$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$-\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1}{y_1}$	$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$
$M(c;\ d)$	$\frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{(y-d)^2}{b^2} = 1$	$-\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1 - c}{y_1 - d}$	$\frac{(x-c)(x_1-c)}{a^2} + \frac{(y-d)(y_1-d)}{b^2} = 1$

Conica Vîrful S Centrul M	Ecuația	Panta tangentei în punctul $P_1(x_1;\ y_1)$	Ecuația tangentei în punctul $P_1(x_1;\ y_1)$
cerc			
$M(0;\ 0)$	$x^2 + y^2 = r^2$	$-x_1/y_1$	$xx_1 + yy_1 = r^2$
$M(c;\ d)$	$(x-c)^2 + (y-d)^2 = r^2$	$-(x_1-c)/(y_1-d)$	$(x-c)(x_1-c) + (y-d)(y_1-d) = r^2$
hiperbolă			
$M(0;\ 0)$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1}{y_1}$	$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$
$M(c;\ d)$	$\frac{(x-c)^2}{a^2} - \frac{(y_1-d)^2}{b^2} = 1$	$\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1 - c}{y_1 - d}$	$\frac{(x-c)(x_1-c)}{a^2} - \frac{(y-d)(y_1-d)}{b^2} = 1$

Exemplu. Să se scrie ecuația tangentei la elipsa $\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$ în punctul $P_1\left(2;\ -\frac{6}{5}\right)$. Ecuația tangentei va fi

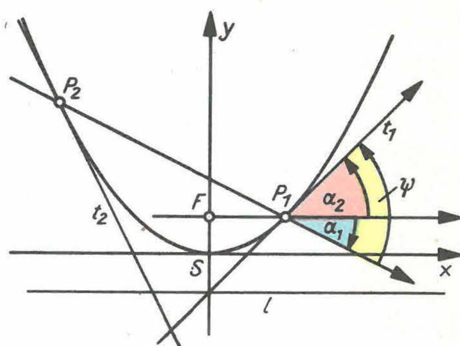
$$\frac{(x+1)(x_1+1)}{a^2} + \frac{(y-2)(y_1-2)}{b^2} = 1$$

sau $16(x+1)(2+1) + 25(y-2)\left(-\frac{6}{5} - 2\right) =$

$= 400,$

$48x + 48 - 80y + 160 = 400,$

$y = \frac{3}{5}x - \frac{12}{5}.$



13.5.14. Punctul de intersecție și unghiul dintre o dreaptă și o parabolă

Unghiul de intersecție dintre o conică și o dreaptă. Acest unghi este unghiul dintre dreaptă și tangentă în punctul de intersecție a conicei cu dreapta, deci se va calcula unghiul dintre două drepte. Dreapta $y = -\frac{1}{2}x + 2$ și parabola $x^2 = 4y$ se intersectează în punctul $P_1(2;\ 1)$. Tangenta t_1 la parabolă în punctul P_1 are ecuația $y = x - 1$ și face cu axa Ox un unghi $\alpha_2 = 45°$, iar dreapta face cu axa Ox un unghi $\alpha_1 = -26{,}56°$, deci unghiul ψ dintre cele două drepte va fi $\alpha_2 - \alpha_1 = 71{,}57°$ (fig. 13.5.14).

Tangenta la conică cu panta cunoscută. Panta dată m_1 trebuie să fie egală cu y_1' care este panta conicei. În cazul parabolei, m_1 nu trebuie să fie egal cu panta axei parabolei, deoarece nu există nici o tangentă care să aibă această direcție. Din $y_1' = m_1 = \frac{p}{y_1}$ obținem o coordonată $y_1 = \frac{p}{m_1}$; cealaltă coordonată o obținem din ecuația parabolei deoarece coordonatele punctului de tangență trebuie să verifice ecuația parabolei. În cazul elipsei, respectiv hiperbolei $\left(m_1 = \mp \frac{b^2x_1}{a^2y_1}\right)$ obținem un raport al coordonatelor x_1: y_1 ale punctului de tangență; prin înlocuirea în ecuația conicei obținem ecuația de gradul doi $x_1^2 = a^4m_1^2/(a^2m_1^2 \pm b^2)$, care pentru toate elipsele sau hiperbolele, pentru care $|m_1| > \frac{b}{a}$, are două soluții reale, egale în valoare

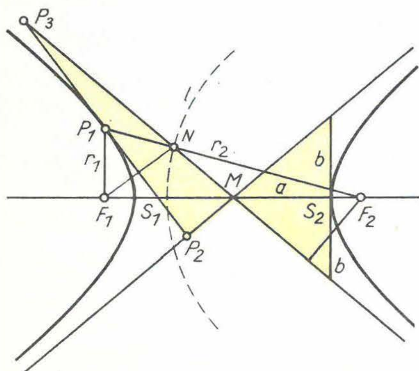
absolută. Deci la o elipsă se pot duce *două tangente paralele* ale căror puncte de tangență sînt simetrice față de centru; în cazul *hiperbolei* există două tangente numai în cazul în care dreapta construită în centru care are panta dată se află în *afara spațiului dintre cele două asimptote*. Dacă tangenta este *paralelă* la dreapta $y = mx + n$, atunci m_1 trebuie să fie egal cu mL; dacă tangenta este *perpendiculară* pe dreapta $y = mx + n$ avem $m_1 = -\frac{1}{m}$; dacă vrem ca ele să facă *un unghi* ψ, din $\operatorname{tg}\psi = \frac{m_1 - m}{1 + m_1 m}$ avem $m_1 = \frac{m + \operatorname{tg}\psi}{1 - m\operatorname{tg}\psi}$.

Exemplu. Fie dată elipsa $36x^2 + 100y^2 = 9$ și dreapta $y = -\frac{4}{5}x$; atunci $m = -\frac{4}{5}$. Semiaxele elipsei vor avea, conform ecuației $\frac{x^2}{\frac{9}{36}} + \frac{y^2}{\frac{9}{100}} = 1$, lungimile $a = \frac{1}{2}$ și $b = \frac{3}{10}$.

În cazul unei tangente paralele cu dreapta avem $-\frac{4}{5} = -\frac{9}{25}\frac{x_1}{y_1}$; vom avea $y_1 = \frac{9}{20}x_1$. Totodată punctele de tangență trebuie să se afle pe elipsă. Deci vom avea $36x_1^2 + 100y_1^2 = 9$. Prin înlocuire obținem $36x_1^2 + \frac{100 \cdot 81}{400}x_1^2 = 9$. Deci $x_1^2 = \frac{36}{225}$ și $x_{1,2} = \pm\frac{2}{5}$; $y_{1,2} = \pm\frac{9}{50}$. Deci punctele de tangență sînt $B_1\left(\frac{2}{5}; \frac{9}{50}\right)$ și $B_2\left(-\frac{2}{5}; -\frac{9}{50}\right)$; ecuațiile tangentelor sînt $y = -\frac{4}{5}x + \frac{1}{2}$ și $y = -\frac{4}{5}x - \frac{1}{2}$.

Fiecare tangentă a hiperbolei formează în spațiul dintre asimptote un triunghi (P_2MP_3) cu aria constantă $A = ab$.

Tangenta $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$ în punctul $P_1(x_1; y_1)$ la hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ taie asimptotele $y = \pm\frac{b}{a}x$ în punctele P_2 și P_3 (fig. 13.5.15). Pentru coordonatele acestora găsim prin înlocuire ecuația $x\left(\frac{x_1}{a^2} \mp \frac{y_1}{ab}\right) = 1$ sau $x_{2,3} = \frac{a^2b}{bx_1 \mp ay_1}$, respectiv $y\left(\pm\frac{x_1}{ab} - \frac{y_1}{b^2}\right) = 1$ sau $y_{2,3} = \frac{ab^2}{\pm bx_1 - ay_1}$.



13.5.15. Triunghiuri formate din tangente la o hiperbolă și asimptote.

Calculînd aria A a triunghiului MP_3P_2, obținem

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{a^2b}{bx_1 + ay_1} & \frac{ab^2}{-bx_1 - ay_1} \\ 1 & \frac{a^2b}{bx_1 - ay_1} & \frac{ab^2}{bx_1 - ay_1} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{a^3b^3}{b^2x_1^2 - a^2y_1^2} + \frac{a^3b_3}{b^2x_1^2 - a^2x_1^2}\right] =$$

$$= \frac{a^3b^3}{b^2x_1^2 - a^2y_1^2} = \frac{ab}{\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}} = ab,$$

Normala şi polara unei conice

Panta normalei, ecuaţia normalei. Normala este perpendiculara pe tangentă în punctul de tangenţă $P_1(x_1, y_1)$. Din tabel, în care apare panta tangentei, se poate calcula imediat şi panta normalei şi deci cu ajutorul ecuaţiei dreptei care trece printr-un punct şi are o direcţie dată se poate deduce ecuaţia normalei. Dăm mai jos un tabel cu cele mai importante cazuri.

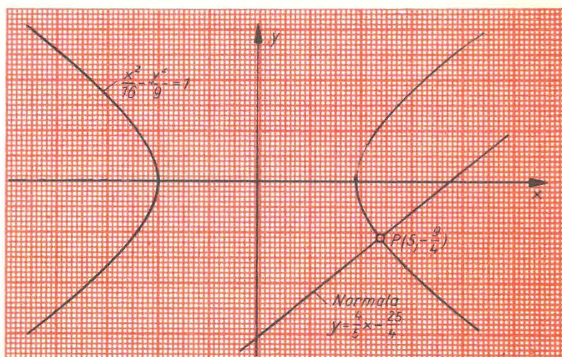
Ecuaţia conicei	Panta tangentei	Ecuaţia normalei în punctul $P_1(x_1, y_1)$
$y^2 = 2px$	$-\frac{y_1}{p}$	$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1)$
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{a^2y_1}{b^2x_1}$	$y - y_1 = \frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1)$
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$-\frac{a^2y_1}{b^2x_1}$	$y - y_1 = -\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1)$

Exemplu. Normala la hiperbolă $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ în punctul $P_1\left(5, -\frac{9}{4}\right)$ are ecuaţia $y + \frac{9}{4} =$

$$= -\frac{16\left(-\frac{9}{4}\right)}{9\cdot 5}\cdot(x - 5),$$

$$y + \frac{9}{4} = \frac{4}{5}x - 4 \text{ sau}$$

$$y = \frac{4}{5}x - \frac{25}{4} \text{ (fig. 13.5.16).}$$



13.5.16. Normala la hiperbolă

Teoreme importante asupra normalelor unei conice

Dreapta care uneşte punctul P_1 al parabolei cu focarul şi paralela prin acel punct la axă formează cu normala în P_1 unghiuri egale deoarece formează şi cu tangenta tot unghiuri egale.

Normala într-un punct al elipsei este bisectoarea unghiului format de cele două drepte care unesc punctul cu focarele.

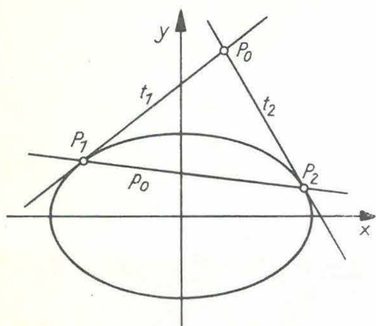
Tangenta, normala şi dreptele care unesc un punct P_1 al elipsei cu focarele formează o diviziune armonică deoarece în fiecare triunghi $F_1F_2P_1$ bisectoarea unui unghi interior (în P_1) şi cea a unui unghi exterior intersectează axa focarelor în puncte conjugate armonic faţă de focare.

Tangenta, normala şi cele două drepte care unesc focarele cu punctul P_1 al unei hiperbole intersectează axa hiperbolei în patru puncte conjugate armonic. Tangenta este bisectoarea unghiului interior în P_1 al triunghiului $F_1F_2P_1$ iar normala a celui exterior, care este suplementar celui interior, în două părţi egale.

Ecuaţia polarelor. Ca şi la cerc, ecuaţiile tangentelor duse dintr-un punct $P_0(x_0, y_0)$ exterior unei conice se pot deduce foarte uşor cu ajutorul polarei p_0 a polului P_0.

Polara p_0 este *dreapta care uneşte punctele de tangenţă* $P_1(x_1, y_1)$ şi $P_2(x_2, y_2)$ ale tangentelor t_1 şi t_2 (fig. 13.5.17). Din ecuaţiile tangentelor în P_1, respectiv P_2 la o elipsă cu centrul în origine $(t_1)\ \frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$ şi $(t_2)\ \frac{x_2x}{a^2} + \frac{y_2y}{b^2} = 1$ rezultă ecuaţia $(p_0)\ \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ care este *ecuaţia*

Ecuațiile conicelor și polarelor duse din polul $P_0(x_0, y_0)$			
parabolă	elipsă	cerc	hiperbolă
$y^2 = 2px$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$x^2 + y^2 = r^2$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
$yy_0 = p(x + x_0)$	$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$	$xx_0 + yy_0 = r^2$	$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$

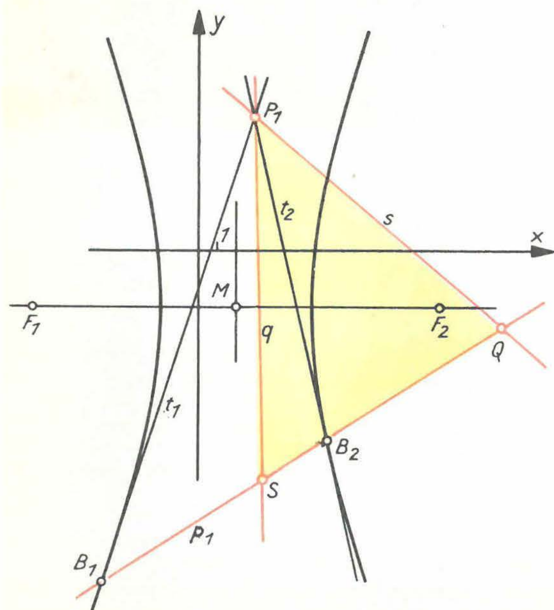


13.5.17. Tangentele duse dintr-un punct exterior P_0 la elipsă; polara p_0

polarei și este verificată de coordonatele punctelor $P_1(x_1, y_1)$ și $P_2(x_2, y_2)$ (fig. 13.5.17).

Forma ecuației polarei este identică cu forma ecuației tangentei la elipsă, unde x_0 și y_0 sînt însă coordonatele polului P_0 și nu coordonatele punctului de tangență. Ecuațiile polarelor celorlalte conice se deduc analog și sînt date în tabel.

Un punct $P_1(x_1, y_1)$ din interiorul unei conice poate fi socotit ca punctul de intersecție a două polare q_1 și q_2 ai căror poli $Q_1(\xi_1; \eta_1)$ și $Q_2(\xi_2; \eta_2)$se află pe polara p_1 a punctului P_1. Ecuațiile polarelor q_1 și q_2 sînt verificate de coordonatele punctului de intersecție $P_1(x_1, y_1)$. În cazul unei hiperbole avem $\frac{\xi_1 x_1}{a^2} - \frac{\eta_1 y_1}{b^2} = 1$ și $\frac{\xi_2 x_1}{a^2} - \frac{\eta_2 y_1}{b^2} = 1$, deci $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$ este ecuația unei drepte care conține punctele Q_1 și Q_2, deci a polarei p_1. Deci ecuațiile polarelor sînt valabile și în cazul în care polul $P_1(x_1\ y_1)$ este interior.



13.5.18. Hiperbola dată de $(x-2)^2/16 - (y + 3)^2/100 = 1$.

Exemplu. Polul $P_1(3; 7)$ are în raport cu hiperbola

$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+3)^2}{100} = 1,$$

Polara p_1 cu ecuația

$$\frac{(x-2)\,(x_1-2)}{16} - \frac{(y+3)\,(y_1+3)}{100} = 1$$

sau $100\,(x-2)\,(3-2) - 16\,(y + 3)(7+3) = 1600$; $5(x-2) - 8(y + 3) = 80$; $y = \frac{5}{8}x - \frac{10+24+80}{8}$,

$$y = \frac{5}{8}x - \frac{114}{8} \quad \text{(fig. 13.5.18)}.$$

Punctul $Q\left(16; -4\frac{1}{4}\right)$ se găsește pe polara p_1. Dacă îl socotim ca *pol*, obținem *polara q*

$$100(x-2)(16-2) - 16(y+3)\left(-4\frac{1}{4}+3\right) = 1\,600$$

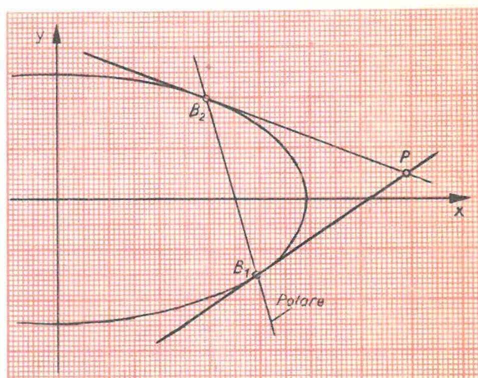
sau $y = -70x + 217$.

Această dreaptă taie polara p_1 în $S\left(3\frac{31}{113}; -12\frac{23}{113}\right)$.

Dreapta P_1Q va fi *polara s a polului S*. Ea va avea ecuaţia $100(x-2)\left(3\frac{31}{113}-2\right)-16(y+3)\left(-12\frac{23}{113}+3\right)=1\,600$ sau $y=-\frac{45}{52}x+9\frac{31}{52}$. Această ecuaţie este verificată de coordonatele punctelor P_1 şi Q. *În triunghiul P_1QS fiecare vîrf este polul laturii opuse.*

Tangentele duse dintr-un punct la o conică. Tangentele duse dintr-un punct exterior P la o conică se pot construi mai uşor cu ajutorul *polarei p* a punctului P. *Punctele de intersecţie* ale polarei cu conica vor fi punctele de tangenţă.

Exemplu. Polara punctului $P(14;\ 1)$ în raport cu elipsa $x^2+4y^2=100$ are ecuaţia $\frac{14x}{100}+\frac{y}{25}=1$ sau $14x+4y=100$, $y=-\frac{7}{2}x+25$. Ea intersectează elipsa în punctele $B_1(8;\ -3)$ şi $B_2(6;\ 4)$ deoarece $x^2+4\left(\frac{49}{4}x^2-175x+625\right)=100$; $x^2-14x=-48$; $x_1=6$, $x_2=8$; $y_1=4$, $y_2=-3$. Deci ecuaţiile tangentelor vor fi $y=\frac{2}{3}x-\frac{25}{3}$ şi $y=-\frac{3}{8}x+\frac{25}{4}$ (fig. 13.5.19).



13.5.19. Tangentele din punctul P la elipsă

Două conice

Punctele de intersecţie a două conice. Pentru determinarea punctelor de intersecţie a două conice se va rezolva sistemul format din ecuaţiile conicelor. Soluţiile reale vor corespunde punctelor de intersecţie.

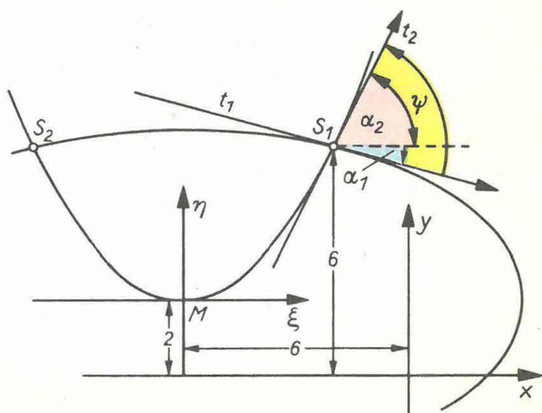
Exemplul 1. Parabola $y^2=12x$ va fi intersectată de cercul $(x+3)^2+y^2=72$ în punctele $S_1(3;\ 6)$ şi $S_2(3;\ -6)$ deoarece coordonatele lor verifică ambele ecuaţii. Ele rezultă din sistemul de ecuaţii

$$\left.\begin{aligned}(x_0+3)^2+y_0^2&=72\\ y_0^2&=12x_0\end{aligned}\right\}$$

care are soluţiile $x_1=3$, $y_1=6$ şi $x_2=3$ şi $y_2=-6$.

Exemplul 2. Pentru stabilirea punctelor de intersecţie ale elipsei $\frac{(x+6)^2}{80}+\frac{(y-2)^2}{20}=1$ cu parabola $(x+6)^2=4(y-2)$ (fig. 13.5.19) trebuie să rezolvăm sistemul

$$\left.\begin{aligned}\frac{(x_0+6)^2}{80}+\frac{(y_0-2)^2}{20}&=1\\ (x_0+6)^2&=4(y_0-2)\end{aligned}\right\}$$



13.5.20. Punctele de intersecţie şi unghiul de intersecţie dintre o elipsă şi o parabolă

Aplicînd substituţia $x_0 + 6 = \xi$ şi $y_0 - 2 = \eta$, ecuaţiile se vor transforma în $20\xi^2 + 80\eta^2 = 1\,600$ şi $\xi^2 = 4\eta$. Eliminîndu-l pe ξ, obţinem $80\eta + 80\eta^2 = 1\,600$, $\eta^2 + \eta + \frac{1}{4} = \frac{81}{4}$, $\eta_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{9}{2}$, $\eta_1 = 4$ şi $\eta_2 = -5$ iar $\xi_{1,2} = \pm 4$ şi $\xi_{3,4} = 2\sqrt{5}i$. Făcînd transformarea inversă, calculăm pe $x_1 = \xi_1 - 6 = -2$, $x_2 = \xi_2 - 6 = -10$, $y_1 = \eta_1 + 2 = 6$, $y_2 = \eta_1 + 2 = 6$. Deci conicele vor avea două puncte de intersecţie $S_1(-2; 6)$, $S_2(-10; 6)$.

Două conice nu se intersectează neapărat în puncte reale. *Două conice nedegenerate se intersectează în maximum patru puncte reale.*

Unghiul a două conice. Prin unghiul a două conice se înţelege unghiul pe care-l formează tangentele la cele două conice în punctul de intersecţie. Deci pentru a calcula unghiul a două conice scriem ecuaţiile tangentelor şi apoi calculăm unghiul pe care-l formează ele.

Exemplul 1. Parabola $y^2 = 12x$ şi cercul $(x + 3)^2 + y^2 = 72$ se intersectează în punctele $S_1(3; 6)$ şi $S_2(3; -6)$ (fig. 13.5.20). Tangenta la cerc în punctul S_1 are ecuaţia $y = -x + 9$ şi tangenta la parabolă $y = x + 3$. Deoarece produsul coeficienţilor unghiulari este egal cu -1, parabola şi cercul sînt perpendiculare. Acelaşi lucru se constată şi pentru S_2.

Exemplul 2. Elipsa $\frac{(x + 6)^2}{80} + \frac{(y - 2)^2}{20} = 1$ se intersectează cu parabola $(x + y)^2 = 4(y-2)$ în punctele $S_1(-2; 6)$ şi $S_2(-10; 6)$. Ecuaţia tangentei la elipsă în punctul S_1 va fi $\frac{(x + 6)(x_1 + 6)}{80} + \frac{(y - 2)(y_1 - 2)}{20} = 1$ sau $y = -\frac{1}{4}x + \frac{11}{2}$, iar ecuaţia tangentei la parabolă va fi $(x + 6)(x_1 + 6) = 2(y - 2 + y_1 - 2)$ sau $y = 2x + 10$. Din $\operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{1}{4}$, $\alpha_1 = -14{,}04°$ şi $\operatorname{tg} \alpha_2 = +2$, $\alpha_2 = +63{,}43$ rezultă că unghiul dintre cele două conice va fi $\psi = \alpha_2 - \alpha_1 = 77{,}47°$.

Ecuaţiile comune ale conicelor cu vîrful în origine

Parametrul conicelor. Parametrul $2p$ al unei parabole $y^2 = 2px$ este egal cu lungimea perpendicularei pe axa mare ridicate în focar şi mărginite de parabolă; deci, altfel spus, ar măsura „grosimea" parabolei. Această definiţie va fi generalizată şi pentru celelalte conice.

Parametrul unei conice este lungimea coardei duse prin focar perpendicular pe axa principală a conicei.

Parametrul unei conice care are ca axă principală axa Ox se calculează în felul următor. Se înlocuieşte în ecuaţia conicei cu centrul în origine abscisa x_f a focarului, iar valoarea pozitivă $2y$ a ordonatei dublate va fi valoarea parametrului conicei:

Parabola: $y^2 = 2px$, $x_f = \frac{p}{2}$, rezultă $y_f = p$,

Elipsa: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x_f = e$, $\frac{e^2}{a^2} + \frac{y_f^2}{b^2} = 1$;

rezultă $y_f = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - e^2}$ sau deoarece

$a^2 - e^2 = b^2$, $y_f = \frac{b^2}{a}$;

Parametrul	parabola	$2p$
	elipsa	$2p = \frac{2b^2}{a}$
	hiperbola	$2p = \frac{2b^2}{a}$

Hiperbola: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $x_f = e$, $\frac{e^2}{a^2} - \frac{y_f^2}{b^2} = 1$; rezultă $y_f = \pm \frac{b}{a}\sqrt{e^2 - a^2}$ sau deoarece $e^2 - a^2 = b^2$, $y_f = \frac{b^2}{a}$.

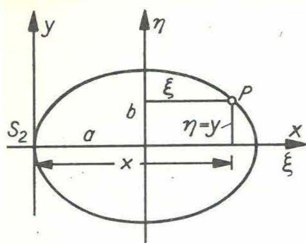
Ecuațiile conicelor raportate la axe carteziene care au drept origine vîrful. Din aceste ecuații va rezulta foarte clar legătura dintre conice. Pentru parabolă, această ecuație este $y^2 = 2px$, iar pentru elipsă și hiperbolă aceasta se obține din ecuația conicei cu centrul în origine printr-o translație paralelă a sistemului de coordonate.

Elipsa. Din ecuația elipsei cu centrul în origine $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1$ în sistemul ξ, η obținem printr-o translație a centrului sistemului în vîrful $S_2(-a; 0)$ (fig. 13.5.21), deci printr-o transformare $x = \xi + a$, $y = \eta$; în noul sistem x, y, ecuația devine $\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Prin rearanjare, ecuația va deveni $y^2 = \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2x^2}{a^2}$ și, folosind semiparametrul $p = \frac{b^2}{a}$ al elipsei, ecuația va fi $y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$.

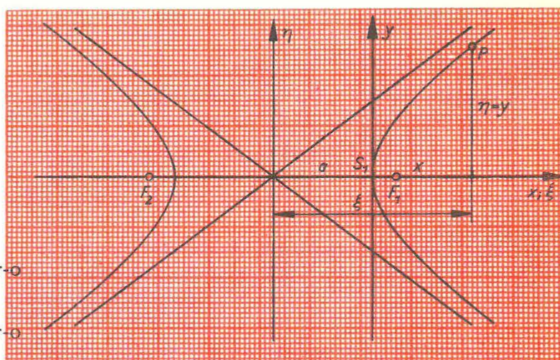
Legătura cu ecuația parabolei este evidentă: din *ecuația parabolei se scade termenul* $\frac{p}{a}x^2$ *pentru a găsi valorile elipsei*. Așa se explică și denumirea de *elipsă* (în grecește *elleipsis* înseamnă *lipsă*).

Ecuația elipsei raportată la axe care au drept origine vîrful
$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$, $\quad p = \frac{b^2}{a}$

Ecuația hiperbolei raportată la axe care au drept origine vîrful
$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2$, $p = \frac{b^2}{a}$



13.5.21. Transformarea elipsei într-o elipsă cu vîrful în origine

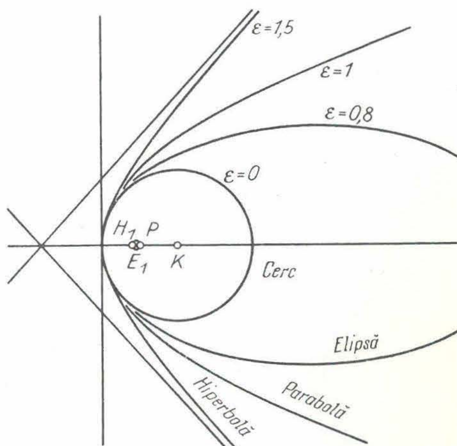


13.5.22. Transformarea hiperbolei într-o hiperbolă cu vîrful în origine

Hiperbola. Din ecuația hiperbolei cu centrul în origine $\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = 1$ în sistemul ξ, η obținem printr-o translație a centrului sistemului în vîrful $S_1(a; 0)$ (fig. 13.5.22), deci printr-o transformare $x = \xi - a$, $y = \eta$, ecuația devine $\frac{(x+a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, în noul sistem. Prin rearanjare, ecuația va deveni $y^2 = \frac{2b^2}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x^2$ și prin folosirea semiparametrului $p = \frac{b^2}{a}$, ecuația $y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2$. Comparativ cu ecuația parabolei, aceasta *va avea în plus termenul* $\frac{p}{a}x^2$. Astfel se explică denumirea de hiperbolă (în grecește *hiperbolein* înseamă a *depăși*).

Ecuația comună a conicelor raportate la axe care au drept origine vîrful. Prin introducerea excentricității numerice $\varepsilon = \frac{e}{a}$ ($0 < \varepsilon < 1$ elipsa; $\varepsilon > 1$ hiperbola, $\varepsilon = 1$ parabola), putem scrie o ecuație comună a celor trei conice (fig. 13.5.23). În cazul elipsei $\frac{p}{a} = \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 - e^2}{a^2} = 1 - \varepsilon^2 > 0$ deoarece $0 < \varepsilon < 1$; în cazul hiperbolei $\frac{p}{a} = \frac{b^2}{a^2} = \frac{e^2 - a^2}{a^2} = \varepsilon^2 - 1 > 0$ deci $1 - \varepsilon^2$ va fi negativă. Pentru $\varepsilon = 1$ (parabolă) $(1 - \varepsilon^2)x^2$ va fi egal cu zero. Deci ecuația $y^2 = 2px - (1 - \varepsilon^2)x^2$ descrie în funcție de valorile lui ε ecuația uneia din cele trei conice.

Ecuația comună a conicelor raportată la axe care au drept origine vîrful
$y^2 = 2px - (1 - \varepsilon^2)\, x^2$



13.5.23. Dependența conicei de excentricitate

Și ecuația cercului este conținută în această ecuație. Deoarece $p = r$ și $\varepsilon = 0$, obținem $y^2 = 2rx - x^2$ sau $y^2 = x(2r - x)$; această relație este adevărată și pe baza teoremei înălțimii în triunghiul dreptunghic.

Conform ecuației de mai sus o conică este definită de parametrul $2p$ și de excentricitatea numerică ε. Parametrii folosiți pînă acum pentru definirea conicelor pot fi exprimați cu ajutorul parametrului $2p$ și al excentricității numerice, știind că pentru $y_0 = 0$ obținem $x_0 = 2a$ și că $p = \frac{b^2}{a}$ în cazul elipsei și hiperbolei, și $p = r$ în cazul cercului. Deci semiaxele și excentricitatea liniară vor avea următoarele expresii: $a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}$, $b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$, $e = \frac{p\varepsilon}{1 - \varepsilon^2}$ (elipsă); $a = \frac{p}{\varepsilon^2 - 1}$, $b = \frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}$, $e = \frac{p\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1}$ (hiperbolă). Dacă, de ex. luăm $p = 1$ și $\varepsilon = 0{,}8$, obținem valorile aproximative $a = 2{,}78$, $b = 1{,}67$, $e = 2{,}22$, iar pentru $p = 1$ și $\varepsilon = 1{,}5$, $a = 0{,}8$, $b = 0{,}89$, $e = 1{,}2$ (fig. 13.5.23).

Ecuațiile în coordonate polare ale conicelor

În cazul în care scriem ecuațiile conicelor în coordonate polare, polul poate fi în cazul elipsei și hiperbolei centrul conicei, dar în majoritatea cazurilor luăm ca pol focarul.

Ecuațiile în coordonate polare ale conicelor care au drept pol centrul conicei. Transformînd ecuația elipsei cu centrul în origine $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ prin $x = r\cos\varphi$ și $y = r\sin\varphi$ în coordonate polare, ecuația va avea următoarea formă:

$$\frac{r^2\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{r^2\sin^2\varphi}{b^2} = 1$$

sau

$$1 = r^2\,\frac{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}{a^2b^2} = r^2\,\frac{b^2\cos^2\varphi + a^2 - a^2\cos^2\varphi}{a^2b^2} =$$

$$= r^2\cdot\frac{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2\varphi}{a^2b^2} = \frac{r^2}{b^2}\left(1 - \frac{e^2}{a^2}\cos^2\varphi\right) - r^2\,\frac{1 - \varepsilon^2\mu^2\varphi}{b^2},$$

deci

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - \varepsilon^2\cos^2\varphi}.$$

Prin calcule analoage se obține ecuația hiperbolei.

Ecuațiile conicelor în coordonate polare avînd polul în centrul conicei.	Elipsa	$r^2 = \dfrac{b^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}$
	Hiperbola	$r^2 = \dfrac{b^2}{\varepsilon^2 \cos^2 \varphi - 1}$

Ecuațiile în coordonate polare ale conicelor care au focarul ca pol. Aceste ecuații au o mare aplicabilitate în *astronomie* datorită *primei legi a lui Kepler* care afirmă că traiectoriile planetelor sînt elipse cu Soarele într-un focar. Natural, vom folosi în acest caz drept coordonate distanța pînă la Soare și unghiul pe care îl face planeta la momentul respectiv, deci sistemul va fi un sistem de coordonate polare al cărui pol se află într-un focar al elipsei. Totodată în astronomie se folosește excentricitatea numerică ε ca o măsură a devierii elipsei față de cerc. Cuvîntul excentricitate este foarte bine ales; în cazul cercului, centrul lui și centrul de greutate coincid; în cazul elipsei cu cît axa este mai mare cu atît sînt mai depărtate centrul elipsei și centrul de greutate, deci cu atît excentricitatea elipsei este mai mare. KEPLER a constatat că orbitele după care se mișcă planetele sînt elipse și nu cercuri, la mișcarea planetei Marte care avea cea mai mare excentricitate, $\varepsilon = 0{,}0933$, în comparație cu celelalte planete descoperite pînă atunci. Excentricitatea elipsei Pămîntului este $\varepsilon = 0{,}0168$. Și meteoriții, cometele și sateliții artificiali în sistemul solar au orbitele tot elipse, cînd se mișcă periodic. Dacă mișcarea nu este periodică, energia lor cinetică poate să învingă forța de atracție a Soarelui și să părăsească sistemul solar iar orbitele lor vor fi parabole sau hiperbole.

Ecuația în coordonate polare a elipsei. În figura 13.5.8 focarul F_1 al elipsei este polul sistemului de coordonate polare, iar axa polară este axa Ox care unește F_1 cu S_1. În triunghiul F_1PF_2 avem $r_2 = 2a - r_1$ și $\overline{F_2F_1} = 2e$. Conform teoremei cosinusului:

$(2a - r_1)^2 = (2e)^2 + r_1^2 + 2 \cdot 2er_1\cos\varphi$ sau $4a^2 - 4ar_1 + r_1^2 = 4e^2 + r_1^2 + 4er_1 \cos \varphi$,

$$r_1 = \frac{a^2 - e^2}{a + e\cos\varphi} = a\,\frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon\cos\varphi} = \frac{b^2}{a(1 + \varepsilon\cos\varphi)} = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi},$$

unde $\varepsilon = \dfrac{e}{a}$ și $\dfrac{b^2}{a} = p$.

Ecuația în coordonate polare a hiperbolei. În figura 13.5.13, focarul F_1 al hiperbolei este polul sistemului de coordonate polare iar axa Ox de la F_1 la S_1 este *axă polară*. În triunghiul F_1PF_2 avem $r_2 = 2a + r_1$ și $\overline{F_2F_1} = 2e$. Conform teoremei cosinusului $(2a + r_1)^2 = (2e)^2 + r_1^2 - 2 \cdot 2er_1 \cos \varphi$ sau $4a^2 + 4ar_1 + r_1^2 = 4e^2 + r_1^2 - 4er_1 \cos \varphi$,

$$r_1 = \frac{e^2 - a^2}{a + e\cos\varphi} = \frac{b^2}{a(1 + \varepsilon\cos\varphi)} = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}.$$

Ecuația în coordonate polare a parabolei. În figura 13.5.4, focarul F al parabolei este polul sistemului de coordonate polare, iar axa polară este axa Ox de la F la S. Conform definiției parabolei, deoarece $\overline{L_0F} = p$, avem

$$p - r\cos\varphi = r, \text{ respectiv } r = \frac{p}{1 + \cos\varphi}.$$

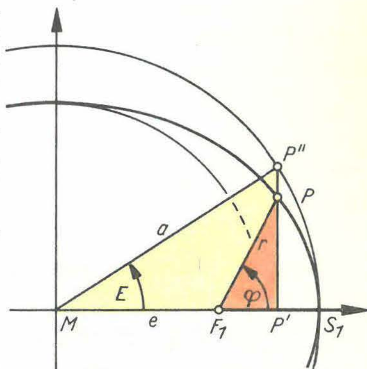
Toate conicele au în sistemul de coordonate polare, a cărui axă polară are direcția de la pol la vîrful cel mai apropiat, ecuații de aceeași formă $r = \dfrac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}$. Ele se deosebesc prin valoarea excentricității numerice, care pentru elipsă este subunitară, pentru hiperbolă supraunitară iar pentru parabolă egală cu 1. Și cercul poate fi exprimat prin aceeași formulă cînd $\varepsilon = 0$.

Ecuația conicelor în coordonate polare care au drept pol focarul	$r = \dfrac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}$	$\varepsilon > 1$ hiperbolă $\varepsilon = 1$ parabolă $0 < \varepsilon < 1$ elipsă $\varepsilon = 0$ cerc

Pentru parabolă ($\varepsilon = 1$), r nu este definit în cazul cînd $\varphi = \pi$. Dacă $\varepsilon = 0$, respectiv $0 < \varepsilon < 1$, deci în cazul cercului și elipsei, pentru orice valoare a unghiului obținem o valoare pentru r. În cazul în care $\varepsilon > 1$, r nu este definit pentru valori ale lui φ_1 pentru care $1 + \frac{e}{a} \cos \varphi = 0$, adică $\cos\varphi = -\frac{a}{e}$. Acest caz este cazul în care latura mobilă a lui φ_1, respectiv $-\varphi_1$ este paralelă cu asimptota.

Exemplu. Numim *periheliu* punctul de pe orbită cel mai apropiat de Soare iar *afeliu* ce mai depărtat. Care este distanța pe care o are Marte față de Soare cînd se află în afeliu? Semiaxa mare a orbitei lui Marte este egală aproximativ cu 1,52 raze ale orbitei Pămîntului (raza orbitei Pămîntului este egală cu aproximativ 149 milioane km) iar excentricitatea ei $\varepsilon = 0{,}0933$. În afeliu $\varphi = \pi$. Deoarece $p = \frac{b^2}{a} = a\frac{b^2}{a^2} = a\frac{a^2 - e^2}{a^2} = a(1 - \varepsilon^2)$, obținem $r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1-\varepsilon} = a(1+\varepsilon) = 1{,}52 \cdot 1{,}0933 = 1{,}661816$ măsurată în raze ale orbitei Pămîntului. Deci, distanța pe care o are Marte față de Soare în afeliu este egală aproximativ cu 247,6 milioane de kilometri.

Anomalia excentrică. În astronomie cît și pentru calcularea orbitei eliptice a sateliților artificiali vom folosi noțiunea de anomalie excentrică E introdusă de KEPLER. Ea reprezintă valoarea unghiului E care are ca vîrf centrul elipsei, o latură axa focală iar cealaltă latură dreapta care trece prin punctul P'' de pe cerc, corespunzător punctului P de pe elipsă (fig. 13.5.24). În geometria plană construcția elipsei se face cu ajutorul a două cercuri concentrice de raze egale cu semiaxele a și b respectiv. Se duce o rază iar prin punctele ei de intersecție cu cercurile se duc paralele la cele două axe care vor fi perpendiculare între ele. Punctul lor de intersecție P este un punct al elipsei. Raportul distanțelor $\overline{P'P}$ și $\overline{P'P''}$ va fi $b : a$. Conform figurii, din triunghiurile dreptunghice obținem $\overline{P'P} = r \sin \varphi$, $\overline{P'P''} = a \sin E$, deci $ba \sin E = ar \sin \varphi$ sau $r \sin \varphi = b \sin E$. Pe axa mare a elipsei avem $MF_1 = e$ și $MP' = a \cos E$. Deci $n \cos \varphi = a \cos E - e$. Folosind relațiile $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ și $e^2 = a^2 - b^2$, putem obține pe r ca funcție de E: $r^2 = b^2 \sin^2 E + (a^2 \cos^2 E - 2ae \cos E + e^2) = b^2 \sin^2 E + a^2 \cos^2 E - 2ae \cos E + a^2 - b^2 \sin^2 E - b^2 \cos^2 E = (a^2 - b^2) \cos^2 E - 2ae \cos E + a^2 = (a - e \cos E)^2$ sau deoarece $a > e$ și $r > 0$, $r = a - e \cos E$.



13.5.24. Anomalie excentrică

Această ecuație exprimă *prima lege a lui Kepler*, din care reiese că orbitele planetelor sînt elipse avînd într-un focar Soarele.

Astfel este arătată *relația dintre anomalia φ și anomalia excentrică E*. Relațiile dintre ele

$$\cos \varphi = \frac{1}{r}(a \cos E - e) = \frac{(a \cos E - e)}{a - e \cos E}, \quad \sin \varphi = \frac{1}{r} b \sin E = \frac{\sqrt{a^2 - e^2} \sin E}{a - e \cos E}$$

pot fi înlocuite și prin $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{a+e}{a-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}$. Pentru a obține timpul t ca o funcție de E, vom deriva una din aceste relații, de exemplu cea de a doua în funcție de t. Vom nota derivata printr-un punct deasupra

$$\cos \varphi \cdot \dot{\varphi} = \frac{b \cos E \cdot \dot{E}(a - e \cos E) - e \sin E \cdot \dot{E} b \sin E}{(a - e \cos E)^2} =$$

$$= b\dot{E} \frac{a \cos E - e \cos^2 E - e \sin^2 E}{(a - e \cos E)^2} = b\dot{E} \cdot \frac{a \cos E - e}{(a - e \cos E)^2}.$$

Deci

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = b\dot{E}\,\frac{a\cos E - e}{(a - e\cos E)^2}\,\frac{a - e\cos E}{a\cos E - e} = \frac{b\dot{E}}{a - e\cos E} = \frac{b\dot{E}}{r}.$$

Conform *celei de-a doua legi a lui Kleper* ariile parcurse de raze vectoare în același timp au aceeași valoare constantă $r^2 \cdot \dot{\varphi} = C$. Introducînd pe C în ultimele relații, obținem

$$\dot{E} = \frac{dE}{dt} = \frac{r^2\dot{\varphi}}{br} = \frac{C}{br} = \frac{C}{b(a - e\cos E)}$$

sau

$$dt = \frac{b}{C}(a - e\cos E)\,dE,$$

iar prin *integrare* funcția căutată $t = t(E)$:

$$t = \frac{b}{C}(Ea - e\sin E) = \frac{\sqrt{a^2 - e^2}}{C}(Ea - e\sin E).$$

Cînd E parcurge valorile de la 0 la 2π, obținem perioada T:

$$T = \frac{b}{C}\cdot 2\pi a = \frac{2\pi a\sqrt{a^2 - e^2}}{C}.$$

Conform *celei de-a treia legi a lui Kepler* există pentru fiecare planetă o constantă $\frac{\mu}{4\pi^2}$ pentru care se verifică relația $\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mu}{4\pi^2}$. Înlocuind expresia lui T, obținem pentru μ valorea $\frac{aC^2}{a^2 - e^2}$. Deci sînt suficiente trei din cele patru constante pentru exprimarea tuturor relațiilor; de obicei se alege $\varepsilon = \frac{e}{a}$, C și μ. Vom obține astfel:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi} = \frac{b^2}{a(1 + \varepsilon\cos\varphi)} = \frac{C^2}{\mu(1 + \varepsilon\cos\varphi)} = \frac{C^2}{\mu(1 - \varepsilon^2)}(1 - \varepsilon\cos E),$$

$$\cos\varphi = \frac{-\varepsilon + \cos E}{1 - \varepsilon\cos E}, \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}\,\sin E}{1 - \varepsilon\cos E}$$

$$t = \frac{C^3}{\mu^2(\sqrt{1 - \varepsilon^2})^3}(E - \varepsilon\sin E).$$

Discuția ecuației generale de gradul doi

Ecuația generală de gradul doi cu două variabile are forma

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

unde a, b, c, d, e, f sînt coeficienți reali oarecare și a, b și c nu sînt zero în același timp. Prin această ecuație definim în sistemul de coordonate xOy o curbă. În cele ce urmează vom folosi coordonate carteziene. Felul curbei depinde de valoarea coeficienților.

Discuția pe care o vom face, pentru a caracteriza curba în funcție de coeficienți, se bazează pe următoarea teoremă.

Ecuația generală de gradul doi reprezintă ecuația unei conice.

Eliminarea termenului mixt. Printr-o rotire a sistemului de coordonate, adică printr-o transformare

$$x = \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha, \qquad y = \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha$$

cu α bine ales, putem elimina termenul în $\xi\eta$. În cazul cînd coeficienții termenilor de gradul doi sînt egali ($a=c$) alegem $\alpha = 45°$; dacă sînt diferiți, îl alegem pe α astfel încît $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2b}{a-c}$.

În felul acesta găsim ecuația transformată în ξ și η. Înlocuind pe ξ și η cu x și y, obținem o ecuație de forma

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Geometric, aceasta înseamnă că după rotire *axele conicei sînt paralele cu axele de coordonate.*

Eliminarea termenilor de gradul întîi. Ecuațiile elipsei și hiperbolei raportate la axe nu au termen de gradul întîi. Vom încerca să stabilim valoarea constantelor c și d care intervin în translația $x = \xi + c$ și $y = \eta + d$ astfel ca termenii $2Dx$ și $2Ey$ să dispară. După efectuarea transformării obținem

$$A\xi^2 + C\eta^2 + 2(Ac + D)\xi + 2(cd + E)\eta + Ac^2 + Cd^2 + 2Dc + 2Ed + F = 0.$$

Discuție.

1) Dacă $A \neq 0$ și $C \neq 0$, putem elimina termenii liniari înlocuind $c = -\dfrac{D}{A}$ și $d = -\dfrac{E}{C}$.

Obținem ecuația de forma $A\xi^2 + C\eta^2 = N$, unde $N = \dfrac{D^2}{A} + \dfrac{E^2}{C} - F$. Pentru N există trei cazuri: $N > 0$, $N = 0$, $N < 0$.

$N > 0$. Cazul 1. A și C sînt ambii pozitivi. În acest caz obținem ecuația unei *elipse*

$$\frac{\xi^2}{\frac{N}{A}} + \frac{\eta^2}{\frac{N}{C}} = 1 \text{ cu semiaxele } \sqrt{\frac{N}{A}} \text{ și } \sqrt{\frac{N}{C}}.$$

Cazul 2. A și C sînt negativi. Ecuația *nu* reprezintă o *conică reală.*
Cazul 3. A și C au semne diferite. Ecuația reprezintă o *hiperbolă.*

$N = 0$. Cazul 1. Dacă A și C au același semn, ecuația este satisfăcută numai pentru $\xi = \eta = 0$. Ea va reprezenta *un punct.*
Cazul 2. A și C au semne diferite. Vom avea $A\xi^2 - C\eta^2 = 0$ sau $C\eta^2 - A\xi^2 = 0$. Se observă că această ecuație reprezintă *două drepte care se intersectează.*

$N < 0$. Obținem aceleași conice ca în cazul $N > 0$, cazurile 1 și 2 fiind inversate.

2) Dacă $AC = 0$, există trei posibilități.

$A = 0,\ C \neq 0$. Cazul 1. Cînd $D \neq 0$, putem alege c și d astfel încît $Cd + E = 0$, $Cd^2 + 2DC + 2Ed + F = 0$. Ecuația va fi $\eta^2 = -2\dfrac{D}{C}\xi$ și reprezintă o *parabolă.*

Cazul 2. $D = 0$. Vom obține o ecuație de gradul doi în η, deci *două drepte paralele.* Ele coincid, deci reprezintă *două drepte confundate* în cazul cînd $E^2 - FC = 0$.

$A \neq 0,\ C = 0$. Cazul 1. $E \neq 0$. Ecuația reprezintă o *parabolă.*

Cazul 2. $E = 0$. Ecuația reprezintă *două drepte paralele* sau *două drepte confundate,* dacă $D^2 - FA = 0$.

$A = 0,\ C = 0$. Cazul 1. Dacă D și E nu sînt egale cu zero, obținem *o dreaptă,*

Cazul 2. $D = E = 0$. Atunci și $F = 0$.

Observație. Apariția unei perechi de drepte paralele reprezintă cazul limită al unei secțiuni paralele cu axa într-un con al cărui vîrf se află la infinit, deci degenerat într-un cilindru.

Discuția conicelor $Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$			
$AC \neq 0$	$N = \frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} - F$		
	$N > 0$	$A > 0, C > 0$	elipsă
		$A < 0, C < 0$	nici o curbă reală
		$AC < 0$	hiperbolă
	$N = 0$	$AC > 0$	punct
		$AC < 0$	două drepte concurente
	$N < 0$	$A > 0, C > 0$	nici o curbă reală
		$A < 0, C < 0$	elipsă
		$AC < 0$	hiperbolă
$AC = 0$	$A = 0, C \neq 0$	$D \neq 0$	parabolă
		$D = 0$	două drepte paralele care se confundă cînd $E^2 - FC = 0$
	$A \neq 0, C = 0$	$E \neq 0$	parabolă
		$E = 0$	două drepte paralele care se confundă cînd $D^2 - FA = 0$
	$A = 0, C = 0$	$D \neq 0, E \neq 0$	dreaptă
		$D = E = 0$	caz banal

Exemplul 1. În ecuația $3x^2 - 30x + 8y + 65 = P$ valorile coeficienților sînt $A = 3 \neq 0$, $C = 0, D \neq 0$, deci ecuația reprezintă *o parabolă*. Pentru a determina vîrful, focarul și parametrul, împărțim cu 3 și o rearanjăm: $x^2 - 10x + 25 = -\frac{8}{3}y - \frac{65}{3} + \frac{75}{3}$ sau $(x-5)^2 = -\frac{8}{3}\left(y - \frac{5}{4}\right)$. Deci, vîrful are coordonatele $S\left(5; \frac{5}{4}\right)$ iar parametrul este $p = \frac{4}{3}$.

Exemplul 2. Ecuația $25x^2 + 49y^2 + 150x - 196y - 804 = 0$ descrie *o elipsă* a cărei axă principală este paralelă cu Ox, deoarece $A = 25 \neq 0$, $C = 49 \neq 0$, $N > 0$. Scriem ecuația canonică a elipsei și vom obține: $\frac{(x+3)^2}{49} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$. Centrul elipsei va fi $M(-3; 2)$. Semiaxele vor fi $a = 7$ și $b = 5$.

Exemplul 3. Ecuația $64x^2 - 25y^2 + 256x + 300y - 2444 = 0$ reprezintă o *hiperbolă*. Grupăm și formăm pătrate: $64(x^2 + 4x) - 24(y^2 - 12y) = 2244$; $64(x^2 + 4x + 4) - 25(y^2 - 12y + 36) = 2\,244 + 256 - 900$; $64(x+2)^2 - 25(y-6)^2 = 1\,600$ sau $\frac{(x+2)^2}{25} - \frac{(y-6)^2}{64} = 1$. Centrul hiperbolei va fi $M(-2; 6)$ iar semiaxele 5 și 8.

Exemplul 4. Conica $9x^2 - 4y^2 = 0$ are $AC \neq 0$ și $N = 0$. Deoarece $AC < 0$, ecuația reprezintă *două drepte care se intersectează*: $9x^2 - 4y^2 = (3x - 2y)(3x + 2y) = 0$. Din fiecare factor rezultă ecuația unei drepte: $y = \frac{3}{2}x$ și $y = -\frac{3}{2}x$. Dreptele se intersectează în origine.

II. Matematici superioare

14. Teoria mulţimilor

Teoria mulţimilor este piatra fundamentală a întregului edificiu al matematicilor moderne. Definiţiile şi toate conceptele matematice se bazează pe teoria mulţimilor. Mai mult chiar, metodele raţionamentului matematic sînt o combinaţie de argumente ale logicii matematice şi teoriei mulţimilor. Pe scurt, limbajul teoriei mulţimilor este comun şi înţeles de matematicienii din lumea întreagă. Rezultă deci că oricine lucrează în domeniul matematicilor şi în aplicaţiile acesteia trebuie să fie familiarizat cu conceptele şi rezultatele de bază ale teoriei mulţimilor şi cu limbajul în care acestea sînt exprimate.

Aparent, definiţia mulţimii care se va da mai jos pare foarte apropiată de noţiunea intuitivă, naivă, de mulţime. În felul acesta se ridică mari greutăţi ce pot fi înlăturate prin dezvoltarea axiomatică a teoriei mulţimilor.

Cînd Georg Cantor (1845—1918), fondatorul teoriei mulţimilor, şi-a publicat concepţiile şi argumentele atît de noi şi îndrăzneţe, ele au fost recunoscute numai de un număr mic de matematicieni. Ulterior însă această teorie, sub o formă mai dezvoltată, a pătruns în aproape toate ramurile matematicii, avînd o influenţă hotărîtoare pentru dezvoltarea acestora şi modificînd chiar aspectul unor teorii deja constituite. Desigur, dezvoltarea unor discipline, ca de exemplu topologia, depinde în mod esenţial de mijloacele teoriei mulţimilor. Mai mult chiar, teoria mulţimilor reprezintă o forţă unificatoare dînd tuturor ramurilor matematicii o bază comună, iar conceptelor o claritate şi o precizie nouă.

Următoarele paragrafe prezintă acele părţi ale teoriei mulţimilor care au aplicaţii deosebit de importante în dezvoltarea diverselor ramuri ale matematicii.

14.1. Noţiunea de mulţime

În vorbirea curentă termenul „mulţime" desemnează, de regulă, o colecţie de obiecte care sînt legate într-un anumit sens sau sînt asemănătoare. Este greu de precizat acest ultim aspect care este omis din formularea conceptului matematic.

> Definiţia mulţimilor dată de Cantor: o mulţime este rezultatul cuprinderii într-un singur tot a unor obiecte determinate ale perceperii sau gîndirii noastre; aceste obiecte se numesc elemente ale mulţimii.

Pentru a compensa lipsa de precizie a acestei definiţii care sub această formă provoacă contradicţii (vezi exemplul 5) este suficient să se introducă cîteva definiţii şi concepte importante.

Dacă un obiect a este un element al mulțimii S, se scrie $a \in S$ (se citește „a aparține lui S" sau „S conține pe a"); se scrie $a \notin S$ dacă a nu este un element al lui S. Dacă S este mulțimea elementelor $a, b, c, \ldots$, se scrie $S = \{a, b, c, \ldots\}$; de exemplu $\{1, 2, \ldots\}$ este mulțimea numerelor naturale pozitive. Dacă S conține numai un element a, se scrie $S = \{a\}$. Dacă S conține două elemente distincte a și b, atunci S se numește pereche neordonată și se scrie $S = \{a, b\}$.

O *submulțime* T a mulțimii S este orice mulțime ale cărei elemente aparțin toate lui S; acest lucru se scrie $T \subseteq S$. Submulțimile T ale lui S care sînt distincte de S se numesc *submulțimi proprii* ale lui S; în acest caz se scrie $T \subset S$. Mulțimea vidă este o mulțime fără elemente. Introducerea acestei mulțimi s-a dovedit convenabilă pentru unele operații cu mulțimi, aceasta jucînd rolul pe care-l joacă numărul 0 pentru operațiile aritmetice. Simbolul pentru mulțimea vidă este $\emptyset$.

Mulțimile ale căror elemente sînt la rîndul lor mulțimi se numesc *familii sau sisteme*, de exemplu, o națiune este o mulțime de oameni și în același timp un element în „familia" tuturor națiunilor. Un sistem foarte important este mulțimea tuturor submulțimilor unei mulțimi date S; aceasta se mai numește mulțimea putere (părților) a lui S și se notează cu $\mathbf{P}(S)$.

Exemplul 1. Mulțimea S a tuturor oamenilor aflați într-o anumită clădire B la un anumit moment t. Această mulțime este bine definită chiar dacă la un anumit moment nu se găsește nimeni în clădire; în acest caz S este mulțimea vidă. Mulțimea W a tuturor femeilor aflate în B la momentul t este o submulțime a lui S, $W \subseteq S$; W nu este neapărat o submulțime proprie a lui S.

Exemplul 2. Mulțimea tuturor numerelor prime. Această mulțime este infinită, fapt demonstrat de Euclid, pe cînd mulțimea din exemplul 1 este finită.

Exemplul 3. Mulțimea tuturor poligoanelor regulate înscrise în cercul unitate este folosită la calculul lui π.

Exemplul 4. Mulțimea tuturor submulțimilor mulțimii numerelor naturale. Ea este de asemenea infinită, de fapt, așa cum se va arăta mai departe; printr-un abuz de limbaj s-ar putea spune că este „mai infinită" decît mulțimea numerelor naturale.

Exemplul 5. Mulțimea tuturor mulțimilor care nu se conțin ca elemente. Această mulțime care este perfect admisibilă, ținînd seama de definiția lui Cantor, conduce la celebrul paradox al lui Bertrand Russel (1872—1970). Dacă se notează această mulțime cu R și se presupune că R este un element al ei însăși ($R \in R$), atunci R este la fel ca orice alt element al lui R, o mulțime care nu se conține ca element ($R \notin R$). Se ajunge astfel la o contradicție. Dacă însă R nu este un element al ei însăși ($R \notin R$), atunci deoarece R se compune din toate mulțimile care nu se conțin ca elemente, rezultă că $R \in R$. deci se ajunge din nou la o contradicție. Cum una din cele două ipoteze trebuie să fie adevărată, întreaga situație este în contradicție cu legile logicii.

Exemplul 5 ne arată că construcția nelimitată de noi mulțimi poate duce la contradicții. Exemplele clarifică modul în care se construiesc mulțimile. O mulțime este determinată prin descrierea unei proprietăți. Mai precis, o mulțime se compune din toate obiectele ξ pentru care o afirmație $A(x)$ avînd ca obiect variabila x este adevărată înlocuind pe x prin ξ.

În exemplele 1—4 aceste afirmații sînt în ordinea respectivă:

x este un om și se găsește în clădirea B la momentul t;

x este un număr prim;

x este un poligon regulat înscris în cercul unitate;

x este o submulțime a mulțimii numerelor naturale.

Dacă x se înlocuiește cu un obiect arbitrar, rezultă o propoziție ce poate fi adevărată sau falsă. În sistemul axiomelor teoriei mulțimilor este de importanță vitală delimitarea precisă a formei logice a propozițiilor ce pot fi admise pentru definirea unei mulțimi.

Mulțimea definită printr-o propoziție $H(x)$ se notează prin $\{x | H(x)\}$ (se citește „mulțimea tuturor x astfel încît $H(x)$".

Exemplul 6. $\{x | x$ este un număr natural și există un număr natural y astfel încît $x = y^2\}$ este mulțimea tuturor pătratelor perfecte. Se poate scrie prescurtat: $\{x \in \mathbf{N} | x = y^2$ pentru un $y \in \mathbf{N}\}$.

Toate sistemele de axiome ale teoriei mulțimilor dezvoltate în prima jumătate a secolului nostru au în comun patru principii de bază: principiul extensionalității, al construcției mulțimilor, al existenței mulțimilor infinite și axioma alegerii.

Principiul extensionalității afirmă că două mulțimi S și T avînd aceleași elemente (adică avînd aceeași extindere) sînt identice ($S = T$). Cuvîntul „identic" este luat aici în sensul lui Leibniz, adică în sensul că în orice propoziție S se poate înlocui cu T și viceversa, fără alterarea valabilității sau falsității propoziției.

Principiul construcției indică diferitele tipuri speciale de propoziții ce se folosesc la definirea mulțimilor; o condiție ce se impune în mod normal este aceea ca propozițiile respective să conțină numai simboluri ale obiectelor, simboluri logice și simbolul $\in$.

Existența mulțimilor infinite trebuie înțeleasă ca atare; trebuie precizată însă noțiunea de mulțime infinită. Acest principiu este greu de motivat în legătură directă cu realitatea. Fără el însă, o parte substanțială a matematicii și a științelor teoretice, ca de exemplu calculul diferențial și integral și mecanica clasică, și-ar pierde sensul. Nu s-ar putea da o fundamentare teoretică nici chiar pentru teoria numerelor naturale. În sfîrșit, *axioma alegerii* este fundamentală pentru multe argumente matematice. Cu toate acestea, mulți autori privesc cu suspiciune această axiomă, ceea ce de fapt s-a întîmplat mai demult și cu axioma paralelelor lui Euclid.

Axioma alegerii. Dacă $\mathbf{S}$ este un sistem de mulțimi nevide, atunci există o mulțime A care are exact un element în comun cu fiecare mulțime S din $\mathbf{S}$.

14.2. Operații cu mulțimi

Operațiile cu mulțimi se folosesc pentru construcția unor noi mulțimi din mulțimi date. Cele mai importante sînt reuniunea, intersecția și diferența mulțimilor S și T.

Intersecția: $S \cap T =_{\text{def}} \{x | x \in S$ și $x \in T\}$.
Reuniunea: $S \cup T =_{\text{def}} \{x | x \in S$ sau $x \in T\}$.
Diferența: $S \setminus T =_{\text{def}} \{x | x \in S$ și $x \notin T\}$

Exemplul 1. $\{a, b, c\} \cap \{a, c, d\} = \{a, c\}$, $\{a, b, c\} \cup \{a, c, d\} = \{a, b, c, d\}$

$\{a, b, c\} \setminus \{a, c, d\} = \{b\}$.

Exemplul 2. Intersecția mulțimii tuturor dreptunghiurilor cu mulțimea tuturor rombilor este mulțimea tuturor pătratelor.

Exemplul 3. Reuniunea mulțimii tuturor dreptunghiurilor cu mulțimea tuturor paralelogramelor este mulțimea tuturor paralelogramelor.

Trebuie să se facă deosebire între reuniunea $S \cup T$ și mulțimea tuturor elementelor care aparțin *sau lui S sau lui T* (dar nu ambelor). Aceasta din urmă se numește diferența simetrică a lui S și T și se folosește mai rar. Mulțimile S și T a căror intersecție este vidă se numesc *disjuncte*. Dacă S este o submulțime a lui U, atunci $U \setminus S$ se numește *complementara lui S în U*.

Principalele proprietăți ale operațiilor cu mulțimi din tabel se pot ilustra reprezentînd mulțimile prin suprafețe mărginite din plan (fig. 14.2.1).

Comutativitate

$S \cap T = T \cap S$

$S \cup T = T \cup S$

Asociativitate

$S \cap (T \cap R) = (S \cap T) \cap R$

$S \cup (T \cup R) = (S \cup T) \cup R$

Distributivitate

$S \cap (T \cup R) = (S \cap T) \cup (S \cap R)$

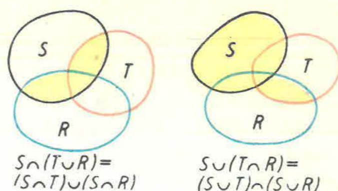
$S \cup (T \cap R) = (S \cup T) \cap (S \cup R)$

Idempotență

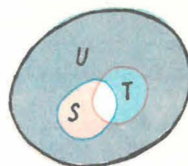
$S \cap S = S$

$S \cup S = S$

Dacă S și T sînt submulțimi ale lui U și complementele lor în U sînt S' și T', atunci au loc *formulele lui De Morgan*; $(S \cap T)' = S' \cup T'$; $(S \cup T)' = S' \cap T'$.



14.2.1. Distributivitatea operațiilor $\cap$ și $\cup$



14.2.2. Regula lui De Morgan $(S \cap T)' = S' \cup T'$; S' este albastru, T' este hașurat cu roșu, $S \cap T$ rămîne alb

Se va da aici numai demonstrația primei relații (fig. 14.2.2). Pentru a arăta că $(S \cap T)' = S' \cup T'$ se arată că (1) $(S \cap T)' \subseteq S' \cup T'$ și (2) $(S \cap T) \supseteq S' \cap T'$.

Pentru a demonstra (1), fie $x \in (S \cap T)'$, adică $x \in U$ dar $x \notin S \cap T$. atunci sau $x \in S$ sau $x \notin S'$. În ultimul caz $x \notin S'$ și deci $x \in S' \cup T'$. În primul caz $x \notin T$, deoarece altfel x ar fi un element din $S \cap T$. Deci $x \in T'$ și deci $x \in S' \cup T'$, ceea ce demonstrează (1). Pentru a demonstra (2) fie $x \in S' \cup T'$, adică $x \in S'$ sau $x \in T'$ (desigur sînt posibile și ambele apartenențe). În primul caz $x \notin S$ și deci $x \notin S \cap T$ și în al doilea caz $x \notin T$ și din nou $x \notin S \cap T$.

Generalizarea operațiilor cu mulțimi. Operațiile reuniune și intersecție sînt inițial definite pentru două mulțimi. Ele se pot generaliza nu numai pentru 3, 4, ... mulțimi ci și pentru sisteme arbitrare de mulțimi. Se vor da mai întîi cîteva explicații.

În cele ce urmează, sistemele de mulțimi se vor nota cu litere mari aldine. Elementele $S, T, \ldots$ ale unui sistem $\mathbf{S}$ se vor marca uneori cu indici sau vor depinde de un parametru. De ex. un sistem finit $\mathbf{S}$ se poate scrie $\{S_1, \ldots, S_k\}$ sau $\mathbf{S} = \{S_i \mid i = 1, \ldots, k\}$. Uneori se mai folosește notația $\mathbf{S} = \{S_i\}_{i \leqslant k}$. Astfel dacă $A_n = \{x \in \mathbf{N} \mid x \leqslant n\}$, atunci $\{A_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ este familia tuturor segmentelor inițiale ale șirului numerelor naturale.

În general $\{S_i\}_{i \in I}$ este o *familie indexată de mulțimi*, atunci cînd se dă mulțimea I, mulțimea indicilor și dacă pentru orice $i \in I$ este desemnată o mulțime S_i din familie. Orice mulțime din familie trebuie să apară cel puțin o dată dar nu este neapărat nevoie ca indici distincți să dea mulțimi distincte. În terminologia folosită pentru aplicații (vezi 14.4) o familie indexată $\mathbf{S}'$ este o aplicație surjectivă a lui I pe $\mathbf{S}$; $\mathbf{S}$ este mulțimea valorilor aplicației. Orice familie $\mathbf{S}$ se poate indexa luînd pe $\mathbf{S}$ ca mulțime a indicilor.

Definiția intersecției și reuniunii unui sistem oarecare $\mathbf{S}$:

$\bigcap \mathbf{S} =_{\mathrm{def}} \{x \mid x \in S$ pentru orice $S \in \mathbf{S}\}$ $\bigcup \mathbf{S} =_{\mathrm{def}} \{x \mid x \in S$ pentru un $S \in \mathbf{S}\}$;

Dacă $\mathbf{S}$ este indexată, $\mathbf{S} = \{S_i\}_{i \in I}$, atunci se scrie $\bigcap \mathbf{S} = \bigcap_{i \in I} S_i$, $\bigcup \mathbf{S} = \bigcup_{i \in I} S_i$

Aceste definiții includ și cazul particular a două mulțimi, atunci cînd sistemul are numai doi membri.

Generalizarea legii de distributivitate: $S \cap \bigcup_{i \in I} S_i = \bigcup_{i \in I} S \cap S_i$; $S \cup \bigcap_{i \in I} S_i = \bigcap_{i \in I} S \cup S_i$

Dacă toate mulțimile sînt submulțimi ale unei mulțimi U, au loc următoarele generalizări ale regulilor lui De Morgan:

$$[\bigcap_{i \in I} S_i]' = \bigcup_{i \in I} S_i'; \quad [\bigcup_{i \in I} S_i]' = \bigcap_{i \in I} S_i'.$$

14.3. Relații

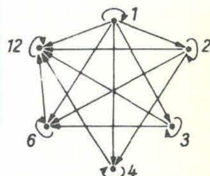
Se știe că dacă a și b sînt două numere reale distincte, atunci $a < b$ sau $b < a$. Dacă $a < b$ se poate spune că pentru perechea (a, b) există relația „mai mic". Această relație se poate nota cu $R_<$ și este complet caracterizată de mulțimea tuturor perechilor ordonate de numere reale pentru care ea este valabilă. O dezvoltare a acestei idei conduce la următoarea definiție de bază.

> O relație R pe o mulțime S este o mulțime de perechi ordonate de elemente ale lui S. Dacă $(a, b) \in R$, se poate spune că R are loc pentru perechea ordonată (a, b) și uneori se mai scrie aRb.

În definiția de mai sus termenul „pereche ordonată" este folosit într-un sens naiv, intuitiv, ca o alăturare a obiectelor a și b astfel încît a poate fi deosebit ca primul element al perechii ordonate (a, b) și b ca al doilea element. În cele ce urmează se va da o definiție riguroasă a acestei noțiuni.

Exemplul 1. În mulțimea S a tuturor persoanelor în viață la un anumit moment, se poate defini o relație C „A este părintele lui B" sau „B este copilul lui A".

Exemplul 2. Relația R_d definită pe mulțimea $S = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ prin „x divide pe y" conține perechile $(1, 1)$, $(1, 2)$, ..., $(2, 2)$, $(2, 4)$ ș.a.m.d. În figura 14.3.1 relația este reprezentată printr-o diagramă cu săgeți în care numerele, reprezentate cu puncte, sînt legate prin săgeți dacă între ele există relația respectivă.



14.3.1. Diagrama care reprezintă relația de divizibilitate pe $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

Deoarece orice număr se divide cu el însuși, orice punct va fi înconjurat printr-o săgeată circulară (buclă).

> Mulțimea $\{x \in S \mid (x, y) \in R$ pentru cel puțin un y din $S\}$ se numește *suport* al lui R. Mulțimea $\{x \in S \mid (y, x) \in R$ pentru cel puțin un $y \in S\}$ se numește *mulțimea valorilor* sau *codomeniul* lui R. Aceste mulțimi se vor nota cu *Supp R*, respectiv *Ran R*. *Mulțimea* $Dom\ R = Supp\ R \cup Ran\ R$ se numește *domeniul* lui R. Evident $Dom\ R \subseteq S$.

Suportul lui C în exemplul 1 este mulțimea tuturor persoanelor cu cel puțin un copil, iar mulțimea valorilor este formată din toate persoanele ai căror părinți sînt încă în viață. În exemplul 2 toate elementele aparțin atît suportului cît și domeniului valorilor.

În matematică unele proprietăți ale relației joacă un rol deosebit, cele mai importante sînt date în următorul tabel (unde R reprezintă o relație pe S).

R este *reflexivă*	$=_{def}$	xRx are loc pentru toți $x \in S$
R este *nereflexivă*	$=_{def}$	nu există $x \in S$ pentru care are loc xRx
R este *simetrică*	$=_{def}$	pentru orice $x, y \in S$ din xRy rezultă yRx
R este *asimetrică*	$=_{def}$	nu există elemente $x, y \in S$ cu xRy și yRx
R este *antisimetrică*	$=_{def}$	pentru orice $x, y \in S$: dacă xRy și yRx, atunci $x = y$
R este *tranzitivă*	$=_{def}$	pentru orice $x, y, z \in S$: dacă xRy și yRz, atunci xRz
R este *conexă*	$=_{def}$	pentru orice $x, y \in S$: dacă $x \neq y$, atunci xRy sau yRx
R este *unică la stînga*	$=_{def}$	pentru orice $x, y, z \in S$: dacă xRz și yRz, atunci $x = y$
R este *unică la dreapta*	$=_{def}$	pentru orice $x, y, z \in S$: dacă xRy și xRz, atunci $y = z$
R este *biunică*	$=_{def}$	dacă este unică la dreapta și unică la stînga

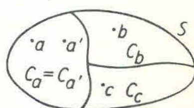
Restricții ale relațiilor. Dacă R este o relație pe S și T o submulțime a lui S, atunci $\{(x, y) \in R \mid x, y \in T\}$ este o relație pe T. Ea se numește *restricția* lui R la T și se notează în mod frecvent cu $R_{|T}$. De exemplu relația „mai mic decît" pe mulțimea numerelor naturale **N** este restricția la **N** a relației „mai mic decît" pe mulțimea numerelor reale **R**.

Relații de echivalență. O relație de echivalență pe o mulțime S este o relație reflexivă, simetrică și tranzitivă care are ca suport pe S. Relații de echivalență se întîlnesc nu numai în matematică dar aproape în toate științele.

Exemplul 3. O dreaptă l este *paralelă* cu o dreaptă l': $l \parallel l'$:
Exemplul 4. Un număr a este *congruent* cu un număr b modulo m : $a \equiv b (\mathrm{mod}\, m)$.
Exemplul 5. Un triunghi ABC este *asemenea* cu un triunghi $A'B'C'$: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ sau o figură F este *omeoformă* cu o figură F' (vezi cap. 34).
Exemplul 6. x este identic cu y. Relația de identitate pe S, id_S este mulțimea $\{(x, x) \mid x \in S\}$.

O relație de echivalență R pe S induce o partiție a lui S în clase, care se compun din acele elemente între care există relația.

O partiție a unei mulțimi S este o familie **P** de submulțimi nevide ale lui S, numite clase ale partiției, cu următoarele două proprietăți:
1. două clase distincte sînt disjuncte,
2. orice element din S aparține unei clase (fig. 14.3.2).



14.3.2. Partiția lui S în trei clase

Dacă **P** este o partiție, atunci orice element a al lui S se găsește exact într-o clasă $C \in$ **P** care se notează cu C_a. Evident $C_a = C_b$ dacă și numai dacă b se găsește în C_a.
Următoarea teoremă este de o deosebită importanță, fiind baza *principiului identificării la abstractizări*.

Teorema fundamentală privind relațiile de echivalență. Dacă R este o relație de echivalență pe o mulțime S, atunci există o partiție P a lui S astfel încît $a, b \in S$ se găsesc în aceeași clasă a lui P dacă și numai dacă aRb. Reciproc, dacă P este o partiție a lui S, atunci relația $\{(a, b) \mid$ există o clasă $C \in$ P cu $a, b \in C\}$ este o relație de echivalență.

Demonstrație. Fie R dat. Se definește $C_a =_{\mathrm{def}} \{x \in S \mid aRx\}$ clasa de echivalență a lui a. Fie **P** familia de clase de echivalență ale elementelor din S. Cum aRa pentru orice element din S, $a \in C_a$. Astfel orice element din S se găsește într-o clasă a lui **P**. Rămîne de arătat că clasele distincte din **P** sînt disjuncte. Să presupunem că C_a și C_b nu sînt disjuncte și deci există $c \in C_a \cap C_b$; atunci aRc și bRc. R fiind simetrică și tranzitivă, rezultă cRb și aRb. Dacă $e \in C_b$, atunci bRe și prin tranzitivitate aRe. Astfel $e \in C_a$ și $C_b \subseteq C_a$. În același mod se poate arăta că $C_a \subseteq C_b$ și deci $C_a = C_b$. Astfel clasele nedisjuncte sînt identice și **P** este partiția cerută de enunț.

Invers, dacă **P** este o partiție a lui S și R este definită ca în enunțul teoremei, R este evident reflexivă și simetrică. Să presupunem aRb și bRc, atunci din definiție există clase C, C' din **P** cu $a, b \in C$ și $b, c \in C'$. Aceste clase nu sînt disjuncte deoarece $b \in C \cap C'$, deci sînt identice; $a, c \in C$ și astfel aRc din definiția lui R. Deci R este tranzitivă și teorema este demonstrată.

Relații de ordine. O relație R pe mulțimea S se numește relație de ordine parțială dacă R este reflexivă, tranzitivă și antisimetrică. Dacă, în plus, R este conexă, ea se numește relație de ordine totală sau liniară.

Exemplul 7. Relația de divizibilitate R_d este o relație de ordine parțială pentru numerele naturale.

Exemplul 8. Relația „S este o submulțime a lui T" este o relație de ordine parțială pentru submulțimile unei mulțimi U.

Exemplul 9. Relația $a \leqslant b$ „a mai mic sau egal cu b" este o relație de ordine parțială, de fapt totală, a mulțimii numerelor reale.

O mulțime ordonată se definește ca o pereche (S, R), unde R este o relație de ordine parțială pe S. În mod curent mulțimea ordonată (S, R) se notează tot cu S. Restricția $R_{|T}$ a lui R la o submulțime T a lui S este de asemenea o relație de ordine; cu alte cuvinte, submulțimile mulțimilor ordonate sînt la rîndul lor mulțimi ordonate. Dacă S este o mulțime ordonată de relația de ordine parțială $R_{\leqslant}$, atunci un element $u \in S$ se numește o margine superioară pentru o submulțime T a lui S dacă $xR_{\leqslant}u$ pentru orice $x \in T$. Un element $m \in S$ se numește maximal în S dacă nu există $x \neq m$ în S cu $mR_{\leqslant}x$.

Una dintre lemele utilizate frecvent în întreaga matematică este lema Kuratowski-Zorn care este echivalentă cu axioma alegerii.

Lema Kuratowski-Zorn. Dacă orice mulțime tctal ordonată (S, R) are o margine superioară în S, atunci S are un element maximal.

Un exemplu important de aplicare a acestei leme va fi dat în paragraful privind numerele cardinale.

Definirea în cadrul teoriei mulțimilor a noțiunii de pereche ordonată. Prin desemnarea lui a ca membru stîng al perechii ordonate (a, b) și a lui b ca membru drept al acesteia, perechea nu poate fi definită pur și simplu ca $\{a, b\}$. Această definiție poate fi înlocuită prin următoarea definiție mai precisă.

Definiția unei perechi ordonate	$(a, b) =_{\text{def}} \{\{a\}, \{a, b\}\}$

Dacă $a \neq b$, membrul stîng al perechii ordonate (a, b) este elementul mulțimii formate dintr-un element, pe cînd membrul drept este constituit din elementul ce nu se găsește în această mulțime.

Din această definiție se poate deriva următoarea proprietate fundamentală a perechilor ordonate:

$(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$ **dacă și numai dacă** $a_1 = b_1$ **și** $a_2 = b_2$.

Produsul cartezian $S \times T$ a două mulțimi S și T este mulțimea tuturor perechilor ordonate (a, b) cu $a \in S$ și $b \in T$. Produsul $S \times S$ se scrie prescurtat S^2, iar $S^2 \times S$ se scrie S'^3 ș.a.m.d. Elementele lui S^n se vor numi *n-upluri* de elemente ale lui S. Astfel 3-uplul sau *tripletul* $((a, b), c)$ se scrie prescurtat (a, b, c) ș.a.m.d.

Exemplul 11. Mulțimea $\mathbf{C}$ a numerelor complexe poate fi privită ca produsul cartezian $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2$ al mulțimii numerelor reale cu ea însăși.

O submulțime a lui S^n se numește *relație cu n argumente* sau *n-ară* pe S. Dacă S^1 este S, atunci relațiile cu un argument sînt submulțimile lui S. *Relațiile binare sau cu două argumente* vor fi cele considerate în continuare în acest capitol. Cîteodată relațiile cu n argumente se numesc *predicate*.

Exemplul 12. Relația „punctul X se găsește între punctele Y și Z" este o relație cu trei argumente pentru punctele planului.

Exemplul 13. „z este suma lui x cu y" este o relație cu trei argumente pe mulțimea numerelor naturale și de asemenea pe alte mulțimi de numere.

Exemplul 14. „Cvadruplul de puncte $\{O, P, Q, R\}$ care formează un paralelogram în plan" este o relație cu patru argumente pe mulțimea punctelor din plan.

14.4. Aplicații

O *funcție* pe o mulțime S cu valori în T este o *relație unică la dreapta* cu suportul S și mulțimea valorilor T. Dacă suportul este întreaga mulțime S, *aplicația* este de la S în T. Dacă mulțimea valorilor unei aplicații este întreaga mulțime T, atunci aplicația este din S pe T, sau *surjectivă*.

Observație. Evident, funcțiile pe S cu valori în T sînt submulțimi particulare ale lui $S \times T$. În unele ramuri ale matematicii (de ex. în analiza complexă) funcțiile nu se presupun neapărat unice la dreapta. Funcțiile și aplicațiile constituie obiectele principale ale întregii matematici. Cele mai frecvent folosite sînt aplicațiile unei mulțimi S în altă mulțime T care se scriu $F : S \to T$. Mulțimea tuturor aplicațiilor pe S în T se notează cu T^S.

Deoarece se lucrează în mod frecvent, simultan, cu mai multe aplicații, de diferite tipuri, de ex. cu aplicații ale căror argumente sînt funcții sau aplicații (vezi exemplul 3), există cîteva sinonime ale denumirii de aplicație, sau pentru tipuri particulare de aplicații. Cel mai frecvent apare termenul de *operație* (în special pentru aplicații ale lui S^2 în S), *operator*, *funcțională* (mai ales pentru funcții cu valori reale definite pe o mulțime de funcții), *functor* și *morfism* (mai ales pentru aplicații care păstrează într-un anumit sens structurile).

Imagine și imagine inversă. Dacă F este o funcție pe S cu valori în T și dacă $(x, y) \in F$, atunci y se numește imaginea lui x prin F, sau valoarea lui F în x. Acest lucru se notează în mai multe moduri: $y = x^F$, $y = xF$, $y = F(x)$ sau $y = F_x$. Dacă $y = F(x)$, atunci x este imaginea inversă a lui y prin F. Mulțimea $F^{-1}(y) =_{\text{def}} \{x \in S \mid F(x) = y\}$ este imaginea inversă completă a lui y.

Funcții particulare. Funcțiile pe mulțimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale cu valori în $\mathbf{R}$ se numesc *funcții reale* sau funcții de variabilă reală. Funcțiile de n variabile reale sînt funcții definite pe $\mathbf{R}^n$ cu valori în $\mathbf{R}$. Aplicațiile mulțimii $\mathbf{N}$ a numerelor naturale în ea însăși se numesc *funcții aritmetice*.

Exemplul 1. $y = x^2$ este o funcție reală; notația deși comună poate ușor produce confuzii. O notație mai convenabilă ar fi: $F : x \to x^2$. Pentru moment vom desemna această funcție prin S_q. Suportul funcției S_q este evident întreaga mulțime $\mathbf{R}$, iar mulțimea valorilor $\mathbf{R}^{\geqslant 0}$ adică mulțimea numerelor reale nenegative.

Aplicațiile mulțimii $\{0, ..., n-1\}$ într-o mulțime S se numesc *șiruri* cu *n termeni de elemente* din S. Dacă $F(i) = a_i$ $(i = 0, ..., n-1)$, atunci F se scrie ca $F = (a_0, ..., a_{n-1})$. Aplicațiile lui $\mathbf{N}$, mulțimea numerelor naturale, în S se numesc simplu *șiruri de elemente* din S. *Șirul* F cu $F(i) = a_i$ se scrie ca $(a_1, a_2, ...)$ sau $(a_i)_{i \in \mathbf{N}}$.

Restricții ale aplicațiilor. Dacă F este o aplicație a lui S în T și dacă U este o submulțime a lui S, atunci $\{(x, y) \in F | x \in U\}$ este o aplicație a lui U în T. Ea se numește restricția lui F în U și se notează cu $F_{|U}$. De exemplu, operația de adunare a numerelor naturale este restricția operației cu același nume pe mulțimea numerelor reale. După cum se vede din exemplu, restricțiile unor aplicații se notează în mod frecvent cu același simbol ca și aplicația.

Funcţii injective. O funcţie pe S cu valori în T se numeşte *injectivă, injecţie, inversabilă* sau biunivocă dacă este o relaţie unică la stînga. În acest caz orice element din domeniul valorilor are o imagine inversă unică şi mulţimea $\{(y, x) \in T \times S \mid (x, y) \in F\}$ este o funcţie pe T cu valori în S. Ea se numeşte *funcţia inversă* a lui F şi se notează cu F^{-1}. Dacă F este o aplicaţie injectivă, atunci F^{-1} este o aplicaţie dacă şi numai dacă F este surjectivă şi o astfel de aplicaţie se numeşte *bijectivă*. Inversa unei aplicaţii bijective este din nou bijectivă.

Exemplul 2. id_S este o aplicaţie bijectivă a lui S pe ea însăşi. Această aplicaţie este egală cu inversa ei.

Exemplul 3. $S^{\{0,1\}}$ este mulţimea tuturor aplicaţiilor lui $\{0, 1\}$ în S, adică mulţimea tuturor şirurilor cu două elemente din S : $\{(a_0, a_1) \mid a_0, a_1 \in S\}$. Fie $F : M^{\{0,1\}} \to M^2$ aplicaţia care asociază şirului (a_0, a_1) perechea ordonată (a_0, a_1). Este clar că F este bijectivă. Din acest motiv nu există o deosebire esenţială între şirurile cu n elemente din S şi între n-uplurile de elemente din S.

Exemplul 4. Fie S o familie de mulţimi şi A o mulţime care are exact un element în comun cu fiecare mulţime din familie. Se asociază fiecărei mulţimi S din familie unicul element din $S \cap A$. Aplicaţia ε din S pe A astfel definită se numeşte *funcţia de alegere* pentru S. Funcţiile de alegere sînt inversabile numai în unele cazuri speciale.

Compunerea aplicaţiilor. Dacă F şi G sînt funcţii, atunci mulţimea

$$H =_{\text{def}} \{(x, z) \mid \text{există un } y \text{ cu } (x, y) \in F \text{ şi } (y, z) \in G\}$$

este din nou o funcţie al cărei suport este conţinut în suportul lui F iar domeniul valorilor pentru H este conţinut în domeniul valorilor lui G. Funcţia H se numeşte *combinaţia, compoziţia* sau *produsul* lui F cu G. Dacă imaginile se scriu sub forma $F(x)$, atunci produsul se scrie $G{\cdot}F$ deoarece $z = H(x)$ înseamnă $z = G(F(x))$. Dacă se folosesc notaţiile $y = x^F$ şi $z = y^G$, atunci produsul $z = (x^F)^G = x^{FG}$ este scris în ordine inversă. Trebuie să se stabilească de la început în fiecare caz ce notaţie se foloseşte.

Dacă F este o aplicaţie din S la U şi G o aplicaţie din U la T, atunci $H = G \cdot F$ (unde ordinea se stabileşte ca în paragraful precedent) este o aplicaţie din S la T. Aici $F \cdot G$ nu trebuie să conţină nici măcar o singură pereche ordonată. Produsul de aplicaţii este asociativ, adică $F \cdot (G \cdot H) = (F \cdot G) \cdot H$ pentru orice F, G şi H.

Exemplul 5. Translaţiile paralele sînt cazuri particulare de aplicaţii (bijective) ale mulţimii punctelor din plan pe ea însăşi. În acest caz compunerea a două translaţii paralele $\mathbf{p}$ şi $\mathbf{q}$ se scrie ca o sumă $\mathbf{p} + \mathbf{q}$. Operaţia $+$ este comutativă, dar în general compunerea funcţiilor nu este comutativă.

14.5. Mulţimi infinite şi numere cardinale

Definiţia mulţimii finite. Într-un sens naiv o mulţime S este finită dacă există un număr natural n astfel încît elementele lui S pot fi numerotate cu întregi mai mici decît n; mai precis S este finită dacă există o aplicaţie bijectivă a mulţimii numerelor naturale mai mici decît n pe S.

Această definiţie prezintă dezavantajul că presupune mulţimea numerelor naturale dinainte dată. Pe de altă parte pentru a defini numerele naturale se foloseşte conceptul de mulţime finită. Această dificultate a fost pentru prima dată recunoscută de către DEDEKIND. El a depăşit-o definind mulţimea finită fără a face apel la mulţimea numerelor naturale.

Definiţia mulţimii finite dată de Dedekind. O mulţime S este finită dacă orice aplicaţie injectivă a lui S în ea însăşi este bijectivă.

Rezultă din această definiție că S este infinită dacă și numai dacă există o aplicație injectivă a lui S în ea însăși care nu este surjectivă, cu alte cuvinte, dacă există o aplicație bijectivă a lui S pe o submulțime proprie a lui S.

O altă definiție deosebit de convenabilă și probabil mai frecvent folosită este cea dată de Russell.

Definiția mulțimii finite dată de Russell. O mulțime S este finită dacă ea aparține oricărui sistem **S** cu următoarele proprietăți: 1. $\emptyset \in \mathbf{S}$; 2. dacă $U \in \mathbf{S}$, atunci $U \cup \{a\} \in \mathbf{S}$ pentru orice $a \in S$.

Este ușor de arătat că o mulțime finită în sensul definiției lui Russell este finită în sensul definiției lui Dedekind. Inversa acestei implicații se demonstrează folosind axioma alegerii.

Exemplul 1. Mulțimea **N** a numerelor naturale este infinită deoarece există o aplicație injectivă a lui **N** pe o submulțime proprie a lui **N**, de exemplu pe mulțimea numerelor pare (fig. 14.5.1). O altă astfel de aplicație este $F : n \to n + 1$.



14.5.1. O aplicație bijectivă a mulțimii numerelor naturale **N** pe o submulțime proprie (după GALILEI)

Numere cardinale

Două mulțimi S și T se numesc echipotente sau de aceeași putere (se scrie $S \sim T$) dacă există o aplicație bijectivă de la S la T.

Este ușor de văzut că relația definită mai sus este o relație de echivalență pe orice familie de mulțimi. Această relație determină o partiție a familiei în clase de mulțimi echipotente.

Un număr cardinal este clasa mulțimilor echipotente cu o mulțime dată. Numerele cardinale ale mulțimilor finite se numesc *numere naturale*. Numerele cardinale ale *mulțimilor infinite* se numesc *numere transfinite*

Nu se poate opera cu familia tuturor mulțimilor sau chiar cu familia tuturor mulțimilor echipotente unei mulțimi date, pentru că s-ar ajunge astfel la paradoxul lui Russell. Pentru a evita acest lucru se restrînge de obicei definiția de mai sus la o familie **F** care este suficient de largă. În acest caz numerele cardinale sînt la rîndul lor mulțimi, mai precis familii de mulțimi. Totuși, mai tîrziu intervine necesitatea lărgirii familiei **F**.

Compararea numerelor cardinale. Puterea sau numărul cardinal al unei mulțimi S se notează cu card S. Numerele cardinale se notează cu litere mici aldine **s**, **t** etc.

$\mathbf{n} \leqslant \mathbf{s}$ înseamnă prin definiție că **n** este cardinalul unei submulțimi a mulțimii S cu card $S = \mathbf{s}$.

Această definiție este independentă de alegerea lui S.

Teorema lui Bernstein. Dacă există aplicații injective ale lui S în T și din T în S, atunci S și T sînt echipotente.

Din această teoremă rezultă că relația $\leqslant$ definită pentru numere cardinale este antisimetrică.

Teoremă. Relația $\leqslant$ pe mulțimea numerelor cardinale este o relație de ordine.

La sfîrșitul acestui capitol se va arăta că oricare două numere cardinale sînt comparabile adică relația $\leqslant$ este o relație de ordine totală. În 14.6 se va arăta chiar că orice mulțime nevidă de numere cardinale conține un cel mai mic element.

Existența numerelor cardinale oricît de mari. Următoarea teoremă a lui CANTOR este fundamentală pentru teoria numerelor cardinale transfinite.

Teorema lui Cantor. Pentru orice mulțime există o mulțime de putere mai mare. Mai exact, card P(S) > card S.

Demonstrația acestei teoreme este surprinzător de scurtă și elegantă. Pe o parte este clar că există o aplicație injectivă a lui S în $\mathbf{P}(S)$ și anume aceea care aplică elementul $a \in S$ în mulțimea cu un element $\{a\}$ din $\mathbf{P}(S)$. Trebuie arătat acum că nici o aplicație injectivă de la S la $\mathbf{P}(S)$ nu este surjectivă, cu alte cuvinte, că pentru orice aplicație injectivă φ de la S în $\mathbf{P}(S)$ există elemente ale lui $\mathbf{P}(S)$ care nu au imagine inversă. Acest lucru se realizează arătînd că mulțimea $U =_{\text{def}} \{x \in S \mid x \notin \varphi(x)\}$ nu este o imagine prin φ. Să presupunem contrariul, adică $U = \varphi(u)$ pentru un $u \in S$. Atunci $u \in U$ sau $u \notin U$. Dacă $u \in U$, atunci $u \in \varphi(u) = U$, deci $U = \varphi(u)$; dar prin definiție U conține numai acele elemente ale lui S care nu sînt elemente ale imaginii lor prin φ. Astfel această ipoteză duce la o contradicție. Dar și cealaltă ipoteză duce tot la o contradicție, deoarece $u \in U$ înseamnă că $u \in \varphi(u)$ și cum U conține toate elementele lui S care nu sînt elemente ale imaginilor lor, rezultă că $u \in U$. Ipoteza inițială este deci falsă. (Demonstrația poate fi comparată cu cea a paradoxului lui Russell. Aici s-a făcut o ipoteză și s-a demonstrat că este falsă deoarece conduce la o contradicție; argumentul din paradoxul lui Russell aplicat mulțimii tuturor mulțimilor este același dar nu există o ipoteză inițială. Astfel, se ajunge la un paradox.)

Mulțimi numărabile

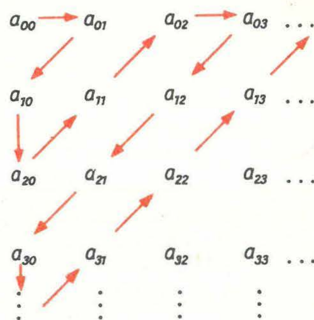
O mulțime S se zice numărabilă dacă este echipotentă cu mulțimea **N** *a numerelor naturale*, adică dacă există o aplicație bijectivă $\varphi: n \to a_n$ de la **N** pe S. Cardinalul mulțimilor numărabile se notează cu $\aleph_0$

Cel mai mic cardinal transfinit este $\aleph_0$.

Demonstrație. Exemplul 1 arată că $\aleph_0$ este transfinit. Rămîne de arătat că $\aleph_0 < \mathbf{n}$ pentru orice cadinal transfinit, adică că orice mulțime transfinită conține o mulțime numărabilă. Fie S infinită și fie φ o aplicație injectivă a lui S într-o submulțime proprie T a lui S. Fie $a \in S \setminus T$ și notînd $a = a_0$ se definește prin recurență șirul $a_{n+1} = \varphi(a_n)$. Mulțimea $\{a_i\}|i \in \mathbf{N}\}$ este o submulțime numărabilă a lui S.

În demonstrația naivă care se dă în mod obișnuit acestei teoreme se alege un element a_0 al lui S, apoi un element a_1 din $S_1 = S \setminus \{a_0\}$ și se continuă în același mod. Acest proces nu se întrerupe deoarece S fiind infinită, mulțimile S_i nu sînt vide. Acest argument este de fapt o aplicare tacită a axiomei alegerii dar el poate fi complet precizat.

Reuniunea unei mulțimi numărabile de mulțimi numărabile este numărabilă.



14.5.2. Aranjamente sub formă de matrice pentru a demonstra că reuniunea unei mulțimi numărabile de mulțimi numărabile $M_i = \{a_{i0}, a_{i1}, \ldots\}$ este o mulțime numărabilă

Fie $M_i = \{a_{i0}, a_{i1}, a_{i2}, \ldots\}$ și presupunem că elementele tuturor mulțimilor M_i sînt aranjate într-o matrice infinită (fig. 14.5.2). Elementele acestei matrice pot fi numerotate începînd cu colțul din stînga și continuînd pe diagonală în modul indicat de săgeți. Elementele numerotate o dată nu se vor repeta, de ex. dacă $a_{11} = a_{20}$, atunci a_{11} se

omite. Este clar că în acest mod $\bigcup_{i=0}^{\infty}{}' M_i$ poate fi complet indexat prin mulțimea numerelor naturale.

Această demonstrație a fost folosită de Cantor pentru a demonstra că mulțimea numerelor raționale este numărabilă. Numerele raționale se pot ordona în același mod ca elementele a_{ij} ale unei matrice infinite.

Sume și produse de numere cardinale. Dacă S și T sînt mulțimi disjuncte reprezentînd cardinalele **s** și **t**, atunci suma lui **s** și **t** se definește ca $\mathbf{s} + \mathbf{t} =_{\text{def}} \text{card}\ (S \cup T)$ și produsul ca $\mathbf{s} \cdot \mathbf{t} =_{\text{def}} \text{card}\ (S \times T)$. Aceste definiții se pot extinde pentru un număr arbitrar de numere cardinale.

Fie $\{\mathbf{m}_i\}_{i\in I}$ un sistem de numere cardinale și $\{M_i\}_{i\in I}$ un sistem de mulțimi disjuncte care reprezintă aceste numere cardinale, atunci se definește $\sum_{i\in I} \mathbf{m}_i =_{\text{def}} \text{card} \bigcup_{i\in I} M_i$.

Pentru a defini produsul și puterile pentru numere cardinale este necesară o generalizare a produsului cartezian pentru sisteme arbitrare de mulțimi $\{S_i | i \in I\}$. Această generalizare este folositoare și în alte ramuri ale matematicii.

Generalizarea produsului cartezian

$\mathop{\mathsf{X}}_{i\in I} S_i =_{\text{def}} \{f \mid f \text{ este o aplicație de la } I \text{ în } \bigcup_{i\in I} S_i \text{ cu } f(i) \in S_i\}$ $\qquad \prod_{i\in I} \mathbf{m}_i =_{\text{def}} \text{card} \mathop{\mathsf{X}}_{i\in I} M_i$

Dacă $S_i = S$ pentru toți $i \in I$, se scrie S^I pentru $\mathop{\mathsf{X}}_{i\in I} S_i$ și în mod similar $\mathbf{m}^{\mathbf{n}}$ dacă toate cardinalele $\mathbf{m}_i$ sînt egale ($\mathbf{n}$ = card I).

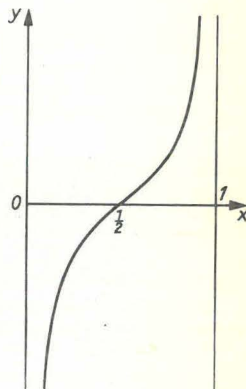
Se poate arăta că pentru cardinale transfinite $\mathbf{m} + \mathbf{n} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = \max(\mathbf{m}, \mathbf{n})$. În particular $\mathbf{m} + \aleph_0 = \mathbf{m} \cdot \aleph_0 = \mathbf{m}$ pentru orice cardinal transfinit $\mathbf{m}$. Aceasta înseamnă că operațiile aritmetice obișnuite devin banale ridicări la putere; de exemplu teorema următoare arată că $\mathbf{m} < 2^{\mathbf{m}}$.

Dacă o mulțime M are cardinalul m, atunci $\mathbf{P}(M)$ are cardinalul $2^{\mathbf{m}}$.

Pentru a demonstra această afirmație se asociază fiecărei submulțimi T a lui M funcția ei caracteristică $\chi = \chi_T$, definită prin

$$\chi(a) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } a \in T, \\ 0, \text{ dacă } a \in M \setminus T, \end{cases}$$

Se obține o aplicație bijectivă a lui $\mathbf{P}(M)$ pe mulțimea $\{0, 1\}^M$ a tuturor aplicațiilor lui M în $\{0, 1\}$. Dar mulțimea acestor aplicații are prin definiție cardinalul $2^{\mathbf{m}}$.



14.5.3. Aplicația intervalului (0, 1) pe întreaga axă reală cu ajutorul funcției $y = (x - 1/2)/[x(1 - x)]$

Puterea continuumului. Cardinalul mulțimii numerelor reale se numește cardinalul sau puterea continuumului și se notează cu $\aleph$ sau **c**. Cardinalul mulțimii numerelor reale din intervalul deschis $(0, 1)$ este tot $\aleph$, deoarece acest interval se aplică bijectiv pe mulțimea tuturor numerelor reale, de ex. prin funcția

$$y = (x - 1/2)/[x(1 - x)] \quad \text{(fig. 14.5.3)}.$$

Numerele cardinale $\aleph_0$ și $\aleph$ sînt legate prin formula $\aleph = 2^{\aleph_0}$.

Demonstrația se face prin definirea a două aplicații. Prima este o aplicație injectivă a lui $\mathbf{P}(\mathbf{N})$ în mulțimea numerelor reale $\mathbf{R}$; dacă $M \in \mathbf{P}(\mathbf{N})$, atunci lui M i se pune în corespondență fracția zecimală $0,a_1a_2\ldots$ unde $a_i = 1$ dacă $i \in M$ și $a_i = 0$ în caz contrar. Se arată astfel că $2^{\aleph_0} \leqslant \aleph$. A doua este o aplicație injectivă a intevalului $(0, 1)$ în $\mathbf{P}(\mathbf{N})$; fie $r = 0, a_1a_2\ldots$ $(0 \leqslant a_i \leqslant 9)$ excluzîndu-se perioade ale cifrei 9. Lui r i se pune în corespondență mulțimea de numere naturale $\{1a_1, 1a_1a_2, \ldots\}$; de ex. lui $r = 0,1406\ldots$ îi corespunde mulțimea $\{11, 114, 1140, 11406\ldots\}$. Rezultă că $\aleph \leqslant 2^{\aleph_0}$ și deci $\aleph = 2^{\aleph_0}$.

Ipoteza continuumului afirmă că nu există numere cardinale între $\aleph_0$ și $\aleph$, cu alte cuvinte, că o mulțime infinită de numere reale este sau numărabilă sau are cardinalul $\aleph$. În 1964 COHEN a demonstrat că este imposibil să se demonstreze ipoteza continuumului cu ajutorul axiomelor standard ale teoriei mulțimilor; anterior în 1938 GÖDEL a demonstrat că ipoteza continuumului nu contrazice aceste axiome. Reunind cele două rezultate, se poate trage concluzia că ipoteza continuumului este independentă de celelalte axiome ale teoriei mulțimilor.

Compararea numerelor cardinale

Pentru două numere cardinale oarecare $\mathrm{m} \neq \mathrm{n}$ are loc una din relațiile: $\mathrm{m}<\mathrm{n}$ sau $\mathrm{n}>\mathrm{m}$.

Este suficient să se arate că pentru orice pereche de mulțimi M și N există o funcție injectivă φ pe M cu valori în N astfel încît suportul lui φ să fie M sau domeniul valorilor lui φ să fie N. În primul caz card $M \leqslant$ card N și în al doilea caz card $N \leqslant$ card M. Demonstrația dată aici constituie un exemplu de aplicație a lemei Zorn-Kuratowski care este tipică pentru matematica modernă.

Fie Φ mulțimea funcțiilor injective pe M cu valori în N. Mulțimea nu este vidă, deoarece funcția vidă φ_0 cu Supp φ_0 = Ran $\varphi = \emptyset$ este conținută în Φ. Pentru elementele φ, ψ ale lui Φ se definește relația de ordine $\varphi \leqslant \psi$ dacă φ este o restricție a lui ψ, sau, ceea ce este echivalent, $\varphi \subseteq \psi$ atunci cînd aceste aplicații sînt privite ca mulțimi de perechi ordonate. Este clar că $\leqslant$ este o relație de ordine pe Φ. Acum dacă Ω este un lanț (o submulțime total ordonată) al lui Φ, atunci $\bigcup\Omega$ (cu funcțiile privite din nou ca mulțimi de perechi) este o funcție injectivă pe M cu valori în N și astfel o margine superioară a lui Ω în Φ. Din lema lui Zorn rezultă că Φ conține un element maximal φ^*. Să presupunem că Supp $\varphi^* \subset M$ și Ran $\varphi^* \subset N$ și fie $a \in M \setminus$ Supp φ^* și $b \in N \setminus$ Ran φ^* și să definim $\varphi' = \varphi^* \cup \{(a, b)\}$. Deoarece φ' este injectivă, ea se va găsi în Φ, ceea ce contrazice faptul că φ^* este maximal. Deci Supp $\varphi^* = M$ sau Ran $\varphi^* = N$, ceea ce era de demonstrat.

14.6. Mulțimi bine ordonate și numere ordinale

Tipuri de ordine

Două mulțimi ordonate S și T se zic *similare* dacă există φ, o aplicație bijectivă de la S la T, astfel încît $a < b$ dacă și numai dacă $a^\varphi < b^\varphi$ pentru toți $a, b \in S$.

Similitudinea este o relație de echivalență pentru mulțimi ordonate. Clasele de echivalență se numesc *tipuri de similitudine* ale mulțimilor ordonate. În ce privește această relație, apar aceleași dificultăți ca pentru relația de echipotență. Ele se evită în același mod, considerînd o familie suficient de mare de mulțimi ordonate.

Tipurile de ordine sînt clasele de similitudine ale mulțimilor total ordonate.

Exemplul 2. Mulțimea tuturor numerelor reale are același tip de ordine ca mulțimea numerelor reale din intervalul deschis $(0,1)$, deoarece aplicația bijectivă dată în 14.5 păstrează ordinea în ambele direcții. Aceasta este tipul de ordine a continuumului liniar.

Exemplul 3. Mulțimea ordonată a numerelor raționale are următoarele proprietăți: 1. *este numărabilă,* 2. *este densă* adică între două elemente distincte se găsește întotdeauna un alt element și 3. *nu are un prim element și nici un ultim element.* CANTOR a demonstrat că toate mulțimile total ordonate cu proprietățile 1, 2 și 3 au același *tip de ordine* η. Acesta este tipul de ordine al oricărui interval rațional deschis și de asemenea a mulțimii tuturor numerelor reale algebrice în ordinea lor naturală, deoarece această mulțime fiind reuniunea unei mulțimi numărabile de mulțimi numărabile este numărabilă.

Exemplul 4. Două mulțimi finite total ordonate au același tip de ordine dacă au același număr cardinal. Similitudinea se construiește aplicînd întîi elementul minimal al uneia din mulțimi pe elementul minimal al celeilalte, apoi procedeul este analog cu primele elemente ce urmează elementelor minimale ș.a.m.d. Astfel tipurile de ordine finite sînt în corespondență biunivocă cu cardinalele finite. Numerele naturale pot fi privite ca numere cardinale sau ca tipuri de ordine.

Exemplul 5. Tipul de ordine a mulțimii numerelor pare este același cu cel al mulțimii numerelor naturale.

Într-adevăr oricărei mulțimi numărabile S i se poate da același tip de ordine ca numerelor naturale utilizînd o aplicație bijectivă $\varphi\colon \mathbf{N} \to S$ care să definească relația de ordine pe S: $m^{\varphi} \leqslant n^{\varphi}$ dacă și numai dacă $m \leqslant n$.

Adunarea și înmulțirea tipurilor de ordine. Fie A și B reprezentanți disjuncți ai tipurilor de ordine α și β; A și B sînt deci mulțimi total ordonate. *Suma* $\alpha + \beta$ se definește ca tipul de ordine al mulțimii $A \cup B$ ordonate plasînd pe B după A. Aceasta înseamnă că pentru orice $a, b \in A \cup B$ se definește:

$$a < b \text{ în } A \cup B \text{ dacă și numai dacă } \begin{cases} a \in A \text{ și } b \in B \text{ sau} \\ a, b \in A \text{ (sau } B) \text{ și } a < b \text{ în } A \text{ (sau } B). \end{cases}$$

Produsul $\alpha \cdot \beta$ se definește ca tipul de ordine al produsului $A \times B$ cu relația de ordine:

$$(a, b) < (c, d) \text{ dacă și numai dacă } \begin{cases} b < d \text{ sau} \\ b = d \text{ și } a < c. \end{cases}$$

Aceasta este *ordinea antilexicografică* a lui $A \times B$.

Pentru numerele naturale privite ca tipuri de ordine, suma și produsul coincid cu suma și produsul definite pentru numere. Adunarea și înmulțirea tipurilor de ordine sînt asociative și distributive, dar în general, nu sînt comutative.

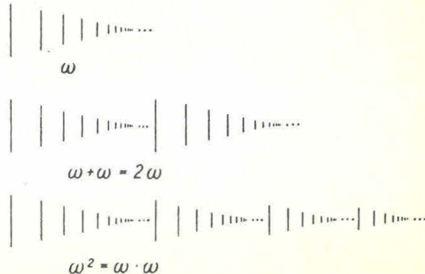
Mulțimi bine ordonate. Mulțimea ordonată a numerelor naturale posedă următoarea proprietate remarcabilă: orice submulțime nevidă are un prim element. Această proprietate se folosește la numărare care începe întotdeauna cu primul element și este baza principiului inducției matematice. CANTOR a recunoscut importanța centrală a acestei proprietăți și a folosit-o la definirea mulțimilor bine ordonate.

O mulțime total ordonată $(S, <)$ se numește bine ordonată dacă orice submulțime nevidă a ei posedă un prim element (minimal și unic). $<$ desemnează în acest caz o relație de bună ordonare. Tipurile de ordine ale mulțimilor bine ordonate se numesc numere ordinale.

Prin definiție orice mulțime bine ordonată are un prim element. Mulțimea numerelor naturale cu ordinea ei naturală este bine ordonată. Numărul ei ordinal (transfinit) se notează cu ω (fig. 14.6.1.)

Un *segment* al unei mulțimi bine ordonate S este o submulțime proprie T a lui S care conține orice element al lui S mai mic decît un element al lui T. Dacă A este un segment al lui S, atunci există întotdeauna un element $a \in S$, astfel încît $A = \{x \in S \mid x < a\}$. Cu ajutorul acestui concept se poate face acum o comparație a numerelor ordinale.

Dacă α și β sînt numere ordinale cu reprezentanți A și B, atunci se definește relația $\alpha<\beta$ prin A similar cu un segment al lui B; cu alte cuvinte $\alpha<\beta$ dacă α este numărul ordinal al unui segment al lui B.



14.6.1. Reprezentarea schematică a unor numere ordinale

Orice mulțime de numere ordinale este total ordonată prin relația $<$.

Această teoremă nu poate fi reformulată ca *„mulțimea tuturor numerelor ordinale este total ordonàtă"*, deoarece conceptul „mulțimea tuturor numerelor ordinale" conduce la o contradicție la fel ca și „mulțimea numerelor cardinale".

Se vede imediat că $<$ este tranzitivă. Ireflexibilitatea relației $<$ este echivalentă cu afirmația: nici o mulțime bine ordonată nu este similară cu un segment al ei. Afirmația inversă duce la o contradicție. Să presupunem că există o similitudine φ a lui S într-un segment al ei A. Atunci trebuie să existe elemente $x \in S$ astfel încît $x < x$. Fie a cel mai mic dintre aceste elemente și $b = a^{\varphi}$. Cum $b < a$, rezultă $b^{\varphi} < a^{\varphi} = b$, astfel $b^{\varphi} < b$ contrazice faptul că a este minimal. Demonstrația faptului că orice două numere ordinale pot fi comparate este mai complicată.

Orice mulțime de numere ordinale este bine ordonată; cu alte cuvinte, orice mulțime de numere ordinale are un element minimal.

Pentru a demonstra aceasta, fie $W(\alpha)$ mulțimea tuturor numerelor ordinale mai mici decît un număr ordinal α. Dacă A este o mulțime bine ordonată de tip α, atunci A și $W(\alpha)$sînt similare; fiecărui număr ordinal $\beta<\alpha$ îi corespunde un segment S al lui A și acesta la rîndul lui corespunde unui element b din A, cu $S = \{x \in A \mid x < b\}$. Astfel $W(\alpha)$ este bine ordonată. Acum dacă Z este o mulțime de numere ordinale și se alege α în Z în mod arbitrar, atunci $Z \cap W(\alpha)$ nu este vidă, are un element minimal care trebuie să fie în același timp și cel mai mic element în Z.

Cel mai mic număr ordinal transfinit este ω.

Clase de numere ordinale. Dacă $\mathbf{m}$ este un număr cardinal transfinit, se poate considera clasa tuturor numerelor ordinale ai căror reprezentanți au cardinalul $\mathbf{m}$. Aceste mulțimi se numesc *clase transfinite de ordinale*. În orice clasă nevidă există un cel mai mic număr ordinal; acesta poartă numele de *număr ordinal inițial* al clasei. CANTOR a reunit numerele ordinale finite în *prima clasă* și numerele ordinale ale mulțimilor numărabile în *a doua clasă*. Pentru fiecare număr ordinal α există unul mai mare, de exemplu, succesorul lui, $\alpha + 1$; mai mult, pentru orice mulțime de numere ordinale Z există un număr ordinal mai mare decît orice $\alpha \in Z$. Astfel mulțimea $\bigcup_{\alpha \in Z} W(\alpha)$ este bine ordonată și numărul ei ordinal β este mai mare decît orice $\alpha \in Z$. Desigur β este cel mai mic astfel de ordinal și poartă denumirea de *supremum al lui Z* (sup Z).

Evident, $\sup W(\alpha) = \alpha$, în particular, $\sup \{0, 1, 2, \dots\} = \omega$.

Un număr ordinal α se numește *număr limită* dacă $W(\alpha)$ nu are un cel mai mare element. Toate celelalte numere ordinale au predecesori imediați și se numesc *izolate*.

Astfel, ω este un ordinal limită, dar toate numerele ordinale finite sînt izolate; la fel și $\omega + 1$.

Principiul recurenței (inducția transfinită). Acesta este o importantă generalizare a principiului inducției pentru mulțimi bine ordonate arbitrare.

Demonstrație prin recurență. Fie S bine ordonată și să presupunem că o afirmație este adevărată pentru cel mai mic element al lui S și de asemenea că este adevărată pentru orice element al lui S dacă este adevărată pentru cel mai mic element. Atunci afirmația este adevărată pentru toate elementele lui S.

Acest lucru se demonstrează foarte ușor. Ipoteza că afirmația nu este adevărată pentru orice element al lui S duce la o contradicție. Dacă a este cel mai mic element pentru care afirmația este falsă (acesta trebuie să existe S fiind bine ordonată), atunci ea este adevărată pentru toate elementele mai mici decît a și deci prin ipoteză și pentru a, deoarece a nu este cel mai mic element al lui S. Următorul principiu este mai complex.

Definiția prin recurență. Dacă S este o mulțime bine ordonată și T o mulțime oarecare, atunci se definește o aplicație unică de la S la T, dacă se dă imaginea $f(a_0)$ a celui mai mic element a_0 al lui S și dacă $f(a)$ este determinat prin valorile lui f pentru toate elementele mai mici decît a.

Acest principiu se poate folosi pentru definirea puterilor numerelor ordinale α^β printr-un sistem de ecuații recursive: (1) $\alpha^0 = 1$; (2) $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$; (3) $\alpha^\lambda = \sup \{\alpha^\xi \mid \xi < \lambda\}$ pentru ordinale limită λ.

Exemplul 6. $\omega^1 = \omega^0 \cdot \omega = 1.\ \omega = \omega$, $\omega^2 = \omega^1 \cdot \omega = \omega \cdot \omega, \ldots, \omega^\omega = \sup \{\omega_1, \omega^2, \omega^3, \ldots\}$ și $\omega^{\omega^\omega} = \sup \{\omega^\omega, \omega^{\omega^2}, \omega^{\omega^3}, \ldots\}$.

Toate aceste numere aparțin celei de-a doua clase deoarece orice supremum al unei mulțimi numărabile de numere de clasa a doua aparține aceleiași clase. Primul număr din clasa a doua care nu poate fi exprimat ca o sumă de puteri de ω este

$$\varepsilon_0 = \sup \{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \ldots\}.$$

Acesta este *cel mai mic ε-număr.* El satisface ecuația $\omega^\varepsilon = \varepsilon$. Continuînd procesul în mod analog, se ajunge la numerele $\varepsilon, \ldots, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\omega, \ldots, \varepsilon_\varepsilon, \ldots, \varepsilon_{\varepsilon_\varepsilon}, \ldots$ (ε cu indice ε_ε) ș.a.m.d. Numere din clasa a doua pot fi construite la infinit dar este imposibil să se definească o notație universală, deoarece se poate arăta că există o mulțime nenumărabilă de numere în această clasă.

Teorema de bună ordonare. Argumentele precedente nu exclud posibilitatea ca unele clase transfinite de numere ordinale să fie vide; cu alte cuvinte este încă deschisă problema dacă orice mulțime poate fi bine ordonată cel puțin într-un mod. Acesta este obiectul teoremei de bine ordonare. Această teoremă este echivalentă cu axioma alegerii. Prima demonstrație riguroasă (folosind axioma alegerii) a fost dată de Ernst ZERMELO (1871—1953) în 1904 într-o scrisoare către HILBERT. Ea a pornit controversa asupra admisibilității axiomei alegerii care încă nu este rezolvată.

Teorema de bună ordonare. Pe orice mulțime S există o relație prin care S este bine ordonată.

CANTOR a considerat această teoremă ca un principiu de gîndire și a făcut-o plauzibilă în felul următor. Se ia un element a_0 al lui S, apoi un al doilea ș.a.m.d. Dacă S este infinită, se obține un șir $a_0, a_1, \ldots$ Astfel S este epuizat sau nu; dacă nu se epuizează, procesul se repetă atît cît este necesar pentru epuizarea mulțimii. Dacă S se ordonează prin intermediul șirului de elemente alese, atunci orice submulțime are un cel mai mic element și anume cel ales mai întîi.

La nivelul standardului de rigurozitate al matematicii actuale, acest raționament poate fi privit ca o primă aproximare euristică. Demonstrațiile riguroase sînt lungi și mult prea complicate spre a fi incluse aici.

Buna ordonare a cardinalelor. Prin teorema de bună ordonare nici un cardinal m transfinit nu are o clasă vidă de ordinale Z_m. Teorema de bună ordonare poate fi folosită pentru a arăta că orice două cardinale sînt comparabile, adică pentru orice mulțimi S și T există o aplicație injectivă de la S la T sau de la T la S. Acest lucru nu este suprinzător, deoarece datorită lemei lui Zorn, axioma alegerii și teorema de bună ordonare sînt echivalente. Bine ordonînd S și T, afirmația se reduce la comparabilitatea ordnalelor.

În plus, se poate arăta că orice mulțime nevidă de numere cardinale K are ún cel mai mic element, deoarece mulțimea numerelor cardinale este similară cu mulțimea ordinalelor inițiale ale claselor lor (de fapt, numerele cardinale sînt deseori identificate cu aceste numere inițiale). Din această identificare rezultă că pentru orice mulțime de numere cardinale există un număr cardinal mai mare decît orice element al mulțimii. În felul acesta, numerele cardinale pot fi indexate prin numere ordinale în felul următor:

$\aleph_0$ = cel mai mic număr cardinal infinit;
$\aleph_{\alpha+1}$ = cel mai mic număr cardinal mai mare decît $\aleph_\alpha$;
$\aleph_\lambda = \sup \{\aleph_\xi \mid \xi < \lambda\}$ pentru numere ordinale limită λ.

Se obține astfel celebrul șir de numere cardinale al lui Cantor $\aleph_0, \aleph_1, \ldots, \aleph_\omega, \ldots$

Deoarece $2^{\aleph_0} > \aleph$, problema ipotezei continuumului, se reduce la problema locului unde apare $\aleph$ numărul cardinal al continuumului, în acest șir. Ipoteza continuumului a lui Cantor este $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Așa-numita ipoteză generalizată a continuumului este $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$.

15. Elemente de logică matematică

Logica matematică are ca obiect *investigarea gîndirii formale și a inferenței* prin metodele matematice caracteristice, de exemplu ale algebrei și teoriei algoritmilor.

Dar acest scop, care își are originea în filozofie, nu este unicul scop al logicii matematice; astăzi logica matematică conține o multitudine de probleme și aplicații în cele mai diverse domenii ca științele naturii, algebra circuitelor, teoria sistemelor, lingvistică cît și în unele ramuri ale științelor sociale ca filozofia, dreptul și etica.

Un impuls decisiv pentru dezvoltarea logicii matematice l-a cunoscut situația creată în matematică la sfîrșitul secolului al 19-lea. Pînă atunci, matematica a acumulat o mare cantitate de rezultate și a atins un înalt nivel de abstractizare fără ca să atingă însă o claritate corespunzătoare în ceea ce privește conținutul conceptelor fundamentale, ca de exemplu noțiunile de mulțime sau de inferență logică (vezi cap. 42) care erau folosite într-o manieră mai degrabă intuitivă. În afară de necesitatea unei fundamentări a conceptului de mulțime, pentru prima dată s-a impus necesitatea aprofundării sensului logicii și a deducției logice.

15.1. Logica propozițiilor

Principiile logicii propozițiilor clasice. Se numesc *propoziții* anumite formații lingvistice care servesc la descrierea sau comunicarea faptelor. *Logica propozițiilor clasică* pornește de la două principii. Potrivit *principiului celor două valori,* orice propoziție este ori adevărată ori falsă. Conceptul de adevăr folosit aici este datorat lui Aristotel, care consideră o propoziție adevărată dacă afirmația exprimată prin ea corespunde unui fapt. Principiul celor două valori înseamnă în realitate două principii: 1. *principiul terțului exclus* conform căruia orice propoziție este adevărată sau falsă și 2. *principiul non-contradicției*, în conformitate cu care o propoziție nu poate fi în același timp adevărată și falsă. De aceea clasa tuturor propozițiilor se descompune în două clase disjuncte care se notează cu simbolurile 1 (adevărat) și 0 (fals) și se numesc *valori de adevăr.*

Cu ajutorul cuvintelor „nu" „și" „sau" etc. propozițiile date se pot combina în propoziții mai complicate. În conformitate cu al doilea principiu fundamental, *principiul extensionalității*, valoarea de adevăr a unei propoziții compuse este determinată exclusiv de valorile de adevăr ale componentelor și nu depinde de sensul lor. În consecință astfel de combinații pot fi privite ca funcții care atribuie valori de adevăr n-uplurilor de valori de adevăr. Conjuncțiile cel mai frecvent folosite în logica propozițiilor corespund *funcțiilor de adevăr.* Funcția non — negația — corespunde la „nu", et — conjuncția — la „și", vel — dijuncția — la „sau", seq — implicația — la „dacă ... atunci" și aeq — echivalența — la „dacă și numai dacă". Simbolurile respective, numite conective sau functori logici sînt $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$. Pentru simplificare, printr-un abuz de limbaj și notație, aceleași simboluri se folosesc și pentru legarea valorilor de adevăr (vezi tabelul de adevăr alăturat).

Tabel de adevăr

Funcția de adevăr	Notația funcțorială	Acoperirea variabilelor p și q f / Valorile de adevăr v_f, rezultate pentru funcțiile de adevăr	p 0	p 1	pq 00	pq 01	pq 10	pq 11
non p	$\sim p$	$v_f(\neg p) = \text{non } v_f(p)$	1	0				
et (p, q)	$p \wedge q$	$v_f(p \wedge q) = \text{et } (v_f(p), v_f(q))$			0	0	0	1
vel (p, q)	$p \vee q$	$v_f(p \vee q) = \text{vel } (v_f) (p), v_f(q))$			0	1	1	1
seq (p, q)	$p \rightarrow q$	$v_f(p \rightarrow q) \text{ seq } (v_f(p), v_f(q))$			1	1	0	1
aeq (p, q)	$p \leftrightarrow q$	$v_f(p \leftrightarrow q) = \text{aeq } (v_f(p), v_f(q))$			1	0	0	1

Aceste definiții nu se potrivesc exact cu sensul în care aceste conjuncții sînt folosite în vorbirea curentă.

De exemplu propoziția următoare este adevărată: „Dacă $2 \cdot 2 = 5$, atunci luna este locuită de ființe raționale", deoarece în notația functorială $(0 \rightarrow 0) \rightarrow 1$.

Obiectul logicii propozițiilor constă în analiza matematică a acestui concept și este formalizată în acest scop în cadrul *calculului propozițiilor*. Pentru a dezvolta acest calcul se pornește de la o colecție de *simboluri fundamentale* de tipul următor:

(1) *variabile* pentru propoziții: $p_1, p_2, \ldots; p, q, r, s, \ldots$

(2) *functorii:* $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$;

(3) *simboluri tehnice*: (,).

Printre mulțimile de șiruri de simboluri, obiectele fundamentale ale calculului propozițiilor, așa-numitele *expresii* capătă o definiție inductivă:

Definiția expresiilor

(1) Variabilele $p, q, \ldots$ sînt expresii.

(2) Dacă H și G sînt expresii, atunci $\neg H$, $(H \wedge G)$, $(H \vee G)$, $(H \rightarrow G)$, $(H \leftrightarrow G)$ sînt de asemenea expresii.

(3) Un șir de simboluri este o expresie dacă și numai dacă se formează în conformitate cu (1) și (2).

Această definiție permite să se decidă într-un număr finit de pași dacă un șir dat de simboluri este sau nu o expresie.

Exemplul 1. $((p \rightarrow q) \wedge (r \vee s))$ și $((p \leftrightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p))$ sînt expresii.

Pentru a simplifica prezentarea expresiilor se folosesc *reguli pentru omiterea parantezelor :*
1) Dacă întreaga expresie este inclusă în paranteze, atunci parantezele se pot omite.
2) În șirul $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$, fiecare functor separă mai puternic decît functorul precedent, de ex. $p \wedge q \rightarrow r$ se citește ca $(p \wedge q) \rightarrow r$.
(3) Un functor marcat cu un punct dedesubt separă mai puternic decît unul fără punct (vezi exemplele 3, 4, 5, 6; în 6 două puncte separă mai puternic decît un punct.

Semantica face legătura între valorile de adevăr și funcțiile de adevăr pe o de parte și expresii pe altă parte. Acest lucru se realizează cu ajutorul noțiunii de acoperire. O *acoperire a variabilelor propoziționale* este o funcție care atribuie fiecărei variabile una din cele două valori de adevăr 0 sau 1. O astfel de acoperire f se poate extinde în mod natural la funcția v_f care atribuie o valoare de adevăr fiecărei expresii. Pentru o funcție dată f, funcția v_f se definește inductiv folosind tabelul de adevăr:

(1) pentru variabile p : $v_f(p) = f(p)$

(2) $v_f(\neg H) = \text{non}\,(v_f(H))$

(3) pentru expresiile H și G:

$v_f(H \wedge G) = \text{et}\,(v_f(H), v_f(G))$

$v_f(H \wedge G) = \text{vel}\,(v_f(H), v_f(G))$

$v_f(H \rightarrow G) = \text{seq}\,(v_f(H), v_f(G))$

$v_f(H \leftrightarrow G) = \text{aeq}\,(v_f(H), v_f(G))$

Acum pot fi definite conceptele de echivalență semantică și validitate universală. Două expresii H și G se zic *semantic echivalente*, $H \equiv G$, dacă $v_f(H) = v_f(G)$ pentru orice acoperire f. O expresie H este *universal valabilă* sau o *tautologie* dacă $v_f(H) = 1$, cu alte cuvinte dacă H este adevărată pentru orice acoperire f.

Exemplul 2. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ este o tautologie; $p \rightarrow (p \rightarrow q) \underset{\cdot}{\rightarrow} q$ este o tautologie; $(p \rightarrow q) \wedge \wedge (p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p$ este o tautologie pe baza principiului terțului exclus.

Inferența logică servește la obținerea unor noi propoziții adevărate din propoziții pentru care s-a stabilit deja că sînt adevărate. De aceea *regulile de inferență* trebuie să pornească de la adevărul unei expresii și să decidă asupra expresiilor deduse. La deducerea unor astfel de reguli de inferență, tautologia joacă un rol deosebit; orice tautologie de forma $H \rightarrow G$ conduce la o regulă de inferență. Condițiile de aplicare a unei reguli, *premisele*, se scriu deasupra liniei ori-

zontale iar rezultatul aplicării regulii, *concluzia*, dedesubt. Un sistem S de reguli de inferență determină o relație „A poate fi dedus din S" în simbol $S \vdash A$.

Exemple de reguli de inferență, în care H, G, F reprezintă expresii și S o mulțime de expresii:

3. $p \to (p \to q) \dot{\to} q$ duce la regula

$$\frac{S \vdash H \qquad S \vdash H \to G}{S \vdash G}$$

4. *Lanțul de inferențe* $(p \to q) \to (q \to r) \dot{\to} p \to r$ duce la regula

$$\frac{S \vdash H \to G \qquad S \vdash G \to F}{S \vdash H \to F}$$

5. *Contrapoziția* $p \to \neg q \dot{\to} q \to \neg p$ duce la regula

$$\frac{S \vdash H \to \neg G}{S \vdash G \to \neg H}$$

6. *Principiul contradicției* $p \to q \dot{\to} p \to \neg q \dot{\to} \neg p$ duce la regula

$$\frac{S \vdash H \to \neg G \qquad S \vdash H \to \neg G}{S \vdash \neg H}$$

Regulile de inferență ale calculului propozițiilor nu țin seama de structura mai fină a propozițiilor; alte reguli de inferență sînt tratate de calculul predicatelor.

15.2. Logica predicatelor

Expresiile din calculul propozițiilor nu sînt suficiente pentru formularea tuturor situațiilor ce apar în matematică; o versiune formalizată a limbajului matematic trebuie să fie considerabil mai bogată. O trăsătură caracteristică este folosirea frecventă a variabilelor și a simbolurilor speciale pentru *funcții* sau pentru *relații*. Prin *variabile individuale* se înțeleg simboluri dinainte stabilite care desemnează obiecte arbitrare dintr-un domeniu dinainte delimitat. Simboluri al căror sens este fixat se numesc constante ca 0 sau + în domeniul numerelor naturale.

O altă trăsătură a limbajului matematic este posibilitatea *legării* variabilelor cu ajutorul *cuantificatorilor* logicii predicatelor.

În expresia „există numere prime p și q astfel încît $2n = p + q$", simbolurile p și q sînt legate prin functorul din logica predicatelor „există" ... „pe cînd variabila n este liberă". S-a dovedit că în scopul legării variabilelor în matematică cele două operații ale logicii predicatelor $\exists$ *„există"* și $\forall$ *„pentru toți ..."* sînt suficiente. De aceea limbajele logicii predicatelor sînt bazate numai pe acest tip de legare a variabilelor.

Logica predicatelor studiază o structură mai fină a enunțurilor matematice; de ex. calculul propozițiilor este incapabil să cuprindă următorul enunț privind numerele raționale

$$\forall x\ \forall y\ \exists z\ (x < y \to x < z < y).$$

Sintaxa limbajelor elementare. Propozițiile unei teorii matematice conțin ca concepte fundamentale anumite predicate și funcții, de ex. în teoria mulțimilor relația $\in$ „este un element din ...", în geometrie relația de incidență, în aritmetică adunarea, înmulțirea și relația de ordine. Pentru aceste concepte fundamentale se introduc simboluri care împreună formează *alfabetul* acestei teorii. Un alfabet se compune deci din simboluri pentru relații, pentru funcții și pentru variabile individuale. Fiecare dintre aceste aceste simboluri este caracterizat prin *„valența"* sau *„aritatea"* lui. În alfabetul $\Sigma = \{+, \cdot, <, 0, 1\}$ al aritmeticii elementare + și · sînt simboluri operaționale binare, < este simbolul unei relații iar 0 și 1 sînt simboluri pentru variabile individuale.

În afară de simbolurile din Σ, o *teorie matematică* folosește variabile individuale, ca simbolurile x, y, z, ..., simboluri logice ca $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$, $=$, $\exists$, $\forall$ și simboluri tehnice auxiliare.

La fel ca în calculul propozițiilor, un *limbaj elementar* L_Σ (sau limbaj al calculului predicatelor) se poate defini în raport cu un alfabet dat Σ cu ajutorul acestor simboluri fundamentale. Elementele lui sînt constituite din anumite șiruri de simboluri numite *expresii* sau *forme propoziționale*. Construcția acestor expresii are loc după introducerea așa-numiților termeni.

Definiția termenilor

(1) Variabilele individuale și constantele sînt termeni.

(2) Dacă F este un simbol funcție de aritate n și $t_1 \ldots t_n$ sînt termeni, atunci $Ft_1 \ldots t_n$ este termen.

(3) Un șir de simboluri este un termen dacă este format în concordanță cu (1) și (2).

Exemplul 7. Dacă sin, +, · sînt simboluri funcție interpretate în domeniul numerelor reale, atunci următoarele șiruri de simboluri sînt termeni: sin x, $x^2 \cdot y + y^3 + z^3$, sin $(x + \sin(y^2 + x))$.

Expresiile limbajului elementar L_Σ sînt caracterizate inductiv.

Definiția expresiilor și a formelor propoziționale

(1) Dacă R este un simbol relație de aritate n și $t_1 \ldots t_n$ sînt termeni, atunci $Rt_1 \ldots t_n$ sînt expresii, așa-numite *expresii atomice.*
(2) Dacă A și B sînt expresii, atunci $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$ sînt de asemenea expresii.
(3) Dacă $A(x)$ este o expresie ce conține variabila x, dar nu și simbolurile $\exists x$ sau $\forall x$, atunci $\exists x A(x)$ și $\forall x A(x)$ sînt de asemenea expresii.
(4) Un șir de simboluri este o expresie numai dacă este format în conformitate cu (1) —(3).

Exemplul 8. În alfabetul $\Sigma = \{P, Q, R, f, g, T\}$ următoarele șiruri de simboluri sînt expresii: $\forall x(Rxy \rightarrow Qxf(y))$, $\neg \exists x [Rxy \vee Qxg(y, x)]$, $\forall x [Px \wedge \exists y (Tyx \rightarrow Sxy)]$.

La fel ca în calculul propozițiilor se poate decide într-un număr finit de pași dacă un șir dat de simboluri este sau nu o expresie.

O variabilă x apare *liber* într-o expresie H, dacă x apare în H dar nu apare $\exists x$ sau $\forall x$; x este *cuantificată* în H, adcă $\exists x$ sau $\forall x$ apar în H. După fiecare loc de forma Θx, unde Θ este $\exists$ sau $\forall$, apare o expresie parțială a lui H unic determinată H' în care variabila x fără simbolul Θx va fi liberă. Această expresie parțială H' a lui H se numește *domeniu de influență al cuantificatorului* Θ pentru locul în cauză. În acest domeniu variabila x este cuantificată. O variabilă x apare liber la un anumit loc într-o expresie H dacă apare la acest loc și nu este cuantificată aici sau în domeniul de influență al unui cuantificator. Dacă există cel puțin un loc în H unde o variabilă x apare liber, atunci se zice că x apare liber în H.

1 5 8 10 12 15 20 22 25 30

Exemplul 9. În expresia $\exists x[Px \wedge Qy \wedge g(y) = z] \rightarrow [\exists x \forall y Rxy \wedge f(x, z) = z]$ locurile sînt indicate prin numere scrise deasupra simbolurilor. Variabila y apare liber la locurile 8 și 12 și legată la 22 și 25; ea este cuantificată la 22 iar la 25 este în domeniul de influență al locului 21.

În general, expresiile nu sînt propoziții. Expresia $x < y$, în care $<$ reprezintă ordinea dintre numerele naturale devine propoziție dacă variabilele x și y se substituie prin simboluri definite, de exemplu $0 < 1{,}3 < 2{,}5 < 7$ sau cînd variabilele libere se leagă prin cuantificatori, de exemplu $\forall x \exists y \, x < y$. *Propozițiile* pot fi deci caracterizate ca expresii care *nu conțin variabile libere,*

Exemple de propoziții :

10. *Legea de monotonie pentru adunarea numerelor naturale :* $\forall x \forall y \forall z (x < y \rightarrow x + z < y + z)$.

11. *Conjunctura lui Fermat :* $\neg \exists x \exists y \exists z \exists n (n > 2 \wedge x^n + y^n = z)$.

12. *Conjunctura lui Goldbach :* $\forall x[2|x \wedge x \neq 2 \wedge x \neq 0 \rightarrow \exists y \exists z$ (prim $y \wedge$ prim $z \wedge x = y + z)]$; aici prim y este prescurtarea pentru $y \neq 1 \wedge \forall u \forall v (y = u \cdot v \rightarrow u = 1 \wedge v = 1)$ și $2|x$ este prescurtarea pentru $\exists y (y + y = x)$. În cuvinte expresia se citește: „pentru toate numerele naturale x, dacă x este par, diferit de zero și de 2, atunci există numere prime y și z astfel încît x este suma lui y și z".

O generalizare a limbajelor elementare poate fi obținută dacă se permite cuantificarea predicatelor neare, adică, dacă acestea se tratează ca variabile individuale. În astfel de limbaje, care se numesc *monadice* de ordinul doi, pot fi exprimate considerabil mai multe enunțuri decît în limbaje elementare.

Exemple de propoziții în limbaje monadice de ordinul doi :

13. *Axioma lui Peano pentru numere naturale :*
$\forall P(P0 \wedge \forall x(Px \rightarrow Px') \rightarrow \forall x Px)$,

în cuvinte: „dacă un predicat near P este adevărat pentru 0 şi dacă din P adevărat pentru un element x rezultă P adevărat pentru succesorul x' al lui x, atunci P este adevărat pentru toate numerele naturale".

14. Axioma marginii superioare pentru numere reale:
$\forall P [\exists z\, Pz \wedge \exists u\, \forall v\, (Pv \rightarrow v < u) \rightarrow \exists y(\forall v\, (Pv \rightarrow v \leqslant y) \wedge \neg \exists y'(\forall v\, (Pv \rightarrow v \leqslant y') \wedge y' < < y))]$;
în cuvinte „orice mulţime nevidă de numere reale mărginită superior admite o margine superioară"

Limbajele logicii predicatelor sînt descriptive, adică expresiile unor astfel de limbaje descriu relaţii predominante în structurile matematice.

Prin dezvoltarea prelucrării datelor cu ajutorul calculatoarelor importanţa limbajelor algoritmice a crescut. *Limbajele algoritmice* au ca scop transmiterea comenzilor, iniţierea acţiunilor şi dirijarea procesului de prelucrare. Exemple de limbaje algoritmice folosite în tehnologia programării sînt ALGOL 60, PL 1, FORTRAN, COBOL şi altele.

Unele elemente algoritmice sînt conţinute chiar în limbaje elementare: un termen poate fi privit ca un şir de comenzi, de ex. $(x + 1) \cdot y$ înseamnă „adună 1 la x şi înmulţeşte rezultatul cu y".

Semantica limbajelor elementare. La fel ca în calculul propoziţional, semantica stabileşte o legătură între expresiile din L_Σ şi domeniul structurilor matematice în care expresiile au un sens.

Fie Σ o mulţime de simboluri operaţionale şi funcţionale şi S o mulţime nevidă. *O interpretare* a lui Σ în S este o aplicaţie δ care pune în corespondenţă fiecărui simbol relaţie n-ar în Σ, R, o relaţie de n-ară, R^δ pe S, adică o submulţime a lui S^n, şi oricărui simbol operaţional n-ar F o funcţie de n argumente F^δ pe S, adică, o aplicaţie cu o singură valoare a lui S^n în S. Semnul egalităţii = este întotdeauna interpretat ca relaţie de identitate.

Fie δ_Σ şirul de relaţii şi operaţii atribuite simbolurilor în Σ.

O **Σ-structură**, **Σ-algebră** sau **Σ-model** se defineşte ca o pereche ordonată $\mathbf{S} = (S, \delta_\Sigma)$. Fie $\mathbf{K}_\Sigma$ clasa tuturor Σ-structurilor. Simbolurile conţinute în Σ se referă întotdeauna la clasa $\mathbf{K}_\Sigma$. Se poate stabili acum *conceptul de adevăr* pentru limbajul elementar L_Σ, adică o definiţie a afirmaţiei „propoziţia H este adevărată în structura $\mathbf{S}$", simbolic $\mathbf{S} \models H$. Conceptul este fundamental pentru întreaga semantică. Conceptul de adevăr în limbaje elementare poate fi precizat introducînd mai întii un concept mai general: „S—acoperirea α satisface expresia H în $\mathbf{S}$", simbolic $S \models_\alpha H$.

Printr-o S-acoperire α se înţelege o funcţie care atribuie oricărei variabile individuale un element din S. O astfel de acoperire α poate fi extinsă în mod natural, exact ca în calculul propoziţiilor, la o aplicaţie α a tuturor termenilor lui L_Σ în S: $x^\alpha = c^\delta$ unde c este o constantă pentru o variabilă individuală din Σ: $(F(t_1, ..., t_n))^\alpha = F^\delta(t_1^\alpha, ..., t_n^\alpha)$.

Exemplul 15. Fie $t = (x + 1) \cdot y$, $\alpha(x) = 2$, $\alpha(y) = 3$. Atunci $t^\alpha = (x^\alpha + 1) \cdot y^\alpha = (2 + 1) \cdot 3 = 9$.

Definiţia relaţiei „α satisface A în $\mathbf{S}$", în simboluri. $\mathbf{S} \models_\alpha A$

(1) $\mathbf{S} \models_\alpha Rt_1 ... t_n$ dacă şi numai dacă $(t_1^\alpha, ..., t_n^\alpha) \in R$, adică R are loc pentru n-uplul $(t_1^\alpha, ..., t_n^\alpha)$;
(2) $\mathbf{S} \models_\alpha \neg A$ dacă şi numai dacă non $\mathbf{S} \models A$;
$\mathbf{S} \models_\alpha A \wedge B$ dacă şi numai dacă $\mathbf{S} \models_\alpha A$ şi $\mathbf{S} \models_\alpha B$;
$\mathbf{S} \models_\alpha A \vee B$ dacă şi numai dacă $\mathbf{S} \models_\alpha A$ sau $\mathbf{S} \models_\alpha B$;
$\mathbf{S} \models_\alpha A \rightarrow B$ dacă şi numai dacă $\mathbf{S} \models_\alpha A$ implică $\mathbf{S} \models_\alpha B$;
$\mathbf{S} \models_\alpha A \leftrightarrow B$ dacă şi numai dacă $\mathbf{S} \models_\alpha A \rightarrow B$ şi $\mathbf{S} \models_\alpha B \rightarrow A$;
(3) $\mathbf{S} \models_\alpha \exists x A(x)$ dacă şi numai dacă valoarea lui α pentru variabila x poate fi modificată astfel încît acoperirea modificată α' satisface expresia $A(x)$ în $\mathbf{S}$;
$\mathbf{S} \models_\alpha \forall x A(x)$ dacă şi numai dacă orice acoperire α' care apare numai modificînd valorile pentru variabila x satisface expresia $A(x)$ în $\mathbf{S}$.

Exemplul 16. $\exists x\, (y = x \cdot x)$, unde $\cdot$ înseamnă înmulţirea numerelor naturale. Dacă α este o acoperire a tuturor variabilelor astfel încît $y^\alpha = 4$, atunci α satisface această expresie; într-adevăr acoperirea α' care atribuie variabilei x valoarea 2 şi coincide cu α pentru toate celelalte variabile satisface expresia $y = x \cdot x$.

Din acest exemplu se poate vedea că afirmaţia $\mathbf{S} \models_\alpha A$ are sau nu loc depinde numai de variabilele libere din A. Dacă A este o propoziţie, adică o expresie fără variabile libere, atunci $\mathbf{S} \models_\alpha A$ are loc pentru toţi α sau pentru nici un α.

Definiţie. (1) O expresie A este valabilă în $\mathbf{S}$, în simboluri $\mathbf{S} \models_\alpha A$, dacă şi numai dacă orice acoperire α satisface A în $\mathbf{S}$, adică dacă $\mathbf{S} \models_\alpha A$ are loc pentru orice S-acoperire α.

(2) o expresie $A \in L_\Sigma$ se zice *universal valabilă (sau valabilă în logica predicatelor)* dacă A este valabilă în orice Σ-structură.

Exemplul 17. Propoziţia $\forall x\, \exists y\, x < y$ este valabilă în mulţimea numerelor naturale dar nu este universal valabilă, deoarece este falsă într-o mulţime ordonată finită $(S, <)$.

Exemplul 18. Propoziţia $\forall x\, \forall y\, Rxy \wedge \neg \forall x\, \forall y\, Rxy$ este universal valabilă; desigur au loc $\mathbf{S} \models H$ sau $\mathbf{S} \models \neg H$ pentru orice propoziţie H şi orice structură $\mathbf{S}$.

O expresie H se zice *indecompozabilă în logica propoziţiilor* dacă începe cu un cuantificator, adică dacă H este de forma $H = \Theta x H'$ unde Θ înlocuieşte pe $\exists$ sau pe $\forall$. Orice expresie se compune din expresii indecompozabile cu ajutorul functorilor $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ şi $\leftrightarrow$. Dacă se substituie componentelor indecompozabile ale unei expresii variabile propoziţionale, se obţin expresii ale calculului propoziţiilor, de ex. expresia $\forall x\, \forall y\, Rxy \vee \neg \forall x\, \forall y\, Rxy$ se transformă în tautologia $p \vee \neg p$. O expresie H se zice *universal valabilă în logica propoziţiilor* dacă expresia corespunzătoare din logica propoziţiilor este universal valabilă în cadrul calculului propoziţiilor. Dacă H este universal valabilă în logica propoziţiilor, ea va fi la fel în logica predicatelor. Totuşi există expresii universal valabile în logica predicatelor dar nu şi în logica propoziţiilor; un exemplu este: $\forall x Px \rightarrow \exists x Px$. Acesta este motivul pentru care în logica predicatelor apar metode de inferenţă care nu există în calculul propoziţiilor.

Definiţie. Fie S o mulţime de expresii în L_Σ. O Σ-structură $\mathbf{M}$ este un *model* al lui S dacă toate expresiile $A \in S$ sînt valabile în $\mathbf{M}$. Fie Mod S clasa tuturor modelelor lui S.

Fie $\Sigma = \{+, 0\}$ şi fie $S \subseteq L_\Sigma$ următoarea mulţime de expresii:

(1) $(x + y) + z = x + (y + z)$,

(2) $\forall x(x + 0 = x)$,

(3) $\forall x\, \exists y(x + y = 0)$,

(4) $\forall x\, \forall y(x + y = y + x)$.

Atunci o Σ-structură $\mathbf{M} = (M, +, 0)$ este un model al lui S dacă şi numai dacă $\mathbf{M}$ este un *grup abelian* şi Mod S este *clasa tuturor grupurilor abeliene*.

Două expresii H şi G se zic *semantic sau logic echivalente* dacă expresia $H \leftrightarrow G$ este universal valabilă.

Exemple de echivalenţe logice:

19. $\neg \exists x A(x) \equiv \forall x \neg A(x)$.

20. $\neg \forall x A(x) \equiv \exists x \neg A(x)$.

21. $\Theta x A(x) \equiv \Theta y A(y)$, dacă y nu apare în $A(x)$ şi nici x în $A(y)$ iar Θ este unul dintre cuantificatorii $\exists$ sau $\forall$.

22. $\forall x[A(x) \wedge B(x)] \equiv \forall x A(x) \wedge \forall x\, B(x)$.

23. $\exists x\, [A(x) \vee B(x)] \equiv \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$,

Expresiile de forma $\Theta_1 x_1 \dots \Theta_n x_n A(x_1, \dots, x_n)$, unde fiecare Θ_i este $\exists$ sau $\forall$ şi A este liber de cuantificatori, sînt de *forma prenex*.

Orice expresie este logic echivalentă cu o expresie în forma prenex de aceeaşi signatură şi cu aceleaşi variabile libere.

Exemple de transformare a unei expresii într-o formă prenex logic echivalentă.

24. $\forall x\, \forall y\, [x < y \rightarrow \exists\, z(x < z < y) \equiv \forall x\, \forall y\, \exists z(x < y \rightarrow x < z < y)$.

25. $\forall x\, \exists z\, \forall t Qxyz \rightarrow \forall y\, \exists z\, Ryz \equiv \forall u\, \exists v\, \exists x\, \forall y\, \exists z \sim (Qxyz \wedge Ruv)$.

Inferenţa matematică. Inferenţa matematică serveşte la obţinerea unor propoziţii adevărate noi din propoziţii adevărate date. Esenţa inferenţei matematice este noţiunea de *consecinţă*. Dacă S este o mulţime de propoziţii adevărate într-o structură **S** şi dacă propoziţia A poate fi dedusă din S, atunci A trebuie să fie adevărată în structura **S**.

Definiţia consecinţei. Dacă S este o mulţime de propoziţii ale unui limbaj elementar L_Σ şi dacă H este o expresie în L_Σ, atunci se zice că H rezultă din S, în simboluri $S \models H$ dacă orice model al lui S este şi model al lui H, adică dacă Mod $S \subseteq$ Mod H. *Mulţimea consecinţelor* lui S este $S^{\models} = \{H \in L_\Sigma;\ S \models H\}$.

De exemplu dacă S este următorul sistem de axiome:

$\forall x\ \forall y\ \forall z\ (x \cdot y) \cdot z = x(y \cdot z),\ \forall x\ \forall y\ x \cdot y = y \cdot x,\ \forall x \forall y \forall z\ (y \cdot x = z \cdot x \rightarrow y = z),$

atunci o propoziţie H rezultă din S dacă şi numai dacă H are loc în orice semigrup comutativ de anulare. De aceea o mulţime de consecinţe ale lui S conţine toate propoziţiile teoriei elementare ale clasei tuturor semigrupurilor comutative de anulare.

În inferenţa matematică nu se face întotdeauna apel la definiţia consecinţei ci se folosesc anumite *reguli de inferenţă*, care sînt *ereditare în raport cu consecinţele*, adică sînt valabile pentru procesul consecinţelor.

Exemple de reguli de inferenţă ereditare în raport cu consecinţele.

26. *Reguli de separare:*
$$\frac{S \Vdash H \qquad S \Vdash H \rightarrow G}{S \Vdash G}$$

27. *Reguli de derivare:*
$$\frac{S \cup \{A\} \Vdash B}{S \Vdash A \rightarrow B}$$

28. *Reguli de deducţie:*
$$\frac{S \Vdash A \rightarrow B}{S \cup \{A\} \Vdash B}$$

29. *Consecinţa indirect:*
$$\frac{S \cup \{A\} \Vdash B \qquad S \cup \{A\} \Vdash \neg B}{S \Vdash \neg A}$$

Pentru orice sistem R de reguli de inferenţă de acest tip se poate defini o *relaţie de deductibilitate*: „Expresia A este deductibilă, demonstrabilă din mulţimea S". O expresie A este deductibilă sau demonstrabilă din S cu ajutorul regulilor R dacă A poate fi obţinut din unele expresii iniţiale aparţinînd lui S prin aplicarea regulilor din R de un număr finit de ori. O demonstraţie sau o deducţie a lui A poate fi privită ca un şir finit de expresii $(F_1, \ldots, F_n, A)$ care se obţine succesiv din S prin aplicarea regulilor din R. Dacă mulţimea de reguli R şi mulţimea iniţială S sînt finite, atunci se poate întotdeauna decide într-un număr finit pe paşi dacă un şir finit de expresii este sau nu o demonstraţie.

Relaţia de consecinţă, care stă la baza oricărei inferenţe poate fi caracterizată printr-un sistem finit de reguli de inferenţă.

În conformitate cu acest fapt fundamental, în cele ce urmează un sistem de reguli de inferenţă va fi pe cît posibil adaptat procesului natural de deducţie. Pentru fiecare din functorii $\neg$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\exists$, $\forall$ se dau două reguli de inferenţă, una pentru *introducerea* lui şi alta pentru *înlăturarea* lui. *Relaţia de deductibilitate* stabilită prin aceste reguli de inferenţă se notează cu simbolul $\vdash$.

Definiţia sistemului de reguli de inferenţă

(0a) $\dfrac{A \in S}{S \vdash A}$ (0b) $\dfrac{S \vdash A,\ S \subseteq S'}{S' \vdash A}$

(1a) $\dfrac{S, A \vdash B}{S \vdash A \rightarrow B}$ (1b) $\dfrac{S \vdash A,\ A \rightarrow B}{S \vdash B}$

Regula (1a) corespunde teoremei de deducţie pentru consecinţe (vezi exemplul 28).

(2a) $\dfrac{S, A \vdash B, \neg B}{S \vdash \neg A}$ (2b) $\dfrac{S, \neg A \vdash B, \neg B}{S \vdash A}$

(3a) $\dfrac{S \vdash A,\ B}{S \vdash A \wedge B}$ (3b) $\dfrac{S \vdash A \wedge B}{S \vdash A,\ B}$

(4a) $\dfrac{S \vdash A}{S \vdash A \vee B, B \vee A}$ (4b) $\dfrac{S \vdash A \vee B, A \to C, B \to C}{S \vdash C}$

(5a) $\dfrac{S \vdash A \to B, B \to A}{S \vdash A \leftrightarrow B}$ (5b) $\dfrac{S \vdash A \leftrightarrow B}{S \vdash A \to B, B \to A}$

(6a) $\dfrac{S \vdash A(t)}{S \vdash \exists x A(x)}$ (6b) $\dfrac{S \vdash \exists x A(x), A(y) \to B}{S \vdash B}$

În (6a) t este un termen arbitrar, în (6b) y nu apare în B și nici în S.

(7a) $\dfrac{S \vdash A(y)}{S \vdash \forall x A(x)}$ (7b) $\dfrac{S \vdash \forall x A(x)}{S \vdash A(t)}$

În (7a) y nu apare în S.

(8a) $S \vdash t = t'$ (8b) $\dfrac{S \vdash A(t), t = t'}{S \vdash A(t')}$

În (8a) t și t' sînt termeni în limbajul L_Σ.

Toate aceste reguli sînt ereditare în raport cu consecințele, adică dacă $S \vdash A$, atunci $S \Vdash A$.

În afară de aceste reguli, inferența matematică mai folosește un număr de reguli care pot fi derivate din regulile date. De exemplu următoarele:

(1c) $\dfrac{S \vdash A \to B}{S, A \vdash B}$ (2c) $\dfrac{S \vdash \neg\neg A}{S \vdash A}$ (4c) $\dfrac{S \vdash A \vee B}{S, \neg A \vdash B}$

(6c) $\dfrac{S, A(x) \vdash B}{S, \exists x A(x) \vdash B}$ (x nu este liber în B și nici în S) (8c) $\dfrac{S \vdash A(t), t = t'}{S \vdash A(t)//t'}$

În (8c) $A(t//t')$ înseamnă că termenul nu trebuie neapărat înlocuit prin termenul t' în toate locurile unde apare în $A(t)$.

Pentru relația de deductibilitate are loc următoarea teoremă importantă.

Teorema de completitudine a relației de deductibilitate. Pentru orice mulțime S de formule din L_Σ și orice formulă $A \in L_\Sigma$ $S \Vdash A$ au loc dacă și numai dacă $S \vdash A$. În particular $\emptyset \Vdash A$ dacă și numai dacă $\emptyset \vdash A$, adică A este universal valabilă dacă și numai dacă A este deductibilă fără axiome, cu alte cuvinte, pentru mulțimea vidă.

Exemplul 30. O deducție strict formală a unei propoziții din teoria numerelor. Sensul expresiilor și consecințele corespunzătoare deducțiilor formale sînt trecute în paranteze drepte:

$$\forall x \neg \exists y\ x = 3 \cdot y \to \exists z\ x^2 - 1 = 3 \cdot z.$$

[Pentru orice întreg x, dacă x nu este divizibil cu 3, $x^2 - 1$ este divizibil cu 3].

Fie $B(x, z)$ o prescurtare pentru $x^2 - 1 = 3 \cdot z$. Ținînd seama de regula (7a) este suficient să se arate că $S \vdash \neg \exists y a = 3 \cdot y \to \exists z B(a, z)$.

[Este suficient să se demonstreze afirmația pentru un întreg a fixat dar arbitrar].

Datorită regulii (1a) este suficient să se arate că

$$S, \neg \exists y\ a = 3 \cdot y \vdash \exists z B(a, z)$$

[Presupunînd că a nu este divizibil cu 3, trebuie arătat că $a^2 - 1$ este divizibil cu 3.]

Se presupune știut că $S \vdash \exists x\ a = 3 \cdot x \vee \exists x\ a = 1 = 3 \cdot x \vee \exists x\ a - 1 = 3 \cdot x$. Din (4c) rezultă

$$S, \neg \exists x\ a = 3 \cdot x \vdash \exists x\ a + 1 = 3 \cdot x \vee \exists x\ a - 1 = 3 \cdot x.$$

[Dacă a nu este divizibil cu 3, nici $a + 1$ și nici $a - 1$ sînt nu divizibili cu 3.]

Datorită regulii (4a) este suficient să se arate că

(1) $S, \exists x\ a + 1 = 3 \cdot x \vdash \exists z B(a, z)$ și (2) $S, \exists x\ a - 1 = 3 \cdot x \vdash \exists z B(a, z)$.

[Se consideră două cazuri: (1) $a + 1$ este divizibil cu 3, (2) $a - 1$ este divizibil cu 3.]

Se va demonstra numai (1), argumente similare fiind valabile pentru (2). Din (6c) rezultă că este suficient de arătat că $S,\ a+1=3\cdot b \vdash \exists z\, B(a, z)$ şi din (6a) $S,\ a+1=3\cdot b \vdash B(a, t)$ pentru un anume termen t.

[Fie b unul din elementele x pentru care $a+1=3\cdot x$; este suficient să se indice un număr t pentru care $a^2-1=3\cdot t$.]

Dar $S \vdash (a+1)(a-1)=a^2-1$, deoarece prin aplicarea regulilor (8a), (8b) şi (8c),

$S,\ a+1=3\cdot b \vdash a^2-1=3\cdot b\cdot(a-1)$,

adică termenul $t=b\cdot(a-1)$ are proprietatea cerută.

15.3. Teorii formalizate

Formalizarea unei teorii se face în mai mulţi paşi. Înainte de toate trebuie delimitat domeniul de obiecte şi relaţiile corespunzătoare. La acest nivel, primele concepte matematice se obţin prin *abstractizarea situaţiilor reale*; de ex., conceptele geometriei fundamentale ca punctul şi dreapta au apărut prin abstractizarea realităţii. Al doilea pas *precizează conceptul de propoziţie* şi defineşte *interpretarea propoziţiilor pe domeniul în chestiune*. În sfîrşit, se dau *un sistem de axiome şi o relaţie de deductibilitate*. Un sistem de axiome trebuie să fie complet, adică trebuie să caracterizeze complet domeniul respectiv. Acest lucru înseamnă că orice propoziţie valabilă în acest domeniu trebuie să fie deductibilă din sistemul de axiome.

Majoritatea teoriilor matematice se referă la anumite clase de structură. Teoria unei *clase* $\boldsymbol{K}$ *de structuri* se poate identifica cu mulţimea propoziţiilor care sînt valabile în orice structură a acestei clase.

Definiţie. Relativ la o clasă $\boldsymbol{K}$ de Σ-structuri se defineşte teoria elementară $T(\boldsymbol{K})$ a acestei clase, prin $T(\boldsymbol{K}) = \{H \in L_\Sigma\colon \boldsymbol{K} \models H\}$; aici $\boldsymbol{K} \models H$ înseamnă că $\boldsymbol{A} \models H$ pentru orice structură $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{K}$, adică H este adevărat în $\boldsymbol{K}$.

$T(\boldsymbol{K})$ este teoria elementară a clasei $\boldsymbol{K}$ de structuri. O mulţime X de propoziţii este un sistem de axiome pentru o teorie T dacă $X^{\vdash}=T$ şi dacă X este decidabil, adică dacă pentru orice expresie $H \in L_\Sigma$ se poate decide într-un număr finit de paşi dacă $H \in X$ sau $H \notin X$.

Exemple de teorii formalizate elementare

31. Teoria cîmpurilor cu $\Sigma = \{+,\ \cdot,\ 0,\ 1\}$ este caracterizată prin următorul sistem de axiome:

$\forall x\, \forall y\, \forall z[x+(y+z)=(x+y)+z]$, $\quad \forall x[x+0=0+x=x]$,
$\forall x\, \exists y(x+y=0)$, $\quad \forall x\, \forall y(x+y=y+x)$,
$\forall x\, \forall y\, \forall z\,[(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)]$ $\quad \forall x\, \forall y(x\cdot y=y\cdot x)$,
$\forall x(x\cdot 1=x)$, $\quad \forall x[x \neq 0 \rightarrow \exists y(x\cdot y=1)]$,
$\forall x\, \forall y\, \forall z\,[(x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z]$,

32. Teoria mulţimilor liniar ordonate cu $\Sigma = \{<\}$ este caracterizată prin:

$\neg \exists x(x<x)$, $\quad \forall x\, \forall y\, \forall z(x<y \wedge y<z \rightarrow x<z)$.
$\forall x\, \forall y(x=y \vee x<y \vee y<x)$.

33. Teoria grupurilor cu $\Sigma = \{.,\ 1\}$ este caracterizată prin:

$\forall x\, \forall y\, \forall z\,[(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)]$, $\quad \forall x(x\cdot 1=x)$,
$\forall x\, \exists y(x\cdot y=1)$.

Definibilitatea în teoriile formalizate. În mod frecvent într-o teorie matematică T, pe lîngă simbolurile fundamentale date de alfabetul Σ, se mai definesc concepte noi, predicate şi operaţii. De exemplu în aritmetica numerelor naturale relaţia de divizibilitate $x\,|\,y$, „x divide pe y" poate fi definită astfel: $x|y =_{\mathrm{def}} \exists z(y=x\cdot z)$ sau relaţia $a<b$ ca $a<b =_{\mathrm{def}} \exists x(a+x=b)$. Astfel de definiţii explicite vor fi caracterizate ca propoziţii formale de un tip particular. Dacă

în acest exemplu se extinde alfabetul inițial al aritmeticii elementare $\Sigma = \{+, \cdot, 0, 1\}$ adăugînd simbolul predicatului binar $|$, atunci se poate adăuga la axiomele aritmeticii propoziția $\forall x \, \forall y \, [x \mid y \leftrightarrow \exists z(y = x \cdot z)$ care este definiția predicatului $x|y$. Tot prin definiție se mai pot introduce simboluri funcționale și individuale.

O definiție explicită a funcției F cu n argumente în teoria T are forma

$$\forall x_1, \dots \forall x_n \, \exists y \, [F x_1 \dots x_n = y \leftrightarrow A(x_1, \dots, x_n, y)],$$

unde se presupune că în T propozițiile

$$\forall x_1 \dots \forall x_n \; \exists y A(x_1, \dots, x_n, y) \text{ și } \forall x_1 \dots \forall x_n \; \forall y \forall z \; [A(x_1, \dots, x_n, y) \wedge A(x_1, \dots, x_n, z) \to$$
$$\to y = z]$$ sînt deductibile.

Definiție. Dacă într-o teorie elementară T cu alfabetul Σ o relație R este un element al lui Σ și dacă $\Sigma' \subseteq \Sigma \setminus \{R\}$ este o submulțime a lui Σ, atunci relația R se zice explicit definibilă în T, dacă există o definiție pentru R deductibilă în T a cărei expresie de definiție să conțină numai simboluri din Σ.

Dacă într-o teorie T o relație R este explicit definibilă cu ajutorul celorlalte relații, atunci orice expresie poate fi transformată echivalent în T într-o expresie care nu conține simbolul R. În consecință relațiile definibile sînt neesențiale. Dar din punct de vedere metodologic căutarea unor definiții potrivite este la fel de importantă ca și căutarea unei demonstrații.

Dacă un predicat R este definibil într-o teorie T cu ajutorul predicatelor $Q_1, \dots, Q_n$, atunci în orice model al lui T interpretarea lui R este unic determinată prin interpretarea predicatelor Q_i. Astfel, este valabil următorul principiu:

Principiul lui Padoa. Faptul că un predicat R nu poate fi definit într-o teorie T prin predicatele $Q_1, \dots, Q_n$ se poate stabili indicînd două modele **M** *și* **M'** *care diferă numai în ce privește sensul lui R.*

Definițiile axiomatice sînt de diferite tipuri. Scopul lor este construirea unui concept sau a unei relații a unui domeniu de obiecte, axiomatic, adică, caracterizarea acestora cu ajutorul unei mulțimi de propoziții. Pentru o clasă $\boldsymbol{K}$ de structuri aceasta înseamnă stabilirea unui sistem de axiome pentru teoria elementară a lui $\boldsymbol{K}$.

15.4. Algoritmi și funcții recursive

În cadrul matematicii și logicii, algoritmii apar ca metode generale pentru rezolvarea tuturor problemelor dintr-o clasă dată. Scopul lor este descrierea proceselor într-un mod care permite apoi imitarea și stăpînirea lor de calculator. Ca exemple de procese algoritmice sînt inferența logică și unele procese de calcul din matematică, în particular, metode de rezolvare pentru diferite tipuri de ecuații.

O trăsătură caracteristică a unui *algoritm* este aceea că el transformă cantități date (datele de intrare) în alte cantități (date de ieșire) pe baza unui sistem de *reguli de transformare*. Are sens să vorbim însă de un algoritm numai dacă sînt satisfăcute unele condiții suplimentare:

(1) *Sistemul de cantități* care se transformă în altul (sistemul datelor de intrare) trebuie *să fie efectiv dat*.

2) Algoritmul poate fi descris printr-o *mulțime finită de reguli* deoarece nici un calculator nu poate reține o infinitate de reguli.

(3) Transformarea cantităților, modul de lucru al algoritmului se face sub forma unor *unități de lucru mecanice*, fiecare unitate constînd în aplicarea uneia din regulile date.

În perioada 1931—1947 s-au dezvoltat în cadrul logicii matematice un număr de concepte de „algoritm" bine delimitate, care precizează noțiunea intuitivă. Cele mai importante sînt *rezolvarea ecuațiilor* (J. HERBRAND, K. GÖDEL, S. C. KLEENE, aproximativ în perioada 1931—1936), mașina lui Turing (A. M. TURING, 1936), λ-calculul (A. CHURCH, 1936) și conceptele algoritmice ale lui E. L. POST (1936) și A. A. MARKOV (1947).

Semnificativ este faptul că toate aceste noțiuni sînt echivalente în sensul că aceleași funcții definite pe domeniul numerelor naturale, așa numitele *funcții recursive* pot fi calculate prin

fiecare dintre ele. Pe baza acestei echivalenţe se poate adopta punctul de vedere prin care conceptul intuitiv de algoritm cîştigă astfel precizie. Acest punct de vedere a fost formulat în 1936 de către CHURCH şi este cunoscut în literatura matematică ca *ipoteza lui Church.*

O funcţie f definită pe mulţimea numerelor naturale se zice *calculabilă* dacă există un algoritm prin care $f(n)$ se poate găsi pentru orice valoare n a argumentului.

Exemple de funcţii calculabile

34. Fie $f(x)$ al x-lea *număr prim.* Aici se poate folosi pentru calcularea funcţiei, metoda ciurului lui Eratostene (vezi cap. 1).

35. Fie $f(x, y)$ *cel mai mare divizor comun* al lui x şi y. Această funcţie se poate calcula cu ajutorul algoritmului lui Euclid (vezi cap. 1).

36. Fie $f(x)$ a x-a zecimală din reprezentarea lui $\pi = 3,14159 \ldots$ Aici pentru calcularea funcţiei poate fi folosită o reprezentare în serie a lui π (vezi cap. 21).

Clasa funcţiilor recursive apare din precizarea conceptului intuitiv de funcţie calculabilă. Unele *funcţii iniţiale* ce pot fi imediat calculabile se numesc recursive şi se specifică unele reguli cu ajutorul cărora se pot genera noi funcţii recursive din cele date. Regulile sînt astfel încît pentru orice funcţie nouă se poate dintr-o dată indica un algoritm pentru calcularea valorilor funcţiei, dacă există astfel de algoritmi pentru funcţiile recursive date.

A. Funcţii iniţiale

(1) *Funcţiile identitate* $I_n^m (1 \leqslant m \leqslant n)$ sînt definite de ecuaţiile $I_n^m (x, \ldots, x_n) = x_m$;

(2) *funcţiile constante* F_c^m sînt definite prin ecuaţiile $F_c^m(x_1, \ldots, x_n) = c$, în care c este un număr natural fixat;

(3) *funcţia succesor* este definită prin $f(x) = x + 1$.

B. Reguli de generare pentru funcţii

(1) *Substituirea funcţiilor.* Dacă f este o funcţie de k argumente şi $g_1, \ldots, g_k$ sînt funcţii de n argumente, atunci $g(x_1, \ldots, x_n) = f[g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n)]$ determină o funcţie de n argumente.

(2) *Recursivitatea primitivă.* Dacă h este o funcţie cu $k + 1$ argumente şi g o funcţie cu $k - 1$ argumente, atunci următorul sistem de ecuaţii determină o funcţie unică cu k argumente:

$$f(x_1, \ldots, x_{k-1}, 0) = g(x_1, \ldots, x_{k-1}),$$
$$f(x_1, \ldots, x_{k-1}, y + 1) = h[x_1, \ldots, x_{k-1}, y, f(x_1, \ldots, x_{k-1}, y)].$$

Existenţa şi unicitatea acestor funcţii este garantată prin teorema de justificare a lui Dedekind (vezi cap. 3).

(3) *Formarea minimului.* Dacă f este o funcţie cu $k + 1$ argumente astfel încît pentru orice k-uplu $(x_1, \ldots, x_k)$ de numere naturale există un număr y cu $f(x_1, \ldots, x_k, y) = 0$, atunci se determină o nouă funcţie g din condiţia: $g(x, \ldots, x_k)$ este cel mai mic y pentru care $f(x_1, \ldots, x_k, y) = 0$.

O funcţie definită pe domeniul numerelor naturale se zice recursivă dacă este iniţială sau dacă poate fi generată dintr-o funcţie iniţială într-un număr finit de paşi prin aplicarea regulilor stabilite. Dacă se admit numai regulile $B(1)$ şi $B(2)$, atunci clasa de funcţii care rezultă conţine numai aşa-numitele *funcţii recursive primitive.*

Exemple de funcţii recursive primitive

37. *Şirul numerelor lui Fibonacci:* $f(0) = 1$, $f(1) = 1$, $f(x + 2) = f(x + 1) + f(x)$.

38. Funcţia $f(x, y) = x + y$ se obţine prin recurenţ ăprimitivă din funcţia recursivă primitivă $h(x, y, z) = z + 1$ şi $I_1^1(x) = x$:

$$x + 0 = I_1^1(x) = x, \quad x + (y + 1) = h(x, y, x + y).$$

39. Funcţia $g(x, y) = x \cdot y$ rezultă prin recurenţă primitivă din funcţia recursivă primitivă $h'(x, y, z) = x + z$ şi $C_0(x) = 0$:

$$g(x, 0) = x \cdot 0 = C_0(x) = 0, \; g(x, y + 1) = h'(x, y, x \cdot y).$$

40. Funcţia $e(x, y) = x^y$ rezultă prin recurenţă primitivă din funcţia recursivă primitivă $h''(x, y, z) = x \cdot z$, $C_1(x) = 1$:

$$e(x, 0) = C_1(x) = 1, \; e(x, y + 1) = h''[x, y, e(x, y)].$$

Pe baza echivalenţei dintre diferitele concepte de algoritm se poate presupune că clasa funcţiilor calculabile coincide cu clasa funcţiilor recursive.

Ipoteza lui Church. O funcţie definită pe domeniul numerelor naturale este calculabilă dacă şi numai dacă este recursivă.

Problema deciziei. Precizarea conceptului de algoritm a constituit un pas preliminar necesar în găsirea răspunsului la problema privind posibilitatea rezolvării prin algoritmi a anumitor probleme. Astfel de probleme au apărut încă din Evul mediu. De exemplu, în jurul anului 1300 Raymundus LULLUS a dezvoltat ideea unei *Ars magna* prin care înţelegea o metodă generală de găsire a tuturor adevărurilor posibile. Aceste idei au atins o culme atunci cînd LEIBNIZ (1646—1716) a recunoscut că de fapt conceptul unei Ars magna conţine două concepte şi anume pe acela de *Ars indicandi*, o *metodă de decizie* şi acela de *Ars inveniendi*, o *metodă de generare şi axiomatizare*. După LEIBNIZ aceste idei nu au mai fost dezvoltate. Unul din motivele acestei stagnări era lipsa tehnicilor de formalizare şi de interpretare din logica matematică, absolut necesare în astfel de investigaţii.

Dar cu ajutorul funcţiilor recursive se poate indica o versiune precisă a metodei de decizie şi generare. Aceste concepte se definesc mai întîi pentru mulţimea numerelor naturale.

Definiţia metodei de decizie şi generare

(1) O mulţime S de numere naturale este *recursiv numărabilă* dacă şi numai dacă există o funcţie recursivă f pentru care domeniul valorilor coincide cu S. Această funcţie furnizează evident o *metodă de generare* pentru mulţimea S.

(2) O mulţime S de numere naturale este *decidabilă* dacă şi numai dacă funcţia caracteristică f_S a lui S este recursivă; aici funcţia f_S este definită prin:

$$f_S(n) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } n \in S, \\ 0 & \text{pentru } n \notin S. \end{cases}$$

Dacă f_S este recursivă, atunci se poate decide dacă un număr natural n este un element al lui S sau nu.

Mulţimea tuturor numerelor pare este decidabilă.
Mulţimea tuturor numerelor lui Fibonacci este decidabilă.
Mulţimea tuturor numerelor prime este decidabilă.

Conceptul originar nerestrictiv de algoritm nu se referă numai la numere naturale, dar şi la obiecte mai generale, de ex. algoritmul pentru derivarea polinoamelor.

Algoritmii nenumerici pot fi reduşi la funcţii recursive şi la mulţimi recursive de numere naturale.

Fie K clasa datelor de intrare şi de ieşire nenumerice; se presupune că s-a fixat o aplicaţie biunivocă a acestei clase în clasa numerelor naturale. Această aplicaţie numită *codificare* se presupune aleasă astfel încît

(1) este ea însăşi dată printr-un algoritm; (2) există un algoritmi prin care se poate decide dacă un număr este imaginea unui obiect nenumeric în K şi dacă este aşa, se poate construi acest obiect;

(3) o astfel de codificare se folosește numai dacă există un algoritm — pentru clasa nenumerică $\boldsymbol{K}$.

La identificarea obiectelor unei clase nenumerice cu numerele lor de cod, problemele de decizie pentru subclase ale lui $\boldsymbol{K}$ se pot reduce la probleme de decizie pentru mulțimi de numere naturale.

De o importanță specială sînt problemele de decizie și axiomatizare pentru teoriile matematice, în special pentru teoriile elementare. În studiul acestor probleme, se pornește de la o codificare Φ care atribuie un număr natural oricărui șir de simboluri luate din mulțimea

$$A = \sum \cup \{\neg, \wedge, \vee \rightarrow, \leftrightarrow, \exists, \forall, x_1, x_2, \ldots\}$$

a unui limbaj elementar. Astfel de codificări sînt ușor de găsit.

Definiția decidabilității și axiomatizabilității unei teorii elementare. Fie Φ o codificare a șirului de simboluri luate dintr-un limbaj elementar L_Σ. O teorie elementară $T \subseteq L_\Sigma$ este *decidabilă* dacă și numai dacă mulțimea $\Phi(T^{\vdash})$ este *recursivă*. T este *axiomatizabilă* dacă și numai dacă există o mulțime decidabilă $S \subseteq L_\Sigma$ astfel încît $S^{\vdash} = T^{\vdash}$.

Prin aceste definiții încercarea medievală de a crea o Ars magna a căpătat un sens precis. Primele rezultate importante în acest domeniu sînt datorate lui GÖDEL. El a demonstrat în 1930 că expresiile universal valabile ale unui limbaj elementar sînt axiomatizabile, cu alte cuvinte, pot fi generate în sensul lui *Ars inveniendi*. În această ordine de idei GÖDEL a obținut chiar un rezultat mai important arătînd că teoria elementară a numerelor nu este axiomatizabilă, adică nu există nici un algoritm care să reproducă cu precizie propozițiile care sînt valabile în domeniul numerelor naturale $\mathbf{N} = (\mathrm{N}, +, \cdot, 0, 1)$. Desigur o astfel de demonstrație se poate da numai dacă există o definiție generală a conceptului de algoritm. GÖDEL și-a bazat demonstrația pe conceptul de funcție recursivă și a dat concomitent un exemplu de problemă nerezolvabilă algoritmic.

De atunci s-a demonstrat că un număr de alte teorii elementare sînt nedecidabile.

Teoria elementară a grupurilor este nedecidabilă.
Teoria elementară a corpului este nedecidabilă.
Dacă alfabetul Σ conține un simbol relație n-ar cu $n \geqslant 2$, atunci mulțimea P_Σ a expresiilor logic valabile este nedecidabilă.

În 1970 s-a dat un răspuns negativ la o problemă celebră. Este vorba de a zecea problemă a lui Hilbert, pe care a propus-o în 1900 la Primul Congres Internațional al Matematicienilor ținut la Paris și care se enunță astfel: există un algoritm universal pentru rezolvarea ecuației diofantice arbitrare?

Există însă și teorii decidabile.

Teoria elementară a corpului numerelor reale este decidabilă.
Teoria elementară a geometriei euclidiene este decidabilă.
Teoria elementară a grupurilor abeliene este decidabilă.

Recunoașterea limitelor și a sferei de acțiune a metodei axiomatice trebuie privită ca unul din cele mai importante rezultate ale cercetărilor în domeniul fundamentelor matematicii.

16. Grupuri și corpuri

16.1. Grupuri și semigrupuri

Grupuri

Mulțimi de elemente sau obiecte pentru care oricare două dintre acestea se pot combina după o regulă specificată și într-o anumită ordine, astfel încît să se obțină un al treilea element, apar în mod frecvent în toate ramurile matematicii.

O *operație* pe o mulțime S este o aplicație care asociază fiecărei perechi ordonate (a, b) de elemente din S un al treilea element c al mulțimii.
Operațiile se scriu de regulă sub formă multiplicativă sau aditivă. Se scrie $c = a \cdot b$ sau $c = a + b$ și se numesc produsul, respectiv suma elementelor a și b.

Exemple. Adunarea și înmulțirea obișnuită sînt operații pe mulțimile de numere între raționale, reale sau complexe. Înmulțirea matricelor este o operație pe mulțimea tuturor matricelor $(n \times n)$, pe mulțimea matricelor $(n \times n)$ cu determinant diferit de zero și pe mulțimea matricelor $(n \times n)$ al căror determinant este 1.
Se poate defini o operație pe mulțimea permutărilor unui număr fixat de obiecte. Această operație se obține efectuînd cele două permutări în ordine succesivă (acesta este cazul special de compunere a aplicațiilor). Pentru permutările

$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ și $p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ produsul este $p_1 \cdot p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Formarea acestui produs se poate vedea mai clar din următoarea schemă:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Astfel, produsul a două permutări de același număr de obiecte este tot o permutare a acelorași obiecte.

O permutare $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & r & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_r & \dots & i_n \end{pmatrix}$ de n obiecte poate fi întotdeauna scrisă ca un produs de *cicluri*. Elementul i_r care îl urmează pe r trebuie să apară el însuși în linia superioară și este urmat apoi de imaginea lui i'_r. Pasul următor dă un alt element i''_r ș.a.m.d. Acest proces se termină după un număr finit de pași, atunci cînd se ajunge din nou la elementul r. Un ciclu poate avea cel mult n elemente. Dacă nu conține toate elementele, se începe un nou ciclu; dacă $i_r = r$, ciclul se scrie (r) dar în mod obișnuit se omite din produs.

De exemplu permutările $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 7 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 5 & 1 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ se pot scrie $A = (1\ 2\ 4\ 7\ 3)\ (5, 6)$ și $B = (1\ 7\ 6\ 4)\ (2\ 3\ 5)$. Produsul lor este $AB = C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 7 & 6 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} =$
$= (1\ 3\ 7\ 5\ 4\ 6\ 2)$ și

$$BA = D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 6 & 2 & 4 & 7 & 5 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 6\ 7\ 5\ 4\ 2).$$

Exemplele precedente nu sînt toate de același fel. Unele dintre ele se referă la mulțimi finite și altele la mulțimi infinite. Examinîndu-se mai de aproape, operațiile introduse mai prezintă și alte deosebiri. O operație pe o mulțime se zice *asociativă* dacă oricare ar fi elementele a, b și c ale lui S, $(ab)\,c = a(b\,c)$ (dacă operația se scrie sub forma unei înmulțiri) și $(a + b) + c) = a + (b + c)$ (dacă operația este scrisă aditiv). Operația se zice *comutativă* dacă pentru orice pereche de elemente există $ab = ba$, respectiv $a + b = b + a$. Se poate verifica ușor că înmulțirea matricelor și a permutărilor sînt operații asociative. Înmulțirea și adunarea numerelor sînt asociative și comutative. Înmulțirea pentru permutări și matrice nu este însă comutativă, ceea ce rezultă din exemplul de mai sus: $AB \neq BA$.

Un element e al unei mulțimi S este *element neutru* al unei operații dacă pentru orice a din S, operația aplicată lui e și a are ca rezultat pe a. Dacă operația se scrie ca înmulțire, e se numește element unitate și $ea = ae = a$. De ex. permutarea $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ este *element unitate* în mulțimea permutărilor de patru obiecte iar matricea $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ este element unitate al mulțimii matricelor (2×2). Același lucru pentru numărul 1 în mulțimea numerelor întregi, raționale, reale sau complexe. Dacă S este o mulțime cu o operație scrisă multiplicativ și cu elementul unitate e, atunci un element $a' \in S$ se numește invers al elementului $a \in S$ dacă $a'a = aa' = e$. Elementul a' se notează cu a^{-1}, de ex. inversa permutării $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ este $p^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; în notație ciclică $p = (1\ 2\ 4)$ și $p^{-1} = (1\ 4\ 2)$.

Printr-un proces de abstractizare din numeroase exemple se obține conceptul de grup.

O mulțime G se numește grup dacă sînt satisfăcute următoarele patru condiții:
I. Pe G este definită o operație (multiplicativă).
II. Operația este asociativă.
III. Mulțimea G are un element unitate e.
IV. Orice element a din G are un invers a^{-1} în G.

Folosind (II), este ușor de arătat că elementul unitate e (III) și elementul invers a^{-1} (IV) sînt unic determinate.

Dacă operația este și comutativă, grupul se numește *comutativ* sau *abelian* după N. H. ABEL (1802 – 1829).

Folosirea notației multiplicative pentru operația de grup este pur și simplu o convenție. Tot așa de bine se poate folosi și notația aditivă. În acest caz elementul unitate se numește *element nul* sau zero și elementul invers se numește *element opus*.. De regulă, notația aditivă se folosește pentru grupurile abeliene.

Un grup este *finit* sau *infinit* după cum mulțimea de elemente aflată la baza lui este finită sau infinită. Numărul elementelor unui grup este *ordinul* grupului. Pentru grupuri finite se poate da tabela de înmulțire a operației de grup. Exemple de astfel de tabele sînt date în paragraful privind subgrupurile.

Exemple de grupuri. Numerele întregi, raționale, reale și complexe formează grupuri abeliene infinite cu operația de grup, adunarea. Numerele raționale, reale și complexe, nenule formează grupuri infinite abeliene în raport cu operația de înmulțire (pentru a evita confuziile în aceste grupuri, operația se scrie multiplicativ, cu toate că sînt abeliene).

Matricele $n \times n$ cu determinant nenul și cele cu determinant egal cu 1 formează grupuri infinite neabeliene pentru operația de înmulțire a matricelor. Primul se numește grup *liniar general* GL(n) și al doilea grup *liniar special* SL(n).

Grupuri de permutări. Permutările de un număr fix n de obiecte formează un grup finit cu operația de înmulțire definită ca mai sus, *grupul simetric* S_n. Ordinul acestui grup este $n!$. Pentru $n \geqslant 3$ acest grup nu este abelian.

Dacă $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots n \\ i_1 & i_2 \ldots i_n \end{pmatrix}$ este o permutare, atunci numărul *inversiunilor* indică de cîte ori un număr mai mare apare înaintea unuia mai mic în șirul $i_1, i_2, \ldots, i_n$. Dacă numărul inversiunilor este par, permutarea se zice pară și în caz contrar impară.

Exemplul 1. Permutarea $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ are 6 inversiuni: 4 apare înaintea lui 3, 2 și 1, 3 înaintea lui 2 și 1, iar 5 înaintea lui 2.

S_n conține $n!/2$ permutări pare și $n!/2$ permutări impare.

Produsul a două permutări pare este par. Produsul a două permutări impare este tot par. Produsul dintre o permutare impară și una pară este o permutare impară.

Pe baza acestui fapt se introduce un semn al permutărilor: sgn $p = +1$ dacă p este pară și sgn $p = -1$ dacă p este impară. Rezultă că semnul produsului a două permutări este produsul semnelor acestora. Se poate vedea ușor acum că deoarece permutarea identică este pară, inversa unei permutări este tot pară. Astfel, permutările pare formează un grup de ordinul $n!/2$, numit *grupul alternant* A_n.

Subgrupuri. O submulțime H a unui grup G se numește subgrup dacă H formează grup pentru operația de grup din G. Toate grupurile cu un element se numesc *triviale* și toate subgrupurile unui grup G diferite de G se numesc *proprii*.

Unele dintre grupurile menționate în introducere sînt subgrupuri ale altora. Astfel, grupul aditiv al numerelor întregi este un subgrup al grupului aditiv al numerelor raționale și acesta la rîndul său este un subgrup al grupului aditiv al numerelor reale. Grupul multiplicativ al numerelor raționale nenule este un subgrup al grupului multiplicativ al numerelor reale nenule. Grupul alternant A_n este un subgrup al grupului simetric S_n. Grupul liniar special SL(n) este un subgrup al grupului general liniar GL(n). Propoziția următoare rezultă imediat din definiția subgrupului:

Intersecția unei familii de subgrupuri este un subgrup.

Dacă a este un element al unui grup G, există subgrupuri care conțin aceste elemente, de exemplu G. Intersecția tuturor acestor subgrupuri va conține de asemenea pe a și deci va fi cel mai mic subgrup care îl conține pe a, denumit subgrup ciclic generat de a și notat prin $\langle a \rangle$. Evident, $\langle a \rangle$ se compune din toate puterile a^n; $n \gtreqless 0$ (puterile negative sînt puteri ale inversului iar puterile sînt ca de obicei produse ale elementului cu el însuși). Dacă toate puterile a^n sînt distincte, atunci $\langle a \rangle$ se zice *grup ciclic infinit*. Altfel există un întreg n care este cel mai mic întreg pentru care $a^n = e$ și $\langle a \rangle$ se zice *grup ciclic de ordinul n*: $\langle a \rangle$ se compune din elementele $e, a, \ldots, a^{n-1} = a^{-1}, a^{n-1} = a$ etc. Un grup care coincide cu unul dintre subgrupurile lui ciclice se zice *ciclic*. Reuniunea, $U_1 \cup U_2$ a două subgrupuri ale unui grup, în sensul teoriei mulțimilor, nu este în general tot un subgrup. Reuniunea este numai o submulțime a lui G. Dar pentru orice submulțime S a lui G se poate defini *subgrupul* $\langle S \rangle$ *generat* de S, ca *intersecția* tuturor subgrupurilor care îl conțin pe S. Subgrupul $\langle U_1, U_2 \rangle$ este atunci cel mai mic subgrup care conține pe U_1 și U_2. Dacă $\langle S \rangle = G$ pentru o submulțime S a lui G, atunci G este *generat de S*.

Exemplul 2. Elementele lui S_3 în notație ciclică sînt $p_1 = (1)$, $p_2 = (1\ 2\ 3)$, $p_3 = (1\ 3\ 2)$, $p_4 = (1\ 2)$, $p_5 = (1\ 3)$ și $p_6 = (2\ 3)$. Tabela grupului este:

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
p_1	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
p_2	p_2	p_3	p_1	p_6	p_4	p_5
p_3	p_3	p_1	p_2	p_5	p_6	p_4
p_4	p_4	p_5	p_6	p_1	p_2	p_3
p_5	p_5	p_6	p_4	p_3	p_1	p_2
p_6	p_6	p_4	p_5	p_2	p_3	p_1

Folosind această tabelă, se poate verifica ușor că mulțimile $A = \{p_1, p_4\}$, $B = \{p_1, p_5\}$, $C = \{p_1, p_6\}$ și $D = \{p_1, p_2, p_3\}$ sînt subgrupuri ale lui S_3. Apoi $A = \langle p_4 \rangle$, $B = \langle p_5 \rangle$, $C = \langle p_6 \rangle$ sînt grupuri ciclice de ordinul 2 iar $D = \langle p_2 \rangle = \langle p_3 \rangle$ sînt ciclice de ordinul 3. Reuniunea lui A și D nu este subgrup, deoarece atunci $p_5 = p_3 p_4$ ar fi în $\{p_1, p_4\} \cup \{p_1, p_2, p_3\}$, ceea ce evident nu este cazul. Grupul generat de reuniune este întregul grup S_3.

Homomorfisme

Homomorfism. Conceptul de homomorfism ocupă o poziţie centrală în teoria grupurilor.

> *O aplicaţie f a unui grup G într-un grup G' se numeşte homomorfism dacă pentru orice elemente a, $b \in G$ are loc relaţia* (H) $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$.

Aici produsul din stînga se ia în G iar cel din dreapta în G'. Imaginea lui G prin f este un subgrup al lui G'. Dacă există un homomorfism surjectiv al lui G pe G', adică dacă orice element al lui G' apare ca imagine prin aplicaţia f, atunci G' este o *imagine homomorfă* a lui G. Este posibil ca printr-un homomorfism, elemente distincte ale lui G să se aplice pe *acelaşi element* al lui G'. Nu se cere ca homomorfismele să fie injective.

Exemplul 1. Fie G grupul matricelor reale (2×2) cu determinant nenul şi G' grupul multiplicativ al numerelor reale diferite de zero. Aplicaţia prin care fiecărei matrice i se pune în corespondenţă determinantul ei satisface condiţia (H) şi deci este un homomorfism. În plus acest homomorfism este surjectiv, deoarece orice număr real r este determinantul matricei $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (ad - bc)$$

Exemplul 2. Aplicaţia prin care fiecărei permutări $p \in S_n$ îi corespunde semnul ei sgn p este un homomorfism al lui S_n în grupul multiplicativ al numerelor reale: $\operatorname{sgn}(p_1 \cdot p_2) = \operatorname{sgn} p_1 \cdot \operatorname{sgn} p_2$. Imaginea lui este subgrupul constituit de numerele $+1$ şi -1.

Condiţia (H) înseamnă că într-un anumit sens homomorfismul trebuie să păstreze structura grupului original. Imaginea este în general „mai mică" decît grupul original. De exemplu, toate matricele de forma $\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \mu c & \mu d \end{pmatrix}$, unde λ şi μ sînt numere cu $\lambda\mu = 1$, au acelaşi determinant ca matricea $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Mulţimea elementelor din G aplicate pe elementul unitate al imaginii este o măsură a restrîngerii lui G. Aceste elemente formează un tip special de subgrup al grupului original numit *nucleu* al homomorfismului. Nucleul homomorfismului în exemplul 1 este grupul liniar special SL(2) al matricelor 2×2, şi nucleul homomorfismului în exemplul 2 este grupul alternant A_n al permutărilor pare din S_n.

Izomorfisme

> *Un homomorfism bijectiv se numeşte izomorfism.*

Dacă f este un izomorfism al lui G pe G', atunci imaginea lui este G' şi nucleul lui este subgrupul unitate al lui G. Se poate arăta că aceste condiţii sînt suficiente pentru ca f să fie un izomorfism. Imaginea inversă de la G' la G satisface de asemenea (H) şi astfel este la rîndul ei un izomorfism. Dacă există un izomorfism de la G la G', atunci grupurile se zic *izomorfe*, simbolic $G \cong G'$.

Exemplul 3. Fie V_4 *grupul lui Klein* format din permutările $e = (1)$, $a = (1, 2), (3\ 4)$, $b = (1\ 3)(2\ 4)$ şi $c = (1\ 4)\ (2\ 3)$. Fie G grupul alcătuit din matricele $e' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $b' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $c' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Se defineşte aplicaţia bijectivă f:

$$e \text{ — } e', \quad a \text{ — } a', \quad b \text{ — } b', \quad c \text{ — } c'$$

V_4	e	a	b	c	G	e'	a'	b'	c'
e	e	a	b	c	e'	e'	a'	b'	c'
a	a	e	c	b	a'	a'	e'	c'	b'
b	b	c	e	a	b'	b'	c'	e'	a'
c	c	b	a	e	c'	c'	b'	a'	e'

Din tabela grupurilor V_4 şi G se poate citi că relaţia (H) este satisfăcută pentru orice elemente ale lui V_4. Astfel V_4 este izomorf cu grupul G de matrice.

După cum se vede din exemplu, grupurile izomorfe au structuri identice, chiar dacă elementele lor sînt de natură complet diferită, în cazul de față permutări și matrice. Homomorfismele și izomorfismele nu se limitează la grupuri finite. Grupurile izomorfe au întotdeauna același număr cardinal.

Exemplul 4. Fie $R^{\times}$ grupul multiplicativ al numerelor reale pozitive și R^{+} grupul aditiv al tuturor numerelor reale. Aplicația $f: a \to \ln a$ care transformă orice număr real pozitiv în logaritmul său natural este un izomorfism al celor două grupuri; se știe că $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$, cu alte cuvinte $f(a \cdot b) = f(a) + f(b)$ astfel încît $R^{\times} \cong R^{+}$.

Izomorfismul este o *relație de echivalență* între grupuri astfel încît, clasa tuturor grupurilor se împarte în clase de izomorfism. Un *grup abstract* reprezintă o clasă de izomorfism abstracție făcînd de reprezentarea particulară a acesteia.

Grupurile izomorfe au aceeași structură și calculele urmează aceleași legi și reguli chiar dacă elementele sînt de naturi diferite și operațiile definite în moduri diferite.

Subgrupuri normale. S-a menționat mai înainte că nucleele homomorfismelor formează un tip de subgrup. Un subgrup N care apare ca nucleu al unui homomorfism al unui grup G într-un alt grup se numește *normal*. Astfel în exemplul 1, grupul liniar special este un subgrup normal al grupului liniar general. În exemplul 2 grupul alternant este un subgrup normal al grupului simetric. Un grup care admite ca subgrupuri normale întregul grup și subgrupul trivial (acestea sînt întotdeauna normale) se numește *simplu*. Un homomorfism al unui grup simplu G pe un grup H sau este un izomorfism sau H este trivial. Următorul rezultat privind grupurile de transformări va fi menționat aici deoarece are implicații în *teoria lui Galois*.

Pentru $n > 4$ grupul atlernant A_n este unicul subgrup netrivial al lui S_n. Pentru $n > 4$ grupul atltemant A_n este simplu.

Un subgrup normal **propriu** M **al** lui G se zice *maximal* dacă pentru orice subgrup normal N al lui G cu $M \subseteq N \subseteq G$ sau $M = N$ **sau** $N = G$. Grupul lui Klein V_4 este un subgrup normal maximal al lui A_4.

Grupuri factor. Dacă S este o submulțime a unui grup G și a este un element al lui G, mulțimea aS este definită ca $\{as|s \in G\}$. O definiție similară se dă pentru înmulțirea la dreapta. Dacă H este un subgrup al lui G, mulțimile aH pentru $a \in G$ se numesc *clase alăturate* ale lui H în G. Este ușor de văzut că ele formează o partiție a lui G. Aceeași definiție se poate da pentru clasele alăturate *la dreapta* care la rîndul lor formează o partiție a lui G. În general aceste două partiții nu sînt aceleași. Dacă f este un homomorfism al lui G cu nucleul N, atunci N are proprietatea remarcabilă că pentru orice a din G clasele alăturate aN și Na sînt identice deoarece amîndouă se compun din exact acele elemente ale lui G care se aplică prin homomorfismul f pe același element a. Această proprietate, deosebit de importantă, are o denumire specială.

Un subgrup $\bar{N}$ al lui G pentru care $a\bar{N} = \bar{N}a$ pentru crice element a din G se numește invariant. Condiția este echivalentă cu $a\bar{N}a^{-1} = \bar{N}$ pentru orice a în G.

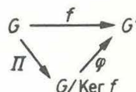
Deoarece clasele alăturate la stînga și cele la dreapta ale subgrupurilor invariante sînt egale, cuvintele drept și stîng se pot omite. Deoarece ele formează o partiție, două clase alăturate sînt sau egale sau nu au elemente comune. Generalizînd acum operația de înmulțire pentru submulțimi ale unui grup, se definește produsul pentru submulțimile S și T prin $ST = \{st|s \in S$ și $t \in T\}$. Atunci pentru subgrupurile H ale lui G este valabilă relația $H \cdot H = H$. Pentru subgrupuri invariante $\bar{N}$ se poate merge chiar mai departe. Dacă $a\bar{N}$ și $b\bar{N}$ sînt două clase alăturate atunci $(a\bar{N})(b\bar{N}) = (a\bar{N})(\bar{N}b) = a((\bar{N}\bar{N})b) = a(\bar{N}b) = a(b\bar{N}) = (ab)\bar{N}$. Astfel produsul a două clase alăturate ale unui subgrup invariant este clasă alăturată și conține produsul elementelor celor două clase alăturate. Se poate verifica acum că clasele alăturate ale unui grup invariant $\bar{N}$ formează un grup pentru înmulțirea astfel introdusă, în care elementul unitate este $e\bar{N} = \bar{N}$ și în care inversa lui $a\bar{N}$ este $a^{-1}\bar{N}$. Mai mult, din ecuațiile de mai sus rezultă că aplicația $\pi: a \to a\bar{N}$ este un homomorfism al grupului G pe mulțimea claselor alătu-

rate, care se numește *homomorfism canonic*. Nucleul lui π este subgrupul invariant $\bar{N}$. Conceptele de *subgrup normal* și *subgrup invariant* sînt identice. Grupul claselor alăturate lui N se numește *grup factor* sau *grup cît* al lui G prin N și se notează cu G/N.

Exemplul 5. Grupul factor al lui S_n prin A_n se compune din elementele A_n și p_0A_n, unde p_0 este o permutare impară. Aplicația $\pi: p \to \begin{cases} pA_n = A_n \text{ dacă } p \text{ este par,} \\ pA_n = p_0A_n \text{ dacă } p \text{ este impar.} \end{cases}$ este un homomorfism canonic π al lui S_n la $S_n|A_n$.

Teorema de homomorfism. Dacă f este un homomorfism al lui G pe un grup G' (adică f este surjectivă), atunci există o aplicație naturală a claselor alăturate lui N pe G', deoarece toate elementele unei clase alăturate au aceeași imagine prin f. Aplicația φ care duce clasa alăturată aN în imaginea comună $f(a)$ a elementelor sale este un izomorfism al lui G/N și a imaginii homomorfe G'. Acesta este conținutul teoremei de homomorfism (fig. 16.1.1).

Teorema de homomorfism. Orice homomorfism surjectiv al unui grup G pe un grup G' se exprimă ca produs dintre homomorfismul canonic π de la G pe $G/\text{Ker} f$ și izomomorfismul φ al lui $G/\text{Ker} f$ pe G'.



16.1.1. Teorema de homomorfism

Din teorema de homomorfism rezultă că studiul unui homomorfism oarecare poate fi redus la studiul grupurilor factor, al izomorfismelor și al subgrupurilor.

Exemplul 6. S-a arătat mai înainte că aplicația $f: p \to \text{sgn } p$ este un homomorfism al grupului simetric S_n pe subgrupul $\{+1, -1\}$ al grupului numerelor reale cu nucleul A_n. În exemplul 5 s-a introdus homomorfismul canonic $\pi: p \to \begin{cases} pA_n = A_n \text{ dacă } p \text{ este par,} \\ pA_n = p_0A_n \text{ dacă } p \text{ este impar.} \end{cases}$ Descompunerea stabilită prin teorema de homomorfism va fi în acest caz $f = \pi \cdot \varphi$, unde φ este aplicația $\varphi: \begin{cases} A_n \to +1 \\ p_0A_n \to -1 \end{cases}$. Este evident că φ este un izomorfism al grupului factor S_n/A_n pe grupul $\{+1, -1\}$.

Legătura dintre subgrupurile maximale normale și grupurile simple rezultă din următoarea teoremă:

Un subgrup normal N al unui grup G este maximal dacă și numai dacă grupul factor G/N este simplu.

Automorfisme. Un *automorfism* este un izomorfism al unui grup G pe el însuși. Produsul a două automorfisme ale unui grup G este un automorfism al lui G. Aplicația identică a lui G care lasă neschimbat fiecare element al lui G este un automorfism. Dacă f este un automorfism al lui G pe el însuși, f^{-1} va fi la fel. Automorfismele lui G formează un grup în raport cu operația de înmulțire (compunere) a aplicațiilor. El poartă numele de *grup al automorfismelor* lui G.

Grupuri finite

Teoria grupurilor finite a apărut inițial ca un instrument pentru rezolvarea ecuațiilor algebrice. Importanța acestor grupuri apare în mod clar din următoarele două teoreme.

Teorema lui Cayley. Orice grup de ordinul n este izomorf cu un subgrup al grupului simetric S_n.

Teorema lui Lagrange. Pentru orice subgrup H al unui grup finit G, indicele $[G: H]$ al lui H în G se definește prin numărul de clase alăturate la stînga ale lui H în G. Dacă E este subgrupul unitate, atunci $[G; E]$ este ordinul lui G. Pentru un subgrup H al lui G, ordinul lui H divide ordinul lui G. Mai precis $[G: E] = [G: H]\,[H: E]$.

Ordinul unui element al unui grup G este *ordinul subgrupului ciclic generat* de a. Evident dacă G este finit, orice element are ordin finit și din teorema lui Lagrange rezultă că acest ordin divide ordinul grupului. Există totuși grupuri infinite ale căror elemente au toate ordin finit, de exemplu grupul multiplicativ al tuturor rădăcinilor complexe ale unității, adică grupul tuturor soluțiilor ecuațiilor $x^n - 1 = 0$, unde $x = 1, 2, \ldots$

W. BURNSIDE și-a pus problema dacă un grup pentru care toate elementele au ordin finit și care este generat de un număr finit de elemente este finit. Problema s-a rezolvat (răspunsul fiind negativ) în 1967 de către NOVIKOV și ADYAN.

În teoria rezolvării ecuațiilor algebrice conceptul de serii de compoziție ale unui grup joacă un rol important. O *serie de compoziție* a unui grup este un șir de subgrupuri $G = G_0 \supset \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_l = E$, fiecare conținut în predecesorul său și astfel încît fiecare grup să fie un subgrup maximal normal al grupului care îl precede imediat. Grupurile simple G_0/G_1, $G_1/G_2, \ldots, G_{l-2}/G_{l-1}, G_{l-1}/E = G_{l-1}$ se numesc *factori de compoziție*. Grupurile care admit factori de compoziție de ordinul întîi se numesc rezolvabile. Factorii de compoziție ai unui grup finit sînt unic determinați, abstracție făcînd de un izomorfism și de ordinea în care apar (teorema lui *Jordan-Hölder*).

Aplicații. Se poate afirma că teoria grupurilor joacă întotdeauna un rol acolo unde este vorba de aplicații, transformări, simetrii și de mulțimi care rămîn invariante la aceste transformări. În geometrie studiul diferitelor grupuri de transformări și grupurile de obiecte geometrice invariante în raport cu aceste transformări conduce la o clasificare a diferitelor geometrii, propusă pentru prima dată de Felix KLEIN (1849—1925) în renumitul „Program de la Erlangen". În fizică teoria grupurilor joacă un rol deosebit mai ales în teoria relativității prin grupul *transformărilor lui Lorentz*; clasificarea fizicii în fizică relativistă și cea nerelativistă se face după principiile teoriei grupurilor. Așa cum a arătat S. LIE este posibilă și o clasificare a ecuațiilor diferențiale ținîndu-se seama de același principiu. În cristalografie, prin considerarea grupurilor de simetrie se obține o privire de ansamblu asupra tuturor formelor posibile de cristale. În sfîrșit cu ajutorul teoriei grupurilor pot fi descrise și ornamentele plane și spațiale.

Grupuri topologice. Grupurile care apar în geometrie și în fizică sînt în general grupuri infinite care pe lîngă o structură algebrică au și o structură topologică fiind spații topologice. *Grup topologic* este o mulțime de elemente care este grup și spațiu topologic în același timp. Este necesar în acest caz ca structura să fie compatibilă cu cea topologică în sensul că funcția definită prin legea de compoziție a grupului să fie continuă în raport cu topologia respectivă. Ca exemplu de grupuri topologice se pot da diferite grupuri de matrice, grupurile de transformări ale diverselor geometrii și grupurile Lorentz.

De exemplu, pentru două matrice pătratice de ordinul doi cu numere reale, al căror determinant este diferit de zero, se poate aprecia dacă sînt mai apropiate sau mai îndepărtate, adică dacă elementele lor diferă mai mult sau mai puțin. Astfel, pornind de la noțiunea de continuitate pe axa reală se poate introduce noțiunea de continuitate și deci și o topologie în grupul acestor matrice. Faptul că grupurile topologice sînt infinite îngreunează pe de o parte cercetarea structurilor lor algebrice. Structura lor topologică permite însă găsirea unor noi mijloace de cercetare, nu neapărat algebrice, cu ajutorul cărora se pot obține rezultate deosebit de frumoase ca de exemplu în cazul grupurilor topologice abeliene și al grupurilor topologice compacte. Particularitatea acestor mijloace de investigație constă în îmbinarea metodelor algebrice cu cele analitice.

Grupuri Lie. Rotațiile planului în jurul unui punct fix formează un grup. Orice astfel de rotație depinde de unghiul de rotație φ și, după cum se știe din geometria analitică, poate fi scrisă cu ajutorul unei matrice pătrate de ordinul doi sub forma alăturată.

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Se poate arăta că mulțimea matricelor de această formă constituie un grup. Deoarece φ variază continuu între 0 și 2π, trebuie introdusă în acest grup noțiunea de continuitate. Spre deosebire de alte grupuri, particularitatea grupului considerat constă în faptul că toate elementele matricei depind de un parametru și această dependență poate fi descrisă printr-o funcție derivabilă. Apare astfel posibilitatea de a defini pe un grup nu numai funcții continue dar și funcții derivabile. În cazul nostru, o funcție definită pe grupul matricelor este *derivabilă (diferențiabilă) dacă este o funcție derivabilă (diferențiabilă), de parametru real* φ. Un spațiu topologic pe care pot fi definite funcții diferențiabile se numește varietate diferențiabilă. Grupul de rotație are pe lîngă structura algebrică de grup nu numai o structură de spațiu topologic ci și aceea mai tare de varietate diferențiabilă. Astfel de grupuri poartă numele de *grupuri Lie* după numele

matematicianului norvegian Sophus LIE (1842–1899). Aceste grupuri sînt grupuri topologice speciale al căror studiu se simplifică din mai multe puncte de vedere folosind metodele calculului diferențial.

Aplicații. Grupurile Lie și reprezentările lor (vezi cap. 33) au importanță în ce privește aplicațiile în teoria funcțiilor speciale (*funcții sferice, Bessel* etc.) ca și în *teoria funcțiilor aproape periodice*. S. LIE și-a aplicat teoria la clasificarea soluțiilor ecuațiilor diferențiale. Grupurile Lie se aplică și în teoria cuantelor prin intermediul grupului de rotații ale sferei și al grupurilor Lorentz.

Semigrupuri

Un semigrup este o mulțime nevidă pentru care s-a definit *o operație asociativă*. Dacă operația este în plus comutativă, semigrupul se numește *comutativ*. Dacă H este un semigrup multiplicativ care conține un element e astfel încît $ea = ae = a$ pentru toate elementele a din H, atunci H este un *semigrup cu element unitate*. Ca exemple de semigrupuri comutative cu element unitate care nu sînt grupuri se pot da mulțimea numerelor întregi cu operația de înmulțire și mulțimea întregilor nenegativi cu relația de adunare (0 este aici element neutru). Evident, orice grup este un semigrup. Teoremele valabile pentru semigrupuri vor fi valabile și pentru grupuri. Se pot deosebi semigrupuri *finite* și *infinite* iar numărul elementelor unui semigrup definește *ordinul* acestuia. Dacă ecuațiile $ax = b$ și $ya = b$ au fiecare cel mult o soluție, pentru o pereche oarecare de elemente a și b ale semigrupului H, atunci H se numește *regulat*. Mulțimea întregilor nenuli este un semigrup regulat cu operația de înmulțire. Pentru semigrupuri finite are loc următoarea teoremă:

Un semigrup regulat de ordin finit este grup.

Exemplul 7. Dacă o funcție $f(t)$ descrie un proces în timp, atunci mulțimea aplicațiilor T_α: $f(t) \to f(t + \alpha)$ formează un semigrup.

Exemplul 8. Mulțimea putere a unei mulțimi arbitrare S (adică mulțimea tuturor submulțimilor lui S) formează un semigrup comutativ cu element unitate atît pentru operația de intersecție cît și pentru operația de reuniune.

16.2. Corpuri și ecuații algebrice

Pînă la începutul secolului al 19-lea algebra putea fi considerată ca teoria soluțiilor ecuațiilor algebrice. Scopul ei era găsirea metodelor, celor mai generale cu putință, pentru calcularea acestor soluții. Soluțiile propriu-zise prezentau un interes mai mic decît metodele folosite pentru găsirea lor. Ideile matematicienilor secolului al 19-lea în legătură cu aceste probleme au condus la definiția grupurilor și corpurilor ca instrumente esențiale în teoria razolvării ecuațiilor algebrice. Mai tîrziu aceste concepte au căpătat un interes de sine stătător în primul rînd pentru aplicațiile lor în domenii foarte diferite. Teoria grupurilor și teoria corpurilor sînt ramuri independente întinse ale algebrei. Alte obiecte cu structuri similare s-au întîlnit în multe domenii ale matematicii, ceea ce a condus la definirea unor structuri algebrice ca inele, algebre, latice și domenii de integritate (vezi cap. 33)

Corpuri și domenii de integritate

Corpuri. *Un corp (sau cîmp)* este o mulțime K de elemente care satisfac următoarele *axiome ale corpului*:

Axiomele corpului. Axioma 1. Pe K sînt definite două operații: adunarea și înmulțirea.
Axioma 2. În raport cu adunarea elementele lui K formează un *grup abelian* cu element nul 0.
Axioma 3. Elementele lui K diferite de 0 formează un *grup abelian* pentru înmulțire.
Axioma 4. Operațiile de adunare și înmulțire sînt legate prin legea de distributivitate, adică oricare ar fi elementele a, b și c din K: $a(b + c) = ab + ca$.

Numerele raționale, numerele reale și numerele complexe sînt cele mai importante exemple de corp. Intuitiv se poate spune că un corp este o mulțime de elemente în care se pot efectua operații aritmetice, în sens obișnuit. Ca și pentru grupuri, se pot deosebi corpuri finite și infinite. O submulțime P a unui corp Ω este un *subcorp* dacă satisface axiomele corpului pentru operațiile definite în Ω; în particular, suma și produsul elementelor din P trebuie să se găsească în P, la fel și inversele și opusele elementelor lor din P. Corpul Ω poartă numele de *extensie a corpului P*. Dacă corpul K este o extensie a corpului P și totodată un subcorp al lui Ω, atunci K este un corp intermediar între P și Ω: $P \subseteq K \subseteq \Omega$.

Orice corp poate fi privit ca un *spațiu vectorial* (vezi cap. 17), pe orice subcorp P privit ca mulțime a scalarilor considerînd adunarea definită pentru elementele corpului ca operație de adunare în spațiul vectorial și înmulțirea pentru elementele subcorpului ca înmulțire cu scalari. Dimensiunea lui Ω peste P privit ca spațiu vectorial se numește *grad al corpului* de extensie Ω peste P. Dacă Ω este un spațiu vectorial cu dimensiune finită peste P, extensia se zice *finită*. Gradul ei se notează cu $n = [\Omega: P]$. În acest caz se pot găsi elemente $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ în Ω astfel încît orice element $\beta \in \Omega$ se poate scrie în mod unic sub forma $\beta = c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + ... + c_n\beta_n$ cu elementele $c_1, c_2, ..., c_n$ din P. Astfel de elemente formează o *bază* a lui Ω peste P.

Dacă Ω este o extensie a lui P și $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ sînt elemente arbitrare ale lui Ω, atunci cu $P(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$ se notează cel mai mic subcorp al lui Ω care conține pe P și $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$. Acesta se obține din P și din $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ cu ajutorul operațiilor aritmetice elementare. Se spune că corpul $P(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$ se obține din P prin *adjuncția* elementelor $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ la P. Aceasta se poate obține procedînd mai întîi la adjuncția lui α_1 la P, obținîndu-se astfel corpul $K_1 = P(\alpha_1)$, apoi prin adjuncția lui α_2 la K_1, obținîndu-se $K_2 = K_1(\alpha_2) = P(\alpha_1, \alpha_2)$ ș.a.m.d. După m pași se obține $K_m = K_{m-1}(\alpha_m) = P(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$. Un corp de extensie $P(\alpha)$ care se obține prin adjuncția unui singur element se numește o *extensie simplă* a lui P.

Dacă K_1 și K_2 sînt corpuri, atunci o aplicație bijectivă f de la K_1 pe K_2, astfel încît $f(a+b) = f(a) + f(b)$ și $f(ab) = f(a)f(b)$ pentru elemente arbitrare a și b ale lui K_1 se numește *izomorfism* al lui K_1 pe K_2; K_1 și K_2 se zic *izomorfe*, fapt care se notează $K_1 \cong K_2$. Un izomorfism al lui K pe el însuși se numește automorfism al lui K. Dacă K_1 și K_2 sînt corpuri și dacă P este un subcorp al acestora, atunci un izomorfism al lui K_1 pe K_2 care lasă fix pe P element cu element poartă numele de *izomorfism relativ*. Dacă $K_1 = K_2$, atunci se vorbește despre un automorfism relativ. Numeroase exemple pentru aceste concepte se vor găsi în paragrafele care urmează.

Domenii de integritate. Corpul Q al numerelor raționale admite o submulțime care satisface axiomele corpului 1, 2 și 4 dar nu și axioma 3: corpul numerelor întregi. În mulțimea întregilor împărțirea nu este universal posibilă; aceste numere satisfac însă următoarea condiție mai slabă, *regula de simplificare*: dacă $ab = ac$ și $a \neq 0$, atunci $b = c$ (vezi Semigrupuri).

Un domeniu de integritate este o mulțime I în care axiomele 1, 2 și 4 pentru corpuri sînt satisfăcute și axioma 3 se înlocuiește cu axioma 3′: Elementele nenule ale lui I formează un semigrup regulat comutativ față de înmulțire.

Toate corpurile sînt domenii de integritate. Mulțimea întregilor este un exemplu de domeniu de integritate care nu este un corp. Un alt exemplu important de domeniu de integritate este mulțimea polinoamelor cu coeficienți într-un corp (vezi Polinoame). Dacă mulțimea I este finită, atunci I este un domeniu de integritate finit. Din teorema privind semigrupurile regulate finite, menționată mai sus, se obține:

Orice domeniu de integritate finit este un corp.

Două domenii de integritate se zic *izomorfe* ($I_1 \cong I_2$) dacă există o aplicație bijectivă f de la I_1 la I_2 compatibilă cu operațiile în același sens ca pentru un izomorfism de corp. Aplicația se numește *izomorfism* (vezi „Corpul fracțiilor).

Exemple. Pe lîngă corpurile și domeniile de integritate menționate pînă acum, *numerele lui Gauss* constituie un alt exemplu important. Acestea sînt numere complexe de forma $a + bi$, unde a și b sînt numere raționale și $i^2 = -1$. Submulțimea numerelor lui Gauss pentru care a și b sînt întregi este mulțimea *întregilor lui Gauss* și este un domeniu de integritate. Numerele lui Gauss se obțin din numerele raționale prin adjuncția lui i.

Cel mai mic corp finit se compune din două elemente 0 și e cu tabela de adunare și înmulțire alăturată.

+	0	e	·	0	e
0	0	e	0	0	0
e	e	0	e	0	e

Corpurile claselor de resturi modulo a constituie un alt exemplu important (vezi cap. 31).

Polinoame. O expresie de forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ în care n este un număr natural și $a_0, \ldots, a_n$ sînt elemente ale unui corp K se numește *polinom în variabila x* peste K. Cantitățile $a_0, \ldots, a_n$ se numesc *coeficienți*. Un polinom ai cărui coeficienți sînt toți nuli se numește *polinom nul*. Dacă coeficientul a_n este diferit de zero, atunci gradul polinomului este n. Dacă variabila x este înlocuită cu un element al corpului, se obține o funcție definită pe K cu valori în K. Funcțiile se numesc *funcții polinomiale* sau *funcții raționale întregi* pe corpul K; reciproc, dacă corpul este infinit, orice funcție rațională întreagă determină un polinom unic. În calculul cu polinoame se folosește în mod frecvent notația simplificată $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, unde prin convenție numai un număr finit de a_i sînt diferiți de zero. Suma și produsul polinoamelor $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ și $g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$ pot fi scrise $f(x) + g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ și $f(x) \cdot g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k$, unde coeficienții c_k și d_k satisfac ecuațiile $c_k = a_k + b_k$ și $d_k = \sum_{i+j=k}^{\infty} a_i b_j$. Polinoamele cu coeficienți într-un corp fixat K formează un domeniu de integritate notat prin $K[x]$. În acest domeniu de integritate se poate efectua *împărțirea cu rest* la fel ca pentru numere întregi. Aceasta înseamnă că dacă $f(x)$ și $g(x)$ cu $g(x) \neq 0$ sînt două polinoame date, atunci există în mod unic două polinoame $h(x)$ și $r(x)$ astfel încît $f(x) = h(x) \cdot g(x) + r(x)$, unde $r(x) = 0$ sau gradul lui $r(x)$ este mai mic decît gradul lui $g(x)$. Prin analogie cu teoria numerelor (vezi cap. 1), două polinoame $f_1(x)$ și $f_2(x)$ sînt *congruente* modulo $g(x)$ și se notează $f_1(x) \equiv f_2(x) \bmod g(x)$, dacă prin împărțire cu $g(x)$ dau același rest. Congruența modulo $g(x)$ este o relație de echivalență care conduce la împărțirea în clase a domeniului de integritate $K(x)$. Aceste clase se adună și se înmulțesc alegînd un polinom din fiecare clasă, adunînd și înmulțind polinoamele alese și definind clasa sumă sau produs prin clasa polinoamelor obținute ca rezultat al acestei operații. Se poate arăta că se obține întotdeauna aceeași clasă chiar dacă se aleg alte polinoame ca reprezentanți ai claselor. Dacă $g(x)$ este un polinom ireductibil, *clasele de resturi* modulo $g(x)$ formează un corp care se notează prin $K[x]/(g(x))$ și se numește *corpul claselor de resturi modulo g(x)* aîe lui $K(x)$.

Un polinom neconstant se zice *ireductibil* peste K dacă nu poate fi scris ca un produs de două polinoame peste K, de grad mai mic dar pozitiv. Un polinom de gradul n se numește *unitar* dacă coeficientul termenului de grad maxim a_n este 1. Pentru polinoamele peste un corp K are loc următoarea teoremă:

Orice polinom $f(x)$ peste K admite reprezentarea sub formă de produs dintre un element c al corpului și polinoamele unitare ireductibile $p_1(x), \ldots, p_s(x)$ din $K(x)$: $f(x) = cp_1(x), \ldots, p_s(x)$. Această reprezentare este unică.

Corpul de fracții. Conceptul de *corp de fracții* derivă din problema „care este cel mai mic corp conținînd un domeniu de integritate dat?“ Problema poate fi reformulată astfel: fiind dat un domeniu de integritate I, există un corp K care conține pe I, ale cărui elemente pot fi toate scrise ca fracții formate cu elemente din I? Pentru a ne face o idee despre un astfel de corp vom presupune mai întîi că el există. Cu fracțiile a/b se poate opera în mod obișnuit. Elementele a și $b \neq 0$ sînt din I și astfel: 1) $a/b = a'/b'$ dacă $ab' = a'b$; 2) $a/b + c/d = (ad + bc)/bd$; 3) $(a/b) \cdot (c/d) = ac/bd$, unde, evident, toți numitorii trebuie să fie diferiți de zero. Dacă corpul există, regulile (1), (2) și (3) trebuie să fie valabile. Se pot folosi aceste reguli pentru *construirea* corpului K, înlocuind fracțiile prin *perechi ordonate* (a, b) de elemente a și $b \neq 0$ din I. Pentru aceste perechi se definește o relație de echivalență prin $(a, b) = (a', b')$, dacă $ab' = a'b$ în I. Clasele se notează cu paranteze pătrate [ ]. Adunarea și înmulțirea claselor se definesc folosind regulile (2) și (3): prin (2) $[a, b] + [c, d] = [ad + bc, bd]$ și prin 3) $[a, b] \cdot [c, d] = [ac, bd]$. Se verifică că aceste operații sînt independente de reprezentantul clasei $[a, b]$ ales. Mulțimea claselor K' formează corp în raport cu adunarea și înmulțirea astfel definite, în care fiecare element $[a, b]$ poate fi reprezentat ca o fracție $[a, e]/[b, e]$, unde e este elementul unitate al lui I. Se poate arăta acum că elementele $[a, e]$ ale lui K' formează un domeniu de integritate I' care este izomorf cu I, izomorfismul fiind realizat prin aplicația $[a, e] \to a$. Astfel, s-a construit un corp de tipul cerut în problema pusă care nu conține chiar pe I, ci un domeniu de integritate izomorf cu I. Dacă se înlocuiesc acum elementele lui I' prin imaginile lor izomorfe din I, cu operațiile elementare alese în mod convenabil, se obține un corp K care îl conține pe I, în care fiecare element poate fi reprezentat ca o fracție a/b de elemente din I. Acest corp poartă numele de *corp al fracțiilor domeniului de integritate*. Acesta este *cel mai mic corp care îl conține pe I*. Dacă I este mulțimea întregilor, atunci procesul coincide cu cel folosit la construcția numerelor raționale (vezi cap. 3).

Corpul fracțiilor pentru numerele întregi este mulțimea numerelor raționale.
Dacă I este domeniul de integritate al polinoamelor $K[x]$ peste un corp K, corpul fracțiilor corespunzător acestuia poartă numele de corpul funcțiilor raționale peste K și se notează prin $K(x)$.

Ecuații algebrice și extensii de corpuri. *O ecuație algebrică de gradul n* este o ecuație $f(x) = 0$ a cărei parte stîngă este un polinom de gradul n. În particular ecuația este ireductibilă în K dacă polinomul $f(x)$ este ireductibil în K. Soluțiile ecuației $f(x) = 0$ se numesc *rădăcini ale polinomului $f(x)$* sau ale ecuației $f(x) = 0$. În general, ecuațiile algebrice pot fi rezolvate numai într-un corp de extensie; de ex. necesitatea de a găsi soluții pentru orice ecuație de gradul doi a condus la o lărgire considerabilă a domeniului numerelor: la numerele complexe. De regulă însă, o extensie mai mică este suficientă. De exemplu, coeficienții ecuațiilor $x^2-2=0$ și $x^2+4=0$ se găsesc în corpul numerelor raționale și soluțiile lor se găsesc în corpul $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$, respectiv, în corpul numerelor lui Gauss. Dacă $f(x) = 0$ este o ecuație ireductibilă în K, de grad mai mare decît 1, atunci ea nu are soluții în K, și este necesar pentru găsirea soluției să se găsească o extensie a lui K.

Dacă α este o soluție a unei ecuații ireductibile $f(x) = 0$, în K, atunci α este *algebric* în raport cu K. Dacă Ω este un corp de extensie a lui K și orice element al lui Ω este algebric în K, atunci Ω este o *extensie algebrică* a lui K; o extensie algebrică a lui $\mathbf{Q}$ se numește *corp numeric*. Extensiile care nu sînt algebrice se numesc *transcendente*. Dacă $f(x)=0$ este o ecuație ireductibilă cu coeficienți într-un corp numeric K, atunci din *teorema fundamentală a algebrei* (vezi cap. 4) rezultă că ea admite o soluție α în corpul numerelor complexe. Corpul $K(\alpha)$ obținut prin adjuncția lui α la K este cel mai mic subcorp al corpului numerelor complexe, care îl conține pe K și rădăcina α a ecuației. Nu este posibilă construcția unei extensii convenabile de acest tip, pentru ecuația generală de gradul n, ai cărei coeficienți sînt necunoscuți în sensul algebrei, deoarece nu există un corp care trebuie să conțină cel puțin o soluție a ecuației. Deoarece chiar în cazul unei ecuații particulare teorema fundamentală a algebrei stabilește existența unei soluții în corpul numerelor complexe și dă o metodă de construcție a acesteia, pare plauzibilă în toate cazurile găsirea unei metode pentru construcția unui corp de extensie care să conțină o rădăcină a ecuației date, așa-numitul *corp al rădăcinilor*.

Construcția corpului rădăcinilor. Fie $f(x)$ un polinom unitar ireductibil de grad n cu coeficienți într-un corp K. Corpul claselor de resturi $K[x]/(f(x))$ conține un subcorp $\bar{K}$, constituit din clasele de congruență $\bar{a}$ a elementelor a din K. Clasa $\bar{a}$ a lui a se compune din toate polinoamele care la împărțirea cu $f(x)$ dau restul a. Aplicația $a \to \bar{a}$ este un izomorfism al lui K pe $\bar{K}: K \cong \bar{K}$. Dacă $\bar{K}$ se înlocuiește prin K în $K[x]/(f(x))$, lăsînd *neschimbate toate operațiile și relațiile*, se obține un corp K' care îl conține pe K și este izomorf cu $K[x]/(f(x))$. Fie acum $f(x) = x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots$ $\ldots+a_0$ și fie α clasa tuturor polinoamelor care împărțite la $f(x)$ dau restul x. Atunci $\alpha^n +$ $+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\ldots+a_1\alpha+a_0$ va fi, ținîndu-se seama de regulile de adunare și înmulțire a claselor de resturi, clasa $f(x)$; dar aceasta este clasa tuturor polinoamelor care impărțite prin $f(x)$ dau restul 0 și în K' ea se înlocuiește chiar prin 0. Astfel $\alpha_n + a_{n-1}\alpha^{n-1}+\ldots+a_1\alpha+a_0 = 0$ și α este o soluție a ecuației $f(x)=0$. Corpul K' conține o soluție a ecuației $f(x) = 0$ și se numește *corpul rădăcinilor* acestora.

Corpul rădăcinilor $K' = K(\alpha)$ este o *extensie algebrică simplă* a lui K și orice element al lui K' se poate scrie sub forma $b_0 + b_1\alpha + \ldots + b_{n-1}\alpha^{n-1}$, unde $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ sînt elemente din K. Gradul extensiei $K(\alpha)$ peste K este gradul polinomului ireductibil $f(x)$: $[K(\alpha) : K] = \text{grad}(f(x)) = n$.

Exemplul 1. Un corp al rădăcinilor pentru ecuația $x^2+1=0$ peste corpul numerelor raționale $\mathbf{Q}$ este extensia simplă $\mathbf{Q}(\mathrm{i})$ în care orice element se poate scrie $a+b\mathrm{i}$, unde a și b sînt numere raționale și $\mathrm{i}^2+1=0$. Corpul este izomorf cu corpul numerelor lui Gauss.

Corpuri de descompunere. Fie $f(x)$ un polinom unitar de grad n cu coeficienți într-un corp K. *Corpul de descompunere* $f(x)$ peste K este *cel mai mic* corp de extensie L, peste K în care $f(x)$ se descompune în factori liniari: $f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$, unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sînt soluțiile lui $f(x)$ în L. Corpul de descompunere al unui polinom sau al unei ecuații algebrice peste K este cea mai mică extensie a lui K care conține *toate* soluțiile ecuației algebrice. El este unic, abstracție facînd de izomorfisme. Corpul de descompunere se poate construi prin aplicarea repetată a construcției corpului rădăcinilor. Se descompune mai întîi $f(x)$ în factori ireductibili în K. Dacă toți factorii ireductibili au gradul 1, atunci K este chiar corpul de descompunere. Dacă nu, se construiește un corp al rădăcinilor pentru unul dintre factorii de grad > 1 și

se descompune $f(x)$ în factori ireductibili în K'. Dacă acum toţi factorii sînt de gradul 1, atunci K' este corpul de descompunere căutat. În caz contrar, se alege un factor de grad > 1 şi se construieşte un corp al rădăcinilor K'' peste K' prin acelaşi procedeu. Se descompune din nou $f(x)$ în factori ireductibili peste K'' ş.a.m.d. Cum gradul se reduce la fiecare pas, pentru cel puţin un factor ireductibil, procesul trebuie să se termine cu găsirea corpului de descompunere al lui $f(x)$.

Exemplul 2. Fie polinomul $f(x) = x^3 - 2$ peste $\mathbb{Q}$. Rădăcinile lui sînt $\alpha_1 = \sqrt[3]{2}$, $\alpha_2 = \omega \sqrt[3]{2}$, $\alpha_3 = \bar{\omega} \sqrt[3]{2}$, unde $\omega = (-1 + i\sqrt{3})/2$ şi $\bar{\omega} = (-1 - i\sqrt{3})/2$. Corpul de descompunere este $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega\sqrt[3]{2}, \bar{\omega}\sqrt[3]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)$, unde $\bar{\omega} = -1 - \omega$.

Teoria lui Galois

Grupul lui Galois şi teorema fundamentală a teoriei lui Galois. Legătura dintre soluţiile ecuaţiilor algebrice şi teoria grupurilor descoperită de E. Galois a condus la rezultate deosebit de frumoase în teoria corpurilor de extensie finite. De aceea *partea centrală a teoriei corpului*, care se ocupă de soluţiile ecuaţiilor algebrice poartă numele de *teoria lui Galois*. Dacă N este corpul de descompunere al unui polinom în P, *fără rădăcini multiple*, atunci N admite importanta proprietate prin care orice automorfism relativ al oricărei extensii L_1 al lui P care îl conţine pe N aplică pe N pe el însuşi, adică induce un automorfism al lui N. O extensie a unui corp cu această proprietate se numeşte *normală*. Dacă K este o extensie a lui P conţinută în L_1 dar care nu este normală relativ la P, atunci aceasta se aplică prin automorfismul relativ al lui L_1 peste P, pe copiile izomorfe $K', K'', \ldots$, care se numesc *conjugatele* lui K în L_1. Automorfismele relative ale lui L_1 determină izomorfisme relative ale lui K peste P. O extensie de corp normală K se deosebeşte prin proprietatea că K este *egal cu toate conjugatele sale.*

Fie $f(x)$ un polinom ireductibil de grad n peste corpul P. Să presupunem că o extensie L a lui P conţine toate soluţiile $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ale ecuaţiei $f(x) = 0$, care sînt toate distincte. Dacă α este una dintre aceste soluţii, atunci conjugatele extensiei simple $P(\alpha)$ sînt $P(\alpha_1), \ldots, P(\alpha_n)$ din care una este identică cu $P(\alpha)$. Cele n izomorfisme relative ale lui $P(\alpha)$ aplică α pe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Deoarece orice izomorfism relativ trebuie să transforme o rădăcină a lui $f(x)$ într-o altă rădăcină a lui $f(x)$, nu mai pot exista şi alte izomorfisme relative ale lui $P(\alpha)$.

Numărul izomorfismelor relative ale unei extensii simple $P(\alpha)$ a lui P este egal cu gradul $[P(\alpha):P]$.

Acest rezultat se poate generaliza. O extensie finită $K = P(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ se poate întotdeauna obţine prin adjuncţia unui singur element: $K = P(\theta)$ cu condiţia ca ecuaţiile ale căror rădăcini sînt $\beta_1, \ldots, \beta_m$ să nu aibă rădăcini multiple. Dacă $N = P(\theta)$ este o extensie normală a lui P, atunci numărul automorfismelor relative ale lui N este egal cu gradul extensiei $[N: P]$. Automorfismele relative ale unei extensii normale N formează un grup de ordin $[N: P]$ în raport cu înmulţirea aplicaţiilor. Acest grup se numeşte *grup Galois* G al extensiei normale N peste P: $[G: E] = [N: P]$.

Dacă K este un corp intermediar între P şi N, atunci N este normal peste K şi automorfismele relative ale grupului Galois G al lui N peste P care lasă fixe toate elementele lui K, cu alte cuvinte automorfismele relative ale lui N peste K formează un subgrup H al lui G, care este tocmai grupul Galois G al lui N pe K.

În acest mod se asociază fiecărui corp intermediar K un subgrup H al grupului Galois G. Dacă H este un subgrup al lui G, atunci elementele lui N care rămîn fixe la toate automorfismele relative în H formează un corp intermediar K. Astfel, studiul corpurilor intermediare între N şi P se reduce la studiul subgrupurilor grupului Galois. Metodele teoriei grupurilor se pot aplica acum teoriei corpului. Dacă subgrupurile grupului Galois G al lui N peste P se cunosc, se pot găsi toate extensiile între P şi N şi corpurile intermediare cît şi relaţiile dintre acestea. Dacă P este un corp care conţine numerele raţionale, atunci are loc teorema fundamentală a lui Galois.

Teorema fundamentală a teoriei lui Galois. Fie N o extensie normală finită a lui P şi G grupul ei Galois. (I). Există o corespondenţă biunivocă între subgrupurile H ale lui G şi corpurile intermediare K ale extensiei.

(II). Dacă K și H corespund, atunci H se compune din toate automorfismele relative ale lui N care lasă fixe elementele lui K; K se compune din toate elementele lui N care sînt fixe în raport cu automorfismele relative în H.

(III). Un corp intermediar K este normal peste P dacă subgrupul asociat H este normal în G. În acest caz grupul Galois al lui K peste P este izomorf cu grupul factor G/H.

(IV). Au loc următoarele relații:

$[H:E] = [N:K]$

$[G:H] = [K:P]$

$$\begin{array}{ccccc} & N & \longleftrightarrow & E & \\ [N:K] \rightarrow & | & & | & \rightarrow [H:E] \\ & K & \longleftrightarrow & H & \\ [K:P] \rightarrow & | & & | & \rightarrow [G:H] \\ & P & \longleftrightarrow & G & \end{array}$$

Exemplul 3. Se consideră extensia normală finită $L = Q(\sqrt[3]{2}, \omega\sqrt[3]{2}, \bar{\omega}\sqrt[3]{2}) = Q(\sqrt[3]{2}, \omega)$, corpul de descompunere al polinomului $x^2 - 2$ peste Q. Pentru a găsi grupul Galois al lui L peste Q se caută întîi izomorfismele relative ale lui $Q(\sqrt[3]{2})$ în L. Aici $\sqrt[3]{2} \to \sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2} \to \omega\sqrt[3]{2}$ sau $\sqrt[3]{2} \to \bar{\omega}\sqrt[3]{2}$. De aceea automorfismele relative ale lui $Q(\sqrt[3]{2}, \omega)$ acționează în $\sqrt[3]{2}$ și ω în următoarele șase moduri posibile.

$\sqrt[3]{2} \to \sqrt[3]{2}, \quad \omega \to \omega \sim E$

$\sqrt[3]{2} \to \omega\sqrt[3]{2}, \quad \omega \to \omega \sim A$

$\sqrt[3]{2} \to \bar{\omega}\sqrt[3]{2}, \quad \omega \to \omega \sim A^2$

$\sqrt[3]{2} \to \sqrt[3]{2}, \quad \omega \to \bar{\omega} \sim B$

$\sqrt[3]{2} \to \omega\sqrt[3]{2}, \quad \omega \to \bar{\omega} \sim A^2B$

$\sqrt[3]{2} \to \bar{\omega}\sqrt[3]{2}, \quad \omega \to \bar{\omega} \sim AB.$

Aceste șase automorfisme relative formează un grup Galois G al lui L peste Q, cu înmulțirea dată de aplicarea succesivă a celor două aplicații. Dacă se notează cu $\omega^2 = \bar{\omega}$ și $\omega \cdot \bar{\omega} = 1$, relațiile sînt ușor de verificat. În plus $A^3 = E$, $B^2 = E$ și $BA = A^2B$. Subgrupurile $\{E, A, A^2\}$ $\{E, B\}$. $\{E, AB\}$ și $\{E, A^2B\}$ corespund corpurilor intermediare $Q(\omega)$, $Q(\sqrt[3]{2})$, $Q(\omega\sqrt[3]{2})$ și $Q(\bar{\omega}\sqrt[3]{2})$.

$$\begin{array}{cccccc} Q(\sqrt[3]{2}, \omega), & Q(\omega), & Q(\sqrt[3]{2}), & Q(\omega\sqrt[3]{2}), & Q(\bar{\omega}\sqrt[3]{2}), & Q \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \langle E \rangle & \langle A \rangle & \langle B \rangle & \langle AB \rangle & \langle A^2B \rangle & G \end{array}$$

Grupul Galois al unei ecuații. Dacă $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$ este o ecuație cu coeficienți în Q, atunci între soluțiile ecuației $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ există unele relații raționale $H(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$; de exemplu ecuațiile alăturate (vezi cap, 4) constituie astfel de relații.

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n & = -a_{n-1} \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n & = a_{n-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n & = (-1)^n a_0 \end{array}$$

Aceste ecuații sînt independente de ordinea în care se numerotează rădăcinile. Cu alte cuvinte: aceste relații între soluții rămîn invariante la permutarea soluțiilor. Se poate întîmpla să existe alte relații care depind de ecuația în chestiune și acestea pot sau nu pot să fie invariante la unele permutări. Dacă se consideră mulțimea permutărilor care nu alterează nici una din relațiile dintre soluții, se poate enunța următorul rezultat.

Mulțimea acelor permutări care invariază toate relațiile $H(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$ cu coeficienți în Q este un subgrup S_n. Acest subgrup este grupul Galois al ecuației.

Exemplul 4. Fie de găsit grupul Galois al ecuației $f(x) = (x^2 - 2)(x^2 - 3) = 0$. Rădăcinile acestei ecuații sînt $\alpha_1 = \sqrt{2}$, $\alpha_2 = -\sqrt{2}$, $\alpha_3 = \sqrt{3}$. $\alpha_4 = -\sqrt{3}$. Trebuie găsite toate permutările de patru elemente care lasă invariante relațiile dintre aceste rădăcini. Este suficient să se considere relațiile $H_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_4) = \alpha_1\alpha_2 = 2$ și $H_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_4) = \alpha_3\alpha_4 = 3$, din care se poate ușor vedea că permutările

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ și } p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

sînt exact elementele grupului Galois G, deoarece orice permutare care ar duce α_1 sau α_2 în α_3 sau α_4 sau viceversa, ar altera relațiile H_1 sau H_2.

Dacă $f(x) = 0$ este *ecuația generală de gradul n*, adică $f(x) = 0$ este o ecuație cu *coeficienți nedeterminați* care pot fi înlocuiți în mod arbitrar prin elemente din orice corp, atunci nu mai există alte relații în afară de cele de mai sus, care poartă numele de relații elementare simetrice, și consecințele acestora.

Grupul Galois al ecuației generale de gradul n este grupul simetric S_n.

Grupul Galois al unei ecuații și al corpului ei de descompunere. Pentru a găsi o legătură între grupul Galois G al unei ecuații $f(x) = 0$ și un corp de extensie se consideră corpul de descompunere L al polinomului $f(x)$ peste $\mathbb{Q}$. Fie $\alpha_1, ..., \alpha_n$ rădăcinile polinomului în L și se presupune că toate sînt distincte. Dacă A este un automorfism relativ al lui L peste $\mathbb{Q}$, atunci orice relație rațională $H(\alpha_1, ..., \alpha_n) = 0$ cu coeficienți în $\mathbb{Q}$ este transformată prin A în $H(A\alpha_1, ..., A\alpha_n) = 0$. Deoarece orice izomorfism relativ al lui L transformă rădăcinile lui $f(x)$ tot în rădăcini ale lui $f(x)$, se poate scrie $A\alpha_1 = \alpha_{i_1}, A\alpha_2 = \alpha_{i_2}, ..., A\alpha_n = \alpha_{i_n}$. Astfel, orice automorfism relativ A, cu alte cuvinte, orice element al grupului Galois al lui L peste $\mathbb{Q}$ definește o permutare $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ i_1 & i_2 & ... & i_n \end{pmatrix}$ a rădăcinilor ecuației $f(x) = 0$ și permutarea aparține grupului Galois al ecuației. Se poate arăta că aplicația definită prin $A \to p$ este de fapt un izomorfism al grupului Galois al extensiei L peste $\mathbb{Q}$ pe grupul Galois al ecuației $f(x) = 0$.

Exemplul 5. Grupul Galois al ecuației $f(x) = (x^2 - 2)(x^2 - 3)$ se compune din elementele (vezi exemplul 4)

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ și } p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Grupul Galois al corpului de extensie corespunzător $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ se compune din elementele e', p'_1, p'_2 și p'_3 care au următorul efect asupra lui $\sqrt{2}$ și $\sqrt{3}$:

$$\begin{array}{lll} e' \sim \sqrt{2} \to \sqrt{2}, & \sqrt{3} \to \sqrt{3} & e \to e' \\ p'_1 \sim \sqrt{2} \to -\sqrt{2}, & \sqrt{3} \to \sqrt{3} & p_1 \to p'_1 \\ p'_2 \sim \sqrt{2} \to \sqrt{2}, & \sqrt{3} \to -\sqrt{3} & p_2 \to p'_2 \\ p'_3 \sim \sqrt{2} \to -\sqrt{2} & \sqrt{3} \to -\sqrt{3} & p_3 \to p'_3. \end{array}$$

Se poate verifica ușor că această aplicație este un izomorfism între cele două grupuri Galois.

Rezolvarea ecuațiilor prin radicali. Pe lîngă problema *existenței* soluțiilor, adică a constituirii unor extensii de corpuri în care ecuația dată să admită soluții, o importanță deosebită prezintă și problema *calculării* soluțiilor. Pentru ecuațiile de gradul doi există formule de rezolvare binecunoscute iar pentru ecuațiile de gradul trei acestea se obțin prin extragerea rădăcinii pătratice și cubice, cu ajutorul *formulelor lui Cardan*. FERRARI, un elev al lui Geronimo CARDANO (1501—1574) a găsit formule analoage pentru ecuația de gradul patru. De atunci, mulți matematicieni s-au străduit zadarnic să găsească formule analoage de rezolvare a ecuațiilor de grad mai mare decît patru prin radicali. Prin *radical* se înțelege o soluție a ecuației $x^n - a = 0$ și se notează cu $\sqrt[n]{a}$. Abia la începutul secolului al 19-lea matematicianul norvegian ABEL a demonstrat imposibilitatea existenței unei formule care să exprime soluția ecuației algebrice generale de grad mai mare decît patru, în funcție de coeficienții acesteia, prin radicali și operații de bază. Același lucru a fost demonstrat aproape concomitent și independent de matematicianul francez Evariste GALOIS (1811—1832) care a dat și un criteriu necesar și suficient pentru ca soluția unei ecuații speciale de grad superior să poată fi exprimată cu ajutorul radicalilor și al operațiilor fundamentale.

O *expresie radical* β, peste un corp P se definește în modul următor: există un element $g_1 \in P$ și un număr finit de polinoame $g_2(x_1), g_3(x_1, x_2), ..., g_m(x_1, ..., x_{m-1})$ și $g(x_1, ..., x_m)$ și întregi pozitivi $n_1, ..., n_m$ astfel încît $\beta = g(\beta_1, ..., \beta_m)$ cu $\beta_1 = \sqrt[n_1]{g_1}, \beta_2 = \sqrt[n_2]{g_2(\beta_1)}, \beta_3 = \sqrt[n_3]{(g_3 B_1, B_2)}, ..., \beta_m = \sqrt[n_m]{g_m(\beta_1, ..., \beta_{m-1})}$.

Exemplul 6. Cu $g_1 = 2$, $g_2 = 6x_1^2 + 5x_1 + 3$ și $g(x_1, x_2) = (1 + 3x_1)x_2 + 7x_1 + 2$ și $n_1 = 1$ și $n_2 = 4$, se obține expresia radical β:

$$\beta = g(\beta_1, \beta_2) = (1 + 3\sqrt{2})^3 \sqrt[4]{6(\sqrt{2})^3 + 5\sqrt{2} + \sqrt{3}} + 7\sqrt{2} + 2$$

peste corpul numerelor raționale. Aici se obține:

$$\beta_1 = \sqrt{2} \quad \text{și} \quad \beta_2 = \sqrt[4]{3 + 5\sqrt{2} + 6(\sqrt{2})^3}$$

O ecuație $f(x)=0$ este *rezolvabilă prin radicali* peste P dacă soluțiile ei sînt expresii radicali peste P. În limbajul teoriei corpurilor o expresie radical corespunde unui șir de corpuri:

$$P = K_0 \subseteq K_0(\beta_1) = K_1 \subseteq K_1(\beta_2) = K_2 \subseteq K_2(\beta_3) = K_3 \subseteq \ldots \subseteq K_{m-1}(\beta_m) = K_m = K,$$

unde β este un element al lui K și fiecare extensie K_{i+1} peste K_i se obține prin rezolvarea unei ecuații de tipul $x^{n_i} - g_i(\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}) = 0$. În acest caz corpul K se zice rezolvabil. Astfel, în limbajul teoriei corpurilor rezolvabilitatea unei ecuații poate fi exprimată în modul următor.

Ecuația $f(x) = 0$ este rezolvabilă prin radicali dacă și numai dacă există un corp rezolvabil K care conține corpul de descompunere L al polinomului $f(x)$.

Se poate arăta că în aceste condiții corpul de descompunere L al lui $f(x)$ trebuie să fie rezolvabil:

Ecuația $f(x) = 0$ este rezolvabilă prin radicali dacă și numai dacă corpul de descompunere L al polinomului $f(x)$ se poate obține dintr-un șir de corpuri $P = K_0 \subseteq K_0(\beta_1) = K_1 \subseteq \ldots \subseteq K_{m-1}(\beta_m) = K_m = L$, în care fiecare corp $K_{i+1} = K_i(\beta_{i+1})$ se obține din K_i prin adjuncția unei soluții a ecuației binome $x^{n_i} - b_i = 0$.

Se poate arăta existența unui șir în care fiecare corp este corpul de descompunere al unei ecuații de forma $x^n - b = 0$ peste corpul precedent. Din teorema fundamentală a lui Galois rezultă existența unui șir de subgrupuri în grupul Galois G

$$G = H_m \supseteq H_{m-1} \supseteq \ldots \supseteq H_1 \supseteq H_0 = E,$$

în care fiecare subgrup este normal în predecesorul lui și grupurile factor sînt izomorfe cu grupul Galois de extensii din șirul de corpuri. Acestea sînt întotdeauna abeliene în cazul ecuațiilor binome dacă corpul de bază conține toate cele n rădăcini ale unității. De aici rezultă că grupul Galois are o serie de compoziție cu factori de ordin prim. Reciproca este de asemenea adevărată și astfel se obține criteriul:

Ecuația $f(x)=0$ este rezolvabilă prin radicali dacă și numai dacă grupul ei Galois este rezolvabil.

Deoarece grupurile simetrice de grad 2, 3 și 4 sînt rezolvabile, rezultă că ecuațiile de grad 2, 3 și 4 sînt rezolvabile prin radicali. Grupurile simetrice de grad 5 și mai mare nu sînt însă rezolvabile și de aceea nu există formule pentru soluțiile ecuațiilor de grad mai mare sau egal cu 5. Acest rezultat a fost găsit în mod independent de către Galois și Abel. Abel nu a reușit însă să dea un criteriu general de rezolvabilitate prin radicali.

Ecuația cubică. Forma redusă a ecuației cubice (vezi cap. 4) este $x^3 + px + q, = 0$, unde p și q sînt elemente ale unui corp P. Grupul Galois al ecuației este S_3. Seria de compoziție $S_3 \supseteq A_3 \supseteq E$ a grupului Galois corespunde unui șir de corpuri $P \subseteq K \subseteq N$. Au loc relațiile $[S_3 : A_3] = [K : P] = 2$ și $[A_3 : E] = [N : K] = 3$. Pentru a simplifica lucrurile să presupunem că P conține rădăcinile cubice ale unității. Trecerea de la P la K se face prin adjuncția la P a rădăcinii pătrate $\sqrt{D}$, unde $\sqrt{D}$ trebuie să rămînă fix la permutările din A_3. Din această condiție se obține $\sqrt{D} = \sqrt{-4p^3 - 27q^2}$. Dacă se notează soluțiile ecuației inițiale prin $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ și se formează *rezolventa lui Lagrange*, $r = \alpha_1 + \omega\alpha_2 + \bar{\omega}\alpha_3$, unde $\omega_1, \bar{\omega}$ sînt rădăcinile cubice ale unității, atunci se poate arăta că $r^3 = 27q/2 + (3/2)\sqrt{-3D} = s$ se găsește în corpuri $K = P(\sqrt{D})$. Se obține acum extensia N prin adjuncție la K a lui $r = \sqrt[3]{s}$. Rădăcinile $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ se pot calcula acum din ecuațiile $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, $\alpha_1 + \omega\alpha_2 + \bar{\omega}\alpha_3 = r$ și $\alpha_1 + \bar{\omega}\alpha_2 + \omega\alpha_3 = -3p/r$.

Construcții cu rigla și compasul. Problema construcțiilor numai cu rigla și compasul poate fi formulată astfel: dintr-o mulțime infinită de puncte date în plan, să se construiască un

anumit punct printr-un număr finit de pași, la fiecare pas procedîndu-se în unul din modurile următoare:
1. Linia poate fi folosită numai pentru a uni două puncte date sau construite anterior.
2. Compasul se poate folosi numai pentru trasarea cercurilor al căror centru se cunoaște sau a fost construit anterior.
3. Puncte noi se pot construi prin intersecția a două linii drepte, a unei drepte cu un cerc sau a două cercuri construite după regulile 1) sau 2).

Pentru a obține totalitatea punctelor ce pot fi astfel construite se transpune problema din limbaj geometric în limbaj algebric. Acest lucru se face prin introducerea unui sistem de coordonate carteziene rectangulare în care se reprezintă punctele P_1, P_2, ..., P_n în așa fel încît de exemplu punctul P_1 să fie în origine și P_2 punctul (0, 1). Dacă K este cel mai mic corp care conține coordonatele tuturor punctelor date, atunci se poate arăta prin metodele geometriei analitice că toate punctele construibile printr-un singur pas de tipul 1), 2) sau 3) trebuie să aibă coordonatele în K sau într-un corp obținut din K prin adjuncție de rădăcini pătrate. De asemenea se mai poate arăta că toate operațiile raționale și extragerea rădăcinilor pătrate se pot efectua prin succesiuni de pași de tipul 1), 2) și 3). În general se obține următorul criteriu important.

Un punct poate fi construit numai cu linia și compasul dacă și numai dacă coordonatele lui se găsesc într-un corp de extensie normal finit al lui K, al cărui grad în raport cu K este putere a lui 2.

Deoarece în multe cazuri se pune problema construcției unei cantități x date de o ecuație $f(x) = 0$, criteriul se poate reformula: O mărime x se poate construi cu rigla și compasul dacă și numai dacă ecuația $f(x) = 0$ se poate rezolva în K prin radicali de ordinul doi.

Problemele clasice ale matematicii grecești precum construirea cu rigla și compasul a unui pătrat de arie egală cu un cerc dat *(cvadratura cercului)*, împărțirea unui unghi în trei părți egale *(trisecțiunea unghiului)*, sau determinarea muchiei unui cub cu volumul dublu față de un cub dat *(duplicarea cubului)* s-au dovedit a fi imposibile. Formularea algebrică a duplicării cubului este $x^3 - 2 = 0$, unde x este latura cubului cerut. Această ecuație este ireductibilă în corpul numerelor raționale. Fiecare dintre rădăcini generează o extensie de corp de gradul 3. Un astfel de corp nu poate fi niciodată conținut într-o extensie de corp al cărui grad este o putere a lui 2.

Trisecțiunea unghiului α este echivalentă cu construcția unui segment de lungime $\cos(\alpha/3)$, unde $\cos\alpha$ este dat. Ecuația rezultată este $4[\cos\alpha/3]^3 - 3\cos(\alpha/3) - \cos\alpha = 0$. Se pune problema dacă rădăcinile ecuației $4x^3 - 3x - \cos\alpha = 0$ se găsesc într-o extensie de gradul 2^m (m număr natural) a corpului $\mathbf{Q}(\cos\alpha)$, unde $\mathbf{Q}$ este corpul numerelor raționale. Se poate arăta că ecuația este în general ireductibilă și exact ca în cazul duplicării cubului, fiecare rădăcină generează un corp extins de grad 3 și deci nu există o regulă generală de construcție cu rigla și compasul a trisecțiunii unghiului.

Cvadratura cercului se reduce la construcția unui segment de lungime $\sqrt{\pi}$. Deoarece π este transcendent în corpul numerelor raționale și deci nu satisface o ecuație algebrică, rezultă că această problemă este de asemenea nerezolvabilă.

Construcția unui poligon regulat. Rădăcinile de ordinul n ale unității divid cercul unitate în n arce egale. Un poligon regulat cu n laturi înscris în cercul unitate se poate construi numai cu rigla și compasul dacă și numai dacă n este de forma $2^l p_1 p_2 \dots p_k$, unde l este un întreg nenegativ și $p_1, p_2, \dots, p_k$ sînt *numere prime ale lui Fermat* distincte, adică numere prime de forma $2^m + 1$. Astfel, poligonul regulat poate fi construit numai cu rigla și compasul pentru $n = 3$ 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, ..., 257, ...

Aplicații. Teoria corpurilor are multe aplicații în alte domenii ale matematicii. În *teoria algebrică a numerelor*, metodele teoriei corpurilor și în special teoria lui Galois sînt aplicate în studiul aritmetic al numerelor algebrice, adică a elementelor unei extensii a corpului numerelor raționale. Diferitele clase de funcții care fac obiectul teoriei funcțiilor complexe (vezi cap. 23), de ex. funcțiile raționale sau *eliptice* formează un corp și se pot aplica în studiul lor rezultate din teoria corpurilor. Reciproc, în mod frecvent, rezultate din teoria funcțiilor complexe se aplică în algebră, de ex. la demonstrarea teoremei fundamentale a algebrei sau la studiul aprofundat al proprietăților corpului numerelor complexe. *Varietățile algebrice* vor face obiectul capitolelor 32 și 33.

17. Algebră liniară

17.1. Sisteme de ecuaţii liniare

În cap. 4, s-a examinat în ce condiţii şi prin ce mijloace se pot rezolva ecuaţii de forma $ax = b$ sau $ax + by = c$, dacă a, b şi c sînt numere raţionale, reale sau complexe. Prima ecuaţie conţine variabila x şi a doua variabilele x şi y. În ambele cazuri, variabilele apar la puterea întîi; astfel de ecuaţii se numesc *liniare*, respectiv în una sau două variabile. În general, *o ecuaţie liniară în n variabile* (sau *necunoscute*) $x_1, x_2, ..., x_n$ este o ecuaţie de forma $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$.

Numerele $a_1, a_2, ..., a_n$ se numesc *coeficienţi* şi b este *constanta* sau *termenul liber* al ecuaţiei. Pentru $n = 1$ şi $n = 2$ se obţin cazurile menţionate mai sus.

Multe probleme din matematică conduc nu la o singură ecuaţie liniară ci la un sistem de astfel de ecuaţii.

Sisteme de ecuaţii liniare. Un exemplu simplu de sistem de ecuaţii liniare simultane este dat de cele două ecuaţii alăturate. Aici a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 şi c_2 sînt numere date. O soluţie a unui astfel de sistem de ecuaţii este o pereche de numere $(\bar{x}, \bar{y})$ astfel încît dacă x se înlocuieşte prin $\bar{x}$ şi y prin $\bar{y}$, ambele ecuaţii sînt simultan satisfăcute.

$$a_1x + b_1y = c_1,$$
$$a_2x + b_2y = c_2.$$

Generalizînd această situaţie, printr-un *sistem de m ecuaţii liniare cu n variabile (necunoscute)* se înţelege un sistem de forma alăturată. În acest sistem a_{ij} şi b_i sînt numere date pentru $i = 1, ..., m$ şi $j = 1, ..., n$. Indicele i indică în ce ecuaţie a sistemului apare acest număr şi indicele j al coeficientului a_{ij} indică necunoscuta la care se referă; de ex. a_{23} este coeficientul necunoscutei x_3 în a doua ecuaţie. O singură ecuaţie liniară reprezintă un caz particular al unui sistem caracterizat prin $m = 1$.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &= b_1,\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2,\\ &\dots\\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

Un sistem de ecuaţii liniare se zice *omogen* dacă termenii constanţi $b_1, b_2, ..., b_m$ sînt toţi nuli; în caz contrar, adică dacă cel puţin un b_i este diferit de zero, sistemul se zice *neomogen*. Dacă într-un sistem neomogen toţi termenii constanţi se înlocuiesc prin zerouri, atunci se obţine *sistemul omogen asociat* sistemului dat.

O *soluţie* a unui sistem de m ecuaţii liniare cu n necunoscute este o grupă de numere $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n$ astfel încît înlocuind necunoscutele prin numerele corespunzătoare, toate ecuaţiile sînt simultan satisfăcute. O grupă de numere $c_1, c_2, ..., c_n$ se numeşte *n-uplu* şi se scrie $(c_1, c_2, ..., c_n)$. Două n-upluri $(c_1, c_2, ..., c_n)$ şi $(d_1, d_2, ..., d_n)$ sînt egale dacă şi numai dacă $c_1 = d_1$, $c_2 = d_2$, ..., $c_n = d_n$. Dacă n-uplul $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$ este o soluţie a unui sistem dat de ecuaţii liniare, este necesar să se verifice dacă valorile $\bar{x}_i$ se găsesc în domeniul fundamental de variaţie acceptat. Pentru a simplifica lucrurile se va presupune că acest domeniu este mulţimea numerelor reale (complexe) dacă coeficienţii şi constantele sistemului sînt numere reale (respectiv complexe).

Studiul soluţiilor unui sistem de ecuaţii liniare conduce la trei probleme care trebuie tratate separat. Prima este problema *existenţei* soluţiilor. Aceasta se referă la condiţiile în care un sistem admite soluţii; de ex. ecuaţia $0 \cdot x = 1$ nu are soluţii. A doua problemă este aceea a găsirii unei *metode* de obţinere a soluţiei pentru un sistem dat de ecuaţii liniare. În sfîrşit, a treia problemă este aceea a găsirii *tuturor soluţiilor* unui sistem dat de ecuaţii liniare.

Existenţa soluţiilor. Următoarele proceduri aplicate unui sistem de ecuaţii liniare nu modifică rezolvabilitatea sau nerezolvabilitatea acestuia şi nici eventualele soluţii:

1. Adunarea unei ecuaţii a sistemului la o altă ecuaţie a sistemului.
2. Înmulţirea ecuaţiilor sistemului prin factori nenuli.
3. Schimbarea ordinii ecuaţiilor.

Exemplul 1.

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{array}\right| \begin{array}{r} +1 \\ -2 \end{array} \quad \left.\begin{array}{r} 2x_1 + x_2 = 1 \\ -2x_1 + 6x_2 = -8 \end{array}\right| + \quad \left.\begin{array}{r} 2x_1 + x_2 = 1 \\ 7x_2 = -7 \end{array}\right|$$

Toate sistemele au soluția unică $\bar{x}_1 = 1$, $\bar{x}_2 = -1$.

Următorul criteriu dă un indiciu teoretic asupra rezolvabilității unui sistem. El mai poate fi folosit în practică pentru a arăta că un sistem dat nu are soluții.

Un sistem de ecuații liniare are o soluție dacă și numai dacă este îndeplinită următoarea condiție: dacă prin aplicarea repetată a operațiilor 1 și 2 se ajunge la o ecuație în care toți coeficienții sînt nuli, atunci termenul liber al ecuației este de asemenea nul.

Exemplul 2. Sistemul alăturat de ecuații nu are soluție. După cum arată numerele scrise cu roșu, ecuațiile sînt înmulțite cu -1, 1 și -1 respectiv și apoi se adună; rezultă ecuația

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 1$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 \quad = -1 \end{array}\right| \begin{array}{r} -1 \\ +1 \\ -1 \end{array}$$

Ecuații omogene și mulțimea soluțiilor lor. Problema găsirii tuturor soluțiilor unei ecuații neomogene date se poate reduce la problema mai simplă a găsirii tuturor soluțiilor sistemului omogen asociat. Aceasta este o consecință a următoarelor proprietăți, ale soluțiilor unui sistem omogen (se observă analogia cu operațiile 1 și 2).

1. Dacă $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$ și $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_n)$ sînt soluții ale unui sistem omogen de ecuații liniare, atunci și $(\bar{x}_1 + \bar{y}_1, \bar{x}_2 + \bar{y}_2, ..., \bar{x}_n + \bar{x}_n)$ este o soluție a aceluiași sistem.

2. Dacă $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$ este o soluție, atunci și $(c\bar{x}_1, c\bar{x}_2, ..., c\bar{x}_n)$ este o soluție.

3. n-uplul $(0,0, ..., 0)$ este soluție a oricărui sistem omogen și se numește soluție *banală*.

Din proprietățile 1 și 2 rezultă că dacă $(\bar{x}_1^{(1)}, \bar{x}_2^{(1)}, ..., \bar{x}_n^{(1)})$; $(\bar{x}_1^{(2)}, \bar{x}_2^{(2)}, ..., \bar{x}_n^{(2)})$, ..., $(\bar{x}_1^{(m)}, \bar{x}_2^{(m)}, ..., \bar{x}_n^{(m)})$ sînt m soluții ale unui sistem omogen de ecuații liniare, atunci $\lambda_2(\bar{x}_1^{(1)}, \bar{x}_2^{(1)}, ..., \bar{x}_n^{(1)}) + \lambda_2(\bar{x}_1^{(2)}, \bar{x}_2^{(2)}, ..., \bar{x}_n^{(2)}) + ... + \lambda_m(\bar{x}_1^{(m)}, \bar{x}_2^{(m)}, ..., \bar{x}_n^{(m)}) = (\lambda_1\bar{x}_1^{(1)} + \lambda_2\bar{x}_1^{(2)} + ... + \lambda_m\bar{x}_1^{(m)}, ..., \lambda_1\bar{x}_n^{(1)} + \lambda_2\bar{x}_n^{(2)} + ... + \lambda_m\bar{x}_n^{(m)})$ este o soluție a sistemului pentru orice numere reale λ_i $(i = 1, 2, ..., n)$. O astfel de sumă de multipli se numește *combinație liniară*. Astfel din 1 și 2 rezultă că orice combinație liniară de soluții ale unui sistem omogen de ecuații liniare este tot soluție.

Aceste proprietăți nu sînt valabile pentru soluțiile sistemelor de ecuații neomogene. Totuși, următoarea teoremă stabilește legătura dintre soluțiile unui sistem neomogen și acelea ale sistemului omogen asociat.

Dacă se adună o soluție a sistemului omogen la o soluție arbitrară a sistemului neomogen, atunci rezultatul este o soluție a sistemului neomogen. Dacă se alege o soluție arbitrară dar fixată a sistemului neomogen, atunci orice soluție a sistemului neomogen se poate obține prin adăugarea unei soluții a sistemului omogen la soluția aleasă.

Rezolvarea prin eliminare și algoritmul lui Gauss. Această metodă poate fi folosită pentru găsirea unei singure soluții din totalitatea acestora, pentru un sistem de ecuații liniare dat.

Algoritmul se pretează la folosirea lui pe calculator și din acest motiv a căpătat o importanță mai mare în ultimii ani. Ideea de bază a metodei este următoarea: folosind operațiile 1 și 3, mulțimea dată de m ecuații cu n necunoscute se transformă într-o nouă mulțime de m ecuații cu n necunoscute în care una dintre necunoscute, de ex. x_1 apare într-o singură ecuație. Se spune că x_1 a fost *eliminat* din celelalte $m - 1$ ecuații. Prin aceeași metodă aceste $m - 1$ ecuații se transformă în așa fel încît o altă necunoscută ex. x_2 apare numai în una dintre acestea. Repetînd procedeul, se ajunge în final la un sistem în care x_1 apare doar în prima ecuație, x_2 numai în a doua ș.a.m.d. Acest sistem se rezolvă ușor.

Următorul exemplu foarte simplu ilustrează algoritmul lui Gauss.

Exemplul 3

$$\begin{array}{rl} 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 & (1) \\ 4x_2 - x_3 = 5 & (2) \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 & (3) \\ \hline 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 & (1') \\ 4x_2 - x_3 = 5 & (2') \\ x_3/3 = 1 & (3') \end{array}$$

Ecuația 2 nu conține pe x_1, această variabilă apare numai în ecuațiile (1) și (3). Înmulțind pe (1) cu $-2/3$ și adunînd-o la (3), se obțin ecuațiile (1′), (2′) și (3′). Cum x_2 lipsește din (3′), nu mai este necesar să fie eliminat. Din (3′) se poate vedea ușor că $\bar{x}_3 = 3$ și apoi substituind această valoare în (2′) se obține valoarea $\bar{x}_2 = 2$ și din (1′) $\bar{x}_1 = 1$.

Un exemplu mai dificil este acela cînd se dau trei ecuații cu patru necunoscute cu coeficienți generali. La aplicarea operației 3, se poate presupune, dacă este necesar, că a_{11} în sistemul alăturat S este diferit de zero.

$$\boxed{S}\quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 &\quad (1)\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 &\quad (2)\\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3 &\quad (3) \end{aligned}$$

Atunci sistemul S_1 se poate obține din S scăzînd ecuația (1) înmulțită cu a_{21}/a_{11}, respectiv a_{31}/a_{11} din ecuațiile (2) și (3) respectiv.

$$\boxed{S_1}\quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 &\quad (1')\\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + a'_{24}x_4 &= b'_2 &\quad (2')\\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + a'_{34}x_4 &= b'_3 &\quad (3') \end{aligned}$$

Aici $a'_{ij} = a_{ij} - a_{i1}a_{1j}/a_{11}$ și $b'_i = b_i - a_{i1}b_1/a_{11} (i = 2, 3; j = 2, 3, 4)$. Dacă toți coeficienții în (2') și (3') sînt nuli și b'_2 sau b'_3 sînt diferiți de zero, atunci după criteriul din paragraful precedent sistemul nu are soluție. Dacă pe de altă parte $b'_2 = b'_3 = 0$, atunci x_2, x_3 și x_4 pot fi aleși în mod arbitrar și x_1 se determină din ecuația (1). Dacă nu are loc nici unul din aceste cazuri, atunci eventual schimbînd (2') și (3') între ele și renumerotînd necunoscutele, se poate aranja ca a'_{22} să fie diferit de zero. Pentru a nu încărca notațiile, vom presupune că sistemul S_1 satisface această condiție (în exemplul alăturat).

Sistemul S_2 se obține din S_1, scăzînd ecuația (2') înmulțită cu a'_{32}/a'_{22} din ecuația (3'). Aici $a''_{3j} = a'_{3j} - a'_{32}a'_{2j}/a'_{22}$, și $b''_3 = b'_3 - a'_{32}b'_2/a'_{22}$ $(j = 3, 4)$. Cum în etapa următoare dacă $a''_{33} = a''_{44} = 0$, trebuie deosebite două cazuri. Dacă $b''_3 = 0$, atunci x_3 și x_4 pot fi aleși în mod arbitrar și x_1 și x_2 se determină din (1") și (2").

$$\boxed{S_2}\quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 &\quad (1'')\\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + a'_{24}x_4 &= b'_2 &\quad (2'')\\ a''_{33}x_3 + a''_{34}x_4 &= b''_3 &\quad (3'') \end{aligned}$$

Fie acum $a''_{33} \neq 0$. Dacă x_4 se ia egal cu un număr d, atunci x_3 se determină din ecuația (3"), x_2 din ecuația (2") și, în sfîrșit, x_1 din ecuația (1"). Pentru orice d există cîte o soluție și toate soluțiile se pot obține în acest mod. Dacă $a''_{33} = 0$ dar $a''_{34} \neq 0$, atunci soluțiile se obțin în același mod schimbînd pe x_3 și x_4.

Exemplul 4. Din sistemul dat S_1 se obține sistemul S_2 prin schimbarea primelor două linii între ele. În S_2 se scade ecuația (1) înmulțită cu $0/1 = 0$ din (2) și (1) înmulțită cu $3/1 = 3$ din (3). Se obține astfel sistemul S_3. S_4 se obține din S_3 prin schimbarea lui x_2 cu x_4 și se renotează atunci prin x'_4 respectiv x'_2. În S_4 se scade apoi (2') înmulțită cu $-4/4$ din (3'), adică cele două ecuații se adună obținîndu-se S_5. Dacă în S_5 se pune $\bar{x}'_4 = \bar{x}_2 = d$ atunci $\bar{x}_3 = 2$, $\bar{x}'_2 = \bar{x}_4 = 1$ și $\bar{x}_1 = -7 + 2d$. Astfel, mulțimea $\mathbf{S}$ a soluțiilor lui S_1 este $\mathbf{S} = \{(-7 + 2d, d, 2, 1);\ d\ real\}$.

$$\boxed{S_1}\quad \begin{aligned} - x_3 + 4x_4 &= 2\\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 4\\ 3x_1 - 6x_2 + 8x_3 + 5x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{S_2}\quad \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 4 &\quad (1)\\ - x_3 + 4x_4 &= 2 &\quad (2)\\ 3x_1 - 6x_2 + 8x_3 + 5x_4 &= 0 &\quad (3) \end{aligned}$$

$$\boxed{S_3}\quad \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 4\\ - x_3 + 4x_4 &= 2\\ - 4x_3 - 4x_4 &= -12 \end{aligned}$$

$$\boxed{S_4}\quad \begin{aligned} x_1 + 3x'_2 + 4x_3 - 2x'_4 &= 4 &\quad (1')\\ 4x'_2 - x_3 &= 2 &\quad (2')\\ -4x'_2 - 4x_3 &= -12 &\quad (3') \end{aligned}$$

$$\boxed{S_5}\quad \begin{aligned} x_1 + 3x'_2 + 4x_3 - 2x'_4 &= 4\\ 4x'_2 - x_3 &= 2\\ - 5x_3 &= -10 \end{aligned}$$

Exemplul 5

Fie două sisteme cu patru ecuații în trei variabile cu aceiași coeficienți dar membrul al doilea diferit.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6\\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 1\\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 &= 8\\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 7 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6\\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0\\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 &= 8\\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

Aplicarea algoritmului conduce la următoarele sisteme:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6\\ -x_2 - 3x_3 &= -11\\ 13x_3 &= 39\\ 0 &= 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6\\ -x_2 - 2x_3 &= -12\\ 13x_3 &= 39\\ 0 &= -11/13 \end{aligned}$$

Sistemul din stînga are soluția unică $\bar{x}_3 = 3$, $\bar{x}_2 = 2$ și $\bar{x}_1 = 1$ și sistemul din dreapta nu are soluții, ultima egalitate fiind contradictorie.

Interpretarea geomerică. Se știe din geometria analitică că o ecuație liniară cu două necunoscute definește înt plan o *dreaptă*. Dacă se asociază fiecărei soluții $(\bar{x}, \bar{y})$ punctul

de coordonate $(\bar{x}, \bar{y})$, atunci imaginea mulțimii soluțiilor este o dreaptă. Tot așa două ecuații cu două necunoscute determină o pereche de drepte în plan și soluțiile, dacă există, trebuie să fie *punctele de intersecție* ale celor două drepte. Se deosebesc următoarele cazuri (vezi fig. 4.2.2, 4.2.3).

(1) Există o infinitate de soluții și o infinitate de puncte de intersecție a celor două drepte. În acest caz cele două drepte coincid; uneia dintre necunoscute i se poate da o valoare arbitrară și cealaltă este determinată.

(2) Sistemul admite o soluție unică. În acest caz dreptele se intersectează într-un singur punct.

(3) Sistemul nu are soluții. Dreptele sînt distincte și paralele.

În mod similar se interpretează geometric sistemele de trei ecuații cu trei necunoscute. Fiecare ecuație determină *un plan* în spațiul cu trei dimensiuni. Soluțiile sistemului sînt punctele conținute în toate planele.

17.2. Determinanți

În metodele de rezolvare a sistemelor de n ecuații cu n necunoscute, diferite de metoda lui Gauss, au un rol important unele funcții de coeficienții sistemului, numite determinanți. Aceste funcții sînt importante și pentru alte ramuri ale matematicii ca de ex. calculul diferențial și integral pentru funcții de mai multe variabile.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Un *determinant* este o funcție de n^2 variabile, scrisă de regulă ca schemă pătrată avînd forma alăturată. Numerele a_{ij} se numesc *elemente* ale determinantului. *Linia* i a determinantului este formată din elementele care îl au pe i ca prim indice: $(a_{i1}, \dots, a_{in})$. *Coloana* j a determinantului este formată din elementele care îl au pe j ca al doilea indice: $(a_{1j}, \dots, a_{nj})$. *Valoarea* determinantului este $\sum(-1)^k a_{1s_1}, a_{2s_2}, \dots, a_{ns_n}$ unde indicii $s_1, \dots, s_n$ constituie o permutare a numerelor $1, \dots, n$. Suma se ia pentru toate permutările posibile ale numerelor $1, \dots, n$ și termenii sumei sînt toate produsele posibile care conțin exact un element din fiecare linie și din fiecare coloană. Deoarece există $n!$ astfel de permutări, suma va avea $n!$ termeni. Semnul $(-1)^k$ este determinat de numărul k al inversiunilor din permutare; de ex. în produsul $a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}$, permutarea $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ are $k = 3$ inversiuni (mai exact 3 înaintea lui 1, 3 înaintea lui 2 și 4înainte de 2) și astfel semnul este -1.

Exemplul 1. Calculul determinanților 2×2. Permutările $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ și $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ au respectiv 0 și 1 inversiuni.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Exemplul 2. Calculul determinanților 3×3. O permutare π de trei elemente conține k inversiuni.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

π	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
k	0	1	1	2	2	3

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Regulile de calcul pentru determinanții 2×2 și 3×3 pot fi ușor memorate cu ajutorul schemelor alăturate, unde la determinantul 3×3 se adaugă la sfîrșit primele două coloane.

Numerele legate printr-o linie roșie se înmulțesc, produsele lor se adună și din rezultat se scade suma produselor numerelor legate prin linie albastră. Rezultatul reprezintă valoarea determinantului. Pentru determinantul 3×3 această metodă poartă numele de *regula lui Sarrus.*

Proprietăţi ale determinanţilor. Din definiţia determinantului se deduc următoarele propoziţii:

1. Determinantul este o funcţie liniară de elementele fiecărei linii.
2. Dacă se schimbă între ele două linii, determinantul îşi schimbă semnul.
3. Valoarea determinantului este zero dacă una dintre linii este o combinaţie liniară a celorlalte, în particular, dacă elementele unei linii sînt toate nule sau dacă două linii sînt identice.
4. Valoarea determinantului nu se schimbă dacă se adaugă la o linie o combinaţie liniară a altor linii.
5. Valoarea determinantului nu se schimbă dacă se schimbă coloanele cu liniile şi invers.

Prima propoziţie înseamnă: (1) Un factor comun tuturor elementelor unei linii poate fi scris ca factor al determinantului. (2) Dacă toate elementele unei linii se pot scrie ca o sumă de m termeni, atunci întregul determinant poate fi scris ca o sumă de m determinanţi în care celelalte linii rămîn neschimbate. De exemplu:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ (a_{21}+b_{21}) & (a_{22}+b_{22}) & (a_{23}+b_{23}) \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Propoziţiile 3 şi 4 sînt consecinţe imediate ale propoziţiilor 1 şi 2, iar 5 înseamnă că toate teoremele privind liniile determinanţilor sînt adevărate şi pentru coloane.
Regulile 3 şi 4 sînt frecvent folosite în calculul determinanţilor.

Exemplul 3 : $\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 9 & 8 \end{vmatrix} = 0\,; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0\,; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0\,;$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & 8 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 7 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0+1 & 1+1 & 4-1 & 2+3 \\ 1 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 7 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 7 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+\,2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 7 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 \\ (1-0) & (-1-1) & (4-4) & (2-2) \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 7 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 7 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \text{(v. ex. 5)}$$

Minori. Dacă se înlătură dintr-un determinant oricare m coloane şi oricare m linii, determinantul $(n-m)\times(n-m)$, care rezultă, se numeşte *minor* al determinantului iniţial.

Exemplul 4. Dacă înlăturăm liniile 2 şi 5 şi coloanele 2 şi 4 din determinantul 5×5, rezultă minorul 3×3.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{15} \\ a_{31} & a_{33} & a_{35} \\ a_{41} & a_{43} & a_{45} \end{vmatrix}$$

Dacă se înlătură numai linia i, şi coloana j se obţine minorul $(n-1)\times(n-1)$. Valoarea acestui minor multiplicat cu semnul $(-1)^{i+j}$ poartă numele de *cofactor* sau *complement algebric* al elementelor a_{ij} şi se notează cu A_{ij}.

Calculul determinanților. Complementii algebrici joacă un rol însemnat în calculul determinanților după cum se vede din următoarea:

Teoremă (dezvoltarea unui determinant după linii): Orice determinant D poate fi calculat cu ajutorul elementelor unei linii fixate și a complementilor algebrici corespunzători: $D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$.

Din propoziția 5 rezultă că se poate enunța un rezultat analog pentru coloane.

Exemplul 5. Dezvoltarea după linia a doua.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 7 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} + (-2)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 0\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 7 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 7 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -189.$$

Astfel teorema de dezvoltare reduce calculul determinanților $n \times n$ la calculul determinanților $(n-1)\times(n-1)$. Determinanții cu 2 sau 3 coloane se pot calcula direct prin această metodă. Din exemplu se vede că este avantajoasă dezvoltarea după o linie cu multe zerouri. Regulile 1 și 5 se folosesc în mod frecvent pentru obținerea unor astfel de linii.

Rezolvarea sistemelor de ecuații liniare prin determinanți. Dacă se formează un determinant D cu coeficienții a_{ij} ai unui sistem de n ecuații liniare cu n necunoscute (în ordinea în care aceștia apar în sistem), atunci se definesc determinanții D_j obținuți din D prin înlocuirea coloanei j cu coloana termenilor liberi. Dacă valoarea lui D nu este nulă, determinanții D și D_j se pot folosi la rezolvarea sistemului.

Regula lui Cramer. Dacă determinantul D al coeficienților unui sistem de n ecuații liniare cu n necunoscute este diferit de zero, atunci $\bar{x}_j = D_j/D$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ este soluția unică a acestui sistem.

Exemplul 6. Fie sistemul din exemplul 3 care s-a rezolvat prin eliminare

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ 4x_2 - x_3 &= 5 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}\right\} \quad D = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 8, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 12; \quad \begin{aligned} \bar{x}_1 &= D_1/D = 1, \\ \bar{x}_2 &= D_2/D = 2, \\ \bar{x}_3 &= D_3/D = 3. \end{aligned}$$

Pentru un sistem omogen toți determinanții D_j sînt nuli. De aceea un astfel de sistem admite soluții nebanale numai dacă D este egal cu zero. Și reciproca este adevărată.

Un sistem omogen de n ecuații liniare cu n necunoscute admite soluții nebanale dacă și numai dacă determinantul coeficienților este nul.

17.3. Spații vectoriale

Introducere. Din considerațiile făcute în paragraful „Ecuații omogene" se poate observa că soluțiile unui sistem omogen reprezintă un exemplu de mulțime de obiecte ce pot fi adunate sau înmulțite cu un număr în așa fel încît rezultatul să rămînă în mulțime. O generalizare și abstractizare a acestor proprietăți duce la conceptul de *spațiu vectorial,* fundamental pentru întreaga algebră liniară.

Un spațiu vectorial este o mulțime de obiecte sau elemente ce pot fi adunate între ele și înmulțite cu numere (rezultatul rămînînd un element al mulțimii) în așa fel încît regulile obișnuite de calcul să rămînă valabile.

Algebra liniară poate fi privită ca teoria spațiilor vectoriale. Elementele unui spațiu vectorial se numesc *vectori,* numerele prin care se înmulțesc acestea se numesc *scalari.* Mulțimea scalarilor poate fi mulțimea numerelor raționale, reale sau complexe. Se pot folosi și structuri mai generale (corpuri, vezi cap. 16). În cele ce urmează se va lua drept mulțime a scalarilor, mulțimea numerelor reale. Proprietățile caracteristice ale unui spațiu vectorial V sînt următoarele ($\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ sînt elemente ale spațiului și a și b scalari):

1. *Asociativitatea adunării:* $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$,
2. *Comutativitatea adunării:* $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$,
3. *Existența elementului nul:* Există un element $\mathbf{0}$ în V astfel încît $\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x}$ pentru orice $\mathbf{x}$ din V.
4. *Existența elementului invers:* Pentru orice $\mathbf{x}$ din V există un element $-\mathbf{x}$ în V astfel încît $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = o$.
5. *Asociativitatea înmulțirii:* $a(b\mathbf{x}) = (ab)\mathbf{x}$.
6. *Existența elementului unitate:* $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$.
7. *Prima lege de distributivitate:* $a(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = a\mathbf{x} + a\mathbf{y}$.
8. *A doua lege de distributivitate:* $(a + b)\mathbf{x} = a\mathbf{x} + b\mathbf{x}$.

Orice mulțime în care s-a definit adunarea elementelor și o înmulțire cu scalari pentru care rezultatul aparține tot mulțimii și satisface proprietățile 1—8 este un spațiu vectorial.

Exemple de spații vectoriale. 1. Mulțimea tuturor *polinoamelor* formează un spațiu vectorial. Dacă $f(x) = a_nx^n + ... + a_1x + a_0$ și $g(x) = b_mx^m + ... + b_1x + b_0$ sînt polinoame și $n \geqslant m$, atunci suma lor este $f(x) + g(x) = a_nx^n + ... + a_{m+1}x^{m+1} + (a_m + b_m)x^m + ...$ $... + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$. Produsul $a \cdot f(x)$ al unui număr real cu polinomul $f(x)$ este $a \cdot f(x) = (aa_n)x^n + ... + (aa_1)x + (aa_0)$. Proprietățile 1—8 sînt ușor de verificat. Elementul nul $\mathbf{0}$ este polinomul $f(x) = 0$.

2. Mulțimea tuturor *funcțiilor derivabile* și de asemenea mulțimea *funcțiilor integrabile* formează spații vectoriale. Elementul zero este tot funcția $f(x) = 0$. Funcțiile se adună prin adunarea valorilor lor și se înmulțesc cu un număr prin înmulțirea valorilor cu acest număr.

3. Mulțimile de *numere reale* sau *complexe* formează un spațiu vectorial cu regulile de adunare și înmulțire obișnuite.

4. Mulțimea n-uplurilor de numere reale $(a_1, a_2, ..., a_n)$ formează un spațiu vectorial $\mathbf{R}^n$ pentru orice număr natural n. Adunarea se definește prin $(a_1, a_2, ..., a_n) + (b_1, b_2, ..., b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n)$ și înmulțirea prin $a(a_1, a_2, ..., a_n) = (aa_1, aa_2, ..., aa_n)$.

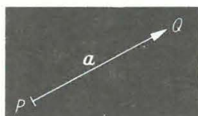
Algebra vectorială

Spațiul vectorial V_3. În acest paragraf se studiază proprietățile unui spațiu vectorial deosebit de important. Acesta joacă un rol central în fizică și tehnologie și ilustrează importanța spațiilor vectoriale și a întregii algebre liniare pentru aplicațiile practice. Denumirea de vector s-a folosit numai pentru elemente ale acestui spațiu particular la început și abia mai tîrziu a fost generalizată în terminologia actuală.

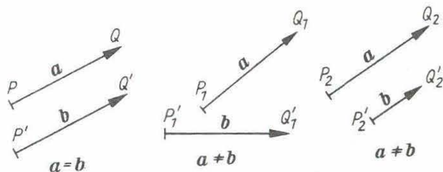
Vectorii se vor descrie mai întîi geometric pornind de la spațiul cu trei dimensiuni în care s-a definit lungimea, lățimea și înălțimea. Se definește o translație a spațiului asociind fiecărui punct P un punct Q astfel încît segmentele (orientate) care unesc punctele cu imaginile lor sînt paralele și au aceeași lungime. O astfel de translație mai poartă numele de *vector.* Din definiție rezultă că un vector este complet determinat dacă se cunoaște efectul lui

asupra unui singur punct, adică dacă se cunoaște punctul Q asociat lui P. De aceea vectorul se poate caracteriza prin segmentul $\overrightarrow{PQ}$, unde săgeata indică orientarea de la P la Q. Un astfel de segment orientat este un *reprezentant* al vectorului. Punctul P poartă numele de *punct inițial* sau *punct de aplicație* iar Q este *punctul de terminație* sau *extremitate* a vectorului (fig. 17.3.1). Pentru orice punct P, există un reprezentant al oricărui vector avînd pe P ca punct inițial și orice punct Q apare ca extremitate a unui anumit reprezentant. Diferiți reprezentanți ai aceluiași vector sînt paraleli și au aceeași lungime. Are deci sens să se definească *lungimea* sau *modulul* sau *norma* unui vector ca distanța dintre punctele P și Q pentru orice reprezentant al lui **a**. Lungimea lui **a** se notează prin $|\mathbf{a}|$ sau $|\overrightarrow{PQ}|$. Ea este întotdeauna o cantitate nenegativă. Vectorii de lungime 1 se numesc *vectori unitate*.

Un vector este o translație a spațiului cu trei dimensiuni



17.3.1. Reprezentant al unui vector



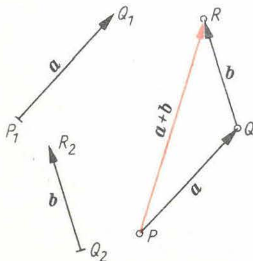
17.3.2. Egalitatea vectorilor

În cele ce urmează majoritatea celorlalte concepte ale algebrei vectoriale se vor introduce cu ajutorul reprezentanților. Dar este incorect să se identifice vectorul cu un singur reprezentant. Dificultățile ce apar cînd se face o astfel de identificare pot fi evitate dacă se specifică că printr-o translație paralelă a unui reprezentant al unui vector se obține tot un reprezentant al aceluiași vector. Se poate enunța propoziția:

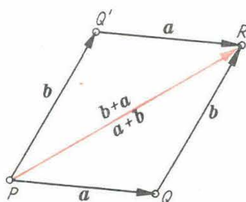
Doi vectori sînt egali dacă și numai dacă oricare din reprezentanții lor au aceeași lungime și aceeași direcție. Toate segmentele paralele de lungime egală și cu aceeași orientare sînt reprezentanți ai aceluiași vector (fig. 17.3.2).

Pentru a obține un spațiu vectorial trebuie definite adunarea vectorilor și înmulțirea cu scalari.

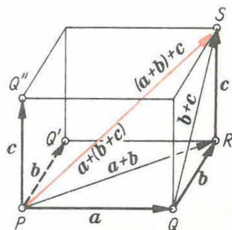
Adunarea vectorilor. Suma a doi vectori **a** și **b** este translația $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ obținută prin efectuarea succesivă a translațiilor **a** și **b**. Folosind reprezentanți, suma poate fi definită în modul următor: Dacă $\overrightarrow{PQ}$ este un reprezentant al lui **a** în P și $\overrightarrow{QR}$ un reprezentant al lui **b** în Q, atunci $\overrightarrow{PR}$ este un reprezentant al lui $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ (fig. 17.3.3). Se poate vedea ușor că adunarea astfel definită nu depinde de alegerea reprezentanților. Dacă se consideră reprezentanții $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PQ'}$, $\overrightarrow{Q'R}$ și $\overrightarrow{QR}$ ai lui **a** și **b** în P, **a** în Q' și **b** în Q, se obține un paralelogram cu diagonala $\overrightarrow{PR}$ reprezentînd atît pe $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ cît și pe $\mathbf{b} + \mathbf{a}$ (fig. 17.3.4). În consecință $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ și deci *adunarea este comutativă*. Tot așa de ușor se verifică *asociativitatea adunării* $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ (fig. 17.3.5).



17.3.3. Adunarea vectorilor



17.3.4. Comutativitatea adunării vectorilor



17.3.5. Asociativitatea adunării vectorilor $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$

Din aceste legi rezultă următoarele reguli de adunare a mai mult decît doi vectori:

Mai mulţi vectori se pot aduna alegînd cîte un reprezentatnt pentru fiecare vector, astfel încît extremitatea fiecărui reprezentant să fie punct iniţial al vectorului următor. Suma sau rezultanta este vectorul reprezentat prin segmentul care porneşte din punctul iniţial al primului reprezentant şi se termină în extremitatea ultimului reprezentant.

Vectorul nul. Translaţia prin care P este dus în P şi care invariază astfel punctele spaţiului defineşte *vectorul nul* care se notează cu $\mathbf{0}$. Acestui vector nu i se poate ataşa o anumită direcţie şi lungimea lui este egală cu 0. El are proprietatea că $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ pentru orice vector $\mathbf{a}$.

Scăderea. Pentru a defini scăderea vectorilor se foloseşte existenţa inversului unic pentru orice vector. Dacă $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 0$, atunci $\mathbf{b} = -\mathbf{a}$ şi se obţine un reprezentant al lui $\mathbf{b}$ schimbînd între ele punctul iniţial şi extremitatea unui reprezentant al lui $\mathbf{a}$ (fig. 17.3.6). Astfel, $-\mathbf{a}$ are aceeaşi lungime ca şi $\mathbf{a}$ dar direcţia lui este opusă direcţiei lui $-\mathbf{a}$. În particular $\mathbf{0} = -\mathbf{0}$.

Acum are sens să se definească diferenţa $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ a doi vectori prin suma lui $\mathbf{a}$ cu $-\mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$.

17.3.6. Reprezentarea a doi vectori opuşi

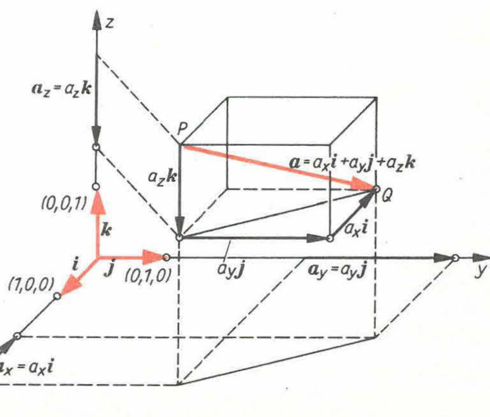
Înmulţirea unui vector cu scalari. Dacă punctele P, Q şi $Q'(P \neq Q,\ P \neq Q')$ se găsesc pe o dreaptă, atunci $\overrightarrow{PQ}$ şi $\overrightarrow{PQ'}$ sînt reprezentanţi ai vectorilor $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{a}'$ cu aceeaşi direcţie sau cu direcţii opuse. Totuşi, în general, lungimile lui $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{a}'$ vor fi diferite. Există un număr real $d > 0$ astfel încît $\mathbf{a}' = d \cdot |\mathbf{a}|$, definit, prin $d = |\mathbf{a}'|/|\mathbf{a}|$ (fig. 17.3.7). Dacă $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{a}'$ au aceeaşi direcţie, se defineşte $|\mathbf{a}'| = d\mathbf{a}$ cu $d = |\mathbf{a}'|/|\mathbf{a}|$; dacă au direcţii diferite, se defineşte $\mathbf{a}' = -d\mathbf{a}$. Se ajunge astfel la următoarea definiţie, care acoperă şi cazurile $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ sau $d = 0$. *Produsul* $d \cdot \mathbf{a}$ al unui vector $\mathbf{a}$ cu un număr real d este vectorul de lungime $d \cdot |\mathbf{a}|$, avînd aceeaşi direcţie ca şi $\mathbf{a}$ dacă $d > 0$ şi direcţie opusă dacă $d < 0$. Pentru $d = 0$, avem $\mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

În particular $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$, $(-1) \cdot \mathbf{a} = -\mathbf{a}$, $d \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ pentru orice d şi $n \cdot \mathbf{a} = \underbrace{\mathbf{a} + \mathbf{a} + \ldots + \mathbf{a}}_{n \text{ termeni}}$, pentru orice număr natural. Dacă $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, atunci vectorul $\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ are lungimea 1, deci este un vector unitate care se va nota în cele ce urmează prin $\mathbf{a}^0$. Astfel, $\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cdot \mathbf{a}^0$. Se pot uşor verifica proprietatea de *asociativitate a înmulţirii* şi cele două proprietăţi de *distributivitate*. În acest mod s-a construit un *spaţiu vectorial* compus din toate *translaţiile spaţiului cu trei dimensiuni. Acest spaţiu se va nota cu* V_3.

17.3.7. Înmulţirea vectorilor cu scalari

Componente şi coordonate în V_3. Pentru a transpune consideraţiile geometrice într-o formă adecvată pentru calcule algebrice se introduce un sistem de coordonate, de ex. un sistem de coordonate ortogonale (carteziene) cu axele Ox, Oy, Oz.

Proiecţiile ortogonale pe axe ale unui reprezentant $\overrightarrow{PQ}$ al vectorului $\mathbf{a}$ sînt reprezentanţi ai unor vectori. Aceşti vectori, independenţi de alegerea reprezentanţilor se numesc *componentele* $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$, $\mathbf{a}_z$ ale lui $\mathbf{a}$ în raport cu sistemul de coordonate ales şi $\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$ (fig. 17.3.8).



17.3.8. Componentele unui vector

Dacă **i**, **j** și **k** sînt *versorii* sistemului de coordonate, adică vectorii unitate ai direcțiilor pozitive ale axelor Ox, Oy, Oz, atunci $\mathbf{a}_x = a_x \cdot \mathbf{i}$, $\mathbf{a}_y = a_y \cdot \mathbf{j}$, $\mathbf{a}_z = a_z \cdot \mathbf{k}$. Numelele reale a_x, a_y și a_z se numesc coordonatele lui **a** în raport cu sistemul de coordonate dat.

Componentele lui **a**: $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$, $\mathbf{a}_z$ (vectori)	$\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z$
Coordonatele lui **a**: a_x, a_y, a_z (numere)	$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$
Norma lui **a** cu coordonatele a_x, a_y, a_z	$\lvert\mathbf{a}\rvert = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$
Componentele și norma vectorului **a** reprezentat prin $\overrightarrow{PQ}$, $P(x_0, y_0, z_0)$, $Q(x_1, y_1, z_1)$.	$\lvert\mathbf{a}\rvert = (x_1 - x_0)\,\mathbf{i} + (y_1 - y_0)\,\mathbf{j} + (z_1 - z_0)\,\mathbf{k}$ $\lvert\mathbf{a}\rvert = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$

Dacă $\overrightarrow{PQ}$ reprezintă pe **a** și P și Q au coordonatele (x_0, y_0, z_0), respectiv (x_1, y_1, z_1), atunci componentele lui **a** sînt $(x_1 - x_0)\,\mathbf{i}$, $(y_1 - y_0)\,\mathbf{j}$ și $(z_1 - z_0)\,\mathbf{k}$ respectiv. Astfel coordonatele lui **a** sînt diferențele dintre coordonatele extremității și cele ale punctului inițial pentru un reprezentant arbitrar al lui **a**.

Cum orice vector determină un triplet de coordonate și cum orice triplet (a_1, a_2, a_3) determină un vector unic **a** cu $a_x = a_1$, $a_y = a_2$ și $a_z = a_3$, spațiul V_3 poate fi identificat cu spațiul vectorial al tripletelor de numere reale $\mathbf{R}^3$. Pentru ca această identificare să aibă sens, mai trebuie arătat că adunarea și înmulțirea cu scalari în V_3 corespunde cu adunarea și înmulțirea cu scalari în $\mathbf{R}^3$, cu alte cuvinte coordonatele lui $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ și $d \cdot \mathbf{a}$ sînt $(a_x + b_x,\ a_y + b_y,\ a_z + b_z)$ și $(da_x,\ da_y,\ da_z)$ respectiv. Desigur din $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ și $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$ rezultă că $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x)\,\mathbf{i} + (a_y + b_y)\,\mathbf{j} + (a_z + b_z)\,\mathbf{k}$ și $d \cdot \mathbf{a} = (d \cdot a_x)\,\mathbf{i} + (d \cdot a_y)\,\mathbf{j} + (d \cdot a_z)\,\mathbf{k}$.

Și pentru acest mod de scriere se pot verifica comutativitatea și asociativitatea adunării și asociativitatea pentru înmulțire și cele două legi de distributivitate. În acest caz se spune că se efectuează adunarea și înmulțirea cu ajutorul *coordonatelor*. Deoarece $-\mathbf{a} = -1 \cdot \mathbf{a}$ și deci are coordonatele $-a_x$, $-a_y$ și $-a_z$, rezultă că și scăderea se poate efectua cu ajutorul coordonatelor.

Vectorii se adună (se scad) adunînd (scăzînd) coordonatele lor; un vector se înmulțește cu un scalar înmulțind coordonatele sale prin scalarul respectiv.

Exemplul 1. Pentru $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + (1/2)\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$; $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ și $d = 2$ se obține $\mathbf{a} + \mathbf{b} = -\mathbf{i} + (5/2)\,\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$; $-\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$; $\mathbf{a} - \mathbf{b} = 5\mathbf{i} - (3/2)\,\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ și $d\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

Există astfel o aplicație bijectivă (biunivocă) a lui V_3 pe $\mathbf{R}^3$ care păstrează adunarea și înmulțirea cu scalari. Vectorii **i**, **j**, **k** sînt respectiv tripletele (1, 0, 0), (0, 1, 0) și (0, 0, 1) și vectorului arbitrar $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ îi corespunde tripletul (a_x, a_y, a_z). Cum spațiul V_3 este definit mai mult intuitiv, calculele în $\mathbf{R}^3$ sînt convenabile și dau o imagine mult mai clară a operațiilor în V_3. V_3 și $\mathbf{R}^3$ au aceeași structură ca spații vectoriale, dar mulțimea obiectelor este diferită. În cele ce urmează ele nu vor fi privite ca unul și același spațiu (vezi „Aplicații liniare").

Produsul scalar și produsul vectorial în V_3. În V_3 se mai introduc două operații naturale. Una dintre aceste operații asociază oricărei perechi de vectori un scalar și poartă numele de *produs scalar* sau *interior* și se scrie pentru vectorii **a** și **b**, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. A doua operație are ca rezultat un vector și se numește *produs vectorial* sau *exterior* și se scrie pentru vectorii **a** și **b**, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Produsul scalar poate fi generalizat pentru alte spații vectoriale, ceea ce nu este întotdeauna posibil pentru produsul vectorial.

Ambele produse au aplicații în fizică. De exemplu, lucrul mecanic efectuat de o forță **F** care se deplasează de-a lungul unei traiectorii rectilinii **s** se calculează prin produsul scalar $\mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$ iar viteza **v** a unui punct P al unui corp care se rotește în jurul unei axe se calculează ca produsul vectorial dintre raza de la axă la P și viteza unghiulară.

Produsul scalar. Reprezentanții cu același punct inițial P, ai unor vectori nenuli **a** și **b**, formează un unghi α, $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$, și un unghi β, $180° \leqslant \beta \leqslant 360°$ astfel încît $\alpha + \beta = 360°$. Unghiul $\sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ dintre vectorii **a** și **b** se definește ca cel mai mic dintre aceste unghiuri, α.

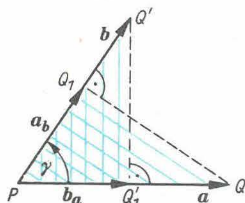
Produsul scalar $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ a doi vectori nenuli se definește prin numărul $|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\sphericalangle(\mathbf{a},\mathbf{b})$. Se poate verifica *comutativitatea* acestui produs $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$ și produsul scalar se zice *simetric*. *Asociativitatea* nu este în general valabilă pentru produsul a trei vectori deoarece $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$ este un multiplu al lui $\mathbf{c}$, pe cînd $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$ este un multiplu al lui $\mathbf{a}$. Folosind comutativitatea se obțin următoarele ecuații:

$$(a\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) = a(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) = a(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}) = (a\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}) = (\mathbf{b}\cdot a\mathbf{c}),$$

O operație efectuată cu vectori care satisface această proprietate și care este distributivă se zice *biliniară*. Produsul scalar este întotdeauna *distributiv* față de adunare, $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$.

Doi vectori $\mathbf{a}$ și $\mathbf{b}$ se zic *ortogonali* dacă $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$. Dacă $\mathbf{a}$ și $\mathbf{b}$ sînt amîndoi diferiți de zero, atunci înseamnă că $\cos\sphericalangle(\mathbf{a},\mathbf{b})=0$ sau $\alpha=90°$ și deci reprezentanții vectorilor $\mathbf{a}$ și $\mathbf{b}$ sînt *perpendiculari*.

Produsul scalar nu se poate inversa deoarece nu se poate defini un vector unic $\mathbf{a}$ astfel încît $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=c$. Pentru $\mathbf{b}$ și c dați, există o infinitate de vectori $\mathbf{a}$ care satisfac ecuația $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=c$; de ex. dacă $c=0$, atunci orice multiplu al unui vector $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$ ortogonal lui $\mathbf{b}$ va satisface ecuația. *Împărțirea vectorilor nu este permisă.*



17.3.9. Proiecția unui vector pe alt vector

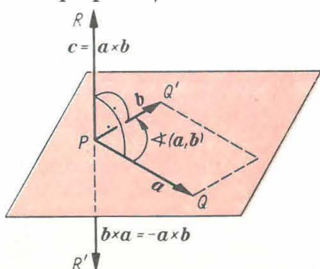
În produsul scalar $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ vectorul $\mathbf{a}$ poate fi înlocuit prin vectorul $\mathbf{a_b}$ de lungime $|\mathbf{a}|\cdot\cos\sphericalangle(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$ cu aceeași direcție sau cu direcție opusă după cum $\sphericalangle(\mathbf{a},\mathbf{b})$ este mai mic sau mai mare decît 90°. Un reprezentant al lui $\mathbf{a_b}$ se poate obține luînd proiecția perpendiculară a unui reprezentant al lui $\mathbf{a}$ pe direcția unui reprezentant al lui $\mathbf{b}$, cu același punct inițial (fig. 7.3.9). Același lucru se poate face și pentru $\mathbf{b}$. Astfel $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a_b}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b_a}\cdot\mathbf{a}$. Produsul $\mathbf{a_b}\cdot\mathbf{b}$ are proprietatea $\mathbf{a_b}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a_b}|\cdot|\mathbf{b}|$ cu $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos\sphericalangle(\mathbf{a},\mathbf{b})$.

Produsul scalar exprimat cu ajutorul coordonatelor. Pentru a calcula produsul scalar cu ajutorul coordonatelor este necesar să se calculeze întîi produsele scalare $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}$, $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}$, ..., $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}$. Din definiție rezultă că aceste produse sînt egale cu 1 dacă vectorii sînt egali și cu 0 dacă sînt diferiți. Se poate astfel obține produsul scalar al vectorilor $\mathbf{a}$ și $\mathbf{b}$ cu ajutorul coordonatelor fără a se cunoaște unghiul dintre ei și se poate folosi produsul astfel calculat la obținerea unghiului făcut de doi vectori.

Produsul scalar al versorilor	$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1$	$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}=\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=0$
Produsul scalar $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ exprimat în coordonate	$\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}$ $\mathbf{b}=b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_k\mathbf{k}$	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$
Unghiul, dacă $\|\mathbf{a}\|$ și $\|\mathbf{b}\|$ sînt diferiți de 0	$\cos\sphericalangle(\mathbf{a},\mathbf{b})=\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|}$	$=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{(a_x^2+a_y^2+a_z^2)(b_x^2+b_y^2+b_z^2)}}$

Exemplul 2. Din $\mathbf{a}=3\mathbf{i}-4\mathbf{j}$ și $\mathbf{b}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{k}$, se obține $\cos\sphericalangle(\mathbf{a},\mathbf{b})=-1/3$ și $\sphericalangle(\mathbf{a},\mathbf{b})\approx 109°28'$.

Produsul vectorial. Produsul vectorial $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ a doi vectori nenuli se definește ca vectorul $\mathbf{c}$ cu proprietățile: 1. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=0$, adică $\mathbf{c}$ este ortogonal și lui $\mathbf{a}$ și lui $\mathbf{b}$.



17.3.10. Produsul vectorial

2. $|\mathbf{c}|=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\sin\sphericalangle(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$ și 3. determinantul $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$, format cu coordonatele vectorilor $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, este nenegativ. Dacă $\mathbf{a}$ sau $\mathbf{b}$ este vectorul nul, atunci $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ este de asemenea vectorul nul.

Pentru a găsi o interpretare geometrică a produsului vectorial a doi vectori nenuli dintre care nici unul nu este multiplu scalar al celuilalt, se consideră planul determinat de doi reprezentanți ai acestora $\overrightarrow{PQ}$ și $\overrightarrow{PQ'}$ (fig. 7.3.10).

Atunci, din proprietățile date mai sus, rezultă pentru un reprezentant $\overrightarrow{PR}$ al lui **c**:

1. $\overrightarrow{PR}$ este perpendicular pe planul determinat de $\overrightarrow{PQ}$ și $\overrightarrow{PQ'}$.

2. Lungimea lui $\overrightarrow{PR}$ este $|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, care reprezintă aria paralelogramului cu laturile $\overrightarrow{PQ}$ și $\overrightarrow{PQ'}$.

3. $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PQ'}$, $\overrightarrow{PR}$ formează un *sistem orientat drept*. Aceasta înseamnă că privind din **R**, cea mai scurtă rotație posibilă ducînd $\overrightarrow{PQ}$ peste $\overrightarrow{PQ'}$ este în sensul invers acelor de ceasornic (dacă degetul mare al mîinii drepte este îndreptat în direcția lui $\overrightarrow{PQ}$ iar degetul arătător în direcția lui $\overrightarrow{PQ'}$, atunci palma arată direcția lui $\overrightarrow{PR}$).

Dacă $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PQ'}$, $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PR'}$ sînt reprezentanți ai vectorilor **a**, **b**, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ și $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$, atunci $\overrightarrow{PR}$ și $\overrightarrow{PR'}$ sînt perpendiculare pe planul determinat de $\overrightarrow{PQ}$ și $\overrightarrow{PQ'}$ și au aceeași lungime. Dar deoarece $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PQ'}$ $\overrightarrow{PR}$ și $\overrightarrow{PQ'}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR'}$ formează sisteme orientate drept (în ordinea indicată), $\overrightarrow{PR}$ și $\overrightarrow{PR'}$ trebuie să fie orientate în direcții opuse. Astfel, $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}$. Această proprietate poartă numele de *anticomutativitate*. Produsul vectorial nu este comutativ sau asociativ dar este *biliniar*, adică dacă a este un scalar și **x**, **y** și **z** sînt vectori, atunci $a(\mathbf{x}\times\mathbf{y}) = a\mathbf{x}\times\mathbf{y} = \mathbf{x}\times a\mathbf{y}$ și $\mathbf{x}\times(\mathbf{y}+\mathbf{z}) = (\mathbf{x}\times\mathbf{y}) + (\mathbf{x}\times\mathbf{z})$ și $(\mathbf{x}+\mathbf{y})\times\mathbf{z} = (\mathbf{x}\times\mathbf{z}) + (\mathbf{y}\times\mathbf{z})$.

Produsul vectorial exprimat în coordonate. Din definiție rezultă imediat valorile produselor vectoriale ale versorilor **i**, **j** și **k**. Folosind biliniaritatea produsului se pot apoi calcula coordonatele lui $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$:

$$\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \quad \text{și} \quad \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Acestea se pot ușor ține minte folosind următoarea regulă mnemotehnică. Se scrie un determinant 3×3 în care prima linie este formată din **i**, **j**, **k** și celelalte două linii din componentele lui **a** și **b**. Calculînd determinantul, coeficienții obținuți pentru **i**, **j** și **k** vor fi coordonatele produsului vectorial $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

Produs vectorial al versorilor	$\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = 0$ $\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k},\ \mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i},\ \mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}$
Componentele lui $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$	$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_yb_z - b_ya_z)\,\mathbf{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\,\mathbf{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\,\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$

Exemplul 3. Produsul vectorial al vectorilor

$$\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k} \text{ și } \mathbf{b} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k} \text{ este } \mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -5\mathbf{i} - 11\mathbf{j} - 8\mathbf{k}.$$

Bază și dimensiune. Unele concepte care joacă un rol important în studiul lui V_3 pot fi folosite și în analiza altor spații vectoriale, de exemplu introducerea coordonatelor și operațiile cu coordonate. Totuși, unele idei, ca de exemplu produsul vectorial, nu se pot generaliza.

Vectori liniar dependenți și vectori liniar independenți. Dacă $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ sînt vectori ai unui spațiu V și **x** este un vector din V, **x** se zice *liniar dependent* de $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ dacă există numere $a_1, a_2, \ldots, a_n$ astfel încît $\mathbf{x} = a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \ldots + a_n\mathbf{x}_n$. Se mai poate spune că **x** depinde de $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ sau **x** este o *combinație liniară de* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$. De exemplu, orice vector **a** din V_3 depinde de sistemul

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{i},\ \mathbf{x}_2 = \mathbf{j} \text{ și } \mathbf{x}_3 = \mathbf{k}:\ \mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}.$$

Evident vectorul nul $\mathbf{0}$ depinde de orice sistem de n vectori $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n$. Este suficient să se aleagă $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$.

Dacă $\mathbf{x}$ este liniar dependent de $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n$, atunci există numere $a_1, a_2, ..., a_n$ și $a = -1$, astfel încît $\mathbf{0} = a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + ... + a_n\mathbf{x}_n + a\mathbf{x}$. Pe de altă parte, această ecuație nu stabilește că $\mathbf{x}$ este dependent de $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n$. Din ea rezultă că dacă cel puțin unul din coeficienții $a_1, a_2, ..., a_n$ sau a nu este 0, atunci vectorul corespunzător este dependent de ceilalți. Se ajunge astfel la următoarea definiție.

Un sistem $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n$ de vectori se zice ***liniar dependent*** dacă există numere $a_1, a_2, ..., a_n$ ***nu toate nule,*** astfel încît $\mathbf{0} = a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + ... + a_n\mathbf{x}_n$. Sistemul se zice ***liniar independent*** dacă această ecuație este satisfăcută numai de $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$.

Conceptul de independență liniară este deosebit de important; independența liniară este o condiție necesară și suficientă pentru unicitatea soluției ecuației

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + ... + a_n\mathbf{x}_n.$$

Cu alte cuvinte $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n$ sînt liniar independenți dacă și numai dacă orice vector $\mathbf{x}$ poate fi scris într-un singur mod ca o combinație liniară de $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n$ sau nu poate fi deloc scris sub această formă.

Exemplul 4. Vectorii $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ din V_3 formează un sistem liniar independent deoarece dacă $\mathbf{0} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$, atunci $\mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{i} = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j})\,\mathbf{i} = a_1$ și la fel $\mathbf{0} = a_2$.

Deci vectorii $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ sînt liniar independenți. Ei mai au proprietatea că orice vector este liniar dependent de $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$: $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$. Se ajunge astfel la definiția:

O bază a unui spațiu vectorial V este un sistem $\mathbf{B}$ de vectori din V astfel încît orice vector din V să se poată reprezenta într-un singur mod ca o combinație liniară de vectori din $\mathbf{B}$.

Această definiție este echivalentă cu următoarea:

O bază a unui spațiu vectorial V este un sistem liniar independent $\mathbf{B}$ de vectori din V astfel încît orice vector din V să depindă liniar de $\mathbf{B}$.

Astfel, sistemul $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ formează o bază a lui V_3.

Dacă există o bază finită într-un spațiu vectorial V, acesta se zice cu *dimensiune finită*; în caz contrar, spațiul este cu *dimensiune infinită* sau infinit dimensional. Pentru spații vectoriale cu dimensiune finită are loc următoarea teoremă:

Dacă V este cu dimensiune finită, atunci două baze ale lui au întotdeauna același număr de elemente. Acest număr este dimensiunea lui V.

Dimensiunea lui V_3 este 3, deoarece $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ este o bază; orice bază a lui V_3 conține exact 3 elemente.

Subspații. O submulțime nevidă S a unui spațiu vectorial V se numește *subspațiu* dacă satisface axiomele spațiului vectorial pentru aceleași operații de adunare și înmulțire cu scalari. În particular, suma a două elemente din S trebuie să se găsească în S și orice multiplu scalar al lui S se găsește în S. De fapt, aceste două proprietăți sînt singurele care trebuie verificate, celelalte se verifică automat.

O submulțime V' a lui V, care conține cel puțin un element, este un subspațiu dacă și numai dacă suma $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ a două elemente $\mathbf{x}$ și $\mathbf{y}$ din V' se găsește în V' și multiplii scalari $a\mathbf{x}$ ai elementelor $\mathbf{x}$ ale lui V' se găsesc tot în V'.

Exemplul 5 Mulţimea formată numai din **0** este un subspaţiu al oricărui spaţiu vectorial. Orice spaţiu vectorial este un subspaţiu al său. Acestea sînt *subspaţii triviale*. Primul are dimensiunea 0.

Exemplul 6. Dacă $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ este un vector al lui V, mulţimea V' a tuturor multiplilor scalari ai lui **x** este un subspaţiu al lui V, subspaţiul generat de **x**. Baza lui este formată din vectorul **x** şi deci are dimensiunea 1.

Coordonate. Dacă $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ este o bază a lui V, atunci prin definiţie orice vector **x** se poate scrie într-un singur mod sub forma $\mathbf{x} = a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \ldots + a_n\mathbf{x}_n$. Numerele reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se numesc *coordonatele* lui **x** în raport cu baza dată. Coordonatele lui **x** se schimbă dacă baza se schimbă, dar numărul lor rămîne întotdeauna egal cu dimensiunea spaţiului. Dacă se dau doi vectori **x** şi **y** prin coordonatele lor, atunci rezultă din axiomele spaţiului vectorial că vectorul sumă se obţine prin adunarea coordonatelor şi produsul cu un scalar c se obţine din înmulţirea coordonatelor cu scalarul c.

$\mathbf{x} = a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \ldots + a_n\mathbf{x}_n$ $\mathbf{y} = b_1\mathbf{x}_1 + b_2\mathbf{x}_2 + \ldots + b_n\mathbf{x}_n$	$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (a_1 + b_1)\,\mathbf{x}_1 + (a_2 + b_2)\,\mathbf{x}_2 + \ldots + (a_n + b_n)\,\mathbf{x}_n$ $c\mathbf{x} = (ca_1)\,\mathbf{x}_1 + (ca_2)\,\mathbf{x}_2 + \ldots + (ca_n)\,\mathbf{x}_n.$

Astfel, fiind dată o bază într-un spaţiu vectorial n-dimensional V, se poate asocia în mod unic fiecărui vector **x** un n-uplu $(a_1, \ldots, a_n)$ din $\mathbf{R}^n$ şi invers; mai mult, această asociere păstrează adunarea şi înmulţirea cu scalari. O astfel de aplicaţie este un *izomorfism* (vezi „Aplicaţii liniare") al lui V pe $\mathbf{R}^n$. Totuşi, în studiul spaţiilor vectoriale arbitrare nu este recomandabil să se folosească acest izomorfism cu $\mathbf{R}^n$, deoarece el depinde de alegerea unei baze în V; se introduce astfel un element arbitrar şi multe cercetări pot fi foarte complicate dacă baza nu este convenabil aleasă.

$\mathbf{R}^n$ are o *bază normală* şi anume:

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \quad \mathbf{e}_n = (0, \ldots, 0, 1).$$

Pentru discuţiile ce urmează, se consideră aleasă şi fixată această bază. Un vector $\mathbf{x} = (a_1, \ldots, a_n)$ se exprimă în această bază sub forma $\mathbf{x} = a_1\mathbf{e}_1 + \ldots + a_n\mathbf{e}_n$.

Produsul scalar. Generalizînd produsul scalar al lui V_3, se defineşte produsul scalar în $\mathbf{R}^n$ prin

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \ldots, b_n) = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n.$$

Produsul $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ se va scrie $\mathbf{x}^2$. Ca şi în V_3, produsul scalar este *simetric* şi *biliniar*.

Lungimea, norma sau *modulul* $|\mathbf{x}|$ pentru vectorul $\mathbf{x} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ se defineşte prin $|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x}^2} = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)}$.

În V_3, dacă $\overrightarrow{PQ}$ reprezintă pe **a** şi $\overrightarrow{QR}$ pe **b**, atunci a treia latură $\overrightarrow{PR}$ a triunghiului PQR reprezentă pe $\mathbf{a} + \mathbf{b}$. Există o axiomă prin care o latură a unui triunghi nu poate fi mai mare decît suma celorlalte două, astfel încît $|\overrightarrow{PR}| \leqslant |\overrightarrow{PQ}| + |\overrightarrow{QR}|$ sau $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \leqslant |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$. Această inegalitate se numeşte *inegalitatea triunghiului*. Ea se poate demonstra (prin inducţie) şi pentru $\mathbf{R}^n$ şi poate fi scrisă sub forma:

$$|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{x}_m| \leqslant |\mathbf{x}_1| + |\mathbf{x}_2| + \ldots + |\mathbf{x}_m|.$$

Din inegalitatea triunghiului mai rezultă că: $||\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|| \leqslant |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ şi pentru produsul scalar $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leqslant |\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|$. Transcriind-o cu ajutorul coordonatelor, se obţine *inegalitatea Cauchy-Schwarz*, uneori numită şi *inegalitatea lui Buneakovski*.

Pentru demonstraţia inegalităţii Cauchy-Schwarz se foloseşte bilinaritatea şi simetria produsului scalar pentru a arăta că $(\mathbf{x} \pm \mathbf{y})^2 = \mathbf{x}^2 \pm 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{y}^2$. În mod asemănător se demonstrează că $(\mathbf{x} + \mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{x}^2 - \mathbf{y}^2$.

Unghiuri. În paragraful asupra lui V_3 s-a găsit o formulă pentru cosinusul unghiului dintre doi vectori în funcţie de produsul lor scalar. În $\mathbf{R}^n$ aceeaşi formulă se foloseşte pentru a da o definiţie analitică a unghiului. Unghiul $\sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ dintre doi vectori nenuli **x** şi **y** este unghiul

cuprins între 0 și π al cărui cosinus satisface formula $\cos \sphericalangle (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|}$. În acest mod $\sphericalangle (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ este unic determinat. Cu această definiție a unghiului se poate defini *ortogonalitatea* a doi vectori $\mathbf{x}$ și $\mathbf{y}$ prin condiția $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$.

Vectorii $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ ai bazei lui $\mathbf{R}^n$ sînt toți de lungime 1 și doi cîte doi ortogonali. Aceasta este o proprietate fundamentală a bazei.

Produs scalar $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (a_1, \ldots, a_n) \cdot (b_1, \ldots, b_n)$ **Proprietăți**	$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = a_1b_1 + \ldots + a_nb_n = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$ $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$ $d(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = (d\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (d\mathbf{y})$
Norma lui x	$\lvert\mathbf{x}\rvert = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$
Inegalitatea triunghiului generalizată	$\lvert\mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{x}_m\rvert \leqslant \lvert\mathbf{x}_1\rvert + \ldots + \lvert\mathbf{x}_m\rvert$
Inegalitatea Cauchy-Schwarz	$\lvert\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}\rvert \leqslant \lvert\mathbf{x}\rvert \, \lvert\mathbf{y}\rvert \to \sum_{i=1}^{n} a_ib_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2$
Unghiul dintre x și y	$\cos \sphericalangle (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\lvert\mathbf{x}\rvert \, \lvert\mathbf{y}\rvert}, \quad 0 \leqslant \sphericalangle (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqslant \pi$

Spații vectoriale euclidiene. Introducerea produsului scalar atribuie lui $\mathbf{R}^n$ o structură suplimentară față de spațiile vectoriale obișnuite. Produsul scalar asociază fiecărei perechi de vectori $\mathbf{x}$ și $\mathbf{y}$ un număr real $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ și poate fi privit ca o funcție de variabilele $\mathbf{x}$ și $\mathbf{y}$ satisfăcînd anumite proprietăți. În $\mathbf{R}^n$ s-au folosit coordonatele în definirea produsului scalar. Dar conceptul de produs scalar se poate generaliza pentru spații vectoriale arbitrare în modul următor:

Dacă V este un spațiu vectorial și q o funcție care asociază fiecărei perechi de vectori $\mathbf{x}$ *și* $\mathbf{y}$ *din V un număr real, atunci q se numește produs scalar pe V dacă satisface condițiile :*

1. $q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = q(\mathbf{y}, \mathbf{x})$
2. $q(\mathbf{x} + \mathbf{x}', \mathbf{y}) = q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + q(\mathbf{x}', \mathbf{y})$
3. $q(a\mathbf{x}, \mathbf{y}) = aq(\mathbf{x}, \mathbf{y})$
4. $q(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geqslant 0$, $q(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$ *dacă și numai dacă* $\mathbf{x} = 0$

Un spațiu vectorial pentru care s-a definit un astfel de produs scalar este un spațiu vectorial euclidian. Cînd nu se creează confuzii, se poate folosi pentru $q(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *notația* $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Produsul scalar pe $\mathbf{R}^n$ are aceste proprietăți, deci $\mathbf{R}^n$ este un spațiu vectorial euclidian. O funcție care satisface 1, se zice *simetrică*; dacă satisface 2 și 3 și corespondentul lor pentru a doua variabilă $\mathbf{y}$ (ceea ce rezultă automat pentru funcții simetrice), funcția se zice *biliniară*. Ultima proprietate 4 poartă numele de *non-singularitate*. Din ea rezultă că $q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ este pozitiv definită, adică $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ pentru toți $\mathbf{y}$ numai dacă $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Acest lucru este echivalent cu afirmația că matricea formată cu $e_i \cdot e_j$ este nenulă, unde $\mathbf{e}_i$ formează o bază arbitrară.

Dacă V este un spațiu vectorial euclidian cu un produs scalar dat q, se pot defini lungimea și unghiul generalizînd definițiile din $\mathbf{R}^n$. *Lungimea, norma* sau *produsul* unui vector $\mathbf{x}$ este $|\mathbf{x}| = \sqrt{q(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$. Din proprietatea 4 a lui q, se poate deduce că orice vector nenul are lungime pozitivă. Dacă $\mathbf{x}$ și $\mathbf{y}$ sînt vectori nenuli, atunci unghiul φ cuprins între 0 și π pentru care $\cos \varphi = \frac{q(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})}{|\mathbf{z}| \, |\mathbf{x}|}$ este *unghiul dintre* $\mathbf{x}$ *și* $\mathbf{y}$. Vectorii de lungime 1 se numesc *vectori unitate*.

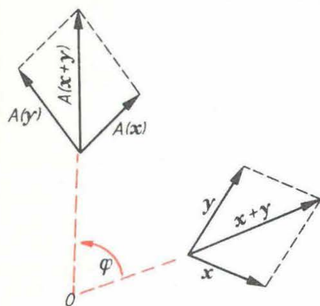
Dacă $q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, atunci $\mathbf{x}$ și $\mathbf{y}$ se zic *ortogonali* (în raport cu q). Proprietățile unei baze $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ sugerează următoarea definiție.

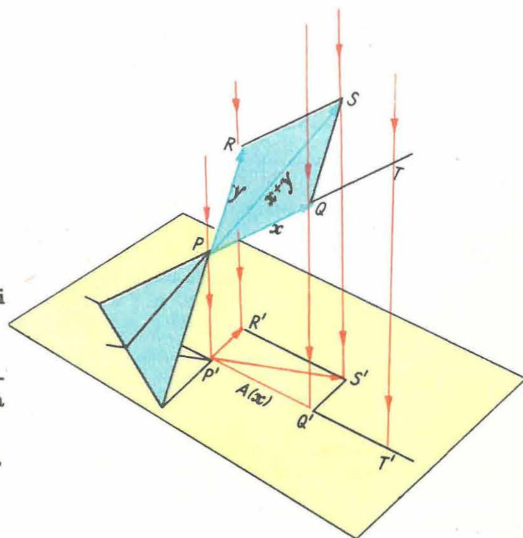
O bază a unui spațiu vectorial euclidian se zice *ortonormală* dacă toți vectorii ei sînt vectori unitate și dacă oricare doi vectori distincți ai bazei sînt ortogonali.

În studiul spațiilor vectoriale euclidiene se încearcă, de regulă, găsirea unei baze ortonormale, deoarece proprietățile ei simplifică mult calculele (în particular produsul scalar poate fi calculat prin formula obișnuită pentru produsul scalar folosind coordonatele în raport cu o bază ortonormală).

17.4. Aplicaţii liniare

Proprietăţi ale aplicaţiilor liniare. O aplicaţie A a unui spaţiu vectorial V pe un spaţiu vectorial V' se numeşte liniară dacă pentru orice vectori **x** şi **y** din V şi orice număr real a au loc relaţiile $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y})$ şi $A(a\mathbf{x}) = aA(\mathbf{x})$. Deci, nu importă dacă se efectuează calculele indicate cu vectorii din V şi apoi se aplică rezultatul sau se aplică întîi vectorii şi apoi se efectuează calculele cu imaginile din V'. În ambele cazuri, rezultatul final va fi acelaşi vector. Cu alte cuvinte, ecuaţiile exprimă compatibilitatea aplicaţiei cu operaţiile fundamentale din spaţiile vectoriale V şi V'. Aplicaţia A se exprimă uneori cu ajutorul unei săgeţi $A : V \to V'$ sau $\mathbf{x} \to A(\mathbf{x})$. Vectorul unic determinat $A(\mathbf{x})$ se numeşte *imagine* a lui **x** şi **x** se numeşte *preimagine* sau *imagine inversă* a lui $A(\mathbf{x})$. Un vector în V' poate să aibă o preimagine, nici o preimagine sau mai multe preimagini (vezi cap. 5).





17.4.1. Rotaţia unui plan în jurul unui punct O cu un unghi φ

17.4.2. Proiecţia paralelă a spaţiului tridimensional pe un plan şi liniaritatea proiecţiei paralele
$\overrightarrow{PQ} = \mathbf{x}$, $\overrightarrow{PR} = \mathbf{y}$, $\overrightarrow{PS} = \mathbf{x}+\mathbf{y}$, $\overrightarrow{PT} = a\mathbf{x}$,
$\overrightarrow{P'Q'} = A(\mathbf{x})$, $\overrightarrow{P'R'} = A(\mathbf{y})$,
$\overrightarrow{P'S'} = A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y})$, $\overrightarrow{P'T'} = aA(\mathbf{x})$

Exemplul 1. Dacă un plan se roteşte cu un unghi φ în jurul unui punct O (fig. 17.4.1), atunci orice clasă de segmente paralele la fel orientate şi de aceeaşi lungime este transformată tot într-o astfel de clasă. Rotaţia induce o aplicaţie A a vectorilor definind imaginea lui **x** ca fiind vectorul asociat clasei obţinute după rotaţie, din clasa reprezentanţilor lui **x**. Din figura 17.4.1 pe care s-a reprezentat rotaţia pentru vectorii **x**, **y** şi **x** + **y** se poate vedea că A este liniară, paralelogramul determinat de **x** şi **y** fiind rotit cu totul. Are loc relaţia $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y})$. Relaţia $A(a\mathbf{x}) = aA(\mathbf{x})$ rezultă imediat din faptul că rotaţia păstrează lungimile.

Exemplul 2. La fel, orice proiecţie paralelă a spaţiului tridimensional pe un plan realizează de asemenea o aplicaţie liniară a spaţiului vectorial corespunzător (fig. 17.4.2). Relaţia $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y})$ este verificată, deoarece paralelogramul care defineşte suma **x** + **y** se aplică pe paralelogramul care defineşte suma $A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y})$. Relaţia $A(a\mathbf{x}) = aA(\mathbf{x})$ rezultă din proporţia $|PQ| : |PT| = |P'Q'| : |P'T'|$.

Nucleul şi imaginea unei aplicaţii liniare. Fiecărei aplicaţii liniare A a lui V pe V' i se asociază două subspaţii distincte ale lui V, respectiv nucleul şi imaginea. *Nucleul* lui A este subspaţiul lui V compus din acei vectori care se aplică prin A pe vectorul nul al lui V'. *Imaginea* lui A este subspaţiul lui V' compus din acei vectori ai lui V' care sînt imagini ale vectorilor din V. În exemplul 2 imaginea lui A este planul pe care se proiectează spaţiul şi nucleul este mulţimea vectorilor din spaţiul cu trei dimensiuni care sînt paraleli cu direcţia de proiecţie (evident

conţine şi vectorul nul). Dacă V este de dimensiune finită şi A este o aplicaţie liniară a lui V pe V', atunci atît nucleul cît şi imaginea lui A au tot dimensiunea finită. Dimensiunea nucleului se numeşte *nulitatea* lui A şi dimensiunea imaginii este *rangul* lui A. O teoremă importantă asupra aplicaţiilor liniare afirmă:

Nulitatea lui A + rangul lui A = dimensiunea lui V.

Din această teoremă rezultă că dimensiunea lui A este cel mult egală cu dimensiunea lui V. Nulitatea este o măsură a abaterii lui A de la o aplicaţie biunivocă. Dacă nulitatea este 0, atunci A este biunivocă.

Exemplul 3. Membrul întîi al unui sistem de ecuaţii liniare defineşte o aplicaţie liniară A a spaţiului vectorial $\mathbf{R}^n$ pe spaţiul vectorial $\mathbf{R}^m$ prin care fiecărui n-uplu $x=(x_1, ..., x_n)$ i se asociază m-uplul $A(\mathbf{x})=(a_{11}x_1+ ... + a_{1n}x_n, ..., a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n)$. Se poate verifica uşor că această aplicaţie este liniară.

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

Problema rezolvării sistemului de ecuaţii poate fi interpretată astfel: fiind dat vectorul $(b_1, ..., b_m)$ din $\mathbf{R}^m$, să se găsească toţi vectorii în $\mathbf{R}^n$ care se aplică prin A pe $(b_1, ..., b_m)$. Sistemul omogen asociat se obţine atunci cînd se caută vectorii care se aplică prin A pe $(0, ..., 0)$. *Spaţiul vectorial al soluţiilor sistemului omogen este nucleul lui A.* Dacă nulitatea lui A este 0, atunci sistemul omogen are numai soluţia banală şi sistemul neomogen are cel mult o soluţie, A fiind biunivocă. Imaginea lui A este mulţimea vectorilor $(b_1, ..., b_m)$ pentru care soluţiile sistemului există. Rangul lui A se poate calcula din coeficienţii ecuaţiilor (vezi Rangul unei matrice).

Aplicaţiile liniare biunivoce ale unui spaţiu vectorial V pe un spaţiu vectorial V' joacă un rol important în algebra liniară. Astfel de aplicaţii se numesc izomorfisme. Dacă A este un izomorfism al lui V pe V', atunci imaginea inversă este un izomorfism al lui V' pe V. Spaţiile V şi V' se numesc izomorfe şi se notează $V \cong V'$. Spaţiile vectoriale izomorfe au proprietăţi algebrice identice. Izomorfismul este o relaţie de echivalenţă definită pe mulţimea spaţiilor vectoriale, adică este reflexivă, simetrică şi tranzitivă.

Exemple de aplicaţii liniare 4. Pe orice spaţiu vectorial aplicaţia *identică* I, care aplică fiecare vector pe el însuşi, este liniară şi este un izomorfism.

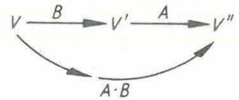
$$I(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{x} + \mathbf{y} = I(\mathbf{x}) + I(\mathbf{y}) \text{ şi } I(a\mathbf{x}) = a \cdot \mathbf{x} = a \cdot I(\mathbf{x})$$

5. Dacă V este un spaţiu n-dimensional cu baza $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$, fie aplicaţia Φ a lui V pe $\mathbf{R}^n$ care pune în corespondenţă vectorului $\mathbf{x}=a_1\mathbf{e}_1 + ... + a_n\mathbf{e}_n$ n-uplul $(a_1, ..., a_n)$ al coordonatelor sale în baza dată. Aplicaţia Φ este liniară, biunivocă şi fiecare n-uplu de numere reale este imagine a unui vector în V. Φ este deci un izomorfism şi deci *orice spaţiu vectorial n-dimensional este izomorf cu* $\mathbf{R}^n$.

Importanţa aplicaţiilor liniare. Deoarece aplicaţiile liniare sînt compatibile cu operaţiile definite într-un spaţiu vectorial, ele fac posibil transferul unor situaţii algebrice sau al unor probleme dintr-un spaţiu în altul. Deosebit de importante sînt izomorfismele deoarece proprietăţile algebrice ale submulţimilor de spaţii vectoriale, de ex. dependenţa şi independenţa, sau dimensiunea sînt invariante la izomorfisme. Prin aceste aplicaţii orice teoremă referitoare la aceste concepte este adevărată pentru toate spaţiile izomorfe cu V, dacă au fost demonstrate pentru V. În particular poate fi exploatat izomorfismul spaţiilor n-dimensionale cu $\mathbf{R}^n$. Aplicaţia pe spaţiul coordonatelor transpune relaţii dintre vectori în relaţii dintre numere, respectiv dintre coordonatele acestor vectori. Totuşi, această aplicaţie depinde esenţial de alegerea unei baze astfel încît diferite mulţimi de ecuaţii pot să reflecte aceeaşi mulţime de relaţii. Din acest punct de vedere, aplicaţiile liniare sînt importante, deoarece descriu relaţii între diferitele mulţimi de coordonate.

Operaţii definite pentru aplicaţii liniare. Este remarcabil faptul că mulţimea aplicaţiilor liniare ale unui spaţiu vectorial V pe un spaţiu vectorial V' constituie la rîndul lor un spaţiu vectorial. Dacă A şi B sînt aplicaţii liniare ale lui V pe V', atunci suma lor $A+B$ se defineşte prin $(A+B)(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x}) + B(\mathbf{x})$ pentru toţi vectorii $\mathbf{x}$ din V. Similar, produsul $a \cdot A$ se defineşte prin $(a \cdot A)(\mathbf{x}) = a \cdot A(\mathbf{x})$. Se verifică uşor că $A + B$ şi $a \cdot A$ sînt la rîndul lor liniare şi că sînt îndeplinite proprietăţile spaţiilor vectoriale. Dacă dimensiunile lui V şi V' sînt m şi n respectiv, atunci dimensiunea spaţiului aplicaţiilor liniare ale lui V pe V' este $m \cdot n$.

Produsul a două aplicații se definește ca rezultatul acțiunii lor succesive. Pentru ca acest lucru să aibă sens, trebuie ca prima aplicație să fie definită pe imaginea celei de-a doua; cu alte cuvinte, dacă B este o aplicație liniară a lui V pe V' și A o aplicație a lui V' pe V'', atunci se obține aplicația $A \cdot B$, aplicînd pe B vectorilor din V și apoi pe A rezultatului. Astfel, $A \cdot B$ este o aplicație liniară a lui V pe V'' (fig. 17.4.3).

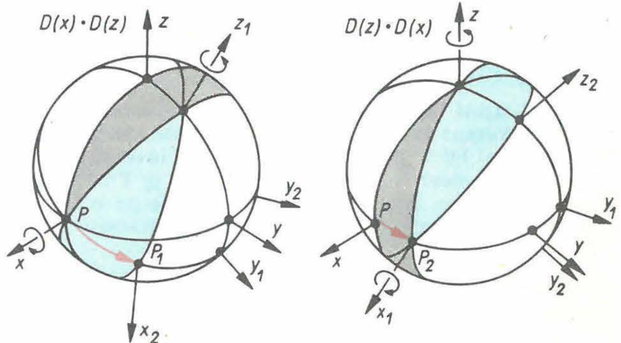


17.4.3. Produsul $A \cdot B$ a două aplicații liniare

Din faptul că $A \cdot B$ este definită, nu rezultă, în general, că și $B \cdot A$ este definită, și chiar dacă sînt amîndouă definite, aceasta nu înseamnă că sînt amîndouă neapărat egale (fig. 17.4.4). Astfel, înmulțirea aplicațiilor nu este comutativă. Ea este însă asociativă și distributivă

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \text{ și } (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C.$$

Aplicații liniare speciale. Un interes deosebit pentru studiul structurii unui spațiu vectorial V prezintă aplicațiile lui V pe el însuși. Acestea se numesc *operatori liniari sau transformări liniare pe V. Transformările liniare ale unui spațiu vectorial n-dimensional formează un spațiu vectoria de dimensiune n^2.* Pentru două transformări liniare A și B ale aceluiași spațiu V există întotdeauna



17.4.4. Rotațiile sferei în jurul axei Ox ($D(x)$) și în jurul axei Oz ($D(z)$); $D(x) \cdot D(z)$ duce punctul P în punctul P_1 iar $D(z) \cdot D(x)$ duce punctul P în P_2 diferit de P_1

ambele produse $A \cdot B$ și $B \cdot A$. De aceea se poate defini o înmulțire (necomutativă) pentru transformările liniare pe V. Un exemplu de transformare liniară este aplicația identică pe un spațiu V care poartă numele de *transformare identică.* Această transformare este un izomorfism al lui V pe el însuși. Transformările liniare care sînt izomorfisme ale lui V se numesc *regulate* (sau *nesingulare*); dacă o transformare liniară nu este un izomorfism, ea se numește *singulară.* Transformările regulate au proprietatea că imaginea unei baze este tot o bază. Ele mai pot fi caracterizate în modul următor: *o transformare liniară A este regulată dacă și numai dacă există o transformare liniară B astfel ca $A \cdot B = B \cdot A = I$.* În acest caz B este unic determinată și poartă numele de imagine inversă a transformării A și se notează cu A^{-1}. De ex. $I^{-1} = I$. Exemple de transformări regulate sînt rotațiile planului în jurul originii. Inversa transformării este atunci rotația de același unghi dar în direcție opusă. În același mod rotațiile în jurul unei axe care trece prin origine sînt transformări liniare regulate ale spațiului tridimensional V_3. Transformarea $A + B$ nu trebuie în general să fie regulată chiar dacă A și B sînt astfel. Produsul $A \cdot B$ sau $B \cdot A$ a două transformări regulate este întotdeauna regulat. Transformarea inversă pentru $A \cdot B$ este $B^{-1} \cdot A^{-1}$. Mulțimea transformărilor regulate are în raport cu înmulțirea proprietăți similare cu acelea ale numerelor reale diferite de zero (cu excepția comutativității). Transformarea identică joacă același rol ca numărul 1, deoarece $A \cdot I = I \cdot A = A$ pentru orice transformare A. În algebra abstractă o mulțime cu aceste proprietăți poartă numele de grup (vezi cap. 16). Mulțimea transformărilor regulate se numește *grup liniar general* pe V și se notează cu GL(V) Dacă spațiul vectorial este euclidian, se poate asocia fiecărei transformări liniare A o altă transformare A^*, unic determinată prin condiția $A(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot A^*(\mathbf{y})$ pentru toți vectorii $\mathbf{x}$ și $\mathbf{y}$ din V. Acest A^* este *transformarea adjunctă a lui A.* Transformarea adjunctă are proprietățile

$$(A + B)^* = A^* + B^*, \quad (A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*, \quad (a \cdot A)^* = a \cdot A^*, \quad (A^*)^* = A.$$

Deosebit de importante sînt transformările *autoadjuncte* sau *simetrice.* Ele sînt caracterizate prin egalitatea $A^* = A$. Aceste transformări apar frecvent în probleme de fizică și au în anumite

privințe o structură foarte simplă. Transformările analoage pentru spații vectoriale complexe infinit dimensionale, așa-numitele *transformări hermitiene*, joacă un rol important în mecanica cuantică. Exemple banale de transformări simetrice sînt multiplii $a \cdot I$ ai transformării identice.

Într-un spațiu vectorial euclidian V, produsul scalar poate fi folosit la definirea lungimii vectorilor și a unghiului dintre aceștia. Astfel, în investigarea acestor spații sînt deosebit de utile transformările liniare compatibile cu produsul scalar. O transformare liniară A pe V este *ortogonală* dacă lasă invariant produsul scalar, adică, dacă $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = A(\mathbf{x}) \cdot A(\mathbf{y})$ pentru toți vectorii $\mathbf{x}$ și $\mathbf{y}$ din V. O transformare ortogonală păstrează lungimea vectorilor și unghiul format de aceștia. Rotațiile planului și ale spațiului cu trei dimensiuni sînt alte exemple de transformări ortogonale, rotațiile păstrează lungimile și unghiurile. Transformările ortogonale pot fi caracterizate în modul următor: *o transformare liniară este ortogonală dacă și numai dacă imaginea unei baze ortonormale este tot o bază ortonormală.* O descriere mai succintă a transformării ortogonale este următoarea: O transformare liniară A este ortogonală dacă și numai dacă $A^* = A^{-1}$. Ținînd seama de această definiție, orice transformare ortogonală are o inversă, deci este regulată. Inversa unei transformări ortogonale este ortogonală și produsul a două transformări ortogonale este tot o transformare ortogonală: mulțimea transformărilor ortogonale formează deci un grup, *grupul ortogonal* pe V. Toate transformările ortogonale ale lui V_3 se pot obține ca rotații sau produse de rotații cu simetrii față de un plan. O rotație este complet determinată de rotația indusă într-un plan perpendicular pe axă. Acest lucru poate fi folosit pentru găsirea unor matrice speciale care să reprezinte transformările ortogonale pe V_3.

17.5. Matrice

Proprietățile mulțimii soluțiilor unui sistem de ecuații liniare depind în mod esențial de coeficienții a_{ij} ai sistemului. Un tablou dreptunghiular format cu acești coeficienți aranjați în m linii și n coloane poartă numere de *matrice* $m \times n$, $\boldsymbol{A}$. Numerele din acest tablou sînt elementele matricei $\boldsymbol{A}$. n-uplul elementelor pentru care primul indice este i se numește *linia i a matricei* și m-uplul elementelor pentru care al doilea indice este j formează *coloana j a matricei.*

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

O matrice $m \times n$ are m linii și n coloane. Dacă $m = n$, matricea se zice *pătrată*. Pentru matricea $\boldsymbol{A}$ se folosesc notațiile $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ sau $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{mn}$ pentru a indica liniile și coloanele.

Operații cu matrice. Matricele de același format (adică cu același număr de linii și cu același număr de coloane) se pot aduna. Suma a două astfel de matrice se definește ca matricea sumelor elementelor corespunzătoare din matricele inițiale. O matrice se poate înmulți cu un număr, înmulțind fiecare element prin acest număr.

Adunarea a două matrice $m \times n$
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1m} + b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$
Înmulțirea matricelor cu un număr real
$c\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \dots & ca_{mn} \end{pmatrix}$

Exemplul 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -6 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 4 \\ -7 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Adunarea și înmulțirea cu un scalar a matricelor $m \times n$ au proprietățile obișnuite.

Mulțimea matricelor $m \times n$ formează un spațiu vectorial de dimensiune mn.

Vectorul nul al acestui spațiu este *matricea nulă* care are toți coeficienții nuli.

Două matrice nu se pot înmulți întotdeauna. Produsul $\boldsymbol{AB}$ al unei matrice $\boldsymbol{A}$ de tip $m \times n$ cu o matrice $\boldsymbol{B}$ de tip $r \times s$ este definit numai pentru cazul $n = r$. În acest caz produsul este o matrice de tip $m \times s$, $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$ ale cărei elemente se definesc astfel:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Elementul c_{ij} poate fi interpretat ca produsul scalar al liniei i a matricei $\boldsymbol{A}$ cu coloana j a matricei $\boldsymbol{B}$.

Exemplul 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + (-1)\cdot 2 & 1\cdot 1 + (-1)\cdot 0 & 1\cdot 0 + (-1)\cdot(-1) \\ 2\cdot 2 + \quad 0\cdot 2 & 2\cdot 1 + \quad 0\cdot 0 & 2\cdot 0 + \quad 0\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

În general, existența produsului $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ nu implică posibilitatea definirii produsului $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$ și chiar dacă ambele sînt definite, ele nu trebuie să fie egale după cum se poate vedea din următorul calcul:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ dar } \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ca și *înmulțirea transformărilor liniare, înmulțirea matricelor nu este comutativă.* Ea este însă asociativă și distributivă.

Înmulțirea matricelor	Condiții ca înmulțirea să fie posibilă: $n = r$	Reguli
$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m,n}$ $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{r,s}$	$(a_{ij})_{m,n} \cdot (b_{ij})_{n,s} = (c_{ij})_{m,s}$ cu $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$	$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$ $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$ $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$

Matricele pătrate de aceeași mărime se pot întotdeauna înmulți. Există o matrice $n \times n$, specială, *matricea unitate* sau *matricea identică* care lasă neschimbată prin înmulțire la dreapta sau la stînga orice matrice: $\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}$.

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Mulțimea matricelor $n \times n$ are astfel proprietăți similare cu mulțimea transformărilor unui spațiu vectorial. Prin analogie cu denumirea transformărilor regulate, o matrice pătrată $\boldsymbol{A}$ se zice *regulată* (sau *nesingulară*) dacă există o matrice pătrată $\boldsymbol{B}$ astfel încît $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$; în caz contrar $\boldsymbol{A}$ este *singulară*. Matricea $\boldsymbol{B}$ este unic determinată și se numește matrice *inversă* a lui $\boldsymbol{A}$, fiind notată cu $\boldsymbol{A}^{-1}$. Mai jos se vor da reguli de calcul al matricei inverse.

Exemplul 3. Inversa matricei

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ este } \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}, \text{ pentru } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ca și în cazul transformărilor liniare, inversa și produsul matricelor regulate sînt tot regulate și $(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$, $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$.

Mulțimea matricelor regulate $n \times n$ formează grup în raport cu înmulțirea matricelor. El poartă numele de grup liniar de grad n și se notează cu GL(n). Deși conceptual diferit el este izomorf grupului GL(V).

Fiecărei matrice $m \times n$, $\boldsymbol{A}$, i se poate asocia o matrice $m \times n$, $\boldsymbol{A}^T$, transpusa lui $\boldsymbol{A}$. Ea se obține din $\boldsymbol{A}$ schimbînd liniile cu coloanele:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \to \boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Pentru o matrice pătrată transpunerea unei matrice se poate vizualiza ca o simetrie față de *diagonala principală*.

Exemplul 4. 5.

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{A}_1^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{A}_2^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Regulile după care se face transpunerea unei matrice sînt asemănătoare cu acelea prin care se obține adjuncta unei transformări liniare. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{B}^T$; $(a\boldsymbol{A})^T = a\cdot\boldsymbol{A}^T$; $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{B}^T\cdot\boldsymbol{A}^T$; $(\boldsymbol{A}^T)^T = \boldsymbol{A}$. Dacă $\boldsymbol{A}$ este o matrice regulată, atunci și $\boldsymbol{A}^T$ este regulată și inversa lui $\boldsymbol{A}^T$ este transpusa lui $\boldsymbol{A}^{-1}$: $(\boldsymbol{A}^{-1})^T = (\boldsymbol{A}^T)^{-1}$.

Determinantul unei matrice. Calculul matricei inverse. Fiecărei matrice pătrate $\boldsymbol{A}$ i se asociază un număr real, *determinantul* lui $\boldsymbol{A}$ (vezi Determinanți)

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad \det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Teorema produsului	$\det(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = (\det \boldsymbol{A})\cdot(\det \boldsymbol{B})$

Există o legătură strînsă între înmulțirea matricelor și înmulțirea determinanților, exprimată prin *teorema produsului*. Din regulile de calcul ale determinanților rezultă imediat $\det \boldsymbol{I} = 1$, unde $\boldsymbol{I}$ este matricea identică. Rezultă că dacă $\boldsymbol{A}$ este regulată, atunci $(\det \boldsymbol{A})(\det \boldsymbol{A})^{-1} = 1$ și deci determinantul unei matrice regulate (nesingulare) este diferit de zero. Reciproca este de asemenea adevărată. Dacă determinantul unei matrice este diferit de zero, atunci $\boldsymbol{A}$ este regulată. Acest lucru se explicitează printr-o formulă de calcul pentru $\boldsymbol{A}^{-1}$.

Inversa $\boldsymbol{A}^{-1}$ a matricei $\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$ A_{ij} este cofactor al lui a_{ij} în $\boldsymbol{A}$.

Exemplul 6.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{A}_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -4.$$

Elementul $-4 = \boldsymbol{A}_{12}$ al matricei din dreapta este cofactorul lui $a_{12} = 0$ în $\boldsymbol{A}$.

Exemplul 7. Calculul inversei unei matrici 2×2 regulate

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

În afară de această metodă de găsire a matricei inverse prin cofactori, matricea inversă se mai poate calcula rezolvînd un sistem de ecuații. Ecuațiile se obțin considerînd elementele lui $\boldsymbol{A}^{-1}$ necunoscute, în ecuația matriceală $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I})$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

După efectuarea îmulțirii, se obține un sistem de n^2 ecuații liniare cu n^2 necunoscute. $x_{ij} \cdot \boldsymbol{A}^{-1}$ se obține rezolvînd sistemul prin regula lui Cramer.

Inversa $\boldsymbol{A}^{-1}$ se mai poate calcula considerînd sistemul de n ecuații cu $2n$ variabile $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$:

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = y_1$$
$$\dots\dots\dots$$
$$a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = y_n$$

Acest sistem se poate rezolva prin regula lui Cramer sau prin algoritmul lui Gauss:

$$x_1 = b_{11}y_1 + \dots + b_{1n}y_n$$
$$\dots\dots\dots$$
$$x_n = b_{n1}y_1 + \dots + b_{nn}y_n.$$

Matricea $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ a coeficienților sistemului din dreapta este inversa matricei $\boldsymbol{A}$. Această metodă necesită mai puține ecuații.

Reprezentarea prin matrice a aplicațiilor liniare

Operațiile cu matrice reflectă evident asemănarea acestora cu operațiile cu aplicații liniare. Acest lucru este adevărat nu numai pentru înmulțirea cu scalari și adunare, ci și pentru înmulțirea aplicațiilor liniare și a matricelor, în particular pentru condițiile de existență a produsului, a inversei etc. Această asemănare exprimată prin terminologie similară nu este accidentală. Desigur, importanța matricelor constă în mare măsură în faptul că ele se folosesc pentru descrierea numerică a aplicațiilor liniare. Acest aspect este legat și de folosirea matricelor în descrierea sistemelor de ecuații liniare. O aplicație liniară A a unui spațiu vectorial n-dimensional V pe un spațiu vectorial m-dimensional V' se poate reprezenta printr-o matrice $m \times n$ în modul următor. Dacă $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n$ și $\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_m$ sînt baze în V și V' respectiv, atunci imaginile lui $\mathbf{x}_1, ...$ $..., \mathbf{x}_n$ se pot exprima în funcție de baza $\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_n$ prin:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}_1) &= a_{11}\mathbf{y}_1 + ... + a_{m1}\mathbf{y}_n \\ &\cdots\cdots\cdots \\ A(\mathbf{x}_n) &= a_{1n}\mathbf{y}_1 + ... + a_{mn}\mathbf{y}_n \end{aligned} \quad \text{sau } A(\mathbf{x}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \quad \text{pentru} \quad j = 1, ..., n.$$

Astfel aplicația liniară A este complet determinată prin imaginile $A(\mathbf{x}_j)$ ale vectorilor bazei $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n$; un vector arbitrar $\mathbf{x} = a_1\mathbf{x}_1 + ... + a_n\mathbf{x}_n$ din V, are atunci imaginea $A(\mathbf{x}) = A(a_1\mathbf{x}_1 + ...$ $... + a_n\mathbf{x}_n) = a_1A(\mathbf{x}_1) + ... + a_nA(\mathbf{x}_n)$. Aplicația liniară este deci complet caracterizată prin cele $m \cdot n$ numere a_{ij}. Este mai convenabil însă să se folosească pentru reprezentarea lui A transpusa matricei coeficienților.

$$A \to \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Coloana j din $\boldsymbol{A}$ este mulțimea coordonatelor lui $A(\mathbf{x}_j)$ în raport cu baza $\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_m$. Trebuie remarcat că alegerea matricei care reprezintă pe A depinde de alegerea bazelor în V și V'. Dacă bazele V și V' sînt fixate, atunci corespondenta dintre aplicațiile liniare și matrice are proprietățile alăturate:

Dacă $A \to \boldsymbol{A}$ și $B \to \boldsymbol{B}$, atunci $A+B \to \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ și $a \cdot A \to a \cdot \boldsymbol{A}$

În aceleași condiții există o matrice $m \times n$ unică asociată cu orice aplicație liniară și reciproc. Aceste afirmații sînt reunite în următoarea teoremă:

Spațiul vectorial al aplicațiilor liniare de la V la V' este izomorf cu spațiul vectorial al matricelor $m \times n$.

Același lucru se întîmplă și cu înmulțirea. Dacă A este o aplicație liniară a lui V' pe V'' și B o aplicație liniară a lui V pe V', atunci, alegînd baze în V, V' și V'', se pot asocia aplicațiilor A și B matrice. Se poate demonstra că:

Dacă $A \to \boldsymbol{A}$ și $B \to \boldsymbol{B}$, atunci $A \cdot B \to \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$

Reprezentarea aplicațiilor liniare prin matrice este întru totul analoagă reprezentării vectorilor prin n-upluri în raport cu o bază. Coordonatele unei aplicații liniare se aranjează într-un mod special pentru obținerea unei matrice. Analogia în ceea ce privește operațiile apare acum ca o consecință a faptului că operațiile cu matrice sînt definite în așa fel încît să corespundă operațiilor cu aplicații binare pe care le reprezintă.

Dacă o aplicație liniară a lui V pe V' este reprezentată printr-o matrice $m \times n$, $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ în raport cu baze fixate în V și V', atunci ecuația vectorială $A(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_0$ poate fi rezolvată. Se cere aici găsirea tuturor vectorilor x în V care se aplică prin A pe un vector $\mathbf{x}_0$ a lui V'.

Dacă $b_1, ..., b_n$ sînt coeficienții lui $\mathbf{x}_0$ în V', atunci problema găsirii coordonatelor $x_1, ..., x_n$ ale unui astfel de vector $\mathbf{x}$ este pur și simplu problema rezolvării sistemului de ecuații

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Rezultă de aici legătura dintre ecuațiile date prin aplicații liniare și sistemele de ecuații liniare. Dacă sistemul este scris în formă matriceală, devine evident că este același lucru cu ecuația vectorială $A(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_0$ scrisă în coordonate.

Aici coordonatele lui $\mathbf{x}$ și $\mathbf{x}_0$ se scriu ca matrice cu o singură coloană.

Reprezentări ale transformărilor liniare. Pentru a asocia o matrice unei transformări liniare a unui spațiu vectorial n-dimensional V, este suficientă alegerea unei baze $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n$. Din ecuațiile

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}_1) &= a_{11}\mathbf{x}_1 + ... + a_{n1}\mathbf{x}_n \\ &\cdots\cdots \\ A(\mathbf{x}_n) &= a_{1n}\mathbf{x}_1 + ... + a_{nn}\mathbf{x}_n \end{aligned} \quad \text{sau} \quad A(x_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{x}_i \quad \text{pentru} \quad j = 1, ..., n$$

se obține matricea care reprezintă transformarea $A \to \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Transformările liniare sînt întotdeauna reprezentate prin matrice pătrate.

Dacă o transformare liniară este regulată, atunci matricea care o reprezintă va fi de asemenea regulată și reciproc. Transformarea inversă este reprezentată prin matricea inversă.

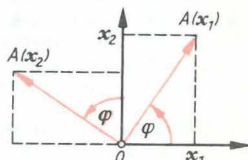
Dacă $A \to \boldsymbol{A}$, *atunci* $A^{-1} \to \boldsymbol{A}^{-1}$,

Dacă $A \to \boldsymbol{A}$ *și* $B \to \boldsymbol{B}$, *atunci* $A + B \to \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$; $a \cdot \boldsymbol{A} \to a \cdot \boldsymbol{A}$; și $A \cdot B \to \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$

Exemplul 8. Dacă A este transformarea menționată de mai multe ori, obținută prin rotația planului în jurul originii O cu un unghi φ și dacă $\mathbf{x}_1$ și $\mathbf{x}_2$ sînt doi vectori din bază ortogonali și de lungime 1, atunci reprezentanții acestor vectori aplicați în origine se aplică pe reprezentanții imaginilor $A(\mathbf{x}_1)$ și $A(\mathbf{x}_2)$ (fig. 17.5.1). Evident $A(\mathbf{x}_1)$ și $A(\mathbf{x}_2)$ verifică ecuațiile alăturate. Operatorul A este astfel reprezentat prin matricea $\boldsymbol{A}$. Operatorul A^{-1} este rotația de unghi φ în direcția opusă, adică rotația de unghi $-\varphi$.

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}_1) &= \cos\varphi\mathbf{x}_1 + \sin\varphi\mathbf{x}_2 \\ A(\mathbf{x}_2) &= -\sin\varphi\mathbf{x}_1 + \cos\varphi\mathbf{x}_2 \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$



17.5.1. Rotația planului în jurul unui punct O de un unghi φ

$$A^{-1} \to \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\varphi) & -\sin(-\varphi) \\ \sin(-\varphi) & \cos(-\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Exemplul 9. Dacă I este transformarea identică a lui V și $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n$ o bază în V, atunci

$$\begin{aligned} I(\mathbf{x}_1) &= \mathbf{x}_1 = 1 \cdot \mathbf{x}_1 + 0 \cdot \mathbf{x}_2 + ... + 0 \cdot \mathbf{x} \\ I(\mathbf{x}_2) &= \mathbf{x}_2 = 0 \cdot \mathbf{x}_1 + 1 \cdot \mathbf{x}_2 + ... + 0 \cdot \mathbf{x}_n \\ &\cdots\cdots \\ I(\mathbf{x}_n) &= \mathbf{x}_n = 0 \cdot \mathbf{x}_1 + 0 \cdot \mathbf{x}_2 + ... + 1 \cdot \mathbf{x}_n \end{aligned} \qquad I \to \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots 1 \end{pmatrix}$$

În orice bază transformarea identică se reprezintă prin matricea unitate.

În general, matricea $\boldsymbol{A}$ care reprezintă transformarea liniară A depinde de alegerea bazei. Dacă $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n$ și $\mathbf{x}'_1, ..., \mathbf{x}'_n$ sînt două baze ale lui V, atunci

$A \to \boldsymbol{A}$ în raport cu baza $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n$ și

$A \to \boldsymbol{A}'$ în raport cu baza $\mathbf{x}'_1, ..., \mathbf{x}'_n$,

Se poate defini acum, cu ajutorul celor două baze, transformarea C: $C(\mathbf{x}_1) = \mathbf{x}'_1, ..., C(\mathbf{x}_n) = \mathbf{x}'_n$. Dacă transformarea C este reprezentată prin matricea $\boldsymbol{C}$ în raport cu bazele $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n$, atunci are loc relația $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$. Aceasta este *regula de transformare* pentru matrice reprezentînd același operator în raport cu baze diferite. Matricele pentru care are loc relația de mai sus se numesc *asemenea*. O problemă care se ridică în mod natural, în acest context, este aceea a existenței unei baze pentru care matricea reprezentînd o transformare dată este cea mai simplă cu putință. Aceasta este problema găsirii *formelor normale* pentru transformări și este strîns legată de teoria *valorilor proprii* (vezi Transformări ale axelor principale).

Schimbarea de coordonate. Dacă se dau într-un spațiu vectorial V două baze $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n$ și $\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_n$, atunci un vector $\mathbf{x}$ are coordonate în raport cu ambele baze:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{x}_1 + ... + x_n\mathbf{x}_n = y_1\mathbf{y}_1 + ... + y_n\mathbf{y}_n.$$

Schimbarea de la un sistem de coordonate la altul este descrisă de ecuațiile

$$\begin{matrix} \mathbf{y}_1 = a_{11}\mathbf{x}_1 + \dots + a_{n1}\mathbf{x}_n \\ \dots\dots\dots\dots \\ \mathbf{y}_n = a_{1n}\mathbf{x}_1 + \dots + a_{nn}\mathbf{x}_n \end{matrix} \quad \text{sau} \quad \mathbf{y}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{x}_i \quad \text{pentru} \quad j = 1, \dots, n.$$

Coordonatele $x_1, \dots, x_n$ și $y_1, \dots, y_n$ satisfac acum relațiile

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}y_i \text{ pentru } j = 1, \dots, n.$$

Formulele inverse se obțin trecînd de la matricea $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ la matricea $\boldsymbol{A}^{-1} = (a'_{ij})$.

Trecerea de la baza $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ la baza $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$			
Transformarea vectorilor din bază		Transformarea coordonatelor	
$\mathbf{y}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{x}_i$	$(a_{ij}) = \boldsymbol{A}$	$y_i = \sum_{i=1}^{n} a'_{ji}x_i$	$(a'_{ji}) = (\boldsymbol{A}^{-1})^T$
$\mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^{n} a'_{ij}\mathbf{y}_i$	$(a'_{ij}) = \boldsymbol{A}^{-1}$	$x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}y_i$	$(a_{ji}) = \boldsymbol{A}^T$

Astfel, dacă baza $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ este reprezentată prin matricea $\boldsymbol{A}$ în raport cu baza $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ atunci coordonatele lui $\mathbf{x}$ în raport cu baza $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ se obțin din coordonatele în raport cu $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ cu ajutorul matricei $(\boldsymbol{A}^{-1})^T$, după cum se vede din ecuațiile de mai sus.

Pentru baze ortonormale într-un spațiu vectorial euclidian, matricea de transformare este ortogonală și deci egală cu matricea de transformare a coordonatelor. În acest caz particular, coordonatele se transformă în același mod ca bazele.

Rangul unei matrice. Pentru orice matrice $m \times n$, $\boldsymbol{A}$ se poate determina un număr maxim de coloane sau linii liniar independente, considerînd liniile și coloanele elemente din $\mathbf{R}^n$ sau $\mathbf{R}^m$ respectiv. Aceste două numere sînt întotdeauna egale și determină *rangul matricei*. Dacă matricea $\boldsymbol{A}$ reprezintă aplicația liniară A, atunci rangul lui $\boldsymbol{A}$ este același cu rangul lui A. Rangul se poate calcula folosind următoarele proprietăți:

Rangul unei matrice rămîne neschimbat dacă: 1. un multiplu al unei linii (coloane) se adună la o altă linie (coloană) sau 2. liniile (coloanele) se schimbă între ele.

Folosind aceste reguli, o matrice poate fi adusă la o formă în care numai elementele la care indicele coloanei este egal cu indicele liniei sînt diferite de zero. Rangul lui $\boldsymbol{A}$ este numărul elementelor diferite de zero. Această metodă este foarte apropiată de algoritmul lui Gauss de rezolvarea sistemelor de ecuații liniare. Pentru o matrice pătrată este suficient să fie transformată într-o *formă triunghiulară* în care toate elementele aflate sub diagonala principală (sau deasupra ei) sînt nule. Dacă acest lucru se face în așa fel încît diagonala principală conține maximum posibil de elemente nenule, atunci numărul acestora este rangul matricei.

Exemplul 10. Matricea $\boldsymbol{A}$ se transformă în $\boldsymbol{A}_2$ adunînd coloana a doua la prima și a treia. Scăzînd prima coloană din a doua și de trei ori prima din a treia, se obține $\boldsymbol{A}_3$. Schimbînd primele două coloane se obține $\boldsymbol{A}_4$. Rangul lui $\boldsymbol{A}_4$ este 2.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemplul 11. În matricea inițială $\boldsymbol{A}$ se adună prima linie înmulțită cu 3 la a doua și prima linie înmulțită cu 2 se adună la a treia. În matricea transformată se schimbă între ele coloana a doua cu a treia. Rangul lui $\boldsymbol{A}$ este 3.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tipuri speciale de matrice. Corespunzător diferitelor tipuri speciale de transformări liniare, există unele tipuri speciale de matrice. Dacă V este un spațiu vectorial euclidian și dacă o transformare A este reprezentată în raport cu o bază ortonormală prin matricea $\boldsymbol{A}$, atunci transformarea adjunctă A^* este reprezentată prin matricea transpusă $\boldsymbol{A}^T$. Așadar, transformările simetrice pentru care $A = A^*$ sînt reprezentate prin *matrice simetrice* pentru care $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$.

Deosebit de importante sînt *matricele ortogonale* deoarece ele transformă baze ortonormale tot în baze ortonormale. Folosind coordonatele, această proprietate se exprimă astfel: *Coordonatele unui vector în raport cu un sistem de coordonate rectangulare se transformă în coordonatele în raport cu un alt sistem de coordonate rectangulare cu ajutorul unei matrice ortogonale.* O matrice este *ortogonală* dacă $\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}^{-1}$. Această ecuație se mai poate scrie $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{I}$ și se interpretează astfel: *Într-o matrice ortogonală produsul scalar al diferitelor linii este egal cu zero și produsul scalar al unei linii cu ea însăși este egal cu unu.* Aceleași afirmații sînt adevărate și pentru coloanele lui $\boldsymbol{A}$ și oricare dintre formulări (pentru linii sau pentru coloane) reprezintă o condiție suficientă pentru ca o matrice să fie ortogonală. De exemplu, orice matrice ortogonală 2×2 poate fi scrisă sub forma

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{sau} \quad \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

În primul caz, matricea reprezintă o rotație de unghi φ a planului; în al doilea caz, o rotație urmată de o simetrie față de o axă. Matricele de cel de-al doilea tip se deosebesc de cele de primul tip prin aceea că determinantul lor este egal cu -1, pe cînd determinantul unei rotații este întotdeauna $+1$. În general, determinantul unei matrice ortogonale este întotdeauna $+1$ sau -1. Dacă o matrice ortogonală are determinantul $+1$, ea se mai numește *proprie* și corespunde în general transformărilor ortogonale, care păstrează orientarea unui spațiu vectorial euclidian. Următoarele matrice sînt de acest tip:

$$\boldsymbol{A}_{12}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_{13}(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_{23}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Aici φ, ψ și θ sînt unghiuri arbitrare. Dacă se fixează o ordine a vectorilor de bază $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, atunci $\boldsymbol{A}_{12}(\varphi)$ reprezintă o rotație a spațiului în jurul axei $\mathbf{e}_3$. Planul $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ este rotit cu un unghi φ pe cînd $\mathbf{e}_3$ rămîne neschimbat. De aici rezultă forma specială a matricei. Orice matrice ortogonală proprie 3×3 se poate scrie ca un produs $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_{23}(\theta) \cdot \boldsymbol{A}_{13}(\psi) \cdot \boldsymbol{A}_{12}(\varphi)$ alegînd pe φ, ψ și θ în mod convenabil.

Ca și pentru transformările ortogonale, mulțimea matricelor ortogonale $n \times n$ formează grup. Matricele ortogonale proprii formează un subgrup al acestui grup.

17.6. Valori proprii

Valori proprii și vectori proprii. Un număr λ este o *valoare proprie (sau valoare caracteristică) a unei transformări liniare A* dacă există un vector $\mathbf{x} \neq 0$ astfel încît $A(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$. Vectorul $\mathbf{x}$ poartă numele de *vector propriu al transformării A*, corespunzător lui λ. Toți vectorii proprii corespunzători lui λ împreună cu vectorul nul formează un subspațiu numit *spațiu propriu* al lui A. Dacă ecuația $A(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$ se scrie sub forma $(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0$, atunci se poate afirma că:

Un număr λ este o valoare proprie a operatorului A dacă și numai dacă operatorul $A - \lambda I$ este singular.

Folosind această formulare este posibilă definirea unei matrice proprii pentru o matrice $\boldsymbol{A}$ care reprezintă transformarea A: *un număr λ este o valoare proprie a matricei $\boldsymbol{A}$ dacă $\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}$ este singulară.*

Exemplul 1. Fie A' o transformare singulară; atunci există un vector nenul $\mathbf{x}$ astfel încît $A(\mathbf{x}) = \mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{x}$. Așadar $\lambda = 0$ este o valoare proprie a lui A și vectorii nenuli ai nucleului sînt vectorii proprii ai lui 0.

Exemplul 2. Să presupunem că matricea $\boldsymbol{A}$ care reprezintă operatorul A în raport cu baza $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n$ este diagonală:

$$A(\mathbf{x}_1) = \lambda_1 \mathbf{x}_1 \quad \cdots \quad A(\mathbf{x}_n) = \lambda_n \mathbf{x}_n \qquad A \rightarrow \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Atunci vectorii bazei sînt toți vectori proprii ai lui A. Astfel de transformări sînt ușor de descris deoarece ele transformă vectorii bazei multiplicîndu-i cu un scalar. Ele se numesc transformări *diagonale* (sau *diagonalizabile*). Orice transformare a unui spațiu n-dimensional cu n valori proprii distincte este diagonalizabilă.

Importanța valorilor proprii în fizică. Problemele de valori proprii au o deosebită importanță în multe ramuri ale fizicii. Ele fac posibilă găsirea unor sisteme de coordonate în care transformările iau formele cele mai simple. În mecanică de exemplu, momentele principale ale unui corp solid se găsesc cu ajutorul valorilor proprii ale unei matrice simetrice reprezentînd vectorul tensorial. Situația este similară în mecanica mediului continuu, unde rotațiile și deformările unui corp în direcțiile principale se găsesc cu ajutorul valorilor proprii ale unei matrice simetrice.

Valorile proprii au o importanță centrală în mecanica cuantică unde valorile măsurate ale mărimilor fizice „observabile" apar ca valori proprii ale unor operatori. Termenul „transformare" se folosește de regulă în contextul pur matematic (geometric) pe cînd termenul „operator" se folosește de regulă în aplicații (fizică, tehnologie).

Calculul valorilor proprii și al vectorilor proprii. Dacă se alege o bază a unui spațiu vectorial V, atunci ecuația $(A - \lambda I)(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ poate fi scrisă sub forma următorului sistem de ecuații pentru coordonatele $x_1, ..., x_n$ ale lui $\mathbf{x}$:

$$\begin{aligned} &(a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = 0 \\ &a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda) x_2 + \dots + a_{2n} x_n = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_{n1}x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda) x_n = 0. \end{aligned}$$

Matricea coeficienților este matricea $\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}$ care reprezintă transformarea $A - \lambda I$. Cum numai vectorii nenuli pot fi vectori proprii, problema constă în găsirea soluțiilor nenule ale acestui sistem omogen. O condiție necesară și suficientă pentru existența unor astfel de soluții este aceea ca determinantul matricei coeficienților să se anuleze: $\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0$. Acest lucru se întîmplă dacă și numai dacă $A - \lambda I$ este singulară, adică dacă λ este o valoare proprie a lui A. Se poate vedea că determinantul este un polinom de grad n în λ:

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n.$$

Acest polinom poartă numele de *polinom caracteristic* al lui $\boldsymbol{A}$. Dacă $\boldsymbol{A}'$ este o altă matrice care îl reprezintă pe A, atunci există o matrice $\boldsymbol{C}$ astfel ca $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ și

$$\det(\boldsymbol{A}' - \lambda \boldsymbol{I}) = \det(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} - \lambda \boldsymbol{I}) = \det(\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\,\boldsymbol{C}) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}).$$

Coordonatele $x_1, x_2, ..., x_n$ ale lui $\mathbf{x}$ pot fi găsite ca soluții nebanale ale sistemului omogen dat mai sus, unde λ s-a determinat mai întîi ca soluție a polinomului caracteristic.

Exemplul 3. Pentru $n = 2$ și $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ valorile proprii sînt rădăcini ale ecuației

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ -1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0.$$

Se obțin astfel ca valori proprii $+1$ și -1. Coordonatele x_1, x_2 ale vectorilor proprii corespunzători valorii $+1$ sînt soluții ale sistemului

$$\begin{aligned} 1x_1 + 3x_2 &= 0 \\ -1x_1 - 3x_2 &= 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad (x_1, x_2) = \tau(-3, 1)$$

unde τ este un număr nenul arbitrar. În general, vectorii proprii sînt determinați, abstracție făcînd de un multiplu scalar.

Transformarea la axele principale

Pentru transformări simetrice, teoria duce la un rezultat deosebit de simplu. Toate valorile proprii ale unei transformări simetrice sînt reale şi există o bază ortonormală de vectori proprii. Dacă A este reprezentată de matricea $\mathbf{A}$, înseamnă că există o matrice ortogonală $\mathbf{C}$ astfel încît $\mathbf{A}' = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ să fie diagonală cu valorile proprii pe diagonala principală. $\mathbf{A}'$ este *forma normală* a lui $\mathbf{A}$ şi schimbarea de bază reprezentată de $\mathbf{C}$ se numeşte *transformarea la axele principale.* Matricea $\mathbf{C}$ este matricea coordonatelor unei baze ortonormale de vectori proprii în raport cu baza în care A este reprezentat prin matricea $\mathbf{A}$.

Exemplul 4. Pentru $A \to \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ valorile proprii sînt $+2$ şi $+4$. Vectorii proprii corespunzători lui $+2$ sînt $(x_1, x_2) = \tau_1\,(1, 1)$ şi vectorii proprii corespunzători lui $+4$ sînt $(x_1, x_2) = \tau_2(-1, 1)$. Numerele τ_1 şi τ_2 pot fi alese astfel încît vectorii să aibă lungimea 1. Vectorii proprii $(1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$ şi $(-1/\sqrt{2};\ 1/\sqrt{2})$ formează o bază ortonormală şi $\mathbf{C}$ este:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Cu ajutorul transformării la axele principale, ecuaţiile conicelor centrate sau ale cvadricelor pot fi simplificate considerabil schimbînd sistemul de coordonate carteziene cu un sistem format din axele de simetrie ale curbelor sau ale suprafeţelor. Acestea sînt axele principale ale figurii, de unde rezultă şi denumirea de transformare la axele principale.

Exemplul 5. Dacă $ax^2 + 2bxy + cy^2 = d$ este ecuaţia unei secţiuni conice, atunci coordonatele din partea stîngă pot fi aranjate într-o matrice simetrică $\mathbf{A}$. Printr-o transformare la un nou sistem de coordonate rectangulare (x', y') cu o matrice ortogonală $\mathbf{C} = (c_{ij})$ matricea $\mathbf{A}$ se transformă în $\mathbf{A}' = \mathbf{C}^T\mathbf{A}\mathbf{C} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$. Astfel, alegînd pe $\mathbf{C}$ în mod convenabil, $\mathbf{A}'$ devine o matricea diagonală

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

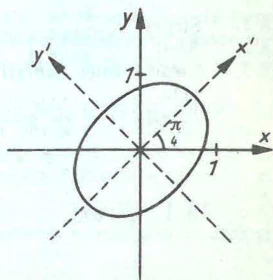
$$\begin{aligned} x' &= c_{11}x + c_{21}y \\ y' &= c_{12}x + c_{22}y \end{aligned}; \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Aceasta înseamnă că în noul sistem de coordonate ecuaţia curbei devine $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = d$.

De exemplu, fie ecuaţia $3x^2 - 2xy + 3y^2 = 2$. Matricea de transformare $\mathbf{C}$ a matricei simetrice $\mathbf{A}$ a fost găsită în exemplul 4:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \\ y' &= \frac{-1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \end{aligned}\right\}.$$



17.6.1. Transformarea axelor principale pentru $3x^2 - 2xy + 3y^2 = 2x'^2 + 4y'^2 = 2$.

Coeficienţii acestor două ecuaţii sînt elementele lui $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^T$. Dacă se substituie expresiile lui x şi y în ecuaţie, ecuaţia curbei în noile coordonate este $2x'^2 + 4y'^2 = 2$.

Matricea $\mathbf{C}$ descrie o rotaţie de unghi $\pi/4$ a planului în jurul originii, care transformă vechile axe de coordonate în noile axe (fig. 17.6.1.).

17.7. Algebră multiliniară

Principalul obiect al algebrei multiliniare este studiul *formelor multiliniare*, care sînt generalizări ale formelor liniare. O formă multiliniară pe un spaţiu vectorial V este o funcţie care pune în corespondenţa oricărei configuraţii formate din r vectori din V un număr şi care este liniară în raport cu fiecare dintre aceşti vectori. Acest lucru înseamnă că dacă $r - 1$ vectori sînt fixaţi, aplicaţia astfel definită este liniară în raport cu vectorul rămas.

Forme biliniare. Dacă $r = 2$, forma se numeşte *biliniară*. Un exemplu de formă biliniară este produsul scalar. Dacă se alege o bază în spaţiul V, forma biliniară poate fi exprimată cu ajutorul coordonatelor; de exemplu, în cazul unui spaţiu bidimensional expresia generală a formei biliniare este

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2.$$

Dacă se ia $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, se obţine *forma pătratică* $a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2$. Problema cea mai importantă în teoria formelor pătratice este găsirea celei mai simple forme de exprimare a acestora, de exemplu fără termenii cu x_iy_j, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$. Acest lucru se poate întotdeauna realiza printr-o transformare a axelor principale.

Tensori. Coeficienţii unei forme biliniare se comportă la anumite transformări, într-un mod regulat, caracteristic coordonatelor tensorilor. Generalizînd conceptul de spaţiu vectorial din algebra liniară, se definesc *spaţiile tensoriale* ale căror elemente se vor numi *tensori*.

Aplicaţii. *Algebra tensorială* — studiul spaţiilor tensoriale — are importante aplicaţii în geometria diferenţială. Aici curbura unei suprafeţe sau a unui spaţiu este descrisă printr-un tensor, *tensorul* de *curbură*. În teoria relativităţii imposibilitatea separării energiei şi impulsului unei particule este reflectată de existenţa unui tensor ale cărui componente sînt energia şi componentele impulsului, aşa-numitul *tensor energie—impuls*. Tensorii mai sînt utili şi în alte domenii ale fizicii, de exemplu, în optica cristalelor şi în teoria elasticităţii. Astfel, deformarea sau tensiunea unui mediu elastic este descrisă prin *tensorul de deformare sau tensiune*.

Teoria formelor biliniare şi pătratice se foloseşte în geometria analitică pentru obţinerea clasificării conicelor şi cvadricelor. Ea se mai foloseşte în fizică, în particular pentru descrierea sistemelor fizice supuse unor vibraţii mici.

18. Şiruri. Serii. Limite

18.1. Şiruri

Dintr-o mulţime nevidă de numere reale S, pot fi formate şiruri astfel: alegem primul număr a_1, al doilea număr a_2, al treilea număr a_3 etc., socotind a_1 primul termen al şirului, a_2 al doilea, a_3 al treilea etc. De exemplu, din şirul numerelor naturale alegem numerele divizibile cu 2 în ordinea lor crescătoare 2, 4, 6, 8, 10, ... În formarea şirurilor un element din S poate fi ales de mai multe ori, de exemplu 2, 4, 2 ,6, 2, 8, 2, 10. Alegînd din mulţimea S întotdeauna numărul a, obţinem şirul constant $a, a, ..., a. ...$

Un *şir finit (trunchiat)* are un număr finit de termeni N; a_N este ultimul său termen. Şirul 2 4, 2, 6, 2, 8, 2, 10 este un şir trunchiat de termeni, fiind format din 8 termeni; $a_8 = 10$ este, ultimul său termen. Şirul numerelor pare nu are un ultim termen, deoarece fiecare termen este urmat de altul. Astfel de şiruri se numesc *infinite*.

Un şir infinit este acel şir căruia la fiecare număr natural $n \geqslant 1$ corespunde un număr real a_n; a_n este termenul al n-lea al şirului. Dacă corespondenţa există numai în cazul unui număr natural necuprins între 1 și $N(1 \leqslant n \leqslant N)$, *obţinem un şir finit.*

Reprezentarea acestei corespondenţe o facem în exemplul următor.

Numărul de ordine n al termenului:	1	2	3	4	5	...
	↓	↓	↓	↓	↓	
Termenul a_n al şirului:	2	4	6	8	10	...

De aici reiese că orice şir este privit ca o mulţime de perechi ordonate de numere (n, a_n), unde prima componentă n este un număr natural iar cea de a doua componentă termenul a_n este un număr real. Datorită acestei corespondenţe, şirurile pot fi privite drept funcţii.

Şirurile sînt funcţii al căror domeniu de definiţie este o mulţime de numere naturale iar domeniul valorilor este format din numere reale.

Desigur, reprezentarea grafică a unui şir, ca de exemplu şirul punctelor discrete cu coordonatele (n, a_n), într-un sistem cartezian de coordonate este la fel de insuficientă pentru descrierea unui şir infinit, ca şi enumerarea primilor termeni ai şirului. De exemplu, termenii $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$ pot fi primii termeni ai unui număr infinit de şiruri, ca şirul trunchiat al divizorilor lui 210 sau şirul 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... în care al k-lea termen $(k > 2)$ este suma a doi termeni precedenţi.

Pentru descrierea completă a unui şir infinit, încercăm să definim o corespondenţă unică între numărul de ordine n al termenului şi termenul corespunzător a_n printr-o lege de definiţie. În majoritatea cazurilor, este posibil a stabili legea pe baza unei *expresii analitice* $a_n = f(n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Putem nota şirul $a_1, a_2, a_3, \ldots$ prin $\{a_n\} = \{f(n)\}$.

Exemple de şiruri:

1. Şirul 2, 4, 6, ... al numerelor naturale pare este definit de legea $\{a_n\} = 2n$.

2. Şirul 1, 4, 9, ... al pătratelor numerelor: $\{a_n\} = \{n^2\}$.

3. Termenul al şaptelea al şirului $\{a_n\} = \{n/(n+1)\}$ este obţinut prin înlocuirea lui $n = 7$ în expresia analitică care dă $a_7 = 7/(7+1) = 7/8$.

4. Şirul $\{a_n\} = \{2^n\}$ pentru $1 \leqslant n \leqslant 10$ este un şir finit; ultimul său termen este $a_{10} = 2^{10} = 1024$.

5. Legea $\{a_n\} = (-1)^{n+1} \cdot n$ reprezintă şirul 1, − 2, 3, − 4, 5, − 6, ... Şirul este *alternant*, deoarece doi termeni alăturaţi au semne diferite. Acest exemplu ne arată din nou că un şir infinit nu are în mod necesar un cel mai mic sau cel mai mare termen.

Legea care defineşte un şir poate fi exprimată pe baza unei *relaţii de recurenţă*, prin care termenul a_n poate fi calculat cu ajutorul lui a_i, $i < n$ deja cunoscut. De exemplu, şirul *numerelor lui Fibonacci* 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... este definit prin $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ şi pentru $n \geqslant 3$ pe baza relaţiei de recurenţă $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

Nu întotdeauna şirurile pot fi descrise printr-o expresie analitică sau printr-o relaţie de recurenţă, ca de exemplu şirul numerelor prime. Din termenii unui şir pot fi obţinute alte şiruri, ca de exemplu din $1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots$ şirul $s_1 = 1$, $s_2 = 1 + 1/2$, $s_3 = 1 + 1/2 + 1/3$, ... $s_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n, \ldots$, al cărui al n-lea termen este suma primilor n termeni ai şirului dat.

Şiruri monotone. Aceste şiruri conţin termeni care odată cu creşterea numărului de ordine al termenului cresc sau descresc (vezi cap. 5).

Şirul $\{a_n\}$ este un şir monoton strict crescător dacă fiecare termen al său este mai mare decît cel precedent: $a_{n+1} > a_n$ pentru orice n. Şirul este strict descrescător dacă $a_{n+1} < a_n$ pentru oricee n.

În cazul în care $a_{n+1} \geqslant a_n$ sau $a_{n+1} \leqslant a_n$ şirul se numeşte monoton crescător şi respectiv monoton descrescător.

Șirul 1, 1/2, ..., $1/n$,... este un șir strict descrescător, șirul $-12, -9, -6, -3, 0, ..., [-12+ + 3(n-1)]$,... este strict crescător. Majoritatea șirurilor nu sînt nici monoton crescătoare, nici monoton descrescătoare, de exemplu șirul 1, 1/2, 2, 1/3, 3, 1/4, 4, ...

Șiruri mărginite. Șirul $-1/2$, 0, 1/6, 2/8,... definit de legea $a_n = (n-2)/(2n)$ se bucură de proprietatea că fiecare din termenii săi este mai mic decît 1 și nu este mai mic decît $-1/2$. Deci avem $-1/2 \leqslant a_n < 1$ pentru orice n. Astfel de șiruri se numesc mărginite.

Un șir $\{a_n\}$ este mărginit dacă există două numere k și K astfel încît pentru orice număr n să avem $k \leqslant a_n \leqslant K$.

k se numește *mincrant*, iar K *majorant* al șirului. Dacă avem $k \leqslant a_n \leqslant K$ pentru orice termen a_n al șirului, atunci $|a_n| \leqslant M = \max(|k|, |K|)$. Invers, dacă există o margine M pentru valorile absolute $|a_n|$ ale termenilor, $|a_n| \leqslant M$, atunci $-M \leqslant a_n \leqslant M$ și putem afirma că șirul este mărginit.

Un șir $\{a_n\}$ este mărginit dacă există un număr pozitiv M care majorează valcarea absolută a oricărui termen al șirului: $|a_n| \leqslant M$ pentru orice n.

Numerele k, K, M nu sînt unic determinate. Dacă k este un minorant al șirului, atunci orice număr $k' < k$ este tot un minorant al șirului. Același lucru este valabil și pentru majorantul $K' > K$. Un șir trunchiat este întotdeauna mărginit. Termenul cel mai mic poate fi ales ca minorant k, iar cel mai mare ca majorant K. Șirurile infinite sînt nemărginite, ca de exemplu șirul pătratelor 1, 4, 9, ..., n^2,... Cel mai mic majorant se numește *margine superioară* G; fiecare număr mai mic $G - \varepsilon$, unde ε este un număr pozitiv, arbitrar de mic, este mai mic decît cel puțin un termen a_m al șirului $\{a_n\}$, adică $a_m > G - \varepsilon$. În mod similar cel mai mare minorant se numește *margine inferioară* g; orice număr mai mare $g + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$, arbitrar) este mai mare decît un termen a_k : $a_k < g + \varepsilon$. Se poate demonstra că orice șir mărginit are o margine superioară și o margine inferioară unic determinate.

Aceste considerații pot fi aplicate și la mulțimi de numere; dacă înlocuim „șir" prin „mulțime" și „termen" prin „element".

Progresii aritmetice. Într-o progresie aritmetică, *diferența* d dintre doi termeni alăturați se numește *rație* și este *constantă*, dar diferită de zero, $a_n - a_{n-1} = d$; de exemplu: pentru progresia 2, 4, 6, 8, ..., rația este $d = 2$; pentru progresia 25, 22, 19, 16, 13, ... rația este $d = -3$. Dacă d este pozitiv, progresia aritmetică crește monoton; dacă d este negativ, progresia descrește monoton. Pentru obținerea celui de-al doilea termen se adaugă d la primul termen; pentru al n-lea termen, se adaugă $(n-1)d$ la primul termen.

Progresie aritmetică	$a_1, a_2 = a_1 + d,\ a_3 = a_1 + 2d, ..., a_n = a_1 + (n-1)d, ...$

Denumirea provine din faptul că fiecare termen a_k ($k \geqslant 2$) este *media aritmetică* a termenilor vecini, lucru care se poate ușor vedea din următorul raționament: $a_{k-1} = a_k - d$, $a_{k+1} = a_k + d$ și $\frac{1}{2}(a_{k-1} + a_{k+1}) = \frac{1}{2}(2a_k) = a_k$.

Exemplul 1. Dacă $a_{10} = 15$ este al zecelea termen al unei progresii aritmetice a cărei rație este $d = 2$, atunci primul termen al progresiei, a_1, va fi cu $(n-1)d = 9 \cdot 2 = 18$ mai mic decît acesta, adică $a_1 = -3$.

Exemplul 2. Într-o progresie aritmetică cu primul termen $a_1 = 33$ și rația $d = 8$, cel de al 100-lea termen are valoarea $a_{100} = a_1 + (n-1)d = 33 + 99 \cdot 8 = 825$.

Interpolarea liniară constă în intercalarea a m termeni, între doi termeni consecutivi ai unei progresii a_k și a_{k+1}, cu rația d, intercalare care se face astfel încît să rezulte o progresie

aritmetică al cărei prim termen este a_k, iar al $(m + 2)$-lea termen este a_{k+1}. Dacă d' este rația progresiei căutate, atunci:

$$a_{k+1} = a_k + (m + 1)d' = a_k + d, \quad \text{deci} \quad d' = d/(m + 1).$$

Exemplu. Dacă între termenii progresiei 3, 17, 31, 45, 59, ... se intercalează cîte șase termeni, atunci rația d' va fi egală cu $14/7 = 2$, datorită faptului că rația $d = 45 - 31 = 14$; așadar vom avea progresia: 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, ...

Progresii geometrice. Într-o progresie geometrică, raportul $q \neq 1$ dintre doi termeni vecini este *constant*, $a_n = a_{n-1}q$; de exemplu progresia 9, 3, 1, 1/3, 1/9, ... are primul termen egal cu 9, iar rația este $\frac{1}{3}$; progresia $-\frac{1}{2}$, 1, -2, 4, ... are $a_1 = -\frac{1}{2}$ și $q = -2$, iar progresia -24, -12, -6, -3, ... are $a_1 = -24$, $q = 1/2$. Dacă q este negativ, atunci progresia este *alternantă*. Dacă q este pozitiv, toți termenii au semnul lui a_1. Dacă $|q| > 1$, valorile absolute $|a_n|$ ale termenilor vor fi crescătoare și progresia este nemărginită. Pentru $|q| < 1$, progresia este *mărginită*. Termenii cresc monoton pentru $a_1 > 0$, $q > 1$ și pentru $a_1 < 0$, $0 < q < 1$. Ei descresc pentru $a_1 > 0$, $< q < 1$ și de asemenea pentru $a_1 < 0$, $q > 1$. Cel de-al doilea termen al progresiei se obține din primul prin înmulțirea cu q, iar al n-lea termen al progresiei se obține prin înmulțirea cu q^{n-1}.

Denumirea de progresie geometrică se referă la faptul că fiecare termen al progresiei, a_k, $(k \geq 2)$ este *media geometrică* a termenilor învecinați, lucru care se vede considerînd: $a_{k-1} = a_k : q$ și $a_{k+1} = a_k \cdot q$, media va fi: $\sqrt{(a_k : q)(a_k \cdot q)} = a_k$

Progresie geometrică	$a_1,\ a_2 = a_1 \cdot q,\ a_3 = a_1 q^2,\ \ldots,\ a_n = a_1 q^{n-1}.$

Exemplul 1. Pentru o progresie geometrică cu primul termen $a_1 = 2$ și rația $q = \frac{1}{2}$, cel de-al zecelea termen va avea valoarea $a_{10} = a_1 q^9 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{256}$.

Exemplul 2. Dacă primul termen al unei progresii geometrice este $a_1 = \frac{2}{3}$ și al zecelea este $a_{10} = a_1 q^9 = 13122$, atunci vom obține pentru rație valoarea $q = \sqrt[9]{\frac{a_{10}}{a_1}} = \sqrt[9]{\frac{3 \cdot 13122}{2}} = 3.$

Între două numere a_k și $a_{k+1} = a_k q$ se pot *intercala* m numere, astfel încît ele să formeze o nouă progresie geometrică. Dacă q' este rația acestei noi progresii în care a_k este primul termen, iar a_{k+1} este al $(m + 2)$-lea termen, atunci vom avea $a_{k+1} = a_k q'^{(m+1)} = a_k q$ și deci $q' = \sqrt[m+1]{q}$.

Exemplu. Între oricare doi termeni ai progresiei 32, 1, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{1024}$, ... se vor intercala cîte patru termeni. Pentru progresia dată, rația este $q = \frac{1}{32}$ iar rația progresiei obținute prin intercalare va fi $q' = \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$; deci noua progresie va fi 32, 16, 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, ...

Convergența și divergența șirurilor. Termenii șirului 1, 3/4, 4/6, 5/8, ..., $a_n = (n+1)/(2n)$, ... diferă de 1/2 cu o cantitate care descrește odată cu creșterea lui n. Diferența $|a_n - 1/2|$ dintre termenii șirului și 1/2 poate fi făcută oricît de mică, adică se poate întotdeauna alege o valoare a indicelui n, astfel încît pentru toți termenii șirului cu un indice mai mare decît n, diferența $\left|a_n - \frac{1}{2}\right|$ să fie mai mică decît un număr pozitiv dat ε. Dacă se cere ca diferența față de $\frac{1}{2}$ să fie cel mult egală cu $\varepsilon = 0{,}001$, atunci inegalitatea $\left|a_n - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2}\right| =$

$= \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2n} < 0{,}001$ este valabilă pentru $n > 500$, ceea ce înseamnă că primii 500 de termeni se găsesc în afara vecinătății alese a lui $\frac{1}{2}$. Dacă se consideră $\varepsilon = 0{,}000001$, 500000 de termeni se vor afla în afara vecinătății; toți ceilalți termeni se vor găsi în interiorul acestei vecinătăți. Astfel, oricum s-ar alege ε, se poate stabili un indice n, pentru care toți termenii cu indice mai mare decît n diferă de $\frac{1}{2}$ cu mai puțin decît ε. Se spune că șirul $\{a_n\}$ *converge* către *limita* $\frac{1}{2}$.

Un șir $\{a_n\}$ converge către o limită a dacă oricărui număr ε arbitrar de mic îi corespunde un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît inegalitatea $|a_n - a| < \varepsilon$ este satisfăcută pentru toți termenii a_n ai șirului cu $n > N(\varepsilon)$.

Indicele N începînd cu care $|a_n - a| < \varepsilon$ depinde în general de ε; cu cît ε se alege mai mic, cu atît N este mai mare. Această legătură se precizează scriind în loc de N, $N(\varepsilon)$. Pentru un șir $\{a_n\}$ care converge către a, oricărui $\varepsilon > 0$ îi corespunde, de exemplu, un număr $N_2(\varepsilon)$ începînd cu care $|a_n - a| < \varepsilon/2$, un număr $N_k(\varepsilon)$ începînd cu care $|a_n - a| < \varepsilon k$, un număr $N'(\varepsilon)$ începînd cu care $|a_n - a| < \varepsilon^{\alpha}$ ș.a.m.d. Pentru a arăta că $\{a_n\}$ converge către limita a, se folosește una din notațiile $\{a_n\} \to a$ cînd $n \to \infty$ sau $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ (se citește: a_n converge către a cînd n tinde la ∞).

Geometric, aceasta înseamnă că numai un număr finit de termeni ai șirului se găsesc în afara vecinătății $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ a limitei a pe cînd toți ceilalți termeni se găsesc în interiorul vecinătății. Astfel se poate spune că oricît de mic ar fi ε, aproape toți termenii șirului se găsesc în interiorul vecinătății lui a de rază ε.

Exemplul 1. Șirul 0,3; 0,33; 0,333; ... construit după regula $a_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \ldots + \frac{3}{10^n}$, converge către $\frac{1}{3}$. Pentru valoarea absolută a deviațiilor față de limită se obține:

$$\left| a_n - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{3(10^{n-1} + \ldots + 10^1 + 1)}{10^n} - \frac{1}{3} \right| =$$

$$= \left| \frac{9 \cdot \dfrac{10^n - 1}{10 - 1} - 10^n}{3 \cdot 10^n} \right| = \left| \frac{1}{3 \cdot 10^n} \right| < \varepsilon.$$

Din această inegalitate se poate obține pentru orice ε pozitiv un indice $n > N(\varepsilon) > \lg \frac{1}{3\varepsilon}$; de exemplu pentru $\varepsilon = 10^{-12}$ $N(\varepsilon) = 12 - \lg 3$ și deci există numai 12 termeni care au distanțele față de $\frac{1}{3}$ mai mari decît $\varepsilon = 10^{-12}$.

Exemplul 2. Șirul 1, 1/4, 1/9, 1/16, ..., $1/j^2$, ... are limita 0 deoarece pentru orice $\varepsilon > 0$, $|a_n - a| = |1/n^2 - 0| = 1/n^2 < \varepsilon$ pentru orice $n > N(\varepsilon) = 1/\sqrt{\varepsilon}$.

Șirurile cu limita 0 se numesc *șiruri nule*. Pentru orice șir nul $\{b_n\}$ se poate construi un șir $\{b_n + b\}$ cu limita b. Invers, dacă $\{a_n\}$ converge către a, șirul $\{a_n - a\}$ este un șir nul.

Convergența progresiilor aritmetice și geometrice infinite. Șirurile care nu sînt convergente se numesc *divergente*. Orice progresie aritmetică infinită cu $a_n = a_1 + (n - 1)d$ este divergentă. Diferența dintre doi termeni vecini fiind d, nu este posibil ca aproape toți termenii să se afle într-o vecinătate a unui număr fixat.

Dacă raţia d are valori pozitive, termenii a_n ai progresiei vor fi în final mai mari decît orice număr, oricît de mare. Simbolic, aceasta se scrie $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, şi un şir cu această proprietate se numeşte *impropriu divergent*.

Pentru valori negative ale lui d, termenii vor deveni mai mici decît orice număr, oricît de mic. Şi acest şir se numeşte şir *impropriu divergent*. Se scrie $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Orice progresie geometrică infinită cu $a_n = a_1 q^{n-1}$ converge către zero, dacă valoarea absolută $|q|$ a raţiei este mai mică decît 1; dacă valoarea absolută $|q|$ este mai mare decît 1, progresia este divergentă şi anume pentru $q > 1$ este impropriu divergentă.

Subşiruri. Dacă $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, este un şir infinit şi monoton crescător de numere naturale, atunci $\{p_n\}$ este un *subşir* al şirului de numere naturale, de exemplu şirul 1, 3, 7, 9, 13, 14, 27, ... Dacă se alege un asemenea şir $\{p_n\}$ de indici, atunci din fiecare şir de numere $\{a_n\}$ se obţine un subşir $\{a_{p_n}\}$; de exemplu $1, \frac{1}{8}, \frac{1}{64}, \ldots$ este un subşir al şirului $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ Dacă pentru orice $n > n_0$, valorile lui a_n se găsesc în ε-vecinătatea limitei a, adică $|a_n - a| < \varepsilon$, atunci acelaşi lucru este valabil şi pentru termenii subşirului.

Orice subşir $\{a_{p_n}\}$, al unui şir $\{a_n\}$ convergent $a_n \to a$, converge de asemenea către aceeaşi limită a.

Teoreme asupra şirurilor convergente. Convergenţa şirului $\{a_n\}$ este dată de existenţa unui număr $N(\varepsilon)$ astfel încît $|a_n - a| < \varepsilon$. Eliminarea sau introducerea unui număr finit de termeni la începutul şirului nu influenţează convergenţa şi limita şirului, cel mult mărimea lui $N(\varepsilon)$.

Şirurile convergente sînt mărginite.

Dacă şirul $\{a_n\}$ are limita a, pentru orice număr pozitiv ε, în afara intervalului $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ se găsesc numai un număr finit de termeni şi o mulţime finită de numere este mărginită.

Dacă şirul convergent $\{a_n\}$ are marginea superioară K, atunci limita a nu poate fi mai mare decît K.

Un şir convergent are o singură limită.

Dacă $\{a_n\}$ ar avea două limite diferite a şi a', atunci ε ar putea fi ales astfel încît ε-vecinătăţile lui a şi a' să nu aibă puncte comune. De la un anumit indice $N(\varepsilon)$, o infinitate de termeni ai şirului se găsesc în afara ε-vecinătăţii lui a şi o infinitate de termeni se găsesc în afara ε-vecinătătăţii lui a', ceea ce contrazice faptul că a şi a' sînt limite.

Dacă şirurile a_n şi b_n au limitele respectiv a şi b, atunci şirurile $\{a_n+b_n\}$, $\{a_n-b_n\}$, $\{a_nb_n\}$ converg către $a+b$, $a-b$, ab respectiv, iar dacă limita b este diferită de zero, şirul $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ converge către $\frac{a}{b}$.

Să presupunem, de exemplu, că pentru un ε oarecare are loc $|(a_n+b_n)-(a+b)| < \varepsilon$; pentru şirul convergent $\{a_n\}$ există un indice n_1, astfel încît $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ pentru $n \geqslant n_1$, şi de asemenea şirul $\{b_n\}$ pentru un indice n_2, astfel încît $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$, de îndată ce $n > n_2$. Atunci, conform inegalităţii triunghiului $|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon$ este adevărată pentru $n > \max(n_1, n_2)$.

Pentru a se arăta că $\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right|$ este mai mică decît orice număr pozitiv ε, se va alege cel mai mare dintre *trei* indici; făcîndu-se transformarea $\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a(b_n - b) - b(a_n - a)}{bb_n}\right| < \varepsilon$ sau $|a(b_n - b) - b(a_n - a)| < \varepsilon|bb_n|$ indicii n_1 şi n_2 trebuie aleşi astfel încît $|b_n - b|$ şi $|a_n - a|$ să fie suficient de mici, în timp ce n_3 trebuie ales în aşa fel încît toţi b_n cu $n > n_3$ să fie

mai mari, în modul, decît un număr g strict pozitiv. Datorită faptului că $b \neq 0$, acest lucru este posibil.

Din această primă propoziție rezultă propozițiile 1, 2 și 3.

1. Dacă șirurile $\{a_n\}$ și $\{b_n\}$ sînt convergente către zero, și șirurile $\{a_n+b_n\}$, $\{a_n-b_n\}$ sau $\{a_nb_n\}$ vor fi de asemenea convergente către zero.

Șirul $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$, construit din șirurile $\{a_n\}$ și $\{b_n\}$ convergente către zero, în general nu este un șir convergent către zero, deoarece condiția $b \neq 0$ nu este îndeplinită; de exemplu $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ și $\{b_n\} = \left\{\frac{1}{4^n}\right\}$ sînt șiruri convergente către zero, dar șirul $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} = \{2^n\}$ este divergent.

2. Dacă c, c_1 și c_2 sînt constante și dacă $\{a_n\} \to a$ și $\{b_n\} \to b$, atunci și $\{ca_n\} \to ca$; $\{c_1a_n + c_2b_n\} \to c_1a + c_2b$.

3. Deoarece șirul produselor termenilor a două șiruri convergente converge către produsul limitelor celor două șiruri, dacă $\{a_n\} \to a$, și $a \neq 0$, atunci pentru orice număr ν întreg pozitiv sau negativ, avem $\{a_n^\nu\} \to a^\nu$.

4. Dacă șirurile $\{a_n'\}$ și $\{a_n''\}$ converg către aceeași limită a și dacă pentru toți termenii șirului $\{a_n\}$ cu excepția unui număr finit are loc inegalitatea $a_n' \leqslant a_n \leqslant a_n''$, atunci șirul $\{a_n\}$ converge către aceeași limită a.

Referitor la 4: Pentru orice $\varepsilon > 0$, există un n_0, începînd de la care toți termenii șirului $\{a_n'\}$ și toți termenii șirului $\{a_n''\}$ se găsesc în ε-vecinătatea lui a și $a_n' < a_n < a_n''$; termenii șirului $\{a_n\}$ se găsesc deci în aceeași vecinătate, așadar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Limite importante

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1$ pentru orice $q > 0$.	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0.$

1. Pentru o valoare oarecare q pozitivă $\{x_n\} = \{\sqrt[n]{q} - 1\}$ este un șir convergent către zero. Pentru $q = 1$, fiecare termen al șirului are valoarea zero. Pentru $q > 1$, avem $\sqrt[n]{q} > 1$ și deci x_n sînt pozitive. Deci: $q = (1 + x_n)^n > 1 + nx_n > nx_n > 0$ sau $0 < x_n < \frac{q}{n}$.

Dar șirul $\left\{\frac{q}{n}\right\}$ este convergent către 0, deci $\{x_n\}$ este șir nul. Pentru $q < 1$, $\frac{1}{q} > 1$ iar $\left\{\sqrt[n]{\frac{1}{q}} - 1\right\}$ are deci limita 0. Dacă fiecare termen al șirului se înmulțește respectiv cu termenii șirului $\{\sqrt[n]{q}\}$, datorită inegalității $\sqrt[n]{q} < 1$, șirul nou obținut $\{\sqrt[n]{q} - 1\}$ va fi un șir convergent către zero.

2. După cum s-a arătat mai sus, termenii șirului $\{q^{\frac{1}{n}}\}$ au limita 1, dacă q este un număr pozitiv oarecare, iar n tinde către ∞. Se poate găsi un număr n_0, astfel încît pentru $m > n_0$ ambele valori $q^{\pm\frac{1}{m}}$ să se găsească în intervalul $(1 - \varepsilon,\ 1 + \varepsilon)$. Pentru un șir $\{a_n\}$ convergent către zero, se poate găsi un indice n_1, astfel încît a_n pentru orice $n > n_1$ să fie cuprins între $-\frac{1}{m}$ și $+\frac{1}{m}$, deci q^{a_n} să se găsească între $1-\varepsilon$ și $1 + \varepsilon$, sau $q^{a_n} - 1$ între $-\varepsilon$ și $+\varepsilon$; rezultă deci că $\{q^{a_n} - 1\}$ este un șir convergent către 0, dacă a_n este un șir nul. Rezultă deci că $\{q^{a_n}\}$ converge către q^a, dacă a_n tinde către a, deoarece în $q^{a_n} - q^a = q^a(q^{a_n-a} - 1)$ șirul $\{a_n - a\}$ este un șir convergent către zero și deci și $\{q^{a_n-a} - 1\}$ converge către zero.

Mai jos, la *4*, se va arăta, că pentru o bază oarecare $g > 1$, a unui sistem de logaritmi, are loc $\{\log_g a_n\} \to \log_g a$, dacă $\{a_n\} \to a$. Dacă α este o constantă reală, are loc şi $\{\alpha \log_g a_n\} \to \alpha \log_g a$; de asemenea, conform celor de mai sus, $\{g^{\alpha \log_g a_n}\} \to g^{\alpha \log_g a}$ sau $\{a_n^{\alpha}\} \to a^{\alpha}$.

$\{q^{a_n}\} \to 1$, cînd $\{a_n\} \to 0$ şi $q > 0$; $\{q^{a_n}\} \to q^a$ cînd $q > 0$ şi $\{a_n\} \to a$; $\{(a_n)^{\alpha}\} \to a^{\alpha}$ cînd a_n şi a sînt pozitive, α real şi $\{a_n\} \to a$.

3. Şirul $\sqrt[n]{n}$ converge către 1, adică $\{x_n\} = \{\sqrt[n]{n} - 1\}$ converge către 0. Într-adevăr termenii acestui şir sînt pentru $n \geqslant 2$ pozitivi. Din $(1 + x_n)^n = n$ se obţine, folosindu-se dezvoltarea binomială, $\frac{n(n-1)}{2} x_n^2 \leqslant n$ sau $|x_n| \leqslant \sqrt{\frac{2}{n-1}}$. Dacă pentru un ε dat se alege un indice $N(\varepsilon) = \frac{2}{\varepsilon^2} + 1$, astfel încît $n > \frac{2}{\varepsilon^2} + 1$, atunci are loc $|x_n| < \varepsilon$ pentru orice $n > N(\varepsilon)$.

4. Pentru o bază de logaritmi oarecare $b > 1$, şirul $\left\{\frac{\log n}{n}\right\}$ este convergent către zero. Pentru a demonstra acest lucru, trebuie să găsim un indice n_0, astfel încît pentru $n > n_0$ să aibă loc: $\frac{\log n}{n} < \varepsilon \Longleftrightarrow \log n < \varepsilon n \Longleftrightarrow n < b^{\varepsilon n} \Longleftrightarrow \sqrt[n]{n} < b^{\varepsilon}$. Deoarece b^{ε} este mai mare ca 1, $\sqrt[n]{n}$ converge către 1 şi implicaţiile sînt adevărate în ambele sensuri, afirmaţia este demonstrată. Şi pentru $0 < b < 1$ şirul $\{(\log n)/n\}$ converge către zero deoarece $\log_{1/b} n = -\log_b n$.

Criterii de convergenţă pentru şiruri de numere. Definiţia limitei unui şir convergent ne indică dacă un anumit număr a este sau nu limita şirului $\{a_n\}$. Dacă valoarea limitei a nu este cunoscută, din proprietăţile termenilor a_n trebuie găsite condiţii, care să dea informaţii asupra convergenţei sau respectiv divergenţei şirului. Aceste condiţii constituie *criteriile de convergenţă*.

Primul criteriu de convergenţă. Termenii unui şir crescător infinit, care nu este mărginit, pot lua valori oricît de mari; şirul este *impropriu divergent*. Dacă şirul monoton este mărginit, se poate arăta că el are o limită.

Primul criteriu de convergenţă: Un şir monoton şi mărginit este convergent.

Numărul e ca valoare limită. Şirul $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ creşte monoton, adică pentru $n = 2, 3, \ldots$ are loc $\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sau

$$\frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}} < \frac{(n+1)^n}{n^n} \qquad \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n^n}{(n-1)^n} < \frac{(n+1)^n}{n^n}$$

$$\frac{n-1}{n} < \frac{(n^2-1)^n}{(n^2)^n} \qquad 1 - \frac{1}{n} < \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n.$$

Ultima inegalitate rezultă din *inegalitatea lui Bernoulli* $1 + na < (1 + a)^n$ care este adevărată pentru $a > -1$, $a \neq 0$, $n \geqslant 2$. În cazul de mai sus avem $a = -\frac{1}{n^2}$.

Şirul $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ este mărginit; folosindu-se dezvoltarea binomială se obţine $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + C_n^1 \frac{1}{n} + \ldots + C_n^k \frac{1}{n^k} + \ldots + C_n^n \frac{1}{n^n}$. Fiecare termen al acestei sume se poate majora în felul următor:

$$C_n^k \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}},$$

Şirul considerat este majorat de numărul 3:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3.$$

Deci șirul este convergent, iar limita a fost notată prin e de Leonhard EULER (1707—1783).

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$	$e = 2{,}71828 1828 4590 4523 536 \ldots$

Al doilea criteriu de convergență (criteriul lui Cauchy). Dacă de la un anumit indice $n(\varepsilon)$ diferențele dintre oricare doi termeni sînt mai mici decît un număr pozitiv ε, atunci toți termenii șirului, exceptînd cel mult un număr finit de termeni, se găsesc într-un interval de rază ε. Acest criteriu este necesar și suficient.

Al doilea criteriu de convergență. Un șir de numere $\{a_n\}$ este convergent atunci și numai atunci, cînd pentru orice număr pozitiv ε, se poate stabili un $n_0(\varepsilon)$, astfel încît pentru toți indicii n_1 și n_2 mai mari decît $n_0(\varepsilon)$, are loc $|a_{n_1} - a_{n_2}| < \varepsilon$.

Exemplul 1. Șirul $\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{6}, \frac{9}{8}, \frac{9}{10}, \frac{13}{12}, \frac{13}{14}, \ldots$ cu termenul general $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{2^n}$ este mărginit dar nu și monoton. Primul criteriu de convergență nu poate fi folosit.

Criteriul lui Cauchy pune în evidență convergența șirului, deoarece:

$$\left|a_{n+1} - a_n\right| = \left|1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2n+2} - 1 - \frac{(-1)^n}{2n}\right| =$$

$$= \left|\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2n - (-1)^n\cdot(2n+2)}{2n(2n+2)}\right| \leqslant \left|\frac{2n+2n+2}{2n(2n+2)}\right| =$$

$$= \left|\frac{4n+2}{4n^2+4n}\right| \leqslant \left|\frac{4n+4}{4n^2+4n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{pentru orice} \quad n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

După cum se vede, toți termenii șirului care-i urmează lui a_{n+1} sînt cuprinși între a_n și a_{n+1}; deci, pentru orice $n_1, n_2 > \frac{1}{\varepsilon}$, $|a_{n_1} - a_{n_2}| \leqslant |a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$.

Exemplul 2. Șirul $1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}, \ldots$ cu termenul general $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ nu satisface criteriul de convergență al lui Cauchy, deoarece dacă se alege un $\varepsilon < \frac{1}{2}$, atunci există două numere $n_1, n_2 > n_0(\varepsilon)$, pentru care $|a_{n_1} - a_{n_2}| > \varepsilon$, oricît de mare s-ar lua $n_0(\varepsilon)$. Într-adevăr, dacă s-ar lua $n_2 > n_0$ și $n_1 = 2n_2$, atunci

$$|a_{n_1} - a_{n_2}| = \frac{1}{n_2+1} + \frac{1}{n_2+2} + \frac{1}{n_2+3} + \ldots + \frac{1}{2n_2} >$$

$$> \frac{1}{2n_2} + \frac{1}{2n_2} + \ldots + \frac{1}{2n_2} = n_2 \cdot \frac{1}{2n_2} = \frac{1}{2} > \varepsilon.$$

Majorarea s-a efectuat înlocuind fiecare din fracțiile $\frac{1}{n_2+i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ prin fracția mai mică sau cel mult egală cu $\frac{1}{2n_2}$.

Punct de acumulare al unui șir. Șirul $1+\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{2}, 3+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{3}, 2+\frac{1}{3}, 3+\frac{1}{3}, \ldots, 1+\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}, 3+\frac{1}{n}, \ldots$ are proprietatea că o infinitate de termeni se găsesc în orice vecinătate a numerelor 1, 2 și 3. Termenii șirului se acumulează în vecinătatea punctelor 1, 2 și 3 care se numesc *puncte de acumulare* ale șirului.

Un număr A este punct de acumulare pentru şirul $\{a_n\}$, dacă pentru orice ε pozitiv, inegalitatea $|a_n - A| < \varepsilon$ este valabilă pentru o infinitate de termeni distincţi a_n ai şirului.

Şirul de numere cu $a_n = (-1)^n \frac{n+3}{2n}$ are două puncte de acumulare $\lambda' = \frac{1}{2}$ şi $\lambda = -\frac{1}{2}$. În orice vecinătate a acestor numere se găseşte o *infinitate de numere* ale şirului.

De aici rezultă că limita unui şir este întotdeauna unul din punctele lui de acumulare. Pe de altă parte, un punct de acumulare nu este în mod necesar limită, deoarece pentru un punct de acumulare A inegalitatea $|a_n - A| < \varepsilon$ trebuie să fie satisfăcută pentru o *infinitate* de *indici n*, dar pentru o limită A ea trebuie să fie satisfăcută pentru *toţi indicii n* mai mari decît $N(\varepsilon)$. În consecinţă un şir convergent poate avea numai un punct de acumulare, deoarece numai un număr finit de termeni ai şirului se găsesc în afara oricărei ε-vecinătăţi a limitei L şi, în particular, este imposibil ca o infinitate de termeni să se găsească în orice ε-vecinătate a lui $L' \neq L$. Din următoarea teoremă rezultă că şi reciproca este adevărată.

Un şir mărginit care admite exact un punct de acumulare este convergent. Dacă şirul nu are nici un punct de acumulare finit sau are mai multe astfel de puncte, atunci şirul este divergent.

Teorema Bolzano-Weierstrass. Orice şir mărginit are cel puţin un punct de acumulare.

Fie k şi K marginea inferioară, respectiv superioară a şirului. Toţi termenii şirului se vor găsi în intervalul $I_0 = [k, K]$. Acest interval se împarte în două şi se notează partea (sau una din părţile) care conţine o infinitate de termeni ai şirului cu I_1. Prin acelaşi procedeu se obţine intervalul I_2 ş.a.m.d.; lungimea intervalelor constituite tinde la zero şi astfel toate intervalele conţin un număr real A care este punct de acumulare al şirului.

Conceptul de punct de acumulare poate fi extins pentru *mulţimi arbitrare de puncte*. Teorema lui Bolzano-Weierstrass asigură existenţa cel puţin a unui punct de acumulare pentru orice mulţime infinită şi mărginită de puncte. Acest punct nu trebuie să fie neapărat un punct al mulţimii; astfel în exemplul considerat mai sus punctele de acumulare 1, 2, 3 nu aparţin mulţimii.

18.2. Serii

Seriile sînt deosebit de importante atît în teoria matematică cît şi în aplicaţii. Pe teoria seriilor se bazează diverse metode numerice, de exemplu, construirea tabelelor de logaritmi şi a tabelelor de funcţii trigonometrice, cît şi calculul anumitor constante importante ca e şi π.

Noţiunea de serie. Sofistul grec ZENON a pus întrebarea dacă Achille, care aleargă de douăsprezece ori mai repede decît o broască ţestoasă, o poate ajunge cînd ea are un avans de 1 stadiu (veche unitate de lungime = 184,97 m). În timp ce broasca ţestoasă străbate $\frac{1}{11}$ din stadiu, Achille, datorită vitezei sale de douăsprezece ori mai mare $\left(12 \cdot \frac{1}{11} = 1 + \frac{1}{11}\right)$, parcurge tot stadiul cît şi drumul broaştei ţestoase, deci o ajunge. Pe de altă parte, Zenon afirmă că în timp ce Achille a străbătut un stadiu, broasca a străbătut $\frac{1}{12}$ din stadiu, în timp ce el străbate această douăsprezecime, broasca are totuşi un avans de $\frac{1}{12^2}$, o depăşeşte Achille ea are totuşi un avans de $\frac{1}{12^3}$ de stadiu ş.a.m.d. Drumul pe care trebuie să-l străbată Achille pînă la punctul de întîlnire se poate pune sub forma: $1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{12^3} + \ldots$; punctele exprimă faptul că după fiecare termen $a_k = \frac{1}{12^{k-1}}$ urmează un alt termen $a_{k+1} = \frac{1}{12^k}$, deci expresia nu este finită.



O astfel de expresie se numește *serie infinită.* Zenon credea că prin acest rezultat a găsit un paradox al gîndirii formale, deoarece i se părea că valoarea seriei este mai mare decît orice număr, deci Achile niciodată nu poate ajunge broasca țestoasă. Totuși seria, corect stabilită de Zenon, este o serie geometrică, și are valoarea $\frac{12}{11}$, după cum rezultă din cele ce se vor descrie în continuare.

Printr-o serie infinită (sau pe scurt serie) se înțelege o expresie de forma $a_1 + a_2 + ...$, sau prescurtat $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, unde a_i sînt termenii unui șir de numere.

Folosirea semnului Σ. (Se citește sumă de a_i pentru i de la 1 la n); simbolul $\sum$ este însoțit de expresia „i egal de la 1 la n", ca să se arate că indicele de însumare i străbate toate numerele naturale de la 1 la n; de exemplu $\sum_{i=1}^{5} \frac{1}{i^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2}$. Pentru seria infinită se folosește același simbol, de exemplu seria construită de ZENON se poate scrie în felul următor: $1 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{12^3} + ... = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{12^i}$ Semnul ∞ arată faptul că seria nu se termină. Nu are importanță dacă indicele de însumare se notează prin i, k sau o altă literă.

Convergența și divergența. Suma unei serii. Pentru studiul seriilor se vor folosi cîteva teoreme cunoscute din studiul șirurilor. Cu termenii a_i ai seriei $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ se poate construi un șir $\{s_n\}$, șirul *sumelor parțiale.* Atunci cînd acest șir de sume parțiale are o limită S, aceasta este chiar suma S a seriei iar seria se numește de asemenea *convergentă.*

	Șirul sumelor parțiale	
a_1	$s_1 = a_1$	$= \sum_{i=1}^{1} a_i$
a_2	$s_2 = a_1 + a_2$	$= \sum_{i=1}^{2} a_i$
a_3	$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$	$= \sum_{i=1}^{3} a_i$
⋮	⋮	⋮
a_n	$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$	$= \sum_{i=1}^{n} a_i$

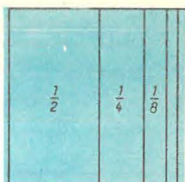
O serie infinită $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ este convergentă, dacă și numai dacă șirul sumelor parțiale este convergent. Limita șirului sumelor parțiale S reprezintă suma seriei

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + ... \quad sau \quad S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i .$$

Dacă șirul sumelor parțiale al seriei considerate este divergent, seria este divergentă; ea nu are sumă.

Seria stabilită de ZENON are termenul general, pentru șirul sumelor parțiale, $s_n = \frac{12}{11}\left(1 - \frac{1}{12^n}\right)$ (suma unei serii geometrice finite). Acest șir converge către limita $S = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{12}{11}\left(1 - \frac{1}{12^n}\right) = \frac{12}{11}$. Cuvîntul *suma* unei serii se bazează numai pe o analogie formală cu suma de termeni finiți și este numai un sinonim al noțiunii de *limita șirului de sume parțiale.*

Exemplu. Dacă se *înjumătăţeşte* latura unitate 1 a unui pătrat, şi apoi jumătatea din dreapta se înjumătăţeşte din nou ş.a.m.d., după cum se arată în figura alăturată, atunci laturile dreptunghiurilor formate pot fi considerate ca termeni ai unei serii infinite (fig. 18.2.1) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ $\ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$



18.2.1. Convergenţa seriei $1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots$

Interpretarea geometrică ne face să bănuim că suma seriei este 1. Şirul sumelor parţiale al seriei considerate $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \ldots, \frac{2^n - 1}{2^n}, \ldots$ este convergent şi are limita $s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1.$

Serii aritmetice. O *serie aritmetică* constă din termenii unei progresii aritmetice. Deoarece o progresie aritmetică infinită este divergentă, se poate vorbi numai despre *suma unei serii finite.* La tema dată de către profesorul său, de a calcula suma numerelor de la 1 la 100, tînărul Carl Friedrich Gauss (1777—1855) în vîrstă de 9 ani a răspuns numai după cîteva momente, arătînd tăbliţa cu un singur număr, 5050, valoarea corectă a sumei. Gauss calculase totul mintal folosind schema de mai jos: Profesorul a recunoscut că tînărul său elev nu mai are multe de învăţat în orele sale de aritmetică şi i-a procurat un manual de aritmetică deosebit: „AritmeticaRemers". Raţionamentul tînărului Gauss se poate utiliza pentru fiecare serie aritmetică:

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-1)d)$$
$$s_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + (a_n - (n-1)d)$$

$$2s_n = n(a_1 + a_n) \text{ sau } s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 50 +$$
$$100 + 99 + 98 + \ldots + 51$$
$$50 \cdot 101 = 5050$$

Progresia aritmetică finită	primul termen a_1, termenul final $a_n = a_1 + (n-1)d$, raţia d, suma $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = na_1 + \frac{d}{2}n(n-1)$

Din formula sumei se observă că dacă dintre mărimile a_1, a_n, d, n şi s_n cel puţin trei sînt date, celelalte se pot calcula folosind ecuaţii liniare sau de gradul al doilea.

Exemplul 1. Dacă într-o progresie aritmetică se cunosc $a_1 = 3$, $a_n = 43$ şi $d = 5$, se poate calcula numărul termenilor şi suma s_n.

$$a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow 43 = 3 + (n-1)\cdot 5 \rightarrow n = 9; \quad s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$s_9 = \frac{9}{2}(3 + 43) = 207.$$

Exemplul 2. Dacă se cunosc $d = 12$, $s_n = 180$ şi $a_n = 60$, se pot calcula a_1 şi numărul de termeni n.

$$a_1 = a_n - (n-1)d; \qquad s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \rightarrow s_n = \frac{n}{2}[2a_n - (n-1)d] \rightarrow$$

$$180 = \frac{n}{2}[120 - (n-1)\cdot 12] \rightarrow n^2 - 11n + 30 = 0.$$

Această ecuaţie de gradul doi are soluţiile $n_1 = 6$ şi $n_2 = 5$; pentru $n_1 = 6$ vom avea $a_1 = 0$, pentru $n_2 = 5$ avem $a_1 = 12$. Cele două sume sînt: $12 + 24 + 36 + 48 + 60$ şi $0 + 12 + 24 + 36 + 48 + 60$.

Serii geometrice. O *serie geometrică* se formează din termenii unei progresii geometrice. *Suma unei serii geometrice* se obține folosind următoarea schemă:

$$s_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots + a_1q^{n-1}$$
$$qs_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots + a_1q^{n-1} + a_1q^n$$
$$s_n - qs_n = a_1 - a_1q^n \text{ sau } s_n = a_1\frac{1-q^n}{1-q}$$

Progresie geometrică finită	primul termen a_1, termen final $a_n = a_1q^{n-1}$, rația q, suma $s_n = a_1\frac{1-q^n}{1-q} = a_1\frac{q^n-1}{q-1}$ pentru $q \neq 1$.

Din formula sumei se vede că dintre mărimile a_1, a_n, q, n și s_n cel puțin trei trebuie date, celelalte calculîndu-se folosind ecuații exponențiale sau de gradul n.

Exemplul 1. Dacă într-o progresie geometrică se dau $a_1 = 2$, rația $q = 5$ și suma $s_n = 976\,562$, se poate calcula numărul n de termeni.

$$s_n = a_1\frac{q^n-1}{q-1} \longrightarrow 976\,562 = 2\cdot\frac{5^n-1}{5-1} \longrightarrow 5^n = 1\,953\,125.$$

Această ecuație exponențială are soluția $n = 9$. Seria are nouă termeni.

Exemplul 2. Din povestirile istoricului arab Ja'qubi, inventatorul șahului Sessa Ebn Daher a cerut șahului Persiei, ca răsplată, numărul de boabe de grîu, care rezultă atunci cînd pe cele 64 de pătrate ale tablei se pun boabe în felul următor: pe primul pătrat se pune o boabă, pe a doua două boabe, pe a treia se pun 4 boabe ș.a.m.d., deci pe fiecare pătrat se pune un număr dublu decît pe cel precedent. Numărul total de boabe se obține după formula:

$$s_n = a_1\frac{q^n-1}{q-1} \quad \text{cu } s_{64} = 1\,\frac{2^{64}-1}{2-1} = 2^{64} - 1 \approx 1{,}84\cdot 10^{19} \text{ boabe.}$$

Dacă s-ar considera că întreaga suprafață a pămîntului (de $5{,}1\cdot 10^{10}$ ha) ar fi cultivată cu grîu, cu o recoltă de 40 dt pe ha, socotit 1 dt cu 2 milioane de boabe, nu ar fi suficiente nici patru recolte pentru a acoperi cantitatea necesară.

Serii geometrice infinite. Suma $s_n = a_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$ pentru $q \neq 1$ este al n-lea termen al șirului sumelor parțiale. Mărimile a_1 și q sînt constante, convergența șirului depinde de mărimea $1 - q^n$. Pentru $q > 1$ și pentru $q < -1$ șirul $\{q^n\}$ este divergent, deci seria geometrică nu are sumă. Pentru $|q| < 1$ șirul $\{q^n\}$ este convergent către zero, deci $\{1 - q^n\}$ are limita 1. În acest caz seria geometrică este convergentă și are suma $s = a_1/(1-q)$.

Serie geometrică infinită	$s = \frac{a_1}{1-q}$ pentru $\lvert q\rvert < 1$

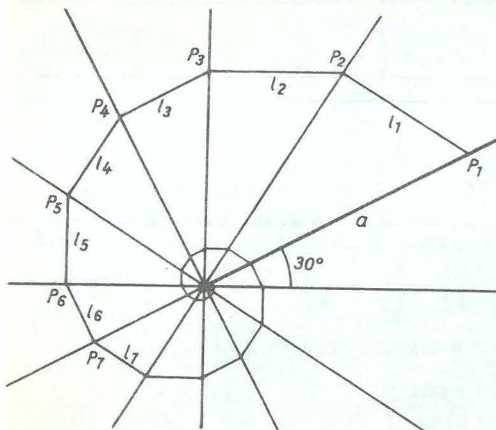
Exemplul 1. Orice fracție zecimală poate fi reprezentată printr-o serie geometrică convergentă. De exemplu, fracția zecimală 0,2525 ... reprezintă seria $\frac{25}{100} + \frac{25}{10\,000} + \ldots$ cu primul termen $\frac{25}{100}$, cu rația $q = \frac{1}{100}$ și cu suma $\frac{\frac{25}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{25}{99}$.

Exemplul 2. Şase drepte pot trece printr-un punct O (fig. 18.2.2), astfel încît unghiul dintre două drepte alăturate să fie $\alpha = 30°$. Din punctul P_1 al segmentului $\overline{OP_1} = a$, de pe una din drepte, se va duce o perpendiculară pe dreapta alăturată; din punctul de intersecţie al acestora, P_2 o altă perpendiculară pe dreapta alăturată ş.a.m.d. $\overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \ldots$ formează o linie poligonală care alcătuieşte o spirală în jurul punctului O. Perpendicularele au următoarele lungimi:

$\overline{P_1P_2} = a \sin 30°$, $\overline{P_2P_3} = a \sin 30° \cos 30°$; $\overline{P_3P_4} = a \sin 30° (\cos 30°)^2$; $\overline{P_4P_5} = a \sin 30° (\cos 30°)^3, \ldots$

Seria $\overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \overline{P_3P_4} + \ldots$ este deci geometrică cu $a_1 = a \sin 30°$ şi $q = \cos 30°$; ea converge datorită faptului că $\cos 30° < 1$ şi are suma:

$$s = \frac{a \sin 30°}{1 - \cos 30°} = \frac{a \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}} = a(2 + \sqrt{3}).$$



18.2.2. Suma seriei geometrice

Criterii de convergenţă pentru serii cu termeni pozitivi. Ca şi la şiruri, problema convergenţei unei serii, şi în caz afirmativ, determinarea sumei, are un rol deosebit de important. Teoremele cu ajutorul cărora se obţin informaţii asupra convergenţei unei serii se numesc *criterii de convergenţă* şi există criterii necesare, criterii suficiente şi criterii care sînt necesare şi suficiente. Un criteriu necesar face o preselecţie; numai cînd acest criteriu este îndeplinit, o serie poate fi convergentă. Se poate întîmpla ca criteriul să fie verificat dar seria să nu fie convergentă. Pe de altă parte, neîndeplinirea criteriului de convergenţă conchide cu siguranţă asupra divergenţei. *Un criteriu suficient* dă în primul rînd o *asigurare* că şirul converge, dar chiar dacă acest criteriu nu este îndeplinit, şirul poate fi totuşi convergent. Cele mai importante sînt criteriile *necesare şi suficiente* care stabilesc imediat convergenţa sau divergenţa seriei.

O serie converge, cînd şirul sumelor lor parţiale are o limită s, aşadar cînd de la un anumit indice n_0 toate sumele parţiale se găsesc într-o ε-vecinătate a lui s. Deoarece suma parţială s_{n+1} se obţine din s_n prin adunarea lui a_{n+1}, ipoteza necesară pentru convergenţa şirului sumelor parţiale $\{s_n\}$ este deci ca şirul $\{a_n\}$ format din termenii seriei să fie convergent către 0.

Pentru ca şirul $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ să fie convergent, este necesar, dar nu şi suficient, ca termenii săi să formeze un şir convergent către zero, aşadar $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

Primul criteriu. Seria $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ cu termeni pozitivi converge atunci şi numai atunci cînd şirul sumelor parţiale este mărginit.

Deoarece seria nu are termeni negativi, şirul sumelor parţiale creşte monoton. Dacă, în afară de aceasta, este şi mărginit, atunci are o limită, care este chiar, conform definiţiei, suma seriei.

Exemplul 1. Termenii *seriei armonice* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ formează un șir convergent către 0, dar seria este *divergentă*, deoarece șirul $\{s_n\}$ al sumelor parțiale nu este mărginit; într-adevăr s_n depășește orice valoare C dacă $n > 2^m$ și $m > 2C$.

$$s_n > \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\ldots + \frac{1}{2^m}\right) > \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \\ + \ldots + 2^{m-1}\frac{1}{2^m} = \frac{m}{2}; \quad s_n > C.$$

Exemplul 2. Seria $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots$ are a $n - a$ sumă parțială $s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$. Deoarece $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ este un șir convergent către zero, șirul $\{s_n\} = \left\{1 - \frac{1}{n+1}\right\}$ este mărginit. Seria considerată converge și are suma 1.

Criterii de comparare. O serie ai cărei termeni au cel mult aceeași valoare ca termenii unei alte serii prestabilite se va numi *serie minorantă*. Din divergența ei, rezultă în mod sigur aceea a seriei considerate (vezi exemplul cu seria armonică)

Din seria considerată în ultimul exemplu se pot forma noi serii, ai căror termeni să fie mai mici decît cei ai seriei discutate. Deoarece aceasta este convergentă, trebuie ca aceste noi serii să fie de asemenea convergente.

O serie ai cărei termeni au cel puțin aceeași valoare ca și termenii seriei studiate se numește *serie majorantă*. Din convergența ei rezultă în mod sigur convergența seriei cercetate.

O serie converge cînd există pentru ea o serie majorantă convergentă și este divergentă cînd există pentru ea o serie minorantă divergentă.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ sînt divergente	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sînt convergente
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ converge pentru $\alpha > 1$, diverge pentru $\alpha \leqslant 1$	

Pentru a putea folosi criteriile de comparare, trebuie să cunoaștem un număr suficient de mare de serii despre care se știe că sînt divergente sau convergente. Cel mai adesea se folosesc ca serii de comparare seriile de tipul: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$. Datorită faptului că $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n \cdot n} < \frac{1}{(n-1)n}$ seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă; deoarece $\frac{1}{n^{\alpha}} < \frac{1}{n^2}$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ pentru $\alpha \geqslant 2$ este convergentă. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots$ diverge, datorită faptului că $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$; seria armonică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este o serie minorantă divergentă. Deoarece $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n^{\alpha}}$, înseamnă că orice serie de tipul $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ diverge dacă $\alpha \leqslant 1$. Pentru $\alpha \geqslant 2$

convergenţa acestei serii s-a arătat. Pentru valorile $1 < \alpha < 2$ trebuie găsită o serie geometrică ca majorant. Dacă k este un număr întreg, pentru care $2^k > n$, are loc:

$$s_n \leqslant s_{2k-1} = 1 + \left[\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right] + \left[\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right] + \ldots$$

$$+ \left[\frac{1}{(2^{k-1})^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(2^k - 1)^\alpha}\right] \leqslant 1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{4}{4^\alpha} + \ldots + \frac{2^{k-1}}{(2^{k-1})^\alpha}$$

$$\leqslant 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{(2^{\alpha-1})^2} + \ldots + \frac{1}{(2^{k-1})^{k-1}}$$

Aceasta este o serie geometrică, cu raţia $q = \frac{1}{2^{\alpha-1}}$, care datorită faptului că $1 < \alpha < 2$, este mai mică decît 1. Deci seria geometrică este convergentă, aşadar şi cea cercetată.

Criteriul raportului. O serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, cu termeni pozitivi, converge atunci cînd există un număr pozitiv q mai mic decît 1, astfel încît începînd cu un indice n_0 are loc $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q$; ea diverge dacă de la un indice n_0 are loc $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$.

În condiţiile criteriului, seria geometrică $\sum_{i=0}^{\infty} a_0 q^i$ este o majorantă, pentru restul seriei începînd cu termenul n_0:

$$\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \leqslant q \rightarrow a_{n_0+1} \leqslant q a_{n_0}$$

$$\frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \leqslant q \rightarrow a_{n_0+2} \leqslant q a_{n_0+1} \leqslant q^2 a_{n_0} \quad \text{ş.a.m.d.}$$

Acest rest pune în evidenţă proprietatea de convergenţă a seriei; aşadar seria converge pentru $q < 1$. Din $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$ rezultă de asemenea $a_{n+1} \geqslant a_n \geqslant 0$; termenii seriei nu formează un şir convergent către zero, deci seria va fi divergentă. Criteriul este *suficient*; dacă el nu este îndeplinit, nu se poate spune nimic despre convergenţa şi divergenţa seriei. Sînt cazuri cînd raportul este mai mic decît 1, dar nu mai mic decît un anumit număr $q < 1$. Pentru rapoartele a doi termeni consecutivi ai seriei armonice divergente, se obţine de exemplu $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1$, dar nu $\frac{n}{n+1} \leqslant q < 1$. Pentru seria convergentă $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ se obţine de asemenea $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 < 1$ dar nu şi $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q < 1$. În ambele cazuri are loc $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\begin{cases} \text{convergentă} \\ \text{divergentă} \end{cases}$, cînd $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ $\begin{cases} < 1 \\ > 1 \end{cases}$

Deci cînd limita este egală cu unu, criteriul raportului nu poate fi folosit pentru stabilirea convergenţei sau respectiv divergenţei seriei.

Exemplu. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} = \frac{1!}{1} + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \ldots$ converge deoarece din $a_n = \frac{n!}{n^n}$ și $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$ se obține $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!\, n^n}{(n+1)^{n+1}\, n!} = \frac{(n+1)\, n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \leqslant \frac{1}{2} < 1$ pentru toți n.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ converge

Criteriul rădăcinii: Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cu termeni pozitivi este convergentă atunci cînd există un număr pozitiv $q < 1$, astfel încît începînd cu un indice n_0 are loc $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q$; este divergentă, dacă începînd cu un indice n_0 are loc $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$.

Pentru $\sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$ există pentru restul seriei $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ o serie geometrică convergentă $\sum_{n=n_0}^{\infty} q^n$ ca majorant deoarece $a_n \leqslant q^n$, $a_{n+1} \leqslant q^{n+1}$, ..., Pentru $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$ termenii seriei pentru $n > n_0$ nu formează un șir convergent către zero.

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\left\{\begin{matrix}\text{converge} \\ \text{diverge}\end{matrix}\right.$ cînd $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ $\left\{\begin{matrix}< 1 \\ > 1\end{matrix}\right.$

Și acest criteriu este *suficient;* de exemplu în cazurile în care $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ nu putem decide cu ajutorul lui.

Exemplul 1. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n^n}$ converge pentru orice α dat. Conform criteriului rădăcinii, are $\sqrt[n]{\frac{\alpha^n}{n^n}} = \frac{|\alpha|}{n}$; această valoare este pentru toți $n > 2\,|\alpha|$ mai mică decît $\frac{1}{2}$.

Exemplul 2. Pentru seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$, criteriul rădăcinii nu se poate aplica căci $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$. Cu alte metode se obține totuși $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$. Termenii a_n ai seriei nu formează un șir convergent către zero, seria este deci divergentă.

Criterii de convergență pentru serii cu termeni oarecare. Din criteriul de convergență al lui Cauchy pentru șiruri, rezultă și un criteriu de convergență foarte important pentru serii.

Al doilea criteriu: Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă atunci și numai atunci, cînd pentru orice ε pozitiv există un indice $n_0(\varepsilon)$, astfel încît pentru toți $n > n_0(\varepsilon)$ și toți $p \geqslant 1$ are loc $|s_{n+p} - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$.

În general, acest criteriu nu este ușor de folosit. De aceea se folosesc chiar pentru serii cu termeni oarecare criteriul raportului sau criteriul rădăcinii.

Criteriul raportului, respectiv criteriul rădăcinii. O serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cu termeni oarecare converge, dacă $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ respectiv cînd $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$; ea diverge cînd $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, respectiv cînd $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$.

Criteriul de convergenţă al lui Leibniz. O serie alternantă este convergentă cînd valorile absolute ale termenilor săi formează un şir monoton convergent către zero.

Dacă seria alternantă este scrisă în forma $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_i$ reprezintă valoarea absolută a termenilor. Subşirul de sume parţiale $s_2, s_4, s_6, \dots, s_{2n}, \dots$, creşte monoton: $s_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n})$, $s_{2k+2} \geqslant s_{2k}$. Deoarece valorile absolute ale termenilor scad monoton, în fiecare paranteză se vor găsi valori pozitive. Deoarece acelaşi şir parţial poate fi prezentat şi în forma: $s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$, rezultă că el este mărginit deoarece $s_{2n} < a_1$. Ca şir mărginit şi monoton crescător, el are o limită s. Atunci şi subşirul $s_1, s_3, s_5, \dots, s_{2n+1}, \dots$ are aceeaşi limită: $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} (s_{2n} + a_{2n+1}) = s$, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$. Rezultă deci convergenţa şirului sumelor parţiale $\{s_n\}$.

Exemplul 1. Seria $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ este convergentă; suma ei este ln 2.

Exemplul 2. Seria alternantă $1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{4} \dots$ este divergentă.

Valorile absolute ale termenilor săi formează un şir convergent către zero, dar nemonoton, A $(2n)$-a sumă parţială are expresia

$$s_{2n} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^n}\right).$$

Cu creşterea indicelui n creşte şi prima parte a sumei s_{2n} depăşind orice număr finit, în timp ce partea a doua tinde către o limită finită fiind o serie geometrică.

Calcule cu serii convergente. Tehnica de calcul folosită pentru sumele finite poate fi parţial transpusă pentru seriile, respectiv propoziţiile 1, 2, 3 şi anume pentru cazul cînd seriile respective îndeplinesc condiţiile de convergenţă.

1. Convergenţa şi limita unei serii nu se schimbă, dacă termenii se grupează în paranteză în mod arbitrar.

Dacă $S = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$, putem scrie $S = \sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, unde $A_i = (a_1 + a_2 + \dots + a_{r_1})$, $A_2 = (a_{r_1+1} + a_{r_1+2} + \dots + a_{r_2})$, $A_3 = (a_{r_2+1} + a_{r_2+2} + \dots + a_{r_3})$,... Din şirul $\{s_n\}$ al sumelor parţiale ale seriei $\sum a_i$, se poate construi şirul parţial $\{s'_n\}$ al sumelor parţiale ale seriei $\sum A_i$, care are aceeaşi limită ca şi $\{s_n\}$.

2. Dacă se multiplică fiecare termen al unei serii convergente, avînd suma s, printr-o constantă c, se obţine tot o serie convergentă, avînd suma cs.

$$\sum_{i=1}^{\infty} ca_i = cs, \text{ cînd } c \text{ este constant şi } \sum_{i=1}^{\infty} a_i = s$$

Conform unei propoziţii relative la şiruri, din $\{s_n\} \to s$ se poate conchide şi $c\{s_n\} \to cs$.

3. Prin adunarea, termen cu termen, a seriilor $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i = A$ şi $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i = B$ se obţine seria $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (a_i + b_i)$, care de asemenea converge şi are suma $A + B$.

Conform unei propoziţii relative la şiruri, deoarece $s_n(a) \to A$ şi $s_n(b) \to B$ se poate conchide că: $s_n(a + b) \to A + B$.

Convergența absolută. Seria $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ cu termeni oarecare se numește absolut convergentă dacă seria $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ formată din valorile absolute ale termenilor seriei $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ este convergentă.

Seria $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$, nu este o serie absolut convergentă deoarece seria valorilor absolute este seria armonică care este divergentă. Dacă seriile Σa_i și $\Sigma |a_i|$ au sumele s respectiv S atunci datorită faptului că $|s| = |a_1 + a_2 + \ldots, a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| \leqslant S$ avem $|s| \leqslant S$.

Schimbarea ordinii termenilor într-o serie. Problema care se pune este aceea de a verifica faptul dacă se poate extinde legea comutativității pentru sumele finite și la cazul seriilor infinite. Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ și $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ un șir de numere naturale cu proprietatea că fiecare număr natural să fie conținut numai o dată. Atunci $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ se numește o serie care are ordinea termenilor schimbată.

Seriile $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$ și $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots$ diferă între ele, după cum se vede, printr-o *schimbare a ordinii termenilor*. Ambele sînt convergente dar către sume diferite s_1 și s_2.

$$s_1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \ldots = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) - \ldots =$$

$$= \frac{10}{12} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) - \ldots < \frac{10}{12} \text{ și } s_2 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}\right) + \ldots =$$

$$= \frac{5}{6} + \frac{13}{140} + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}\right) + \ldots > \frac{11}{12},$$

deoarece expresia $\frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{n} = \frac{4n-3}{(2n-3)(2n-1)n}$ este pozitivă.

Astfel de serii a căror sumă depinde de ordinea termenilor se vor numi serii *condiționat convergente* sau *semiconvergente*. Seriile care printr-o rearanjare a termenilor rămîn convergente și au aceeași sumă, se vor numi *necondiționat convergente*. Are loc următoarea teoremă:

Orice serie absolut convergentă este de asemenea necondiționat convergentă; orice serie convergentă care nu este absolut convergentă este numai condiționat convergentă.

Înmulțirea seriilor. Dacă seriile $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = A$ și $\sum_{i=1}^{\infty} b_i = B$ sînt absolut convergente, se poate arăta că seria produs $\sum_{i=1}^{\infty} c_i = C, c_i = \sum_{k+j=i+1} a_k b_j$, este convergentă. Dacă fiecare termen a_i se înmulțește cu termenii celeilalte serii, se obține schema care reprezintă produsele parțiale.

Pe linii schema cuprinde un număr infinit de termeni cu același factor a_i iar în fiecare coloană un număr infinit de termeni, fiecare multiplicat cu factorul b_i. Termenul c_i al seriei produs este format din *suma pe diagonală* a produselor parțiale: $c_1 = a_1b_1$, $c_2 = a_1b_2 + a_2b_1$, $c_3 = a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1, \ldots$ Aceste produse parțiale se pot obține folosind următoarea schemă de calcul al fiecărui termen produs: una din serii se scrie în succesiune inversă iar cealaltă cu un pas deplasată în succesiune normală. Schema arată formarea termenului $c_3 = a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1$.

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 & \dots \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 & \dots \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 & \dots \\ a_4b_1 & a_4b_2 & a_4b_3 & a_4b_4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \end{pmatrix}$$

$a_1 + a_2 + a_3 + a_5 + \dots$

$b_4 + b_3 + b_2 + b_1$

Dacă seriile $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = A$ *şi* $\sum_{i=1}^{\infty} b_i = B$ *sînt absolut convergente, atunci şi seria produs* $\sum_{i=1}^{\infty} c_i = C$ *este absolut convergentă şi are suma* $C = AB$.

Exemplul care urmează arată că convergenţa celor două serii nu este suficientă pentru a asigura convergenţa produsului.

Exemplu. Seria $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$ este convergentă, dar nu absolut convergentă. Pătratul este divergent deoarece termenii lui nu formează un şir convergent către zero. Pentru termenul general c_n al produsului seriei cu ea însăşi se obţine:

$$|c_n| = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{n-2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot 1 \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{n} = 1.$$

18.3. Limita unei funcţii. Continuitate

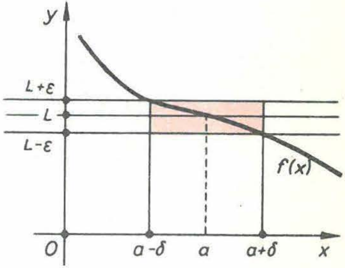
Limita unei funcţii

Limita într-un punct. Fiecărui punct x_i din domeniul de definiţie al unei funcţii $y = f(x)$ îi corespunde o valoare $y_i = f(x_i)$ a variabilei dependente (fig. 18.3.1).

Noţiunea de limită a funcţiei $y = f(x)$ în punctul a se referă la comportamentul funcţiei $f(x)$ în vecinătatea punctului a.

Fie a un punct de acumulare pentru funcţia $y = f(x)$.

Funcţia $y = f(x)$ are pentru $x \to a$, limita L, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît pentru orice x care satisface condiţia $0 < |x - a| < \delta(\varepsilon)$ să fie verificată inegalitatea $|f(x) - L| < \varepsilon$.



18.3.1. Ilustrarea geometrică a conceptului de limită

Numărul $\delta(\varepsilon)$ nu este unic determinat deoarece pentru $\delta(\varepsilon)$, fiind un număr cu proprietatea din enunţ, orice $\delta' < \delta(\varepsilon)$ are aceeaşi proprietate.

Exemplul 1. Limita funcţiei $y = x^2$ pentru $x \to 0$ este egală cu 0, $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$. Alegînd $\varepsilon = 0{,}000001$, pentru ca diferenţa dintre $y = x^2$ şi $L = 0$ să fie mai mică decît ε, este suficient să luăm $\delta(\varepsilon) < 0{,}001$ întrucît $(10^{-3})^2 = 10^{-6}$; în general, pentru a avea $|x^2 - 0| < 0{,}001$, trebuie să alegem $\delta < \sqrt{\varepsilon}$.

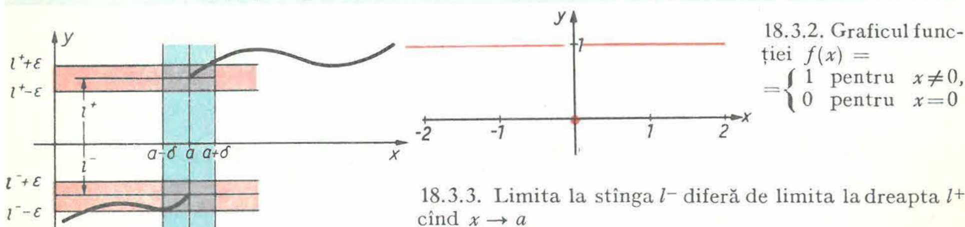
Exemplul 2. Funcţia $y = 1/x$ are limita $1/a$ atunci cînd argumentul x tinde către o valoare $a \neq 0$, $\lim\limits_{x \to a} 1/x = 1/a$. Într-adevăr, dacă luăm $|1/a - 1/x| = |x - a/xa|$, atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$, $|x - a| < \delta \leqslant \varepsilon a^2/2$, dacă $x \neq 0$, $a \neq 0$.

Exemplul 3. Din faptul că funcţia $f(x)$ este definită în punctul a nu se poate deduce existenţa limitei $\lim_{x \to a} f(x)$; pe de altă parte, chiar dacă această limită există, ea nu este egală neapărat cu $f(a)$. De exemplu, funcţia (fig. 18.3.2)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pentru} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{pentru} \quad x = 0 \end{cases}$$

are, pentru $x \to 0$, limita $L = 1$, dar valoarea funcţiei în punctul $x = 0$ este $f(0) = 0$.

Exemplul 4. Funcţia $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ nu este definită în punctul $x = 2$, deoarece numitorul se anulează (fig. 18.3.3). Pentru $x \neq 2$, $f(x)$ este egal cu $x + 2$. Funcţia are deci, pentru $x \to 2$, limita 4: $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$



18.3.2. Graficul funcţiei $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pentru} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{pentru} \quad x = 0 \end{cases}$

18.3.3. Limita la stînga l^- diferă de limita la dreapta l^+ cînd $x \to a$

Limite laterale. La trecerea la limită, variabila independentă se poate apropia de valoarea a în sensul crescător al lui x, adică dinspre stînga, sau în sensul descrescător al lui x, adică dinspre dreapta. Dacă $|l^- - f(x)| < \varepsilon$ pentru $a - \delta(\varepsilon) < x < a$, se spune că l^- este limită la stînga; dacă $|l^+ - f(x)| < \varepsilon$ pentru $a < x < a + \delta(\varepsilon)$, se spune că l^+ este limită la dreapta (fig. 18.3.3). În punctele de salt ale unei funcţii, aceste limite sînt diferite.

Dacă, într-un anumit punct, limitele laterale coincid, se spune că funcţia are *limită în acel punct.*

Exemplu. Fie funcţia

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{pentru} \quad x < 0 \\ 0 & \text{pentru} \quad x = 0 \\ 1 & \text{pentru} \quad x > 0 \end{cases}$$

Limita la stînga în punctul 0 al acestei funcţii este egală cu -1, limita la dreapta este $+1$, iar valoarea funcţiei în $x = 0$ este 0. Funcţia $y = \operatorname{tg} x$ nu este definită în $x = \dfrac{\pi}{2}$ dar are în acest punct *limite laterale improprii:* $\lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} \operatorname{tg} x = +\infty$; $\lim_{x \to \frac{\pi}{2} + 0} \operatorname{tg} x = -\infty$.

$$\lim_{a \to x - 0} f(x) = l^- = \lim_{x \to a + 0} f(x) = l^+ = L \leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Limita unei funcţii la $\pm\infty$. Valorile funcţiei $y = \dfrac{1}{x} + b$ se apropie oricît de mult de numărul b, de îndată ce argumentul x este ales suficient de mare. De exemplu, pentru $x > 10^6$, diferenţa dintre b şi valoarea funcţiei va fi mai mică decît 0,000001. Acest exemplu arată că noţiunea de limită L a unei funcţii $f(x)$ se poate extinde şi pentru cazul cînd variabila independentă creşte (sau scade) nemărginit.

Se spune că $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ *dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există un* $\omega(\varepsilon) > 0$ *suficient de mare astfel încît* $|f(x) - L| < \varepsilon$ *pentru orice* $x > \omega(\varepsilon)$. *În mod analog,* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ *dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există un* $\omega(\varepsilon) > 0$ *suficient de mare, astfel încît* $|f(x) - L| < \varepsilon$ *pentru orice* $x < -\omega(\varepsilon)$.

Limitele $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, dacă există, descriu *comportarea la infinit* a funcţiei, adică comportarea funcţiei pentru argumente pozitive foarte mari, respectiv argumente negative foarte mari.

Exemplul 1. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, deoarece $\left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon$ pentru toate valorile lui x care satisfac condiţia $x > \omega(\varepsilon) = 1/\varepsilon$.

Exemplul 2. Limita $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ nu există. Într-adevăr, oricît de mare l-am alege pe x, în virtutea periodicităţii funcţiei $\sin x$, putem găsi o infinitate de valori mai mari decît x pentru care funcţia ia o valoare prestabilită cuprinsă între -1 şi $+1$.

Comportarea la infinit a funcţiilor raţionale are anumite regularităţi, care sînt descrise în capitolul 5.

Operaţii cu limite. Regulile stabilite pentru operaţiile cu limite de şiruri se pot transpune în întregime pentru operaţiile cu limite de funcţii. Aceste reguli, care au fost deja utilizate în exemplele din paragraful precedent, afirmă că *operaţia de trecere la limită* poate fi permutată cu adunarea, scăderea, înmulţirea şi împărţirea (cînd $L \neq 0$). Primele două reguli sînt valabile şi pentru un număr finit de termeni sau factori, dar nu neapărat şi pentru o infinitate de termeni. Dacă valorile unei funcţii $h(x)$ se află, într-o vecinătate a punctului a, între valorile a două funcţii $f(x)$ şi $g(x)$, a căror limită pentru $x \to a$ este L, atunci şi limita lui $h(x)$ pentru $x \to a$ este L.

Din $\lim f(x) = F$ şi $\lim g(x) = G$ rezultă:

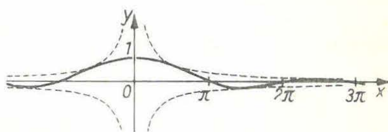
$$\lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = F \pm G$$

$$\lim_{x\to a} [f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x) = F\cdot G$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{F}{G}, \text{ dacă } G \neq 0$$

Dacă $\lim\limits_{x\to a} f(x) = G$ *şi* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = G$ *şi într-o vecinătate a lui a are loc inegalitatea* $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$, *atunci* $\lim\limits_{x\to a} h(x) = G$.

Exemplul 1. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$; într-adevăr, întrucît $\sin x \in [-1, +1]$, pentru $x > 0$, are loc inegalitatea $-\frac{1}{x} \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant \frac{1}{x}$; de aici, ţinînd seama că $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$, obţinem rezultatul. (fig. 18.3.4).



18.3.4. Graficul funcţiei $y = \frac{\sin x}{x}$

Exemplul 2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x \sin \frac{1}{x}\right) = 0$, deoarece

$$-|x| \leqslant x \sin\frac{1}{x} \leqslant |x| \quad \text{şi} \quad \lim_{x\to 0} |x| = \lim_{x\to 0} (-|x|) = 0.$$

Limite importante

În capitolele „Operații de grad superior", „Funcții" și „Trigonemetrie" au fost definite funcția logaritmică, funcția exponențială și funcțiile trigonometrice. Vom deduce pentru acestea cîteva limite des utilizate. În paragraful 18.1 a fost demonstrată, pentru o bază pozitivă și numărul real α, existența următoarelor limite:

$$\lim_{a_n \to a} q^{a_n} = q^a \quad \text{și} \quad \lim_{a_n \to a} a_n^\alpha = a^\alpha$$

1. $a^x \to 1$ cînd $x \to 0$ și $a > 0$.

$$\lim_{x \to 0} a^x = 1 \quad \text{pentru } a > 0$$

S-a arătat deja că șirul $\{\sqrt[n]{a}\}$ pentru $a > 0$ converge către 1. Șirul $\left\{\frac{1}{\sqrt[n]{a}}\right\}$ are aceeași limită. Deci, dacă prescriem, printr-un $\varepsilon > 0$ un ε-interval $(1 - \varepsilon,\ 1 + \varepsilon)$, va exista un indice N astfel încît, pentru toți $n > N$, valorile $a^{\frac{1}{n}}$ și $a^{-\frac{1}{n}}$ se vor afla în acest interval. Punînd $\delta(\varepsilon) = \frac{1}{N}$, delimităm un interval $\left(-\frac{1}{N},\ \frac{1}{N}\right)$. Pentru orice x din acest δ-interval, a^x se află într-adevăr în ε-intervalul prescris, adică $|a^x - 1| < \varepsilon$ pentru toți $|x| < \delta(\varepsilon)$.

2. $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \to \mathrm{e}$ pentru $x \to \infty$.

$$\lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e} \qquad \lim_{y \to 0}(1 + y)^{\frac{1}{y}} = \mathrm{e}$$

Despre șirul $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ se știe că este monoton crescător și că pentru $n \to \infty$ are limita e. Fie $\{x_n\}$ un șir monoton crescător de numere reale pozitive care tinde către $+\infty$. Șirul $\left\{\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n}\right\}$ poate fi intercalat între două șiruri convergente către e. Pentru a realiza acest „clește", se alege pentru $x = x_n$ numărul natural p_n în așa fel încît x_n să fie cuprins între p_n și $p_n + 1$: $p_n \leqslant x_n \leqslant p_n + 1$ pentru orice n; rezultă

$$\left(1 + \frac{1}{p_n + 1}\right)^{p_n} \leqslant \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leqslant \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n + 1}$$

Întrucît $\lim_{p_n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{p_n + 1}\right)^{p_n} = \mathrm{e}$ și $\lim_{p_n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n + 1} = \mathrm{e}$, rezultă imediat că $\lim_{x_n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \mathrm{e}$. Cum șirul $\{x_n\}$ a fost ales arbitrar, rezultă că $\lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$. Dacă înlocuim în relația $\lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$ pe $\frac{1}{x}$ cu y, obținem $\lim_{y \to 0}(1 + y)^{\frac{1}{y}} = \mathrm{e}$.

3. $\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \to \mathrm{e}^a$ pentru $x \to \infty$.

$$\lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \mathrm{e}^a$$

Avem pentru $a = 0$ un caz banal. Pentru $a \neq 0$ $\lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \lim_{x \to \infty}\left[\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}\right]^a =$ $= \lim_{z \to \infty}\left[\left(1 + \frac{1}{z}\right)^z\right]^a = \left[\lim_{z \to \infty}\left(1 + \frac{1}{z}\right)^z\right]^a = \mathrm{e}^a$.

La ultimul pas, utilizăm continuitatea funcției x^α $(x > 0)$. Se obține limita e^a.

4. $\log_g x \to \log_g a$ pentru $x \to a$, cînd $a > 0$, $g > 1$.

$$\lim_{x \to a} \log_g x = \log_g a; \quad a > 0,\ g > 1$$

Întrucît şirurile $\{g^{\frac{1}{n}}\}$ şi $\{g^{-\frac{1}{n}}\}$ converg către 1, unul descrescător şi celălalt crescător, pentru $\varepsilon > 0$ dat se pot calcula numerele $\varepsilon_1 = g^{\varepsilon} - 1 > 0$ şi $\varepsilon_2 = 1 - g^{-\varepsilon} > 0$; $1 < g^{\varepsilon} \rightarrow (g^{\varepsilon} - 1) < g^{\varepsilon}(g^{\varepsilon} - 1) \rightarrow 1 - g^{\varepsilon} < g^{\varepsilon} - 1 \rightarrow \varepsilon_2 < \varepsilon_1$.

În ε-intervalul $(-\varepsilon_2, \varepsilon_1)$ trebuie să se găsească toate valorile funcţiei $z = \frac{x - a}{a}$, corespunzătoare valorilor lui x dintr-un $\delta(\varepsilon)$-interval convenabil ales, deoarece $z \rightarrow 0$ pentru $x \rightarrow a$. Pentru z în acest $\delta(\varepsilon)$-interval avem

$$-1 + g^{-\varepsilon} < z < g^{\varepsilon} - 1 \quad \text{sau} \quad g^{-\varepsilon} < z + 1 < g^{\varepsilon}.$$

Conform definiţiei logaritmului şi în virtutea monotoniei sale, de aici rezultă

$$-\varepsilon < \log_g (1 + z) < \varepsilon \rightarrow |\log_g (1 + z)| < \varepsilon \rightarrow \left|\log_g \frac{x}{a}\right| < \varepsilon$$

$$\text{sau} \quad |\log_g x - \log_g a| < \varepsilon, \qquad \text{deci } \log_g x \rightarrow \log_g a.$$

Limita unui logaritm poate fi determinată deci ca logaritmul limitei. Prin urmare, pentru $x \rightarrow 0$, $\frac{\log_g(1 + x)}{x} = \log_g(1 + x)^{\frac{1}{x}} \rightarrow \log_g e$, care, pentru $g = e$, ia valoarea $\ln e = 1$.

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\log_g(1 + x)}{x} = \log_g e; \quad g > 1$	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln (1 + x)}{x} = 1$

5. $\frac{a^x - 1}{x} \rightarrow \ln a$ pentru $x \rightarrow 0$, cînd $a > 0$.

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a; \quad a > 0$	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Dacă $a = 1$, atunci numărătorul este nul şi, întrucît $\ln 1 = 0$, afirmaţia este adevărată. Dacă $a \neq 1$, atunci punem $a^x = 1 + y$, unde $y \rightarrow 0$ pentru $x \rightarrow 0$. Din $x \ln a = \ln (1 + y)$ se obţine expresia

$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{y \ln a}{\ln (1+y)} = \frac{\ln a}{\ln (1+y)^{\frac{1}{y}}}$$

al cărei numitor converge către 1 cînd $x \rightarrow 0$. Cel mai important caz particular este $a = e$ $(\ln e = 1)$.

6. $\cos x \rightarrow 1$ pentru $x \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1$$

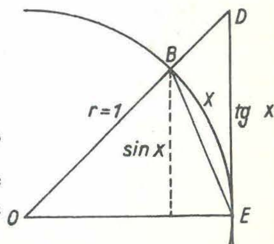
Avem

$$|\cos x - 1| = 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 2 \left|\sin \frac{x}{2}\right| \left|\sin \frac{x}{2}\right| \leqslant 2 \left|\frac{x}{2}\right| \left|\frac{x}{2}\right| = \frac{x^2}{2} < \varepsilon \text{ pentru } |x| < \sqrt{2\varepsilon}; \text{ deci}$$

pentru $x \rightarrow 0$, $|\cos x - 1|$ converge către zero.

7. $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ pentru $x \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



18.3.5. $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ cînd $x \rightarrow 0$

Funcţia $h(x) = \frac{\sin x}{x}$ (fig. 18.3.5) poate fi intercalată, într-o vecinătate a lui 0, între funcţiile $f(x) = 1$ şi $g(x) = \cos x$, ambele avînd limita 1. Din figură se vede că aria A'_{OEB} a sectorului de cerc OEB este cuprinsă între ariile triunghiurilor OEB şi OED:

$$A_{OEB} < A'_{OEB} < A_{OED} \rightarrow 1 \cdot \sin x < 1 \cdot x < \text{tg } x \cdot 1$$

$$\rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \rightarrow 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Inegalitățile de mai sus s-au dedus pentru $x > 0$. Pentru $x < 0$, situația este aceeași, întrucît $[\sin(-x)]/(-x) = (\sin x)/x$. Există deci limite laterale în $x = 0$ și ambele sînt egale cu 1.

8. $\dfrac{\operatorname{tg} x}{x} \to 1$ pentru $x \to 0$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

Avem $\dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = \dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{1}{\cos x}$, și ambii factori au limita 1 cînd $x \to 0$.

Regula lui Bernoulli și L'Hospital

În anumite condiții, care au fost deja specificate, operația de determinare a limitei sumei, diferenței, produsului, puterii a două funcții $f(x)$ și $g(x)$ poate permuta cu aceste operații. Necesitatea demonstrării preliminare a permutabilității în fiecare caz rezultă din exemplele ce urmează, în care, prin neverificarea permutabilității se obțin expresii fără sens de forma $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0, ∞^0 sau 1^∞. Cînd pentru $x \to a$ se obțin, formal, asemenea expresii, vorbim de expresii *nedeterminate*.

După cum s-a arătat, cîtul $\dfrac{\sin x}{x}$ are limita 1 pentru $x \to 0$. Dacă însă punem, în locul limitei, cîtul limitelor, obținem expresia nedeterminată $\dfrac{0}{0}$. Întrucît limita numitorului este zero, nu este permis să procedăm astfel.

Expresia nedeterminată $\dfrac{0}{0}$. Pentru această expresie nedeterminată, J. Bernoulli (1667—1748) a găsit o regulă, pe care l'Hospital (1661—1704) a făcut-o cunoscută.

Regula lui Bernoulli și L'Hospital: Dacă pentru $x \to a$ atît numărătorul $f(x)$ cît și numitorul $g(x)$ ai unui cît au limita zero și dacă, într-o vecinătate a lui $x = a$, există atît derivatele funcțiilor $f(x)$ și $g(x)$, cît și limita $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ a cîtului derivatelor, atunci această limită este egală cu $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Demonstrarea regulii necesită teorema creșterilor finite (Lagrange) prezentată amănunțit în capitolul „Calculul diferențial". În expresia

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

ξ este cuprinsă între a și x, deci converge către a cînd $x \to a$. Întrucît $\lim\limits_{\xi\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = G$, propoziția este adevărată.

Dacă, în urma aplicării regulii, se obține tot o expresie nedeterminată de forma $\dfrac{0}{0}$, regula se aplică din nou raportului $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, examinîndu-se, de această dată, limita $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f''(x)}{g''(x)}$.

Exemple. 1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=1.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{2e^x-x^2-2x-2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2}{2e^x-2x-2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x}{2e^x-2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6}{2e^x}=3.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\cos x}{2}=-\dfrac{1}{2}.$

4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 2x}{\cos^2 x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2\cos 2x}{-\sin 2x}=\pm\infty$, după cum x se apropie de $\dfrac{\pi}{2}$ dinspre stînga sau dinspre dreapta.

Expresia nedeterminată $\frac{\infty}{\infty}$. Dacă, pentru $x\to a$, numărătorul $f(x)$ şi numitorul $g(x)$ al unui raport au limita improprie $+\infty$, atunci, funcţiile $\dfrac{1}{f(x)}$ şi $\dfrac{1}{g(x)}$ converg către 0. Dacă $f(x)$ şi $g(x)$ sînt derivabile într-o vecinătate a lui $x=a$ şi $g'(x)\neq 0$ în acea vecinătate şi dacă raportul $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ are limită în $x=a$, atunci se poate aplica regula lui Bernoulli şi l'Hospital: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}.$

Exemple. 1. $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{-\ln(x-1)}{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{\frac{-1}{x-1}}{\frac{-1}{(x-1)^2}}=\lim\limits_{x\to 1+0}(x-1)=0.$

2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\frac{3}{\cos^2 3x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{3\cos^2 x}{\cos^2 3x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-6\cos x\sin x}{-6\cos 3x\sin 3x}=$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 2x}{\sin 6x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2\cos 2x}{6\cos 6x}=\dfrac{1}{3}.$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^2}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{24x}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{24}{e^x}=0.$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{a^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{a^x\ln a}=\ldots=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{n!}{a^x(\ln a)^n}=0$ pentru n întreg pozitiv şi $a>1$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{nx^n}=0.$

După cum arată ultimele două exemple, funcţia exponenţială a^x creşte mai repede către infinit decît orice putere x^n, dar funcţia putere creşte mai repede decît cea logaritmică.

Celelalte expresii nedeterminate. Cu ajutorul regulii lui Bernoulli şi l'Hospital pot fi tratate şi celelalte cazuri de nedeterminare, transformînd expresiile respective în forme care, pentru

punctul „critic", duc la expresiile nedeterminate $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$. Dacă avem de calculat $\lim_{x\to a}[(fx)g(x)]$ pentru cazul $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, atunci scriem

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \text{ sau } f(x)\cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$ și ajungem astfel la cazurile $\frac{0}{0}$, respectiv $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemplu. $\lim_{x\to\infty} x \operatorname{arccotg} x = \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arccotg} x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1.$

Dacă avem de calculat $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)]$ pentru cazul cînd $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$, scriem

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

cu $\lim_{x\to a} \varphi(x) = \lim_{x\to a} \psi(x) = 0$.

Exemplu. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x+x^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x + x^2 - \sin x}{(x+x^2)\sin x} =$

$$= \lim \frac{1 + 2x - \cos x}{(1+2x)\sin x + (x+x^2)\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2 + \sin x}{2\sin x - (x+x^2)\sin x + (2+4x)\cos x} = 1.$$

Dacă trebuie calculată $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ pentru unul din cazurile: $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$; $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ sau $\lim_{x\to a} f(x) = 1$, $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$, vom scrie pentru fiecare din cazurile arătate $\ln f(x)^{g(x)} = g(x) \ln f(x)$. Acesta este un produs pentru care un factor tinde către 0 iar celălalt către infinit. Rezultă că $\lim_{x\to a} [g(x) \ln f(x)]$ trebuie calculată pe calea cunoscută.

Exemplul 1. Să se calculeze $\lim_{x\to +0} x^x$. Avem $\ln x^x = x \ln x$ și $\lim_{x\to+0} x \ln x = \lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} =$
$= \lim_{x\to+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+0}(-x) = 0$. Rezultă că $\lim_{x\to+0} x^x = \lim_{x\to+0} e^{x\ln x} = 1$, deoarece are loc $\lim_{\xi\to 0} a^\xi = 1$.

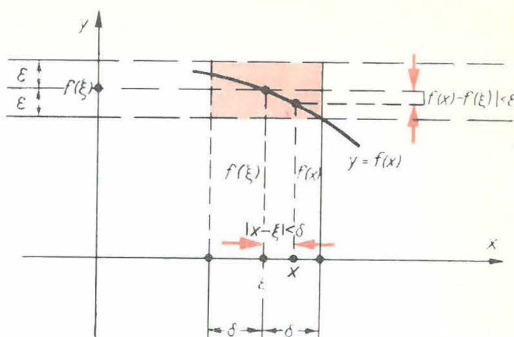
Exemplul 2. Să se calculeze $\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x}$. Are loc $\ln \sqrt[x]{x} = \frac{1}{x} \ln x$ și $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$, de unde rezultă imediat că $\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1$.

Continuitatea unei funcții

Continuitatea unei funcții se definește folosind noțiunea de limită.

O funcție $y = f(x)$ (fig. 18.3.6) definită într-o vecinătate a lui $x = \xi$ și în punctul ξ, este continuă în acest punct, cînd există $\lim\limits_{x \to \xi} f(x)$ și aceasta este chiar valoarea funcției în punctul ξ, așadar cînd are loc $\lim\limits_{x \to \xi} = f(x) = f(\xi)$.

Această definiție este echivalentă cu faptul că pentru orice număr $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît oricare ar fi x cu $|x - \xi| < \delta(\varepsilon)$ să avem $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$.



18.3.6. Ilustrarea geometrică a continuității

Se poate vorbi despre *continuitatea laterală* (la stînga sau la dreapta) cînd pentru $x = \xi$ există numai limită *la dreapta* sau respectiv la *stînga* și aceasta este egală cu valoarea funcției. Deci se poate spune că o funcție este continuă, cînd ea este *continuă atît la stînga cît și la dreapta.*

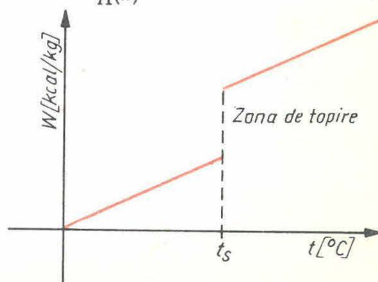
Puncte de discontinuitate. Pentru clasificarea noțiunii de continuitate se vor studia cîteva funcții care sînt *discontinue* în anumite puncte. Într-un astfel de punct ori nu există valoarea funcției sau limita ei, ori ambele există dar nu sînt egale.

Polii pentru funcțiile raționale sînt exemple de puncte de discontinuitate studiate în capitolul „Funcții".

Pentru punctul $x = 0$, funcția $\dfrac{\sin x}{x}$ are atît limita la dreapta cît și la stînga, care au amîndouă valoarea 1, dar funcția însăși pentru $x=0$ nu este definită, deoarece numitorul ei este zero. Dacă se definește o altă funcție $f^*(x)$, care pentru $x \neq 0$ are valorile lui $\dfrac{\sin x}{x}$ iar pentru $x = 0$ are valoarea 1 a limitei, atunci funcția $f^*(x)$ este continuă, iar discontinuitatea a fost astfel înlăturată. Dacă într-o *funcție rațională* numărătorul are valoarea $p(x) = (x - x_0)^i\, p_1(x)$ iar numitorul $q(x) = (x - x_0)^k\, q_1(x)$, atunci punctul $x = x_0$ este un punct de nedeterminare. Pentru $i > k$ discontinuitatea poate fi înlăturată. Se poate defini o funcție $f^*(x) = (x - x_0)^{i-k} \dfrac{p_1(x)}{q_1(x)}$ pentru $x \neq x_0$ și care să aibă valoarea zero pentru $x = x_0$. Și pentru $i = k$ discontinuitatea poate fi înlăturată, considerînd funcția $f^*(x) = \dfrac{p_1(x)}{q_1(x)}$. Pentru $i < k$ funcția $(x - x_0)^{i-k} \dfrac{p_1(x)}{q_1(x)}$, în punctul $x = x_0$, are un pol de ordinul $k - 1$.

Salt. Într-un punct de salt valoarea limitei la dreapta diferă de valoarea limitei la stînga. Funcția nu poate fi continuă.

Un corp solid încălzit își ridică temperatura t (fig. 18.3.7). Cantitatea de căldură H la momentul $t = t_s$ (punctul de topire) nu este o funcție continuă de temperatură, deoarece pentru acest punct cantitatea de căldură necesară topirii este mai mare decît cea necesară încălzirii corpului.



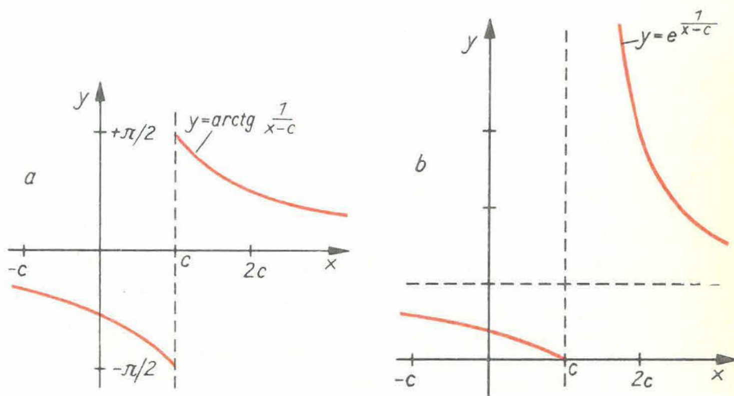
18.3.7. Cantitatea de căldură ca funcție de temperatura t; t_s este punctul de topire

Exemplul 1. Funcţia $y=f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x-c}$ are în punctul $x=c$ un salt finit de mărime π deoarece $\lim\limits_{x\to c-0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x-c}=\lim\limits_{z\to-\infty}\operatorname{arctg} z=-\frac{\pi}{2}$ iar $\lim\limits_{x\to c+0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x-c}=\lim\limits_{z\to+\infty}\operatorname{arctg} z=$ $=+\frac{\pi}{2}$ (fig. 18.3.8).

Exemplul 2. Funcţia $y=f(x)=e^{\frac{1}{x-c}}$ are în punctul $x=c$ un salt infinit (fig. 18,3.8, *b*) deoarece:

$$\lim_{x\to c-0} e^{\frac{1}{x-c}}=\lim_{z\to-\infty} e^{z}=0 \text{ şi } \lim_{x\to c+0} e^{\frac{1}{x-c}}=\lim_{z\to+\infty} e^{z}=+\infty.$$

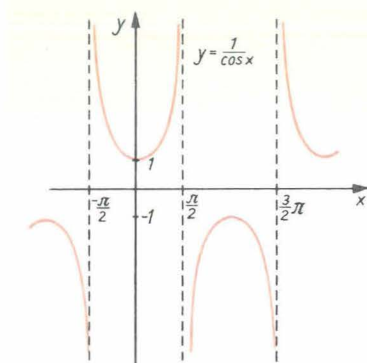
Exemplul 3. Funcţia $y=f(x)=\frac{1}{\cos x}$ are în poziţia $\frac{\pi}{2}+k\pi$ cu $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$ un salt infinit (fig. 18.3.9) pentru k par de la $+\infty$ la $-\infty$, şi invers pentru k impar.



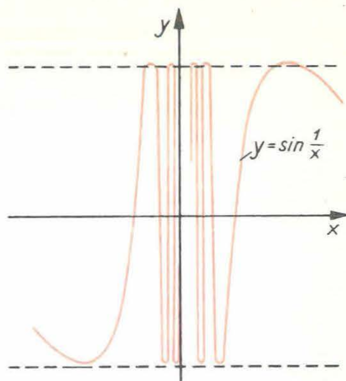
18.3.8. Graficul unei funcţii cu discontinuităţi: *a* — cu salt finit; *b* — cu salt infinit

Funcţii oscilante cu puncte de discontinuitate. Funcţia $y=f(x)=\sin\frac{1}{x}$, pentru punctul $x=0$ nu este definită, deci nu este continuă. Oricît de mic s-ar alege numărul pozitiv δ, există totuşi în intervalul $-\delta<x<+\delta$ pentru $n>\frac{2}{\pi\delta}$, un număr infinit de puncte $x=\frac{2}{\pi n}$, pentru care argumentul ia valorile $\frac{1}{x}=\frac{\pi n}{2}$; Pentru $n_1=2\nu$, $n_2=4\nu+1$, $n_3=4\nu+3$ (ν întreg) funcţia $y=\sin\frac{1}{x}$ ia valorile $0, +1, -1$ (fig. 18.3.10) .Funcţia oscilează cu atît mai rapid între valorile $+1$ şi -1, cu cît x este mai aproape de $x=0$, aşadar cu cît n este mai mare.

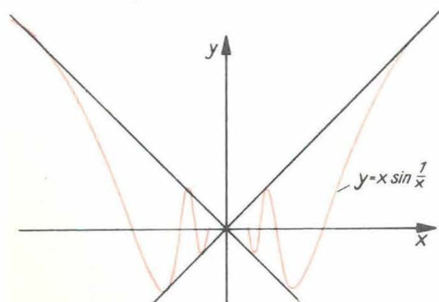
Funcţia $y=x\sin\frac{1}{x}$ (fig. 18.3.11) pentru $x=0$ nu este definită, dar pentru $x\to0$ are limita 0. Dacă se defineşte $y(0)=a\neq0$, funcţia este discontinuă în $x=0$. Dacă se defineşte $y=$ $=f(0)=0$, se obţine o funcţie continuă în $x=0$.



18.3.9. Salt de la $-\infty$ la $+\infty$



18.3.10. O funcţie discontinuă oscilatorie



18.3.11. O funcţie oscilatorie cu discontinuitate ce poate fi înlăturată

Continuitatea într-un interval. O funcţie $y = f(x)$ este continuă într-un interval, dacă este continuă în fiecare punct interior al intervalului iar în cazul cînd intervalul este închis la dreapta sau la stînga şi pentru extremitatea stîngă este continuă la dreapta iar pentru extremitatea dreaptă este continuă la stînga.

Continuitate uniformă. Dacă o funcţie este continuă, înseamnă că oricare ar fi $x = \xi$ şi oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există un $\delta = \delta(\varepsilon, \xi)$ astfel încît oricare ar fi x' cu $|x' - \xi| < \delta$ să avem $|f(x') - f(\xi)| < \varepsilon$. Funcţia $y = \operatorname{tg} x$, în intervalul $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$ este continuă; cu cît valoarea ξ se ia mai aproape de $\frac{\pi}{2}$, cu atît trebuie să fie mai mică valoarea dependentă $\delta(\varepsilon, x)$. Dacă este posibil ca pentru orice $\varepsilon > 0$ să găsim un număr $\delta(\varepsilon) > 0$ unic, acelaşi pentru toate punctele x (adică δ să depindă numai de ε, nu şi de x) spunem că funcţia este uniform continuă.

Teoremă. O funcţie continuă pe un interval închis $[a, b]$ este uniform continuă pe acest interval.

Teoreme asupra funcţiilor continue

1. *Suma, diferenţa şi produsul a două funcţii continue în $x = \xi$ sînt în acest punct de asemenea continue.*
2. *Orice polinom $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ este continuu peste tot.*
3. *Raportul a două funcţii continue în $x = \xi$ este continuu în toate punctele ξ în care numitorul este diferit de zero.*
4. *O funcţie exponenţială $y = a^x$ $(a>0)$ este continuă peste tot. Pentru $x \to \xi$ are loc* $f(x) = a^x = a^\xi a^{x-\xi} \to a^\xi \cdot 1$, *deoarece* $\lim\limits_{x\to\xi} a^{x-\xi} = 1$.
5. *Funcţia logaritmică* $f(x) = \log_g x$ $(g > 0, g \neq 1)$ *este continuă pentru orice argument pozitiv.*
6. *Funcţiile trigonometrice* $\sin x$ *şi* $\cos x$ *sînt continue peste tot, funcţia* $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ *este continuă pentru toţi* $\xi \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ $[k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots]$ *iar funcţia* $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ *este continuă pentru toţi* $\xi \neq k\pi$ $[k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots]$.

Această teoremă dă următoarele limite, pentru tg x și cotg x folosind teorema 3, $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$ *decarece* $-|x| < \sin x < |x|$; $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$ *deoarece* $1 - x^2 < \cos x < 1$.

Deci $\sin x = \sin(\xi + x - \xi) = \sin \xi \cos(x - \xi) + \cos \xi \sin(x - \xi) \to \sin \xi$ *pentru* $x \to \xi$.

Și $\cos x = \cos(\xi + x - \xi) = \cos \xi \cos(x - \xi) - \sin \xi \sin(x - \xi) \to \cos \xi$ *pentru* $x \to \xi$.

7. *Dacă $f(x)$ este o funcție continuă și strict monotonă într-un anumit interval, atunci și funcția sa inversă $y = f(x)$ este continuă în domeniul ei de definiție.*

Funcțiile de tipul $y = \sqrt[n]{x}$ sînt continue pentru toți $x = \xi$ pozitivi, căci se pot exprima ca funcții rezultate prin inversarea lui $y = x^n$.

Funcțiile $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ și $y = \operatorname{arctg} x$ sînt continue ca inverse de funcții trigonometrice în intervalul de determinare principală.

Continuitatea funcțiilor compuse. Prin funcție compusă se înțelege o funcție care are ca argumente valorile unei alte funcții. Dacă $f[\varphi(x)]$ este o funcție compusă, domeniul de definiție al lui $f(t)$ trebuie să fie inclus în mulțimea valorilor lui $\varphi(x)$. Dacă $\varphi(x)$ este continuă în punctul $x = \xi$ și dacă $f(t)$ este continuă în punctul $\tau = \varphi(\xi)$, atunci $f(\varphi(x))$ este continuă în punctul $x = \xi$.

Prin compunerea a două funcții continue se obține o funcție continuă.

Prin intermediul acestei propoziții se poate studia continuitatea multor funcții. Exemple în acest sens sînt toate funcțiile de tipul $y = \sqrt[n]{p(x)}$, în care $p(x)$ este un polinom, continuu pentru toți $x = \xi$ pentru care $p(\xi) \geqslant 0$, căci polinomul $p(x)$ este continuu pentru toți x iar funcția $y = \sqrt[n]{t}$ este continuă pentru toți $t \geqslant 0$. Și funcția $f(x) = e^{\sin x}$ este continuă peste tot, deoarece $t = \sin x$ și $y = e^t$ sînt funcții continue. De asemenea, funcțiile $\operatorname{arctg}(x^2)$, $\cos(5x^2 - e^{4x+1})$, $\sin \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ sînt continue în tot domeniul de definiție.

Proprietăți ale funcțiilor continue. Datorită proprietăților pe care le au toate funcțiile continue și numai acestea, ele formează o clasă. Printr-o partiționare a unui interval se poate obține o teoremă fundamentală, pe care GAUSS și alți mari matematicieni au intuit-o, dar a fost demonstrată de Bernard BOLZANO (1781—1848).

Teorema lui Bolzano. Dacă o funcție continuă în intervalul $[a, b]$ ia valori de semne contrare la capetele acestui interval, atunci ea se anulează cel puțin într-un punct ξ dintre a și b.

Această teoremă stă la baza unui mare număr de metode pentru rezolvarea ecuațiilor; de exemplu, din ea rezultă că o ecuație algebrică de grad impar are cel puțin o rădăcină reală.

Alte consecințe ale teoremei lui Bolzano sînt:

1. *Dacă o funcție continuă nu se anulează pe un interval I, atunci ea păstrează același semn pe acest interval.*

2. *O funcție $f(x)$, continuă într-un interval închis, ia odată cu două valori $f(a) = A$ și $f(b) = B$ $(A \neq B)$ și toate valorile cuprinse între A și B.*

Funcția $y = \frac{1}{x}$ este continuă în intervalul $0 < x \leqslant 1$, dar ia valori cu atît mai mari cu cît x se apropie de zero. Într-un interval închis, însă, în care funcția este continuă, de exemplu, $0{,}01 \leqslant x \leqslant 1$, funcția este mărginită.

În general are loc teorema:

O funcție continuă pe un interval închis este mărginită.

O altă teoremă fundamentală a fost demonstrată de Karl WEIERSTRASS (1815—1897).

O funcție continuă pe un interval închis își atinge în acest interval maximul și minimul.

Și aici este esențială menționarea faptului că intervalul trebuie să fie închis, după cum se poate vedea din exemplul funcției $y = x$. Ea este continuă pe intervalul deschis la dreapta $0 \leqslant x < 1$, dar, datorită faptului că $\lim\limits_{x \to 1} y = 1$, ea nu ia în nici un punct al intervalului o valoare mai mare decît toate celelalte valori ale funcției, adică nu-și atinge maximul. Dacă funcția $f(x)$ este continuă într-un interval și pentru un punct x_0 din acest interval are loc $f(x) > 0$, atunci funcția este pozitivă într-o întreagă vecinătate a lui x_0.

19. Calculul diferențial

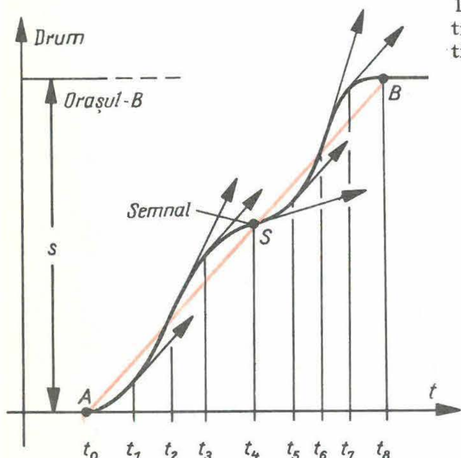
Tendința de a introduce unele noțiuni din calculul diferențial a apărut deja în secolele XVI și XVII. Această tendință s-a cristalizat în calculele și rezultatele obținute independent de Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646—1716) și Isaac NÉWTON (1643—1727). LEIBNIZ a pornit de la problema tangentelor și a introdus notațiile folosite încă și astăzi pentru calculul diferențial și pentru integrală. NEWTON și-a dezvoltat calculele în legătură cu deducerea legii gravitației, din legile mișcării planetelor găsite de Johannes KEPLER (1571—1630). În decursul timpului, ambele domenii s-au dezvoltat și s-au influențat reciproc. Aspectul geometric al problemei s-a conturat în geometria analitică și geometria diferențială. De asemenea noțiunile calculului diferențial au pătruns masiv în fizică și în tehnică. Fără teoria funcțiilor reale și complexe și fără calculul diferențial aceste domenii sînt de neconceput. Pe de altă parte, necesitatea de a preciza matematic procesele continue a avut urmări favorabile asupra dezvoltării întregii matematici, de exemplu a noțiunii de limită. Calculul diferențial a devenit astfel indispensabil pentru matematică.

Calculul diferențial și calculul integral, reunite sub denumite de calcul infinitezimal, sînt discipline de bază ale analizei matematice. Obiectul calculului diferențial sînt funcțiile iar metodele ei privesc în special calculul valorilor limită. Conceptul central al acestei discipline, derivata unei funcții $f(x)$, reprezintă o măsură a modului în care $f(x)$ reacționează la o schimbare a argumentului. De asemenea, multe probleme geometrice, ca de exemplu calculul pantei tangentei la o curbă sau determinarea curburii unei curbe, se pot rezolva cu ajutorul calculului diferențial.

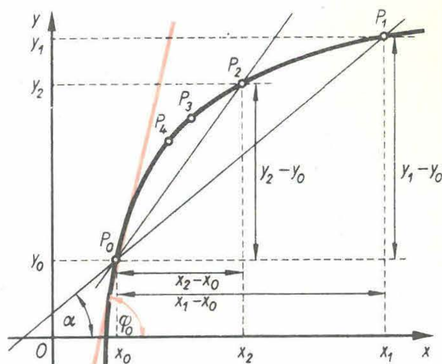
Deoarece relațiile dintre cantități în fizică pot fi frecvent exprimate prin funcții continue și derivabile, numai calculul diferențial face posibil ca în științele naturii și în disciplinele tehnologice să se poată exprima matematic nu numai stări dar și procese. De exemplu, dacă $s = f(t)$ descrie dependența distanței parcurse de un punct material în mișcare, de timpul t, atunci derivata acestei funcții reprezintă viteza instantanee a punctului material. Ca o generalizare a acestei idei, conceptul de viteză poate fi aplicat și pentru alte situații în care timpul are rol de variabilă independentă. Noțiunile de încălzire sau răcire a unui corp, viteza de reacție a proceselor chimice, rata de dezintegrare a proceselor radioactive și rata de creștere a organismelor biologice pot fi definite și calculate. Metodele și rezultatele calculului diferențial au devenit baza analizei matematice. Dezvoltarea multor discipline este de neconceput fără folosirea relațiilor dintre funcții și derivatele lor, fără dezvoltarea funcțiilor în serie, fără tratarea ecuațiilor diferențiale sau fără geometria diferențială.

19.1. Derivata unei funcții

În figura 19.1.1 se prezintă schematic drumul parcurs de un tren între localitățile A și B La momentul t_0 se dă semnalul de plecare. La momentul t_2 conductorul observă semnalul de oprire S și frînează. Apoi, înainte de a ajunge însă în S, semaforul se schimbă pe verde și fără să oprească, trenul își mărește viteza ajungînd fără întîrziere în orașul B. Înțelegînd prin *viteză* distanța parcursă în unitatea de timp, se observă în acest caz că viteza trenului este cu atît mai mare cu cît curba reprezentată prin diagramă este mai abruptă. Viteza *crește*, de exemplu, între t_0 și t_1 sau între t_4 și t_6 și *descrește* între t_3 și t_4 sau t_4 și t_8. Diagrama, considerată o curbă, are în puncte diferite, curburi diferite. Aceste denumiri: abrupt, crescător, curbat etc. au evident un sens matematic dar sînt încă foarte neclare. Ele trebuie explicate în așa manieră încît *viteza instantanee* să poată fi definită în orice punct. În mod analog trebuie dată o măsură a *curburii*. În diagrama care reprezintă mersul trenului, punctele A și B sînt legate printr-o linie dreaptă și se consideră o *viteză medie uniformă* $s/(t_8 - t_0)$, unde s reprezintă distanța dintre localitățile A și B. Cînd tangentele la curbă sînt paralele la dreapta AB, atunci în punctele respective t_1, t_3, t_5 și t_7 trenul atinge viteza medie. Precizarea acestei afirmații va conduce la noțiunea de derivată.



19.1.1. Diagrama distanță-timp a mersului unui tren între stațiile A și B, s fiind distanța iar t timpul



19.1.2. Panta unei curbe în punctul P_0

Definiția derivatei

Raportul diferențelor unei funcții. O curbă poate fi considerată ca imagine a unei funcții $y = f(x)$ definite cel puțin într-un interval închis care conține abscisele x_0 și x_1 (fig. 19.1.2). Diferenței $\Delta x = x_1 - x_0 = h$ îi corespunde atunci diferența Δy a ordonatelor: $\Delta y = y_1 - y_0 =$

$= f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$. Dreapta care trece prin punctele $P_0(x_0, y_0)$ și $P_1(x_1, y_1)$ este o secantă a curbei. Din geometria analitică se cunoaște că această dreaptă are panta:

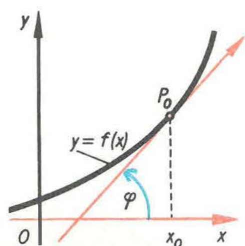
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \operatorname{tg} \alpha,$$

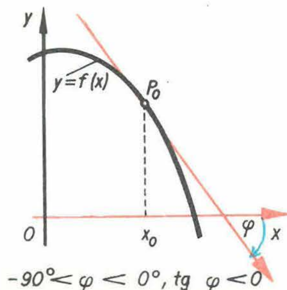
unde α este unghiul dintre axa Ox și secantă.

Din punct de vedere analitic această expresie reprezintă raportul a două diferențe și se numește *raportul diferențelor*. În științele naturii multe mărimi pot fi exprimate sub forma unui raport asemănător; de exemplu viteza medie, temperatura medie, densitatea medie etc.

Derivata. Raportul diferențelor $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ilustrează comportarea curbei în punctul P_0, cu atît mai fidel cu cît punctul P se găsește mai aproape de P_0. Dacă punctul $P(x, y)$ se apropie continuu de-a lungul curbei de punctul $P_0(x_0, y_0)$, atunci secanta dusă prin P și P_0 se apropie de o poziție limită reprezentată de tangentă în punctul P_0 la curbă. Unghiul α are de asemenea o valoare limită φ_0, care este mărimea unghiului dintre tangentă și axa Ox; $\operatorname{tg} \varphi_0$ este panta tangentei și va fi considerată în continuare ca panta curbei în punctul P_0. Această pantă poate fi determinată și prin calcul. Pentru fiecare poziție a punctului P raportul $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ reprezintă panta secantei ce trece prin P și P_0. Cînd P tinde către P_0, diferența $\Delta x = x - x_0$ tinde la zero. Determinarea pantei tangentei la curbă în punctul P_0 se reduce deci la determinarea limitei $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ cînd Δx tinde la zero. Cînd această limită există, ea se numește derivata funcției $y = f(x)$ în punctul P_0 și se notează $f'(x_0)$, $y'_{x=x_0}$ sau $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}$.
Din considerațiile asupra limitelor (v. cap. 18), rezultă că și limitele la dreapta și la stînga trebuie să fie egale.

Derivata în punctul x_0:
$$f'(x_0) = y'_{x=x_0} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_n \to x_0} \frac{y_n - y_0}{x_n - x_0} = \lim_{x_n \to x_0} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$





19.1.3. Funcție crescătoare și funcție descrescătoare

În exemplul considerat, referitor la drumul unui tren între A și B, derivata $\frac{ds}{dt}$ pentru orice moment reprezintă viteza instantanee a acestuia. Dacă se consideră tangentele în diferitele puncte ale diagramei, se observă că $\frac{ds}{dt} = \operatorname{tg} \varphi$ este pozitivă pentru orice punct cuprins între A și B. În acest caz, curba *crește monoton* (fig. 19.1.3).

În punctele în care derivata este negativă curba descrește.

O funcție este derivabilă în punctul $x = x_0$ cînd limitele la dreapta și la stînga ale raportului diferențelor există și sînt egale. O funcție $y = f(x)$ derivabilă în punctul $x = x_0$ este continuă în acest punct.

Continuitatea este o condiție *necesară* pentru derivabilitate dar nu și *suficientă*. Următoarele exemple numerotate cu 3, 4, 5, reprezintă funcții care sînt continue într-un anumit punct dar nu și derivabile în acest punct. Există chiar funcții care sînt continue într-un interval dar nu sînt derivabile în nici un punct al acestuia. Unul din primele exemple de acest fel a fost dat de Bernard Bolzano (1781—1848). Funcțiile elementare sînt de regulă peste tot derivabile, cel mult cu excepția cîtorva puncte.

Exemplul 1. Funcția $y = x^2$ are în punctul $x = x_0$ derivata $2x_0$. Raportul diferențelor poate fi transformat și simplificat pentru valori nenule ale lui Δx, astfel:
$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \dfrac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$. Pentru $\Delta x \to 0$ această expresie tinde către $y'_{x=x_0} = 2x_0$.

Exemplul 2. În cazul căderii libere a corpurilor, prin derivarea funcției spațiu-timp $s = f(t) = \dfrac{g}{2} t^2$ se obține viteza $v_{t=t_0} = gt_0$. Într-adevăr

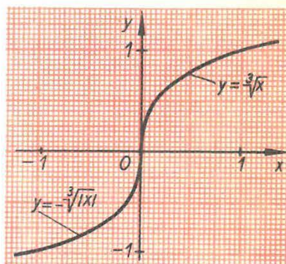
$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\frac{g}{2}(t_0 + \Delta t)^2 - \frac{g}{2} t_0^2}{\Delta t} = \frac{g}{2} \cdot \frac{\Delta t(2t_0 + \Delta t)}{\Delta t} = gt_0 + \frac{g}{2}\Delta t,$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(gt_0 + \frac{g}{2}\Delta t\right) = gt_0.$$

Exemplul 3. Funcția $y = \sqrt[3]{x}$ nu este derivabilă în punctul $x = 0$ (fig. 19.1.4). Raportul

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(0 + \Delta x)^{\frac{1}{3}} - 0^{\frac{1}{3}}}{\Delta x} = \frac{(\Delta x)^{\frac{1}{3}}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}$$

nu admite limită cînd $\Delta x \to 0$, ci crește nemărginit, tinzînd la ∞. Tangenta la curba funcției $y = \sqrt[3]{x}$ este în punctul $x = 0$ perpendiculară pe axa Ox.



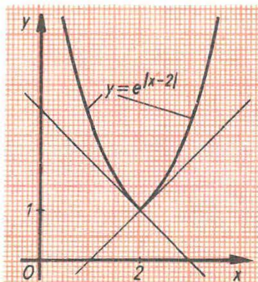
19.1.4. Graficul funcției $y = \sqrt[3]{x}$

Exemplul 4. Funcția $y = e^{|x-2|}$ este continuă în punctul $x = 2$ dar nu este derivabilă (fig. 19.1.5). Raportul diferențelor este $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{e^{|2+\Delta x-2|} - e^{|2-2|}}{\Delta x} = \dfrac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$.

Ținindu-se seama de limitele găsite în cap. 18, acest raport are limita $+1$ sau -1 după cum Δx este pozitiv sau negativ. Deci limita la dreapta este diferită de limita la stînga. Curba are în acest punct (2; 1) două tangente.

Exemplul 5. Funcția $y = +\dfrac{x}{2}\sqrt{x}$ în punctul $x = 0$ este derivabilă numai la dreapta, deoarece domeniul ei de definiție nu conține și abscisele negative. Limita la dreapta pentru $x = 0$ are valoarea 0:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{2}(0 + \Delta x)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} 0^{\frac{3}{2}}}{\Delta x} = \frac{1}{2} \frac{(\Delta x)^{\frac{3}{2}}}{\Delta x} = \frac{1}{2}\sqrt{\Delta x} \to 0.$$



19.1.5. Graficul funcției $y = e^{|x-2|}$

Derivata ca funcție

Dacă derivata funcției $y = f(x)$ există în orice punct al unui interval, atunci funcția se numește derivabilă în acest interval. Fiecărui punct x al intervalului îi corespunde o valoare a derivatei $f'(x)$, definindu-se astfel o funcție; această funcție se numește *derivata funcției date*.

Exemplu. Funcția $y = x^2$ are pentru orice x derivata $y' = 2x$. Derivata în punctele $x_1 = 3$ și $x_2 = -2$ are valorile $y_1' = 6$, respectiv $y_2' = -4$.

Derivate de ordin superior. Derivata unei funcții $y=f(x)$, $y'=f'(x)$, este de asemenea o funcție de x. Presupunînd că această funcție este la rîndul ei derivabilă—ceea ce se întîmplă aproape întotdeauna pentru funcțiile elementare—derivata ei se numește derivata a doua (derivata de ordinul doi) și se notează cu $y''=f''(x)=\dfrac{d^2y}{dx^2}$. La fel se definesc derivatele a treia (de ordinul trei), a patra (de ordinul patru), a n-a (de ordinul n) etc.

Cu ajutorul regulilor expuse în paragraful 19.2 pot fi calculate derivatele în următoarele exemple:

Exemplul 1. $y = f(x) = x^5 + \dfrac{1}{2}x^4 - \dfrac{5}{6}x^3 + x^2 + 5x + 2;$

$$y' = f'(x) = 5x^4 + 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x + 5;$$

$$y'' = f''(x) = 20x^3 + 6x^2 - 5x + 2;\quad y''' = f'''(x) = 60x^2 + 12x - 5;\quad y^{IV} = y^{(4)} =$$

$$= f^{IV}(x) = f^{(4)}(x) = 120x + 12;\quad y^{(5)} = f^{(5)}(x) = 120;\quad y^{(6)} = f^{(6)}(x) = 0.$$

Exemplul 2. $y = f(x) = \dfrac{x^2}{(x-1)^2};\quad y' = f'(x) = -\dfrac{2x}{(x-1)^3};\quad y'' = f''(x) = \dfrac{2(2x+1)}{(x-1)^4};$

$$y''' = f'''(x) = -\frac{12(x+1)}{(x-1)^5};\ \ldots$$

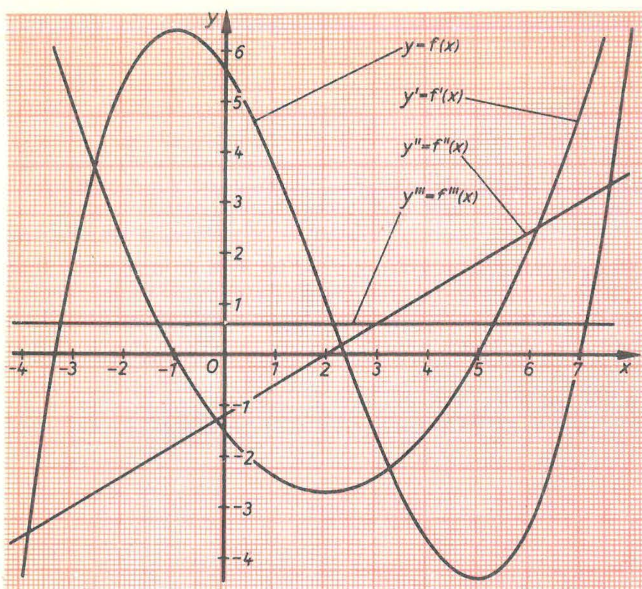
Exemplul 3. $y = f(x) = \sin x;\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x;\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d^2}{dx^2}\sin x = -\sin x;$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3}{dx^3}\sin x = -\cos x;\quad \frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d^4}{dx^4}\sin x = \sin x;\ \ldots$$

Toate acestea sînt exemple de funcții care admit derivate de ordin superior.

Exemplul 4. Din legea căderii libere a corpurilor, $s = \dfrac{g}{2}t^2$ se obține prin derivare $s' = gt$ și $s'' = g$; g este aici constanta accelerației gravitaționale. Căderea liberă este deci, o mișcare cu accelerație constantă.

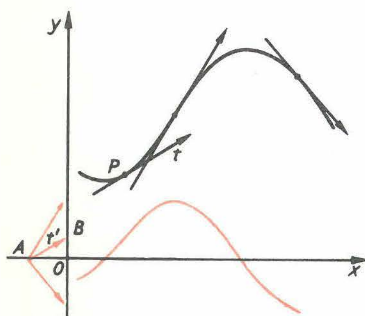
Din punct de vedere fizic *accelerația* $s'' = \dfrac{d^2s}{dt^2}$ este derivata vitezei $s' = \dfrac{ds}{dt}$. În exemplul cu drumul parcurs de un tren dat în fig. 19.1.1, există intervale de timp în care trenul merge accelerat. În aceste intervale unghiul φ făcut de tangenta cu axa Ox crește ($s'' > 0$). Aceste intervale sînt (t_0, t_2) și (t_4, t_6). În intervalele (t_2, t_4) și (t_6, t_8) dimpotrivă unghiul φ descrește ($s'' < 0$) și viteza trenului va descrește și ea. Pe fig. 19.1.6 sînt reprezentate, cu ajutorul următorului tablou de valori, o funcție și derivatele ei.



19.1.6. Graficele funcției și ale derivatelor

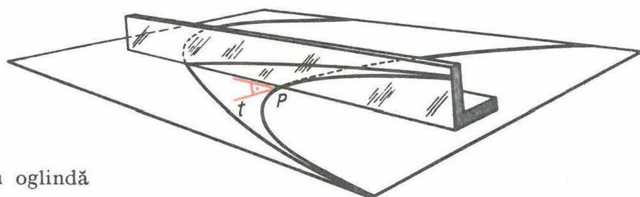
$y = f(x) = 0,1x^3 - 0,6x^2 -$
$- 1.5x + 5,6$;
$y' = f'(x) = 0,3x^2 - 1,2x -$
$- 1,5$;
$y'' = f''(x) = 0,6x - 1,2$;
$y''' = f'''(x) = 0,6$.

x	y	y'
−4	−4,4	
−3	2	4,8
−2	5,4	2,1
−1	6,4	0
0	5,6	−1,5
1	3,6	−2,4
2	1	−2,7
3	−1,6	−2,4
4	−3,6	−1,5
5	−4,4	0
6	−3,4	2,1
7	0	4,8
8	6,4	



19.1.7. Derivare grafică

Derivarea grafică. Derivata într-un punct P al unei curbe date prin funcția $y = f(x)$ reprezintă valoarea funcției tangentă pentru unghiul φ făcut de tangenta t la curbă în punctul P cu direcția pozitivă a axei Ox. Paralela t' dusă la această tangentă prin punctul $A(-1, 0)$ taie axa Oy în punctul B. (fig. 19.1.7) astfel încît $\text{tg}\,\varphi = \overline{OB}:\overline{AO} = y'$. Direcția tangentei în punctul P se determină cu ajutorul unei rigle cu oglindă (fig. 19.1.8). Aceasta este perpendiculară pe planul desenului. Partea vizibilă a curbei și partea oglindită se suprapun fără îndoire numai atunci cînd rigla intersectează curba în punctul P sub un unghi drept. Perpendiculara ridicată în P pe această normală la curbă este tangenta t. Instrumentul se compune dintr-o astfel de linie, legată cu un raportor pe care se poate citi imediat direcția tangentei. *Diferențiograful* are în plus un dispozitiv de scriere care trasează curba corespunzătoare derivatei.



19.1.8. Riglă cu oglindă

Teorema lui Lagrange (a creșterilor finite)

Teorema lui Lagrange. Raportul $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ reprezintă panta secantei duse prin punctele de abscise $x = a$ și $x = b$. Dacă funcția $y = f(x)$ reprezentantă prin curba dată este derivabilă, atunci în intervalul $[a, b]$ trebuie să existe cel puțin un punct în care tangenta la curbă

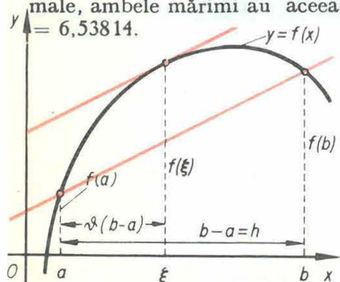
este paralelă cu secanta. Ambele drepte au atunci aceeași pantă adică $f'(\xi)=[f(b)-f(a)]/(b-a)$. Dacă se notează abscisele a și b cu $a = x$ și $b = x + h$, atunci ξ poate fi scris sub forma $\xi = x + \theta h$ unde θ este un număr pozitiv mai mic decît 1, $0 < \theta < 1$ (fig. 19.1.9). Teorema lui Lagrange se poate formula atunci:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x+\theta h) \quad \text{cu} \quad 0 < \theta < 1.$$

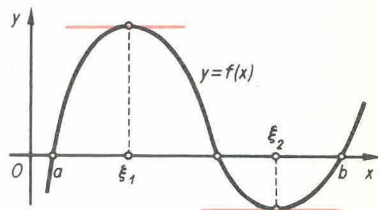
Teorema lui Lagrange. Dacă o funcție $y = f(x)$ este continuă în intervalul închis $a \leqslant x \leqslant b$ și derivabilă în intervalul deschis $a < x < b$, atunci în interiorul acestui interval există cel puțin o valoare intermediară ξ, pentru care este satisfăcută egalitatea $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$ cu $a < \xi < b$.

Cu ajutorul acestei teoreme se pot face multe calcule numerice, de exemplu deducerea valorii unei funcții cunoscînd valori vecine.

Exemplu. Din $f(x) = \ln 690 = 6{,}53669$ se deduce $f(x+h) = \ln 691$ cu cinci zecimale exacte, scriind $f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h)$, unde $hf'(x+\theta h)$ este valoarea ce trebuie adăugată. Deoarece $x = 690$ și $x + h = 691$, rezultă că $h = 1$ și din $f'(x) = \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$ rezultă $1 \cdot f'(x+\theta) = \frac{1}{690+\theta}$ care se găsește între $\frac{1}{690} = 0{,}0014492\ldots$ și $\frac{1}{691} = 0{,}0014471\ldots$ Cu cinci zecimale, ambele mărimi au aceeași valoare, astfel încît se obține $\ln 691 = 6{,}53669 + 0{,}00145 = 6{,}53814$.



19.1.9. Teorema lui Lagrange



19.1.10. Interpretarea geometrică a teoremei lui Rolle

Teorema lui Rolle. Cînd în teorema lui Lagrange $f(a) = f(b)$, atunci există o abscisă ξ, $a < \xi < b$, pentru care $f'(\xi) = 0$. Există deci în acest interval un punct în care tangenta la curbă este paralelă cu axa Ox. În general în enunțul teoremei care poartă numele matematicianului francez Michel ROLLE (1652—1719) (fig. 19.1.10) se mai presupune în plus că $f(a) = f(b) = 0$.

Teorema lui Rolle. Dacă funcția $y = f(x)$ este continuă în intervalul închis $a \leqslant x \leqslant b$ și derivabilă în intervalul deschis $a < x < b$ și $f(a) = f(b) = 0$, atunci există în interiorul acestui interval cel puțin o valoare ξ, $a < \xi < b$, pentru care $f'(\xi) = 0$.

Teorema lui Cauchy. Teorema expusă admite următoarea generalizare.

Fiind date funcțiile $f(x)$ și $g(x)$ continue în intervalul închis $a \leqslant x \leqslant b$ și derivabile în intervalul deschis $a < x < b$ și dacă în acest interval $g'(x) \neq 0$, atunci există cel puțin o valoare ξ pentru care $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$, unde $a < \xi < b$.

Consecințe ale teoremei lui Lagrange. Dacă derivata unei funcții este nulă în toate punctele unui interval și dacă $x_1 < x_2$ sînt două puncte din acest interval, atunci $f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = 0$ sau $f(x_2) = f(x_1)$. Funcția este o constantă.

O funcție $f(x)$ derivabilă în interiorul unui interval cu derivata $f'(x)$ nulă în acest interval este o constantă.

Dacă derivatele a două funcții $\varphi(x)$ și $\psi(x)$ au într-un anumit interval aceeași valoare, atunci derivata funcției $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$ va fi nulă și deci $f(x)$ este o constantă.

Două funcții derivabile într-un interval și cu derivate egale în acest interval diferă printr-o constantă aditivă.

Teorema aproape evidentă care afirmă că o funcție crește, respectiv descrește în intervalul $a < x < b$, dacă derivata $f(x)$ este pozitivă, respectiv negativă în acest interval, se demonstrează cu ajutorul teoremei lui Lagrange.

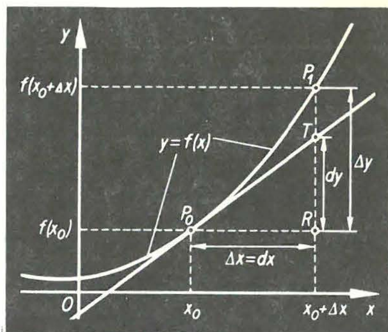
Diferențială

Diferențiala unei funcții. Prin introducerea noțiunii de diferențială se urmărește, din punct de vedere geometric, aproximarea funcției $y = f(x)$ în vecinătatea punctului P_0. Pe figura 19.1.11 sînt reprezentate funcția $y = f(x)$ presupusă diferențiabilă în intervalul considerat și tangenta la această curbă în punctul $P_1 [x_0, f(x_0)]$. Ordonata punctului vecin $P_1[x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x)]$ este intersectată de această tangentă în punctul T. Creșterea funcției $\overline{RP_1} = \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ corespunzătoare unei creșteri a abscisei Δx se poate descompune în doi termeni $\overline{RT}$ și $\overline{TP_1}$. Creșterea ordonatei $\overline{RT}$ se numește diferențială a funcției $f(x)$ și se notează cu dy sau $df(x)$. Cu cît creșterea abscisei Δx este mai mică cu atît se obține o aproximare mai precisă a creșterii ordonatei prin Δy. Deoarece derivata este limita raportului diferențelor, rezultă ecuația $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \varepsilon$ unde ε este un număr pozitiv arbitrar de mic care tinde la zero odată cu Δx. Astfel creșterea $\Delta y = f'(x_0)\, \Delta x + \varepsilon\Delta x$ se descompune în doi termeni $f'(x_0)\, \Delta x$ și $\varepsilon\Delta x$ dintre care al doilea converge mai repede către zero decît primul. Primul termen care converge liniar către zero se numește *diferențială a funcției* în punctul x_0 și se scrie sub forma $dy = df(x) = f'(x_0)\, dx$. Mărimea $dx = \Delta x$ se numește *diferențiala variabilei independente*.

Diferențiala funcției $y = f(x)$ în punctul x_0	$dy = f'(x_0)\, dx$

Exemplu. Diferențiala funcției $y = f(x) = x^2$ în punctul $x = x_0$ este $dy = 2x_0 dx$.

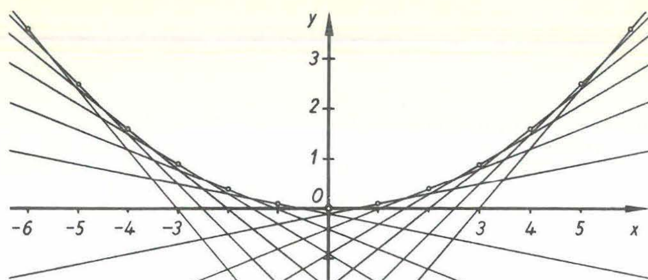
Aceste considerații permit folosirea tangentei pentru studiul comportamentului local al curbei. Pentru funcția $y = x^2/10$ sînt trasate pe figura 19.1.12 tangentele în cîteva puncte particulare, cu ajutorul cărora se poate presupune forma curbei.



19.1.11. Diferențiala unei funcții

Ecuația de aproximare $\Delta y \approx dy$. În calculele aproximative se folosește posibilitatea ca pentru valori mici ale lui $|\Delta x| = |dx|$ creșterea funcției în vecinătatea punctului x_0 să poată fi aproximată cu suficientă precizie prin diferențiala dy; rezultă ecuația de aproximare $\Delta y \approx dy$. Pentru funcția $y = \sin x$ au loc în vecinătatea lui $x_0 = 0$ relațiile $\Delta y = \sin \Delta x - \sin 0 = \sin \Delta x = \sin dx$, $dy = \cos 0 \cdot dx = dx$ și deci ecuația de aproximare va fi $\sin dx \approx dx$, respectiv $\sin h \approx h$ pentru h mic, cînd se scrie h în loc de dx.

Uneori diferențiala este numită un *infinit mic.* Această exprimare este neprecisă, confuză, deoarece este vorba de mărimi finite, diferite de zero care în anumite raționamente sînt alese în mod deliberat suficient de mici.



19.1.12. Tangente la graficul funcției $y = x^2/10$

Diferențiale de ordin superior. Fie funcția $y = f(x)$ de n ori derivabilă ($n > 1$). Atunci *diferențiala ei de ordinul întîi* $dy = f'(x)\,dx$ este o funcție derivabilă de x, cu derivata $(dy)' = f''(x)\,(dx)^2$, unde dx este independentă de x și considerată la derivare ca un factor constant. Derivata lui dy se numește *diferențială de ordinul doi* și se scrie d^2y. În mod analog se obține diferențiala de ordinul trei $d^3y = d(d^2y) = f'''(x)\,(dx)^3$.

Diferențiala de ordinul 2, ..., n	$d^2y = d(dy) = f''(x)\,(dx)^2$ $d^ny = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)\,(dx)^n$

După această definiție și derivata de ordinul n, $f^{(n)}(x)$ a funcției $y = f(x)$ poate fi considerată ca raportul a două diferențiale $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^ny}{dx^n}$.

19.2. Metode de derivare

Pentru determinarea derivatei pornind de la definiția ei, se procedează astfel: se formează raportul diferențelor, se transformă acest raport aducîndu-l la o formă convenabilă și se găsește limita. De multe ori însă, rezultatul se obține mult mai repede folosind unele formule generale. Aceste formule se demonstrează pornind de la definiția derivatei. Se obțin astfel regulile de derivare pentru funcții rezultate din alte funcții prin operații elementare cît și derivatele funcțiilor elementare.

Operații cu funcții derivabile

Derivata produsului dintre o funcție și un factor constant. Fie de derivat funcția $y = cf(x)$, unde c este un factor constant; atunci c se poate da în factor în raportul diferențelor astfel încît $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = c\,\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$. Dar dacă a tinde către a_0, atunci ca tinde către ca_0.

Derivata produsului dintre o funcție și un factor constant	$\dfrac{d}{dx}[cf(x)] = c\left[\dfrac{d}{dx}f(x)\right]$

Exemple. $y = 6x^2$, $y' = 6 \cdot 2x = 12x$; $y = \pi \sin x$, $y' = \pi \cos x$;

$y = \dfrac{2}{3}x^3$, $y' = \dfrac{2}{3} \cdot 3x^2 = 2x^2$; $y = 2\sqrt{x}$, $y' = 2 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Derivata sumei. Raportul diferențelor unei sume $f(x) = u(x) + v(x)$ se poate transforma astfel:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{[u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x)] - [u(x) + v(x)]}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}.$$

Deoarece limita sumei este egală cu suma limitelor, rezultă că

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = u'(x) + v'(x).$$

Derivata sumei	$\dfrac{d}{dx}(u + v) = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$

Fiecare termen poate fi la rîndul său o sumă, astfel încît rezultatul este valabil pentru o sumă cu un număr finit de termeni.

Derivata unei sume de un număr finit de funcții este egală cu suma derivatelor termenilor.

Această regulă rămîne valabilă și pentru diferență, deoarece scăzătorul poate fi considerat ca un termen al sumei înmulțit cu factorul constant (-1).

Derivata produsului. Raportul diferențelor produsului $y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$ se poate transforma astfel:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x)\, v(x+\Delta x) - u(x)\, v(x+\Delta x) + u(x)\, v(x+\Delta x) - u(x)\, v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \cdot v(x+\Delta x) + u(x) \cdot \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}.$$

Operația de trecere la limită se comută cu operațiile de adunare și înmulțire și deci raportul diferențelor va fi $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$.

Pentru trei factori $(v_1 v_2 v_3)' = (v_1 v_2)' v_3 + v_1 v_2 v_3' = v_1' v_2 v_3 + v_1 v_2' v_3 + v_1 v_2 v_3'$.

Derivata produsului	
$\frac{d}{dx}(uv) = \frac{du}{dx} \cdot v + \frac{dv}{dx} \cdot u$	$(uv)' = u'v + v'u$

Derivata funcției putere	
$\frac{dx^n}{dx} = nx^{x-1}$;	n pozitiv, întreg

Această regulă se poate extinde prin inducție completă la n factori. În cazul particular cînd fiecare factor este x se obține $(x^n)' = 1 \cdot x^{n-1} + 1 \cdot x^{n-1} + \ldots = nx^{n-1}$. Cu ajutorul acestei reguli se poate deriva orice polinom.

Derivata unui polinom de gradul n este un polinom de gradul $n - 1$.

Exemplul 1. $y = (3x^2 - 5x + 6)(4x^2 + 3x - 7) = u \cdot v,$
$y' = (6x - 5)(4x^2 + 3x - 7) + (8x + 3)(3x^2 - 5x + 6) = u' \cdot v + v' \cdot u,$
$y' = 48x^3 - 33x^2 - 24x + 53.$

La același rezultat se ajunge dacă se desfac întîi parantezele $y = 12x^4 - 11x^3 - 12x^2 + 53x - 42$ și se derivează.

Dacă termenii sau factorii sînt funcții transcendente, atunci se vor folosi reguli de derivare care vor fi introduse în paragrafele respective.

Exemplul 2. $y = x^2 \cdot \sin x, \quad y' = 2x \cdot \sin x + x^2 \cos x.$

Exemplul 3. $y = x^2 \cdot \ln x; \quad y' = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1),$

$$y'' = 1 \cdot (2 \ln x + 1) + x \cdot \frac{2}{x} = 2 \ln x + 3.$$

Exemplul 4. $y = x \sin x \cos x = uvw;$
$y' = u'vw + uv'w + uvw' = 1 \cdot \sin x \cdot \cos x + x \cos x \cos x + x \sin x(-\sin x);$
$y' = \sin x \cos x + x \cos 2x.$

Derivata cîtului. Raportul diferențelor funcției $y = f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}, v(x) \neq 0$, se poate deduce din regula produsului. Din $y = \frac{u}{v}$ rezultă $yv = u$ sau $u' = y'v + yv'$, adică

$$y' = \frac{1}{v} \cdot (u' - yv') = \frac{1}{v}\left(u' - \frac{u}{v} \cdot v'\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Derivata cîtului	$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{1}{v^2}\left(v\cdot\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}\right)$	$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

Cu ajutorul acestei reguli, regula de derivare a funcției putere $y = x^n$ se poate extinde și asupra exponenților întregi negativi: $n = -\nu$, ν pozitiv. Pentru $y = x^{-\nu} = \frac{1}{x^\nu}$ se ia $u = 1$, $v = x^\nu$; se obține:

$$y' = \frac{0 - \nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu x^{-\nu-1} = nx^{n-1}.$$

$(x^n)' = nx^{n-1}$, n negativ întreg

Exemplul 1. Pentru funcția $y = \frac{3x^2-5}{x^4+2}$, fie $u = 3x^2 - 5$ și $v = x^4 + 2$; deoarece $u' = 6x$ și $v' = 4x^3$, se obține

$$y' = \frac{6x(x^4+2) - 4x^3(3x^2-5)}{(x^4+2)^2} = \frac{2x(6+10x^2-3x^4)}{(x^4+2)^2}.$$

Exemplul 2. Pentru funcția $y = \frac{x^3}{x^2-1}$, fie $u = x^3$ și $v = x^2 - 1$; deoarece $u' = 3x^2$ și $v' = 2x$, se obține

$$y' = \frac{3x^2(x^2-1) - 2x\cdot x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

Pentru derivata a doua, fie $u = x^4 - 3x^2$ și $v = (x^2-1)^2$; deoarece $u' = 4x^3 - 6x$ și $v' = 4x(x^2-1)$, se obține

$$y'' = \frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2 - 4x(x^2-1)(x^4-3x^2)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

Exemplul 3. Pentru derivata funcției $y = \frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x} = \frac{u}{v}$ se obțin $u' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $v' = \frac{-1}{\cos^2 x}$ și

$$y' = \frac{\frac{1-\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} + \frac{1+\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}}{(1-\operatorname{tg} x)^2} = \frac{2}{\cos^2 x\,(1-\operatorname{tg} x)^2} = \frac{2}{1-\sin 2x}.$$

Derivarea funcțiilor compuse. După cum s-a văzut în capitolul 5, $y = f[\varphi(x)]$ este o funcție compusă dacă valorile funcției $t = \varphi(x)$ aparțin domeniului de definiție al funcției $y = f(t)$. Raportul diferențelor se poate scrie $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta t}\cdot\frac{\Delta t}{\Delta x}$. Dacă funcția $t = \varphi(x)$ este derivabilă în punctul ξ, deci dacă există $\frac{dt}{dx} = \varphi'(\xi)$ și funcția $y = f(t)$ este derivabilă în punctul $\tau = \varphi(\xi)$, deci există $\frac{df}{dt} = f'(\tau)$, atunci funcția compusă $y = f[\varphi(x)]$ este de asemenea derivabilă în punctul ξ și $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$, $\frac{df}{dx} = \frac{df}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dx}$ sau $f'[\varphi(x)] = f'(t)\,\varphi'(x)$, unde $t = \varphi(x)$.

Derivarea funcției compuse	$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$ sau $f'(x)=f'(t)\,\varphi'(x)$

Condiția $\Delta t \neq 0$ impusă în demonstrație nu reprezintă o restricție efectivă deoarece dacă $\Delta t = 0$, atunci t ar trebui să fie o constantă.

Exemplul 1. Funcția $y = (3x^2 + 5)^4$ poate fi scrisă $y = f(t) = t^4$ cu $t = \varphi(x) = 3x^2 + 5$. După regula de derivare a funcțiilor compuse

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dx} = 4t^3 \cdot 6x = 4(3x^2 + 5)^3 \cdot 6x = 24x(3x^2 + 5)^3.$$

Exemplul 2. Pentru funcția $y = \sqrt{5x^3 - 7x + 8}$, $y = f(t) = t^{\frac{1}{2}}$ și $t = \varphi(x) = 5x^3 - 7x + 8$. După regula de derivare a funcțiilor compuse

$$y' = \frac{df}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}}(15x^2 - 7) = \frac{15x^2 - 7}{2\sqrt{5x^3 - 7x + 8}}.$$

Exemplul 3. Pentru derivarea funcției $y = \ln \sin \sqrt{a + bx}$ regula de derivare a funcțiilor compuse se va aplica de mai multe ori. Dacă se notează cu $y = f(t) = \ln t$, $t = \varphi(u) = \sin u$, $u = \psi(v) = \sqrt{v}$ și $v = a + bx$ se obține

$$y' = \frac{df}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{du} \cdot \frac{d\psi}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = \frac{1}{t} \cos u \cdot \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot b =$$

$$= \frac{1}{\sin \sqrt{a + bx}} \cdot \cos \sqrt{a + bx} \cdot \frac{b}{2\sqrt{a + bx}} = \frac{b \operatorname{cotg} \sqrt{a + bx}}{2\sqrt{a + bx}}.$$

Derivata logaritmică. Uneori este mai convenabil să se deriveze nu funcția dată, ci logaritmul ei natural. Din regula de derivare a funcțiilor compuse rezultă

$$\frac{d}{dx} \ln f(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{d}{dx} f(x), \quad f'(x) = f(x) \cdot \frac{d}{dx} \ln f(x).$$

$$\boxed{\frac{d}{dx} f(x) = f(x) \cdot \frac{d}{dx} \ln f(x)}$$

Exemplul 1. Logaritmul natural al funcției $y = x^x$ pentru valori pozitive ale lui x este $\ln x^x = x \ln x$. Din regula de derivare a produsului se obține $\frac{d}{dx} \ln x^x = 1 \cdot \ln x + \frac{x}{x}$ adică $y' = x^x (\ln x + 1)$.

Exemplul 2. Pentru valori pozitive ale lui x, derivata funcției $y = \sqrt[x]{x}$ este $y' =$

$$= \sqrt[x]{x} \frac{d}{dx} \ln \sqrt[x]{x} = \sqrt[x]{x} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \ln x \right) = \sqrt[x]{x} \frac{-\ln x + 1}{x^2} = \sqrt[x]{x^{1-2x}} (1 - \ln x)$$

Exemplul 3. Funcția $y = x^n \sqrt[m]{\varphi(x)} \sin^2 x$ se compune din trei factori. Logaritmul ei natural este $\ln y = n \ln x + \frac{1}{m} \ln \varphi(x) + 2 \ln \sin x$ și derivata acestuia $\frac{d}{dx} \ln y = \frac{n}{x} + \frac{\varphi'(x)}{m\varphi(x)} + \frac{2 \cos x}{\sin x}$. De aici rezultă derivata funcției date

$$y' = x^n \sqrt[m]{\varphi(x)} \sin^2 x \left[\frac{n}{x} + \frac{\varphi'(x)}{m\, \varphi(x)} + 2 \operatorname{cotg} x \right].$$

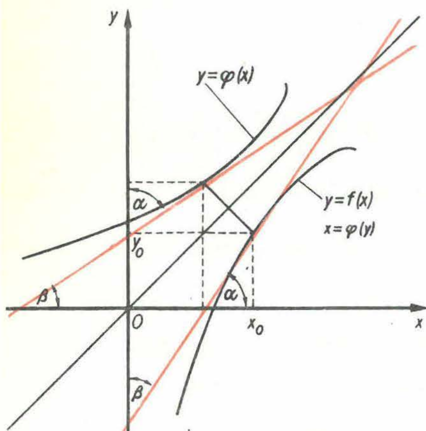
Exemplul 4. Pentru $y = \sin^x x$ se obține $y' = \sin^x x \left(\ln \sin x + x \frac{\cos x}{\sin x} \right) = \sin^x x (\ln \sin x + x \operatorname{cotg} x)$.

Derivarea funcțiilor inverse. Dacă $y = f(x)$ este în intervalul $a < x < b$ monotonă și continuă, atunci imaginea funcției inverse $y = \varphi(x)$ se obține din imaginea funcției $y = f(x)$ prin simetrie față de bisectoarea cadranelor I și III. Dacă se notează cu α unghiul format de o tangentă la curba $y = f(x)$ cu axa Ox, atunci unghiul format de tangenta corespunzătoare la curba $y = \varphi(x)$ cu axa Oy este tot α, deci unghiul format de această tangentă cu axa Ox va fi $\beta = 90° - \alpha$ (fig. 19.2.1). Pentru unghiurile complementare α și β, $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{cotg}\alpha = 1$ și deci $f'(x)\,\varphi'(x) = 1$.

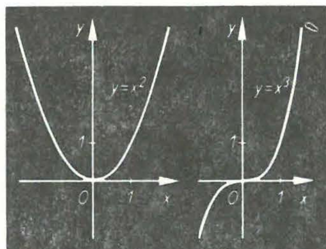
Derivarea funcției inverse	$\varphi'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}, \quad \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$

Dacă se schimbă x cu y, atunci ecuația funcției inverse este $x = \varphi(y)$ și domeniul ei de definiție este domeniul valorilor funcției $y = f(x)$; ambele funcții se reprezintă prin aceeași curbă. În rapoartele $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ și $\dfrac{\Delta x}{\Delta y}$, Δx și Δy iau aceleași valori, adică $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \dfrac{\Delta x}{\Delta y} = 1$. Dacă există limita $f'(x)$ a raportului $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, atunci, în ipoteza că $f'(x) \neq 0$, există și limita $\varphi'(y)$ a raportului $\dfrac{\Delta x}{\Delta y}$ și $\varphi'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$.

Dacă pentru o funcție $f(x)$, $f'(x) \equiv 0$ într-un interval, atunci funcția nu este inversabilă în acest interval deoarece unei valori y îi corespund toate valorile x din interval. Dacă derivata funcției se anulează numai într-un singur punct, atunci trebuie cercetat dacă în vecinătatea acestui punct $f(x)$ își schimbă sau nu semnul. Primul caz nu poate avea loc pentru funcții monotone deoarece acestea nu au valori extreme și deci $f(x)$ nu admite inversă; de exemplu $y = x^2$ în



19.2.1. Pantele funcției și a inversei ei



19.2.2. Comportarea funcției $y = x^2$ și $y = x^3$ în vecinătatea punctului $x_0 = 0$

vecinătatea punctului $x_0 = 0$. În al doilea caz, funcția este monotonă în vecinătatea acestui punct, însă funcția inversă nu este derivabilă după cum se poate vedea din exemplul $y = x^3$ în vecinătatea punctului $x_0 = 0$ (fig. 19.2.2).

Regula de derivare a funcțiilor inverse se folosește pentru găsirea derivatei unei funcții cînd se cunoaște derivata inversei, de exemplu în cazul funcțiilor logaritmice și al funcțiilor trigonometrice inverse.

Derivarea funcțiilor date sub formă parametrică. Reprezentarea parametrică a unei funcții $y = f(x)$ este $x = \varphi(t)$ și $y = \psi(t)$. Atunci y se poate scrie ca funcție compusă $y = f[\varphi(t)]$ și din regula de derivare pentru funcții compuse rezultă $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dt}$. Pentru valabilitatea acestei reguli trebuie ca funcțiile $\varphi(t)$ și $\psi(t)$ să fie derivabile în raport cu parametrul t și $\varphi'(t) \neq 0$.

Derivarea funcţiilor date sub formă parametrică	$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ sau $f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$.

Exemplul 1. Elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ are reprezentarea parametrică $x = a \cos t$ şi $y = b \sin t$. Deoarece $\frac{dx}{dt} = -a \sin t$ şi $\frac{dy}{dt} = b \cos t$, rezultă că $\frac{dy}{dx} = -\frac{b \cos t}{a \sin t} = -\frac{b}{a} \operatorname{cotg} t$. Din $\cos t = \frac{x}{a}$ şi $\sin t = \frac{y}{b}$ se obţine pentru panta elipsei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, în punctul $P(x, y)$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$.

Exemplul 2. Cicloida are reprezentarea parametrică $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$. Derivata $\frac{dy}{dx}$ rezultă din $\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t) = 2a \sin^2 \frac{t}{2}$ şi $\frac{dy}{dt} = a \sin t = 2a \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}$, $\frac{dy}{dx} = \operatorname{cotg} \frac{t}{2}$. De aici rezultă că cicloida admite pentru $t = 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, în punctele în care întîlneşte axa Ox, vîrfuri cu tangenta perpendiculară pe Ox.

Derivarea funcţiilor în coordonate polare. Fie $r = r(\varphi)$ reprezentarea unei funcţii în coordonate polare. Deoarece între coordonatele polare şi cele carteziene există relaţiile $x = r \cos \varphi$ şi $y = r \sin \varphi$, se poate da funcţiei o reprezentare parametrică cu parametrul φ : $x = r(\varphi) \cos \varphi$, $y = r(\varphi) \sin \varphi$. Derivata funcţiei va fi atunci $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi} : \frac{dx}{d\varphi}$. Notînd $\frac{dr}{d\varphi} = \dot{r}$, rezultă

$\frac{dy}{d\varphi} = \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi$ şi

$\frac{dx}{d\varphi} = \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi$.

Derivata unei funcţii în coordonate polare $r = r(\varphi)$	$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi}{\dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi}$

Exemplu. Spirala logaritmică are ecuaţia $r = a e^{k\varphi}$. După regula de mai sus, derivata va fi

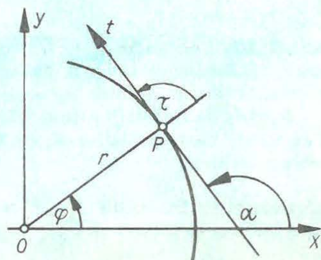
$$\frac{dy}{dx} = \frac{ak\, e^{k\varphi} \sin \varphi + a\, e^{k\varphi} \cos \varphi}{ak\, e^{k\varphi} \cos \varphi - a\, e^{k\varphi} \sin \varphi} = \frac{k \sin \varphi + \cos \varphi}{k \cos \varphi - \sin \varphi}.$$

De aici, se poate vedea că direcţia tangentei depinde numai de φ, adică unghiul τ_0 dintre o rază vectoare arbitrară şi tangenta în punctul respectiv are o mărime constantă.

În general, pentru determinarea unghiului dintre raza vectoare $\overrightarrow{OP}$ şi tangentă, folosind notaţiile din figura 19.2.3, $\tau = \alpha - \varphi$, se obţine

$$\operatorname{tg} \tau = \operatorname{tg}(\alpha - \varphi) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi} = \frac{\frac{dy}{dx} - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \frac{dy}{dx} \operatorname{tg} \varphi} =$$

$$= \frac{y' \cos \varphi - \sin \varphi}{y' \sin \varphi + \cos \varphi} = \frac{r}{\dot{r}}.$$



1 92.3. Unghiul dintre tangenta la curbă şi vectorul de poziţie $\overline{OP'}$

Ultima egalitate se obține din formula de derivare în coordonate polare prin rezolvarea în raport cu $\frac{r}{\dot{r}}$.

Aplicînd acest rezultat în cazul spiralei logaritmice (v. 19.5), se obține

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{a\,\mathrm{e}^{k\varphi}}{ak\,\mathrm{e}^{k\varphi}} = \frac{1}{k}.$$

Aceasta înseamnă că spirala logaritmică intersectează toate razele vectoare sub același unghi $\tau = \operatorname{arctg} \frac{1}{k}$. Din acest motiv, de exemplu, cuțitele mașinilor rotative de tocat paie au forma unei spirale logaritmice.

Derivarea funcțiilor implicite. Deseori este necesar să se determine derivata unei funcții date sub formă implicită $F(x, y) = 0$. Se presupune că $F(x, y)$, ca funcție de două variabile, este derivabilă în raport cu x pentru y fix și derivabilă în raport cu y pentru x fix. Dacă există o formă explicită continuă $y = f(x)$ a funcției date, atunci, dacă $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \neq 0$, funcția $y = f(x)$ este derivabilă și derivata $y' = f'(x)$ se poate obține fără stabilirea formei explicite cu ajutorul formulei de mai jos (vezi 19.3).

Derivarea funcțiilor implicite	$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}}$ sau $y' = -\frac{F_x}{F_y}$

Semnul ∂ se folosește pentru derivatele parțiale ale funcției $F(x, y)$.

Exemplu. Panta tangentei la hiperbola $F(x, y) = 2x^2 - y^2 + 12x - 2y + 3 = 0$ în punctul $P_0(2; 5)$ se găsește calculînd derivata funcției $y = f(x)$ în punctul $x_0 = 2$. Din $\frac{\partial F}{\partial x} = 4x + 12$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -2y - 2$, rezultă $f'(x) = -\frac{4x + 12}{-2y - 2} = \frac{2x + 6}{y + 1}$ și $f'(2) = \frac{5}{3}$.

Derivatele funcțiilor elementare

Derivarea funcției constante și a funcției putere. Deoarece pentru o funcție constantă raportul diferențelor este nul, derivata funcției constante este nulă, $\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} = 0$.

Din regula de derivare a produsului rezultă că pentru $y = x^n$, $y' = nx^{n-1}$, dacă n este un *număr întreg pozitiv*. Ca o consecință a regulii de derivare a cîtului, acest rezultat poate fi generalizat și pentru *exponenți negativi*. În capitolul 2 s-a definit funcția putere și pentru exponenți raționali $\frac{p}{q}$ sau mai general pentru *exponenți reali* α. Atunci y se poate scrie $y = x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$ sau $y = x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}$ cu restricția ca x să fie pozitiv. Folosind regula de derivare a funcțiilor compuse, se obține pentru orice α

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha \frac{x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Independent de acest rezultat, derivata funcţiei putere cu exponent raţional p/q, p şi q primi între ei, se obţine cu ajutorul regulii de derivare a funcţiilor inverse după următoarea schemă:

$$y_1 = x^{1/q} \rightarrow y_1^q = x \rightarrow \frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy_1}} = \frac{1}{qy_1^{q-1}};$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad n \text{ real}$$

$$y = x^{p/q} = y_1^p \rightarrow \frac{dy}{dx} = py_1^{p-1} \cdot \frac{dy_1}{dx} = \frac{p}{q} \cdot y_1^{p-q} = \frac{p}{q} x^{\frac{p-q}{q}} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1}.$$

Exemple.

Funcţia	Derivata	Funcţia	Derivata
$y = x$	$y' = 1$	$y = x^{-4}$	$y' = -4x^{-5}$
$y = 2x - 1$	$y' = 2$	$y = \sqrt[3]{x}$	$y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
$y = -\frac{1}{2}x + 2,$	$y' = -\frac{1}{2}$	$y = x^{\sqrt{2}}$	$y' = 2\sqrt{2}x^{2\sqrt{2}-1}$
$y = x^{15}$	$y' = 15x^{14}.$	$y = x^{\pi}$	$y' = \pi x^{\pi-1}$

Derivata funcţiei exponenţiale. În capitolul 18 s-a găsit că limita pentru $\frac{e^x - 1}{x}$ cînd x tinde la 0 are valoarea 1. Această valoare apare în raportul diferenţelor al funcţiei exponenţiale $y = e^x$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \frac{e^x e^{\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \left(\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}\right).$$

$$\frac{de^x}{dx} = e^x$$

Cînd Δx tinde la zero, e^x poate fi considerată ca o constantă pentru orice x fixat, astfel încît valoarea limită a acestui raport, adică derivata, este e^x. Acesta este unicul exemplu de funcţie care coincide cu derivata. Din acest motiv, funcţia exponenţială $y = e^x$ este indicată pentru descrierea unor procese din natură, pentru care variaţia y' este egală sau proporţională cu variabila y, de exemplu pentru dezintegrarea substanţelor radioactive. Din regula de derivare a funcţiilor compuse rezultă $\frac{d}{dx} e^{kx} = k\, e^{kx}$. Derivata funcţiei exponenţiale generale $y = a^x = e^{x \ln a}$ se obţine din aceeaşi regulă $\frac{dy}{dx} = \ln a\, e^{x \ln a}$.

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$$

Derivata funcţiei logaritmice. Funcţia logaritmică $y = \log_a x$ este inversa funcţiei $x = a^y$ cu derivata $\frac{dx}{dy} = a^y \ln a$. Funcţia $y = a^y$ este monotonă şi derivata ei nu se anulează pentru nici o valoare finită; în consecinţă derivata funcţiei logaritmice va fi (v. cap. 2)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a} = \frac{1}{x} \log_a e.$$

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a} = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$$

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

Derivarea funcțiilor trigonometrice. Pentru pregătirea trecerii la limită se fac transformările

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

și se folosesc următoarele formule din trigonometrie:

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

unde $x+\Delta x=\alpha$ și $x=\beta$

Pentru $\Delta x\to 0$, raportul $\left(\sin\frac{\Delta x}{2}\right)\Big/\frac{\Delta x}{2}$ are limita 1 și deci $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ admite ca limită, cînd $\Delta x\to 0$, pe $\cos x$.

$\frac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x}=\cos x$	$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{tg}\,x}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\mathrm{tg}^2 x=\sec^2 x$
$\frac{\mathrm{d}\cos x}{\mathrm{d}x}=-\sin x$	$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{cotg}\,x}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{\sin^2 x}=-(1+\mathrm{cotg}^2 x)=-\mathrm{cosec}^2 x$

Printr-o transformare corespunzătoare se obține și derivata funcției $y=\cos x$. Deoarece $y=\mathrm{tg}\,x=\frac{\sin x}{\cos x}$, respectiv $y=\mathrm{cotg}\,x=\frac{\cos x}{\sin x}$, derivatele acestor funcții se obțin din regula de derivare a cîtului. Acest lucru este permis numai pentru abscisele x, pentru care $\cos x$, respectiv $\sin x$, nu se anulează, deci nu pentru valorile $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, respectiv $x=2k\cdot\frac{\pi}{2}=k\pi$, unde k poate fi orice număr întreg.

Derivarea funcțiilor trigonometrice inverse. Inversa funcției $y=\arcsin x$ pentru, $-1\leqslant x\leqslant 1$ și $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$ este $x=\sin y$. Deci ținîndu-se seama de $\sin^2 y+\cos^2 y=1$, se obține derivata $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$\frac{\mathrm{d}\arcsin x}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $\lvert x\rvert<1$	$\frac{\mathrm{d}\arccos x}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $\lvert x\rvert<1$
$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{arctg}\,x}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{1+x^2}$;	$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{arccotg}\,x}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{1+x^2}$

În mod analog se deduc și derivatele celorlalte funcții trigonometrice inverse. Deși funcțiile arcsinus și arccosinus sînt definite și continue pentru $x=\pm 1$, ele nu sînt derivabile în aceste puncte, deoarece numitorul derivatei se anulează. În intervalele principale $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ pentru $y=\arcsin x$ și $0<y<\pi$, pentru $y=\arccos x$, radicalul este pozitiv. De remarcat este faptul că derivatele acestor funcții trigonometrice sînt funcții algebrice.

Derivatele funcției hiperbolice. Aceste funcții sînt funcții raționale compuse cu funcția exponențială și se pot deriva cu ajutorul regulii sumei astfel:

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})\right] = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{ch}\,x.$$

Pentru derivarea funcției $y = \mathrm{th}\,x = \dfrac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x}$ se folosește regula cîtului:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x} = \frac{\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{ch}^2 x}, \text{ unde } \mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1.$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{d}x} = \mathrm{ch}\,x$$
$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{d}x} = \mathrm{sh}\,x$$
$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{th}\,x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$$
$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{cth}\,x}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$$

Derivatele funcțiilor hiperbolice inverse. Inversa funcției $y = \mathrm{argsh}\,x$ este $x = \mathrm{sh}\,y$. Derivata ei se obține deci din $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}} = \dfrac{1}{\mathrm{ch}\,y} = \dfrac{1}{+\sqrt{1 + x^2}}$ deoarece $\mathrm{ch}^2 y - \mathrm{sh}^2 y = 1$.

Analog se obțin și celelalte derivate, de exemplu $\dfrac{\mathrm{d}\,\mathrm{argth}\,x}{\mathrm{d}x} = \mathrm{ch}^2 y = \dfrac{1}{1 - \mathrm{th}^2 y}$ unde $1 - \mathrm{th}^2 y = \dfrac{\mathrm{ch}^2 y - \mathrm{sh}^2 y}{\mathrm{ch}^2 y} = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 y}$.

$\dfrac{\mathrm{d}\,\mathrm{arg}\,x}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$	$\dfrac{\mathrm{d}\,\mathrm{arg}\,\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{\pm\sqrt{x^2 - 1}}$; $\lvert x \rvert > 1$
$\dfrac{\mathrm{d}\,\mathrm{arg}\,\mathrm{th}\,x}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{1 - x^2}$; $\lvert x \rvert < 1$	$\dfrac{\mathrm{d}\,\mathrm{arg}\,\mathrm{cth}\,x}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{1 - x^2}$; $\lvert x \rvert > 1$

Determinarea semnului radicalului sau a domeniului de definiție al derivatei se face cu ajutorul următoarei reprezentări logaritmice a acestor funcții în care argumentul funcției logaritmice trebuie considerat întotdeauna real și pozitiv:

$$y = \mathrm{argsh}\,x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1});\quad y = \mathrm{argch}\,x = \pm\ln(x + \sqrt{x^2 - 1});$$

$$y = \mathrm{argth}\,x = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x};\quad y = \mathrm{argcth}\,x = \frac{1}{2}\ln\frac{x + 1}{x - 1}.$$

Cu toată asemănarea lor formală, derivatele funcțiilor $y = \mathrm{arg}\,\mathrm{th}\,x$ și $y = \mathrm{argcth}\,x$ sînt de fapt funcții diferite, deoarece au domenii de definiție diferite.

Derivarea unei integrale ca funcție de una din limite. Pentru integrala $\int_a^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$, *a* se consideră un număr fix și limita superioară x variabila; integrala va fi deci o funcție $\Phi(x)$ de x. După cum se arată în capitolul 20 ca o consecință a teoremei mediei, derivata integralei $\Phi'(x)$ este egală cu valoarea funcției $f(x)$ în acest punct.

19.3. Derivatele funcțiilor de mai multe variabile

Derivate parțiale ale unei funcții

Fie funcția $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, unde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt variabile independente: de exemplu pentru funcția $z = f(x, y)$, $x_1 = x$ *și* $x_2 = y$, pentru $z = f(u, v, w)$, $x_1 = u$, $x_2 = v$, $x_3 = w$. Dacă se consideră toate variabilele, cu excepția lui x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, constante $x_{1,0}, x_{2,0}, \ldots, x_{i-1,0}, x_{i+1,0}, \ldots, x_{n,0}$, atunci funcția poate fi privită ca o funcție de o variabilă. Dacă această

funcție este continuă și derivabilă. atunci derivata ei se numește *derivata parțială* a funcției de n variabile și se notează cu

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_{1,0}, \ldots, x_i, \ldots, x_{n,0}) = f_{x_i}.$$

De exemplu, pentru $z = f(x, y)$, dacă cele două limite există, atunci

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y_0) - f(x, y_0)}{\Delta x}, \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y + \Delta y) - f(x_0, y)}{\Delta y}.$$

Pentru variabila care nu este presupusă constantă sînt valabile regulile de derivare pentru funcțiile de o variabilă x_i.

Exemplul 1. $z = f(x, y) = x^3 + 7x^2 y + 3xy^5 - 5y^6$;

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x, y) = 3x^2 + 14xy + 3y^5, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x, y) = 7x^2 + 15xy^4 - 30y^5.$$

Exemplul 2. $z = f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$; $\quad \frac{\partial z}{\partial x} = z_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2}$;

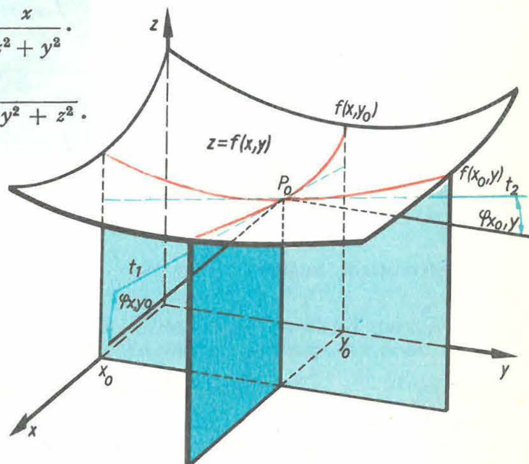
$$\frac{\partial z}{\partial y} = z_y = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} (-xy^{-2}) = -\frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Exemplul 3. $w = (x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = w_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = w_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = w_z = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$



19.3.1. Interpretarea geometrică a derivatelor parțiale ale unei funcții de două variabile

Interpretarea geometrică a derivatelor parțiale ale unei funcții de două variabile. O funcție de două variabile $z = f(x, y)$ poate fi în general reprezentată geometric printr-o *suprafață* în spațiu. Prin condiția $y = y_0 = \text{const}$ se determină acele puncte ale suprafeței care se găsesc în planul $y = y_0$, paralel cu planul xOz. Aceste puncte formează o *curbă* și $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y_0)$ reprezintă panta tangentei t_1 la această curbă în punctul (x, y_0); $z_x = \operatorname{tg} \varphi_{x, y_0}$. Unghiul φ_{x, y_0} este înclinația tangentei față de axa Ox_+ (fig. 19.3.1). În mod analog $z_y = \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y) = \operatorname{tg} \varphi_{x_0, y}$ reprezintă înclinația față de axa Oy_+ a tangentei t_2, în punctul (x_0, y) la curba de intersecție a suprafeței cu un plan paralel cu planul yOz, dus la distanța $x = x_0$. În orice punct P al suprafeței, tangentele t_1 și t_2 sînt determinate de z_x și z_y. Acestea determină în anumite condiții, în general îndeplinite în practică, planul tangențial al suprafeței în punctul P.

Derivate parțiale de ordin superior. Fiecare derivată parțială este la rîndul ei o funcție de aceleași variabile și poate fi din nou derivată atunci cînd este continuă și derivabilă. Aceste derivate parțiale ale derivatelor parțiale se numesc *derivate parțiale de ordin superior*; de exemplu

de ordinul al doilea, al treilea, ..., al n-lea. Derivatele parţiale în raport cu diferite variabile se numesc *derivate parţiale mixte*. Pentru $z = f(x, y)$ se obţin, de exemplu, prin derivare, patru derivate parţiale de ordinul doi:

$$f_{xx} = \frac{\partial f_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad f_{xy} = \frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad f_{yx} = \frac{\partial f_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad \text{şi} \quad f_{yy} = \frac{\partial f_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

În general f_{xy} şi f_{yx} sînt diferite. Încă Leonhard EULER (1707—1783) descoperise prin anul 1734 condiţii în care aceste derivate coincid; Hermann Amandus SCHWARZ (1843—1921) a demonstrat teorema care îi poartă numele.

Teorema lui Schwarz. Dacă derivatele parţiale de ordinul doi f_{xy} şi f_{yx} ale unei funcţii $f(x, y)$ în domeniul D sînt funcţii continue de x şi y, atunci în interiorul acestui domeniu ele sînt egale.

$$f_{xy} = f_{yx}$$

Enunţul acestei teoreme rămîne valabil şi pentru derivate de ordin superior şi pentru funcţii de mai multe variabile. De exemplu pentru $y = f(x, y)$ au loc relaţiile $f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}$ şi $f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$.

Exemplul 1

$$z = f(x, y) = x^3 + 7x^2y + 3xy^5 - 5y^6, \quad f_x = 3x^2 + 14xy + 3y^5;$$
$$f_y = 7x^2 + 15xy^4 - 30y^5; \quad f_{xx} = 6x + 14y; \quad f_{xy} = 14x + 15y^4 = f_{yx};$$
$$f_{yy} = 60xy^3 - 150y^4; \quad f_{xxx} = 6; \quad f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx} = 14;$$
$$f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx} = 60y^3; \quad f_{yyy} = 180xy^2 - 600y^3.$$

Exemplul 2

$$z = f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}; \quad f_x = \frac{y}{x^2 + y^2}; \quad f_y = -\frac{x}{x^2 + y^2};$$
$$f_{xx} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}; \quad f_{xy} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = f_{yx}; \quad f_{yy} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Diferenţială totală

Diferenţiala totală de ordinul întîi. Dacă $z = f(x, y)$ este o funcţie de două variabile x şi y şi există derivatele parţiale de ordinul întîi f_x şi f_y, atunci, acestea sînt limite ale rapoartelor diferenţelor $\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ şi $\frac{\Delta_y z}{\Delta y}$, ceea ce înseamnă că sînt valabile ecuaţiile $\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} + \varepsilon_1(\Delta x)$, respectiv $\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} + \varepsilon_2(\Delta y)$, cînd Δx şi Δy sînt mai mici decît numerele $\partial_1(\varepsilon_1)$, respectiv $\delta_2(\varepsilon_2)$ alese în mod corespunzător. În creşterile $\Delta_x z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \varepsilon_1 \Delta x$ şi $\Delta_y z = \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_2 \Delta y$, termenii $\varepsilon_1 \Delta x$ şi $\varepsilon_2 \Delta y$ tind la zero odată cu Δx şi Δy, iar ceilalţi termeni se numesc diferenţiale parţiale şi se notează cu $\frac{\partial z}{\partial x}\, dx$, respectiv $\frac{\partial z}{\partial y}\, dy$. Din creşterea totală Δz a funcţiei $z = f(x, y)$ se obţine, în cazul în care $\frac{\partial z}{\partial x}$ şi $\frac{\partial z}{\partial y}$ sînt continue, prin neglijarea termenilor care tind la zero odată cu Δx şi Δy, diferenţiala totală de ordinul întîi.

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

$$\Delta z = \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)}{\Delta x} \Delta x + \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \Delta y =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \varepsilon_1 \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_2 \Delta y$$

și

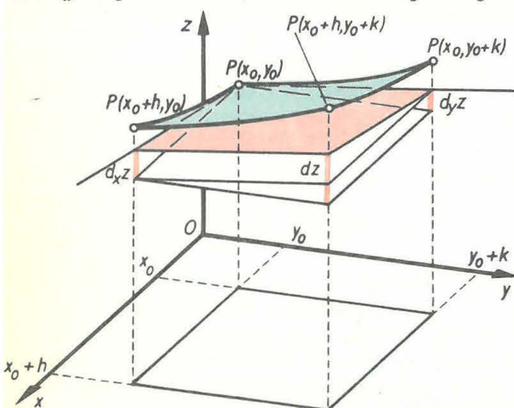
$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy.$$

Diferențiala totală de ordinul întîi	$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2}\,dx_2$

Cu cît Δx și Δy sînt mai mari cu atît va fi mai mare diferența dintre diferențială totală dz și creșterea totală $\Delta z = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x, y)$. Pentru funcția $z = x^2 - y^2$, $dz = 2(x\,dx - y\,dy)$. Pentru vecinătatea punctului $x = 2$, $y = 1$, în tabel este dată diferența $\Delta z - dz$ pentru două valori, 2, respectiv 0,2 pentru Δx și 1, respectiv 0,1 pentru Δy.

x	2	2	y	1	1	$(\Delta z - dz) : \Delta z$	33%	5%
dx, Δx	2	0,2	dy, Δy	1	0,1	$\Delta z - dz$	3	0,03
$x\,dx$	4	0,4	$y\,dy$	1	0,1	dz	6	0,60
$x + \Delta x$	4	2,2	$y + \Delta y$	2	1,1	Δz	9	0,63
x^2	4	4	y^2	1	1	$f(x, y)$	3	3
$(x + \Delta x)^2$	16	4,84	$(y + \Delta y)^2$	4	1,21	$f(x, y) + \Delta z$	12	3,63

Interpretarea geometrică a diferențialei unei funcții de două variabile. Diferențiala parțială $d_x z$ reprezintă creșterea ordonatei pe tangenta la curba $z = f(x, y_0)$ și diferențiala parțială $d_y z$ creșterea ordonatei pe tangenta la curba $z = f(x_0, y)$. Diferențiala totală $dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy$ este o funcție de patru variabile (x, y, dx, dy) și reprezintă din punct de vedere geometric creșterea ordonatei punctului de contact a planului tangențial la suprafață $z = f(x, y)$ cînd x se înlocuiește cu $\Delta x = h = dx$ și y cu $\Delta y = k = dy$ (fig. 19.3.2).



19.3.2. Interpretarea geometrică a diferențialei unei funcții de două variabile

Exemplu. Pentru funcția $z = f(x, y) = x^3 + 7x^2y + 3xy^5 - 5y^6$, $z_x = 3x^2 + 14xy + 3y^5$ și $z_y = 7x^2 + 15xy^4 - 30y^5$.

Diferențiala totală va fi

$$dz = (3x^2 + 14xy + 3y^5)dx + (7x^2 + 15xy^4 - 30y^5)\,dy.$$

Dacă $z = f(x, y) \equiv 0$, atunci această funcție poate fi privită ca o funcție de o variabilă sub formă implicită. Deoarece $dz = 0$, din $\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = 0$ se obține derivata $\frac{dy}{dx}$ a funcției sub formă implicită, respectiv $\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial x}\Big/\frac{\partial f}{\partial y}$.

Diferențiale de ordin superior. Dacă derivatele parțiale ale unei funcții sînt la rîndul lor continue și derivabile, atunci din diferențiala totală se poate obține din nou o diferențială, d^2z. Această diferențială poartă numele de diferențială totală de *ordinul al doilea*. Mărimile finite dx și dy, alese în mod arbitrar, se tratează la diferențiere la fel ca și *constantele*. Se obține

$$d^2z = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right)dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2.$$

Ţinînd seama de teorema lui Schwarz, $z_{xy}=z_{yx}$, şi diferenţiala ia o formă în care coeficienţii şi produsele formate cu $\mathrm{d}x$ şi $\mathrm{d}y$ se aseamănă formal cu coeficienţii dezvoltării binomului. De exemplu, pentru diferenţiala totală de *ordinul doi* se obţine $\mathrm{d}^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\mathrm{d}y}\right)^{(2)} z$. Expresia din paranteză este un *operator* aplicat lui z. Se poate arăta că şi diferenţialele de ordin superior, de exemplu de ordinul n, sînt de aceeaşi formă.

Diferenţiala totală de ordinul doi	$\mathrm{d}^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot \mathrm{d}x^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\cdot \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot \mathrm{d}y^2$

Diferenţiala totală de ordinul n	$\mathrm{d}^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y\right)^{(n)} z$
de ordinul 3	$\mathrm{d}^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\mathrm{d}x^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}y + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\mathrm{d}y^3$

Exemplu. Funcţia $z = f(x, y) = x^3 + 7x^2y + 3xy^5 - 5y^6$ are derivatele parţiale $z_x = 3x^2 + 14xy + 3y^5$; $z_y = 7x^2 + 15xy^4 - 30y^5$; $z_{xx} = 6x + 14y$; $z_{xy} = 14x + 15y^4$; $z_{yy} = 60xy^3 - 150y^4$. Diferenţiala totală de ordinul doi va fi atunci

$$\mathrm{d}^2z = (6x + 14y)\,\mathrm{d}x^2 + 2(14x + 15y^4)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + (60xy^3 - 150y^4)\,\mathrm{d}y^2.$$

Rezolvarea ecuaţiilor cu mai multe variabile. Ecuaţia $3x - 4y + 5 = 0$ poate fi privită ca formă implicită a ecuaţiei $y = 3x/4 + 5/4$. În general pentru o ecuaţie dată $F(x, y) = 0$, se cere găsirea unei funcţii $y = y(x)$ de o variabilă, pentru care ecuaţia $F[x, y(x)] = 0$ este identic satisfăcută. Acest lucru se poate uneori realiza cu ajutorul funcţiilor elementare sau prin aplicarea unor procedee de trecere la limită ca, de exemplu, prin folosirea seriilor infinite. De exemplu, pentru $x^2 + y^2 + 1 = 0$, această explicitare nu este posibilă. Se mai poate întîmpla ca în vecinătatea diferitelor puncte (x_0, y_0), cu $F(x_0, y_0) = 0$, să existe mai multe soluţii pentru y. De exemplu, ecuaţia $F(x, y) = 5x^2 + y^2 - 9 = 0$ are soluţia $y = \sqrt{9 - 5x^2}$ în vecinătatea punctului (1, 2) şi soluţia $y = -\sqrt{9 - 5x^2}$ în vecinătatea punctului (0, − 3).

Ecuaţia $F(x, y) = 0$ determină într-o vecinătate $U(x_0, y_0)$ a punctului (x_0, y_0), cu $F(x_0, y_0) = 0$, exact o funcţie continuă $y = y(x)$, cu proprietăţile $y_0 = y(x_0)$ şi $F[x, y(x)] = 0$ pentru orice $x \in U$, dacă sînt satisfăcute următoarele condiţii: 1) funcţia $F(x, y)$ este continuă în $U(x_0, y_0)$; 2) derivatele parţiale F_x şi F_y există şi sînt continue; 3) $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Funcţia $y = y(x)$ este atunci derivabilă şi $y' = y'(x) = -F_x/F_y$. Dacă funcţia dată $F(x, y)$ are derivate continue pînă la ordinul k, atunci $y = y(x)$ este de k ori derivabilă.

Aceste rezultate pot fi extinse pentru funcţii de mai multe variabile. Dacă $F(x_1, x_2, ..., x_k)$ este o funcţie continuă cu derivate parţiale F_{x_i} continue într-o vecinătate a lui $(x_1^0, x_2^0, ..., x_k^0)$ şi $F(x_1^0, x_2^0, ..., x_k^0) = 0$ cu $F_{x_j}(x_1^0, x_2^0, ..., x_k^0) \neq 0$ pentru un j fixat, atunci există într-o vecinătate a lui $(x_1^0, x_2^0, ..., x_k^0)$ o funcţie continuă $x_j = f(x_1, ..., x_{j-1}, x_{j+1}, ..., x_k)$ cu $x_j^0 = f(x_1^0, ..., x_{j-1}^0, x_{j+1}^0, ..., x_k^0)$ şi $F(x_1, ..., x_{j-1}, f, x_{j+1}, ..., x_k) = 0$.

Exemplul 1. Ecuația $F(x, y) = e^y - e^{-y} - 2x = 0$ poate fi rezolvată în raport cu y într-o vecinătate a lui (0,0), deoarece $F(x, y)$ este o funcție continuă cu derivatele continue $F_x = -2$, $F_y = e^y + e^{-y}$ și $F(0, 0) = 0$, $F_y(0, 0) = 2 \neq 0$. Soluția este $y = \ln(x + x^2 + 1) = \operatorname{arg\,sh} x$.

Exemplul 2. Ecuația $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0$ a *foliului lui Descartes* nu poate fi rezolvată în raport cu y în vecinătatea lui (0, 0) deoarece $F_y = 3y^2 - 3ax$ și $F_y(0, 0) = 0$. Acest lucru se poate observa și pe graficul funcției (vezi fig. 19.5.6).

Următoarea teoremă dă condițiile în care un *sistem de m ecuații* $F_i(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m) = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, poate fi rezolvat în raport cu $y_1, y_2, \dots, y_m$ într-o vecinătate a punctului $(x_1^0, \dots, x_n^0; y_1^0, \dots, y_m^0)$.

Dacă funcțiile $F_i(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m)$, $i = 1, 2, \dots, m$, *sînt continue într-o vecinătate U a punctului* $(x_1^0, \dots, x_n^0; y_1^0, \dots, y_m^0)$ *și au derivate parțial econtinue* $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$, $\frac{\partial F_i}{\partial y_k}$ *în acest punct și dacă determinantul funcțional* $\det\left[\frac{\partial F_i}{\partial y_k}(x_1^0, \dots, x_n^0; y_1^0, \dots, y_m^0)\right]$ *format cu derivatele parțiale* $\frac{\partial F_i}{\partial y}$ *în punctul* $(x_1^0, \dots, x_n^0; y_1^0, \dots, y_m^0)$ *este diferit de zero, atunci există în U exact un sistem de m funcții diferențiabile* $y_i = y_i(x_1, \dots, x_n)$ *cu proprietățile* $y_i^0 = y_i(x_1^0, \dots, x_n^0)$ *și* $F_i[x_1, \dots, x_n, y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n)] = 0$.

Determinantul funcțional sau jacobian

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

Exemplul 1. Sistemul de trei ecuații alăturat reprezintă legătura dintre coordonatele carteziene (x, y, z) și coordonatele sferice (r, θ, φ) ale unui punct. Jacobianul este

$$x = r\cos\varphi\sin\theta \qquad y = r\sin\varphi\sin\theta \qquad z = r\cos\theta$$

$$D = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta$$

și $D \neq 0$ pentru toate punctele care nu se găsesc pe axa Oz. Pentru aceste puncte, sistemul poate fi rezolvat în raport cu r, θ, φ:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \varphi = \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \theta = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Exemplul 2 (generalizarea exemplului *1*). Dacă funcțiile $y_k = f_k(x_1, \dots, x_n)$ pentru $k = 1, 2, \dots, n$ și derivatele lor parțiale de ordinul întîi sînt continue într-o vecinătate a punctului $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ și jacobianul $\det\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x_1^0, \dots, x_n^0)\right] \neq 0$, atunci există funcții continue $x_k = x_k(y_1, y_2, \dots, y_n)$ cu $x_k(y_1^0, \dots, y_n^0) = x_k^0$ și $f_k[x_1(y_1, \dots, y_n), x_2(y_1, \dots, y_n), \dots, x_n(y_1, \dots, y_n)] = y_k$ pentru $k = 1, 2, \dots, n$. Astfel printr-un abuz de limbaj se poate afirma că sistemul dat admite un „sistem invers".

19.4. Extremele funcțiilor

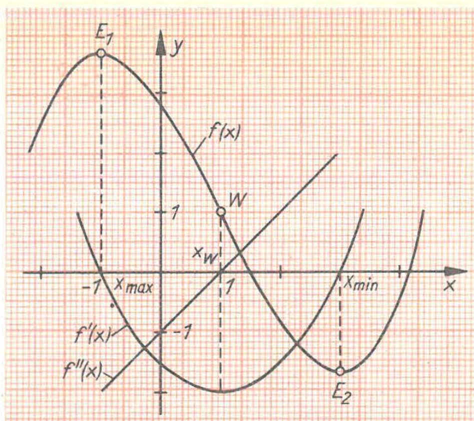
Extremele funcțiilor de o variabilă

Pe reprezentarea grafică a funcției

$$y = f(x) = \frac{1}{6}(x^3 - 3x^2 - 9x + 17)$$

se observă că în intervalul $(-\infty, -1)$ valorile ordonatelor cresc cînd valoarea abscisei crește. Dimpotrivă, între $x = -1$ și $x = +3$ ordonatele descresc și cresc iarăși monoton cînd $x > 3$. Valorile $f(x)$ luate de funcție pentru abscisa x dintr-o vecinătate convenabil aleasă a lui $x_{max} = -1$ sînt toate mai mici decît $f(x_{max})$. Se spune că funcția admite în punctul x_{max} un *maxim local*. Punctul $x_{min} = +3$ este un *minim local*, deoarece într-o vecinătate convenabil aleasă valorile funcției $f(x)$ pentru orice x diferit de x_{min} sînt mai mari decît $f(x_{min})$. Aceste valori de maxim și de minim se numesc în general *valori extreme locale* (fig. 19.4.1).

Ele sînt numai extreme locale, deoarece funcția admite și valori mai mari decît $f(-1) = 3\frac{2}{3}$ și valori mai mici decît $f(+3) = -1\frac{2}{3}$. În intervalul închis $-2 \leqslant x \leqslant 4$ aceste valori sînt totodată și *extreme absolute* sau *globale*.



19.4.1. Extremele și punctele de inflexiune ale funcției $y = f(x) = 1/6(x^3 - 3x^2 - 9x + 17)$

Maxim local	$f(x_{max}) > f(x)$ pentu $x \neq x_{max}$	într-o vecinătate
Minim local	$f(x_{min}) < f(x)$ pentru $x \neq x_{min}$	

După *teorema lui Weierstrass* o funcție continuă într-un interval închis își atinge maximul și minimul în acest interval. Maximul absolut și minimul absolut pot să fie însă și la capetele intervalului; în exemplul ales acest lucru se întîmplă pentru intervalul $-5 \leqslant x \leqslant 10$.

Condițiile în care un punct este punct de extrem local. Derivata $y' = f'(x)$ a unei funcții derivabile $y = f(x)$ își schimbă semnul la trecerea printr-un punct de extrem. Dacă x_{max} este un punct de maxim, $f(x)$ este crescătoare pentru $x < x_{max}$ și descrescătoare pentru $x > x_{max}$. Derivata ei, $f'(x)$ este pozitivă la stînga lui x_{max} și negativă la dreapta acestui punct. Dacă derivata $f'(x)$ este continuă, atunci ea trebuie să se anuleze pentru x_{max}, $f'(x_{max}) = 0$. Un raționament analog conduce la concluzia că dacă x_{min} este un minim local al funcției $f(x)$, atunci $f'(x_{min}) = 0$.

Deci, anularea derivatei este o *condiție necesară* pentru existența unui punct de extrem, dacă derivata trece de la valori pozitive la valori negative (în sensul creșterii absciselor), atunci acest extrem este un maxim, iar cînd trece de la valori negative la valori pozitive extremul este un minim. Variația derivatei se studiază cu ajutorul derivatei a doua. Cînd aceasta este pozitivă, respectiv negativă, punctul de extrem este un minim, respectiv un maxim. Ambele condiții sînt *suficiente*, adică garantează existența unui maxim sau a unui minim, atunci cînd sînt îndeplinite.

$f'(x_0) = 0$	și $f''(x_0) < 0 \rightarrow x_0$	este un maxim local
$f'(x_0) = 0$	și $f''(x_0) > 0 \rightarrow x_0$	este un minim local

Valori extreme în punctele în care derivata a doua sau de ordin superior se anulează. Pentru studiul comportării funcției în cazul cînd $f''(x) = 0$ se folosesc derivatele de ordin superior. Dacă prima derivată diferită de zero, în punctul $x = x_1$, este derivata de ordinul trei, $f'''(x) = 0$ atunci comportarea funcției este dată de următoarele considerații. Notînd prima derivată, a funcției $f(x)$ cu $\varphi(x) = f'(x)$, derivata funcției $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ se anulează în punctul x_1, $\varphi'(x_1) = f''(x_1) = 0$, deci $\varphi(x)$ are un maxim sau un minim după cum $\varphi''(x_1)$ este negativ sau pozitiv. Funcția $f'(x)$ are în acest caz pentru $x = x_1$ un punct de extrem și graficul ei este tangent la axa Ox în punctul x_1, adică panta tangentei în acest punct scade pînă la zero cînd x crește luînd valori mai mici decît x_1 și crește pentru $x > x_1$ sau invers crește pînă la zero pentru valori $x < x_1$ și scade pentru $x > x_1$ (fig. 19.4.2). Astfel de puncte se numesc *puncte de inflexiune orizontală*.

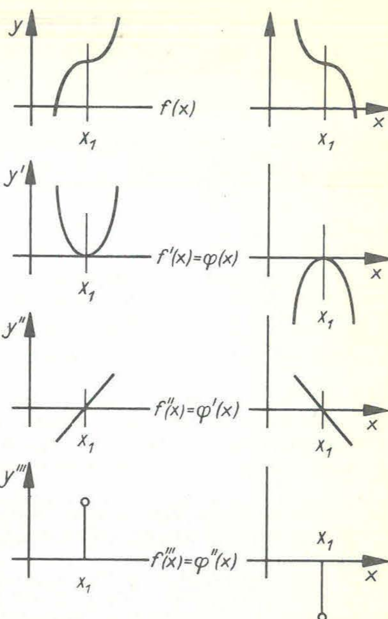
O funcție $f(x)$ derivabilă în punctul ξ cel puțin de n ori ($n \geqslant 2$) are în acest punct un extrem cînd n este par și $f'(\xi) = f''(\xi) = \ldots = f^{(n-1)}(\xi) = 0$, dar $f^{(n)}(\xi) \neq 0$; dacă $f^{(n)}(\xi) < 0$, ξ este un punct de maxim local iar dacă $f^{(n)}(\xi) > 0$, un minim local.

Folosind dezvoltarea lui $f(x)$ în serie Taylor în vecinătatea punctului ξ, din $f'(\xi) = f''(\xi) = \ldots = f^{(n-2)}(\xi) = 0$, rezultă

$$f(x) - f(\xi) = \frac{h^{(n-1)}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(\xi + \theta h) \quad \text{unde} \quad 0 < \theta < 1.$$

Deoarece $f^{(n)}(x)$ este derivata lui $f^{(n-1)}(x)$, pentru $f^{(n)}(\xi) < 0$ funcția $f^{(n-1)}(x)$ este monoton descrescătoare și pentru $f^{(n)}(\xi) > 0$ monoton crescătoare. Dimpotrivă, mărimea h este pentru valori mai mici decît ξ negativă și pentru valori mai mari decît ξ, pozitivă; cum $n - 1$ este impar, același lucru este valabil și pentru h^{n-1}. După cum se poate vedea din tabelul de mai jos, pentru $f^{(n)}(\xi) < 0$, diferența $f(x) - f(\xi)$ este negativă într-o vecinătate a punctului $x = \xi$, adică $f(\xi) > f(x)$ și funcția are un *maxim local*. Pentru $f^{(n)}(\xi) > 0, f(\xi) < f(x)$, funcția are un *minim local*.

		$x < \xi$	ξ	$\xi < x$
	h^{n-1}	$-$	0	$+$
$f^{(n)}(\xi) < 0$	$f^{(n-1)}(x)$	$+$	0	$-$
$f^{(n)}(\xi) > 0$	$f^{(n-1)}(x)$	$-$	0	$+$



19.4.2. Reprezentarea schematică a cazurilor $f'(x) = \varphi(x) = 0$, $f''(x) = \varphi'(x) = 0$; $f'''(x) = \varphi''(x) \neq 0$

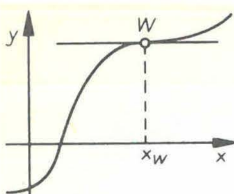
Puncte de inflexiune. Să considerăm partea din graficul funcției $y = \frac{1}{6}(x^3 - 3x^2 - 9x + 17)$, cuprinsă între punctele de maxim și de minim (fig. 19.4.1). Tangenta la această curbă în $\left(-3, -1\frac{2}{3}\right)$ are panta $f'(-3) = 6$. Panta descrește de la $f'(-1) = 0$ pînă la punctul de maxim $\left(-1, 3\frac{2}{3}\right)$ ajungînd la valoarea $f'(1) = -2$. Apoi panta crește monoton. Funcția $f'(x)$ are pentru $x_w = 1$ un minim. Pentru $-\infty < x \leqslant 1$, din direcția tangentei în x se obține direcția un tangente într-un punct aflat la dreapta lui x printr-o *rotație la dreapta*, în sensul matematic negativ de rotație. În intervalul $+1 \leqslant x < +\infty$ aceeași rotație are loc către *stînga* în sensul matematic pozitiv. Punctul în care se schimbă sensul acestei rotații este *punctul de inflexiune.*

Un vehicul, pe care ni-l imaginăm parcurgînd curba, se găsește pînă în punctul de inflexiune la dreapta tangentei la curbă și după punctul de inflexiune la stîngaei. În punctul de inflexiune curba își schimbă *concavitatea*. Dacă se consideră trei puncte suficient de apropiate ale curbei și se unesc cu un arc de cerc, atunci centrul *cercului de curbură* pentru abscise mai mici decît cea a punctului de inflexiune se va găsi la dreapta curbei și pentru abscise mai mari, la stînga curbei. Tangenta la curbă în punctul de inflexiune, numită și tangentă de inflexiune, împarte curba în două părți cu concavități diferite.

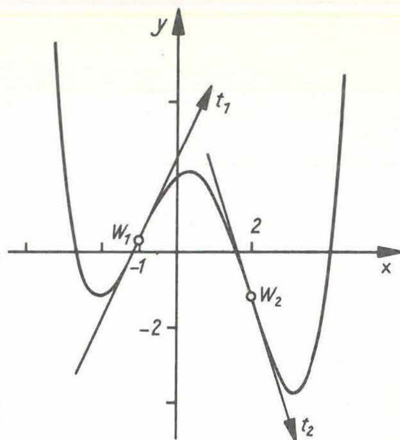
Din considerațiile făcute rezultă că o curbă admite un punct de inflexiune, acolo unde derivata întîi admite un punct de extrem. Dacă în plus $f'(x_w) = 0$, atunci tangenta de inflexiune este orizontală iar punctul este un *punct de inflexiune orizontală* (fig. 19.4.3).

Punct de inflexiune: $x = x_w$ cînd $f''(x_w) = 0$ și $f'''(x_w) \neq 0$.
Tangenta de inflexiune: $y - y_w = f'(x_w)(x - x_w)$ cu $f'(x_w) = \operatorname{tg} \varphi_w$.

Considerațiile privind valorile extreme pot fi aplicate derivatei întîi $f'(x)$ notată cu $\varphi(x)$. O condiție suficientă pentru un maxim sau un minim al lui $f'(x)$ în punctul x_w este $\varphi''(x_w) =$



19.4.3. Graficul unei funcții cu punct de inflexiune orizontală



19.4.4. Punctele de inflexiune W_1, W_2 și tangentele de inflexiune t_1 și t_2 ale graficului funcției
$y = 0,1(x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 8x + 20)$

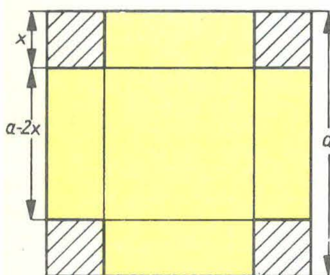
$= f'''(x_w) = 0$ și $\varphi''(x_w) = f'''(x_w) < 0$ sau $f'''(x_w) > 0$. Dacă $f'''(x_w) = 0$, atunci se aplică teorema enunțată anterior deoarece o derivată de ordin impar a lui $f(x)$ este 0 derivată de ordin par a lui $\varphi(x)$.

Dacă $f''(\xi) = 0$, atunci funcția $y = f(x)$ are în ξ un punct de inflexiune, dacă prima derivată pentru care $f^{(n)}(\xi) \neq 0$ este de ordin n $(n > 2)$ impar.

Exemplul 1. Funcția $y = f(x) = 0,1(x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 8x + 20)$ are derivatele $y' = 0,1(4x^3 - 6x^2 - 24x + 8)$, $y'' = 1,2x^2 - 1,2x - 2,4$ și $y''' = 2,4x - 1,2$. Din $y'' = 0$, adică $x^2 - x - 2 = 0$ se obține $x_1 = -1$ și $x_2 = +2$. Deoarece $f'''(x_1) = -3,6 \neq 0$ și $f'''(x_2) = +3,6 \neq 0$; $x_1 = -1$ și $x_2 = +2$ sînt abscise ale unor puncte de inflexiune (fig. 19.4.4). Ordonatele corespunzătoare sînt $f(x_1) = +0,3$ și $f(x_2) = -1,2$.

Tangentele de inflexiune t_1 și t_2 în punctele de inflexiune $W_1(-1; +0,3)$ și $W_2(+2; -1,2)$ au panta $f'(x_1) = +2,2$ și $f'(x_2) = -3,2$ și ecuațiile $y - 0,3 = 2,2(x + 1)$ sau $y = 2,2x + 2,5$ pentru t_1 și $y + 1,2 = -3,2(x - 2)$ sau $y = -3,2x + 5,2$ pentru t_2.

Exemplul 2. Funcția $y = f(x) = x^2 - 4/x$ nu are punct de inflexiune deoarece $y'' = -8/x^3$ nu se anulează pentru nici o valoare finită a lui x.



19.4.5. Paralelipipedul dreptunghic de volum maxim obținut dintr-un pătrat

Aplicații. Dacă se stabilește că o funcție $f(x)$ este continuă și derivabilă, atunci se pot determina valorile lui x pentru care funcția f are extreme. Cu ajutorul condițiilor date se stabilește dacă extremele sînt maxime sau minime. În aplicații, de multe ori se cere găsirea extremelor globale. Dacă funcția $f(x)$ este continuă în intervalul închis $a \leqslant x \leqslant b$ și derivabilă în intervalul deschis $a < x < b$, atunci minimul (sau maximul) global este sau cel mai mic minim local (cel mai mare maxim local) sau una din valorile $f(a)$ sau $f(b)$.

Exemplul 1. Pentru construirea unei cutii de carton se decupează la cele patru vîrfuri ale unei bucăți de carton în formă de pătrat cu latura a, patru pătrate egale, iar dreptunghiurile rezultate se îndoaie de-a lungul unei laturi și se ridică perpendicular pe laturi (fig. 19.4.5). Pătratele hașurate pe figură folosesc la încopcierea cutiei. Cît de mari trebuie să fie pătratele decupate pentru ca volumul V al cutiei să fie maxim?

După formula volumului paralelipipedului

$$V = y = (fx) = x(a - 2x)^2 = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x.$$

Extremele acestei funcții se obțin pentru punctele x, pentru care $y' = 12x^2 - 8ax + a^2 = 0$, deci care verifică ecuația $x^2 - (2ax)/3 + a^2/12 = 0$. Această ecuație admite ca soluții $x_1 = a/6$ și $x_2 = a/2$, dar numai x_1 satisface problema deoarece pentru $x_2 = a/2$ cartonul se taie în două. Din $y'' = 24x - 8a$ rezultă $f''(x_1) = -4a < 0$, adică $x_1 = a/6$ este abscisa punctului de maxim.

Exemplul 2. Care sînt dimensiunile pe care trebuie să le aibă o cutie de conserve cilindrică astfel încît pentru o capacitate dată de 1 l = 1 000 cm³ să se consume minimum de tablă?.

Un cilindru circular drept este determinat prin raza cercului de bază r și prin înălțime Aria lui totală S se reprezintă sub forma $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$, unde a doua variabilă rezultă din condiția $V = \pi r^2 h = 1\,000$ cm³· Din $h = V/(\pi r^2)$ se obține

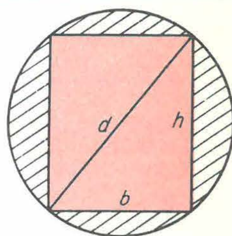
$$S = y = f(r) = 2\pi r^2 + 2V\frac{1}{r}, \quad y' = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}, \quad y'' = 4\pi + \frac{4V}{r^3}.$$

O valoare extremă se obține numai pentru $4\pi r_1 = \frac{2V}{r_1^2}$ sau $r_1 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$· Cum $f''(r_1) = 12\pi > 0$, aria totală va avea în punctul r_1 un minim. Înălțimea cilindrului va fi $h_1 = V/(\pi r_1^2) = 2r_1$.

Dacă se înlocuiește V cu valoarea dată, 1 000 cm³, atunci se obține $r_1 = 5{,}42$ cm și $h_1 = 10{,}84$ cm. Dintre toate cutiile cilindrice cu același volum, cea mai mică suprafață o are aceea pentru care diametrul bazei $2r_1$ este egal cu înălțimea h_1.

Exemplul 3. Dintr-un trunchi de copac cu secțiunea circulară de diametru d se scoate o grindă cu secțiune dreptunghiulară (fig. 19.4.6). Care sînt dimensiunile grinzii pentru ca forța de susținere T să fie maximă, știind că aceasta este proporțională cu lățimea b și cu pătratul înălțimii h; $T = cbh^2 (c = \text{const})$?

Din teorema lui Pitagora se deduce condiția $h^2 = d^2 - b^2$ și se obține astfel T ca funcție derivabilă în raport cu b, $T = f(b) = cd^2b - cb^3$; $f'(b) = cd^2 - 3cb^2$, $f''(b) = -6cb$. Valoarea extremă se obține pentru $f'(b_1) = 0 = cd^2 - 3cb_1^2$, adică pentru $b_1 = \frac{d}{3}\sqrt{3}$· Deoarece $f''(b_1) = -2cd\sqrt{3} < 0$, valoarea găsită va fi un maxim. Din $h^2 = d^2 - b^2$ se obține $h = \frac{d}{3}\sqrt{6}$. Independent de diametrul trunchiului rezultă raportul $h : b = \sqrt{2} : 1$.

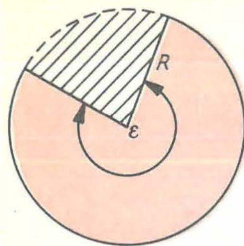


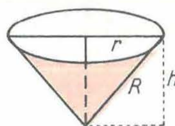
19.4.6. Grindă dintr-un trunchi de copac

Dacă se notează laturile unui dreptunghi cu a și b, perimetrul cu P și aria cu A, atunci din tabelul următor rezultă două concluzii:

Din toate dreptunghiurile cu același perimetru cea mai mare arie o are pătratul.
Din toate dreptunghiurile cu aceeași arie cel mai mic perimetru îl are pătratul.

Cunoscute	$P = 2(a + b)$ $b = \frac{P}{2} - a$	$A = ab$ $b = \frac{A}{a}$
Necunoscute	$A = ab = f(a)$ $f(a) = \frac{Pa}{2} - a^2$	$P = 2(a + b) = f(a)$ $f(a) = 2\left(a + \frac{A}{a}\right)$
Derivata întîi	$f'(a_1) = \frac{P}{2} - 2a_1 = 0$ $a_1 = \frac{1}{4}P$	$f'(a_1) = 2 - \frac{2A}{a_1^2} = 0$ $a_1 = \sqrt{A}$
Derivata a doua	$f''(a_1) = -2 < 0$ maxim	$f''(a_1) = +\frac{4}{\sqrt{A}} > 0$ minim
Soluție	$b_1 = \frac{P}{4} = a_1$, adică pătrat	$b_1 = \sqrt{A} = a_1$, adică pătrat





19.4.7. Pîlnie obținută dintr-un sector circular

Exemplul 4. Dintr-o bucată de tablă de formă circulară cu raza R se decupează un sector din care se confecționează o pîlnie (fig. 19.4.7). Pentru ce unghi la centru ε pîlnia are capacitatea maximă?

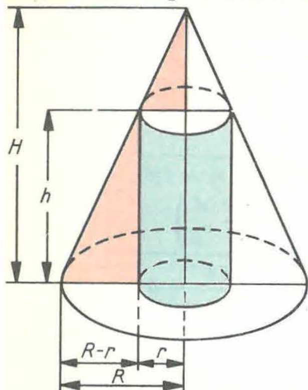
Din formula volumului conului $V = \frac{\pi}{3} r^2 h$ și din relația suplimentară $r^2 = R^2 - h^2$ rezultă

$$V = f(h) = \frac{\pi}{3} (R^2 h - h^3).$$

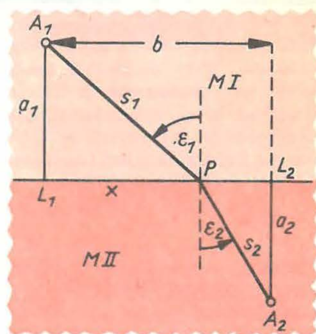
Pentru găsirea valorii extreme se calculează $f'(h_1) = \frac{\pi}{3} (R^2 - 3h_1^2) = 0$, adică $h_1 = \frac{R}{3}\sqrt{3}$, $f''(h) = -2\pi h$; $f''(h_1) = -\frac{2\pi}{3} R\sqrt{3} < 0$. Valoarea găsită este deci un maxim. Din relația suplimentară rezultă $r_1 = \frac{R}{3}\sqrt{6}$. Cînd se îndoaie tabla, arcul de cerc $b = \widehat{\varepsilon} R$ devine circumferința bazei $2\pi r$. Din $R\widehat{\varepsilon} = 2\pi r_1$ rezultă $\widehat{\varepsilon} = \frac{2}{3} \pi \sqrt{6}$ sau $\widehat{\varepsilon} \approx 294°$.

Exemplul 5. Se cere determinarea cilindrului de volum maxim înscris într-un con circular de rază R și înălțime H (fig. 19.4.8).

Volumul cilindrului este dat de formula $V = \pi r^2 h$. Relația suplimentară se obține aici din teorema asupra fasciculelor: $h : (R - r) = H : R$; $h = \frac{H}{R}(R - r)$. Se obține astfel funcția $V = f(r) = \pi \frac{H}{R} (Rr^2 - r^3)$. Din $f'(r_1) = \frac{\pi H}{R} (2Rr_1 - 3r_1^2) = 0$, rezultă $r_1 = \frac{2}{3} R$ și $r^2 = 0$ corespunzînd volumului $V = 0$. Deoarece $f''(r_1) = \pi \frac{H}{R} (2R - 6r_1) = -2\pi H < 0$, rezultă că pentru $r = r_1$ cilindrul va avea volumul maxim.



19.4.8. Cilindru înscris într-un con circular drept



19.4.9. Legea lui Snell

Următoarea problemă de natură fizică conduce la *legea lui Snell de refracție*. Două medii MI și MII se întîlnesc de-a lungul planului E_1. Viteza de propagare a unui obiect sau a unui eveniment este diferită în cele două medii și egală cu v_1 în MI, respectiv cu v_2 în MII. În ce condiții timpul de deplasare din punctul A_1 aflat în MI în punctul A_2 aflat în MII este minim (fig. 19.4.9)?

Este clar că această mișcare are loc într-un plan E_2 care trece prin A_1 și A_2 și este perpendicular pe E_1. Dacă se coboară în acest plan perpendicularele $\overline{A_1L_1} = a_1$ din A_1 și $\overline{A_2L_2} = a_2$ din A_2 pe dreapta de intersecție a celor două plane, prin cunoașterea segmentului $\overline{L_1L_2} = b$

se fixează poziția punctelor A_1 și A_2. Dacă mișcarea întîlnește linia de demarcație în P și se notează $\overline{L_1P} = x$, atunci se obține distanța s_1 din A_1 în P, $s_1 = \sqrt{a^2 + x^2}$ și distanța $\overline{PA_2} = s_2 = \sqrt{a_2^2 + (b - x)^2}$. Timpul t în care se parcurge drumul A_1PA_2 se obține prin însumarea timpilor $t_1 = s_1 : v_1$ și $t_2 = s_2 : v_2$. Se obține funcția $t(x)$ și se determină apoi punctele ei de extrem:

$$t = t(x) = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{a_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{a_2^2 + (b - x)^2}}{v_2},$$

$$t'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{a_1^2 + x^2}} - \frac{b - x}{v_2\sqrt{a_2^2 + (b - x)^2}} = 0 = \frac{x}{v_1 s_1} - \frac{b - x}{v_2 s_2}.$$

Geometric însă $x/s_1 = \sin \varepsilon_1$ și $(b-x)/s_2 = \sin \varepsilon_2$, adică condiția găsită este $\sin \varepsilon_1 : \sin \varepsilon_2 = v_1 : v_2 = \text{const.}$

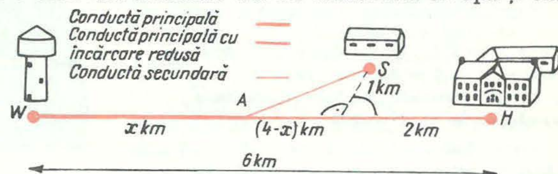
Exemplul 6. Care este viteza maximă a unui tren astfel încît la frînare, încetinind uniform cu accelerația $b = 0{,}5 \text{ ms}^{-2}$, să nu depășească distanța de frînare de $s_1 = 500$ m?

Spațiul în mișcarea uniformă încetinită este dat de relația $s = vt - \frac{b}{2} t^2$ și înlocuind pe s cu s_1 se obține timpul de frînare t_1 ca funcție de viteza maximă v. După timpul de frînare t_1, viteza $s' = v - bt$ va fi nulă. În ambele relații v reprezintă viteza de la începutul frînării, deci viteza căutată. Din sistemul de ecuații

$$500 = vt_1 - 0{,}25t_1^2 \quad \text{și} \quad 0 = v - 0{,}5t_1$$

după eliminarea lui t_1, rezultă $v = 10\sqrt{5}$ m/s. Deci trenul are viteza maximă $v = 36\sqrt{5}$ km/h $\approx$ 80 km/h pentru a nu depăși distanța de frînare de 500 m.

Exemplul 7. Trebuie construită o conductă de apă care leagă turnul de apă W cu clădirea principală H (fig. 19.4.10). Printr-o conductă auxiliară trebuie alimentată cu apă și clădirea S aflată la o distanță de 1 km de conducta principală. Piciorul perpendicularei coborîte din S pe conducta principală se găsește la o distanță de 2 km de clădirea principală. Distanța de la clădirea principală la turnul de apă este de 6 km. Costurile unui metru de conductă sînt următoarele: 30 lei metrul de conductă principală, 22 lei metrul de conductă principală cu debit redus, 12 lei metrul de conductă secundară. Toate conductele se așază în linie dreaptă. La ce distanță de turnul de apă trebuie să pornească conducta secundară astfel încît costurile de construcție să fie minime? Notînd distanța de la turn la ramificația conductei secundare A cu x, se obține lungimea conductei secundare $AS = \sqrt{1 + (4 - x)^2}$. Costul total C va fi atunci $C = 30x + 22(6 - x) + 12\sqrt{1 + (4 - x)^2}$. Trebuie calculate extremele funcției $C = f(x) = 132 + 8x + 12\sqrt{17 - 8x + x^2}$ cu $f'(x) = 8 + \frac{12x - 48}{\sqrt{17 - 8x + x^2}}$. Condiția $f'(x) = 0$ duce la ecuația de gradul doi, $x^2 - 8x + \frac{76}{5} = 0$ cu soluțiile $x_{1,2} = 4 \pm \frac{2}{5}\sqrt{5}$. Valoarea $x_2 = 4{,}89$ nu poate fi soluție a ecuației iraționale. Derivata a doua $f''(x) = \frac{12}{\sqrt{(17 - 8x + x^2)^3}}$ este pozitivă pentru $x_1 = 3{,}11$ și deci acest punct este un minim. Conducta secundară trebuie deci deviată din conducta principală la o distanță de 3,11 km de turnul de apă.



19.4.10. Schița construcției unei conducte de apă

Extremele funcțiilor de mai multe variabile

Cele k variabile $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_i, ..., \xi_k$ ale funcției $y = f(\xi_1, ..., \xi_k)$ pot fi considerate ca un vector $\mathbf{x} = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k)$ din spațiul euclidian k-dimensional (v. cap. 40). Elementul $\mathbf{x}$ se găsește într-o

vecinătate a elementului $\mathbf{x}_m = (\xi_1^{(m)}, ..., \xi_k^{(m)})$ dacă există numere pozitive h_i astfel încît pentru fiecare variabilă ξ_i să avem $\xi_i^{(m)} - h_i < \xi_i < \xi_i^{(m)} + h_i$. Dacă se consideră elementele x abscise generalizate, cărora le corespunde o ordonată $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, atunci $\mathbf{x}_m$ poate fi un maxim relativ al acestei funcții dacă pentru orice element diferit de $\mathbf{x}_m$, care se găsește într-o anumită vecinătate a acestuia, valoarea ordonatei $f(\mathbf{x})$ este mai mică decît $f(\mathbf{x}_m)$. În mod corespunzător, într-o vecinătate a unui minim relativ $\mathbf{x}_m$, $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}_m)$.

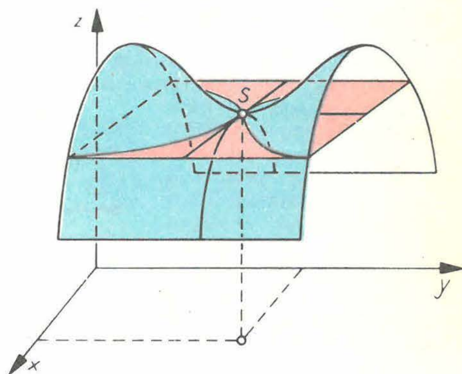
Condiții necesare de extrem. Fie funcția de două variabile $f(x, y) = z$ și $\xi_1 = x$, $\xi_2 = y$. Imaginea acestei funcții este o suprafață în spațiul tridimensional și condițiile de extrem găsite au următoarea interpretare geometrică: $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}_m)$ înseamnă că în vecinătatea punctului de maxim $P_{max} = (x_{max}, y_{max}, z_{max})$ toate punctele suprafeței se vor găsi sub planul orizontal dus prin acest punct. În mod corespunzător în punctul $P_{min} = (x_{min};\ y_{min};\ z_{min})$ toate punctele suprafeței care se află într-o vecinătate a acestui punct se vor găsi deasupra planului orizontal dus prin acest punct. Aceste plane sînt plane tangențiale și sînt determinate de cele două tangente definite de $z_x = \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ și $z_y = \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ (v. 19.3) care sînt paralele la planul xOy numai cînd $z_x = 0$ și $z_y = 0$.

(x_m, y_m) extrem local numai cînd $\dfrac{\partial f(x_m, y_m)}{\partial x} = 0$ și $\dfrac{\partial f(x_m, y_m)}{\partial y} = 0$.

Aceste condiții sînt necesare; *existența punctelor șa* arată însă că ele nu sînt suficiente. Deși într-un punct ambele tangente sînt orizontale, se pot găsi în orice vecinătate a acestui punct cel puțin două puncte ale suprafeței de părți diferite ale planului tangențial determinat de acestea (fig. 19.4.11).

Condiția necesară găsită se poate generaliza pentru funcții de k variabile.

Funcția $\mathbf{y} = f(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k) = f(\mathbf{x})$ poate avea în punctul $\mathbf{x} = \mathbf{x}_m$ un extrem numai dacă toate derivatele parțiale de ordinul întîi se anulează în acest punct.



19.4.11. Punct șa S

Condiții suficiente pentru existența extremului. Dacă se dezvoltă funcția $z = f(x, y)$ în serie Taylor, în vecinătatea $x_m - h_1 < x < x_m + h_1$, $y_m - h_2 < y < y_m + h_2$ a punctului de extrem (x_m, y_m) și se păstrează numai termenii de ordinul întîi ai dezvoltării, aunci, deoarece $f_x = 0$ și $f_y = 0$ se obține $2!\,\Delta = 2!\,f(x_m + h_1, y_m + {}_2h) - f(x_m, y_m)] = h_1^2 f_{xx}(x_m + \theta_1 h_1, y_m + \theta_2 h_2) + 2h_1h_2 f_{xy}(x_m + \theta_1 h_1;\ y_m + \theta_2 h_2) + h_2^2 f_{yy}(x_m + \theta_1 h_1,\ y_m + \theta_2 h_2)$, $0 < \theta_1$, $\theta_2 < 1$. Dacă derivatele de ordinul doi f_{xx}, f_{yy} și f_{xy} sînt funcții continue, atunci alegînd h_1 și h_2 convenabil, ele au în punctul (x_m, y_m) același semn ca în punctul $(x_m + h_1, y_m + h_2)$. Dacă în plus $f_{xx} \neq 0$,atunci se obține pentru diferența Δ:

$$2!\,\Delta = h_1^2 f_{xx} + 2h_1h_2 f_{xy} + h_2^2 f_{yy} = \frac{1}{f_{xx}}\,[(h_1 f_{xx} + h_2 f_{xy})^2 + h_2^2(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)].$$

În parantezele drepte apare pe lîngă pătrate numai expresia $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$. Dacă această expresie este pozitivă, atunci paranteza va fi pozitivă; Δ este diferit de zero și are semnul lui f_{xx}. Pentru $f_{xx} < 0$ diferența ordonatelor Δ este negativă într-o vecinătate a punctului (x_m, y_m), și funcția va avea un *maxim*; pentru $f_{xx} > 0$ funcția va avea un *minim*. Din $(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2) > 0$ rezultă că în această vecinătate f_{yy} are același semn ca f_{xx}.

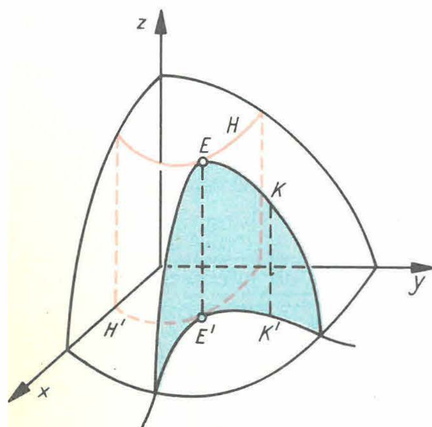
$f(x, y)$ are un extrem pentru (x_m, y_m) dacă în acest punct $f_x = 0, f_y = 0$ și $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$; pentru $f_{xx} < 0$ acest extrem este un maxim și pentru $f_{xx} > 0$ un minim.

Se poate arăta că dacă $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$, atunci punctul respectiv nu este un extrem; de exemplu, pentru un punct ṣa f_{xx} și f_{yy} au semne diferite. Dimpotrivă din $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ nu se poate trage nici o concluzie în ce privește existența unui punct de extrem.

Dacă pentru funcția $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ se notează derivatele de ordinul întîi și doi cu $p_i = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \xi_i}$ $(i = 1, 2, ..., k)$ și $p_{\nu\mu} = \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial \xi_\nu \partial \xi_\mu}$ $(\nu, \mu = 1, 2, ..., k)$, atunci funcția $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ are în $\mathbf{x}_m$ un extrem dacă determinanții de ordin par formați din determinantul alăturat sînt pozitivi și determinanții de ordin impar au același semn ca p_{11}; dacă $p_{11} < 0$, atunci extremul este un maxim și dacă $p_{11} > 0$, un minim.

$$\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \cdots p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} \cdots p_{2k} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ p_{k1} & p_{k2} \cdots p_{kk} \end{vmatrix}$$

Maxim și minim legate. În unele aplicații trebuie găsite extremele unei funcții de mai multe variabile presupunîndu-se că aceste variabile nu sînt independente ci legate prin relații suplimentare. Deseori acest gen de probleme se rezolvă eliminînd unele dintre variabile și rezolvînd problema de extrem pentru o funcție cu un număr redus de variabile. Nu întotdeauna însă este posibilă exprimarea explicită a unora dintre variabile prin celelalte. O metodă care înlătură acest neajuns este *metoda multiplicatorilor lui Lagrange* care se schițează mai jos pentru cazul a două variabile (fig. 19.4.12).



19.4.12. Extreme legate

Fie cele două variabile x și y ale funcției $z = f(x, y)$, legate prin condiția $\varphi(x, y) = 0$. Funcția $z = f(x, y)$ reprezintă în spațiu o suprafață iar condiția $\varphi(x, y) = 0$ reprezintă o curbă K' în planul xOy. Valorile extreme vor fi căutate numai printre valorile x, y care satisfac condiția dată, adică se vor găsi pe o curbă K de pe suprafața $z = f(x, y)$ a cărei proiecție pe planul xOy este curba K'. Problema determinării punctelor de extrem care satisfac condiția $\varphi(x, y) = 0$ se reduce deci la a afla extremele pe curba strîmbă K. Se consideră în acest scop familia de curbe $c = f(x, y)$, $c = \text{const}$. Una dintre aceste linii de nivel H va atinge curba strîmbă K într-un punct E; E este punctul de extrem căutat. Proiecția H' a lui H pe planul xOy atinge curba K' în punctul E'. Funcțiile $\varphi(x, y) = 0$ și $f(x, y) - c = 0$ trebuie să aibă în E' derivate egale. Derivînd după regula de derivare a funcțiilor implicite, se obține $f_x : f_y = \varphi_x : \varphi_y$. De aici rezultă proporția $f_x : \varphi_x = f_y : \varphi_y$. Prin introducerea unui factor de proporționalitate $(-\lambda)$ — *multiplicatorul lui Lagrange* se obțin ecuațiie

$$f_x = -\lambda\varphi_x, \quad f_y = -\lambda\varphi_y \quad \text{sau} \quad f_x + \lambda\varphi_x = 0 \quad \text{și} \quad f_y + \lambda\varphi_y = 0.$$

Expresiile din partea stîngă a acestor ecuații reprezintă însă derivatele parțiale ale funcției $F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$. Rezultă astfel regula *multiplicatorilor lui Lagrange:*

Pentru a determina extremele funcției $z = f(x, y)$ cu condiția $\varphi(x, y) = 0$ se formează cu ajutorul multiplicatorului nedeterminat λ funcția ajutătoare $F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$ și se calculează derivatele parțiale ale acestei funcții. Din sistemul de ecuații $F_x = f_x + \lambda\varphi_x = 0$, $F_y = f_y + \lambda\varphi_y = 0$, $\varphi(x, y) = 0$ se determină valorile extreme x, y și multiplicatorul λ.

Exemplu. Dintre toate triunghiurile dreptunghice cu ipotenuza dată c, să se găsească triunghiul cu aria cea mai mare.

Dacă se notează catetele cu x și y, atunci problema revine la a găsi maximul funcției $A = f(x, y) = \frac{xy}{2}$. Deoarece triunghiul este dreptunghic cu ipotenuza c, x, y satisfac condiția $x^2 + y^2 = c^2$ sau $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - c^2 = 0$. Se construiește funcția ajutătoare $F(x, y) = xy/2 + \lambda(x^2 + y^2 - c^2)$. Din sistemul de ecuații

$$\partial F/\partial x = y/2 + 2\lambda x = 0 \rightarrow \lambda = -y/4x, \qquad \partial F/\partial y = x/2 + 2\lambda y = 0 \rightarrow x^2 = y^2,$$
$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - c^2 = 0 \longrightarrow x^2 = c^2/2,$$

se găsește $x=y=\frac{c}{2}\sqrt{2}$. Printre toate triunghiurile dreptunghice cel isoscel are aria cea mai mare.

Regula multiplicatorilor lui Lagrange se poate generaliza pentru găsirea extremelor funcțiilor de n variabile care satisfac anumite condiții.

19.5. Aplicații la curbe plane

Cu metodele calculului diferențial se pot determina unele puncte importante în studiul reprezentărilor grafice ale funcțiilor de o variabilă; în special se pot găsi punctele singulare ale acestor curbe. Din noțiunea de curbură rezultă proprietățile evolutei și evolventei.

Reprezentarea grafică a funcțiilor date sub formă explicită

Cînd se dă funcția $y = f(x)$, trebuie în primul rînd specificat *domeniul ei de definiție* de exemplu, pentru $y = \sqrt{16 - x^2}$ domeniul de definiție este $-4 \leqslant x \leqslant +4$ (v. cap. 5).. Dacă domeniul de definiție se întinde pînă la infinit, atunci trebuie studiată *comportarea funcției cînd variabila tinde la infinit*; acest lucru se face cu ajutorul limitelor. Pentru a cunoaște comportarea funcției în general, trebuie găsite intersecțiile cu axele. Pentru $x = 0$ se obțin punctele de intersecție cu axa Oy. Abscisele punctelor de intersecție cu axa Ox sînt zerourile funcției. Ele se determină ca soluții ale ecuației $f(x) = 0$. În cazul funcțiilor raționale, cînd această ecuație nu poate fi complet rezolvată, cu ajutorul teoremei lui Sturm, se pot găsi intervale în care se găsesc zerourile (v.5.2).

În următorul tablou sînt date cîteva exemple:

Funcția	Coordonatele punctelor de intersecție	
	Cu axa Oy	Cu axa Ox
$y = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$	$y_0 = 8$	$x_{01} = -2,\quad x_{02} = 1;\quad x_{03} = 4$
$y = \frac{2x-5}{3x+4}$	$y_0 = -\frac{5}{4}$	$x_0 = \frac{5}{2}$
$y = \frac{x^2+1}{x+3}$	$y_0 = \frac{1}{3}$	nu admite rădăcini reale
$y = \frac{x^2+1}{x}$	nu are punct de intersecție	nu admite rădăcini reale
$y = x\sqrt{16-x^2}$	$y_0 = 0$	$x_{01} = 0,\quad x_{02} = -4,\quad x_{03} = +4$
$y = \ln(5 - x^2)$	$y_0 = \ln 5$	$x_{01} = -2,\quad x_{02} = +2$

După cum este arătat în capitolul despre continuitatea funcțiilor, polii, punctelor de nedeterminare, salturile și oscilațiile sînt principalele puncte de discontinuitate. Problemele privind polii funcțiilor raționale sînt tratate în capitolul 2. Discuția variației funcției se încheie cu studiul valorilor extreme și al punctelor de inflexiune. Dacă se cunosc zerourile primelor două derivate ale funcției, atunci, pentru funcțiile care au derivata a doua continuă se pot determina intervalele în care derivata întîi are semn constant și intervalele în care derivata a doua nu-și schimbă semnul. Se găsesc astfel intervalele în care funcția este *monoton descrescătoare, monoton crescătoare, convexă* sau *concavă*.

Exemple de discuții de funcții. În cele ce urmează se aplică rezultatele privind discuția funcțiilor la cîteva exemple tipice. Se folosesc notațiile: y_{0i}, ordonatele intersecțiilor cu axa Oy; x_{0i} zerourile; x_{mi} respectiv x_{wi} abscisa unui punct de extrem, respectiv a unui punct de inflexiune; M_i valoarea maximă; m_i valoarea minimă; W_i valoarea într-un punct de inflexiune

Exemplul 1. Funcția $y = f(x) = \frac{x}{300}(x^2 - 45)(x^2 - 10)$ este definită pentru orice x (fig. 19.5.1). Derivatele ei sînt:

$$y' = f'(x) = \frac{1}{60}(x^2 - 30)(x^2 - 3); \qquad y'' = f''(x) = \frac{x}{30}(2x^2 - 33);$$

$$y''' = f'''(x) = \frac{x^2}{5} - \frac{11}{10}.$$

Comportarea la infinit: $f(x) \to \pm\infty$, cînd $x \to \pm\infty$. Intersecțiile cu axele:

$$y_0 = 0; \quad x_{01} = 0; \quad x_{02} = -3\sqrt{5} \approx -6{,}71; \quad x_{03} = +3\sqrt{5} \approx +6{,}71;$$

$$x_{04} = +\sqrt{10} \approx 3{,}16; \quad x_{05} = -\sqrt{10} \approx -3{,}16.$$

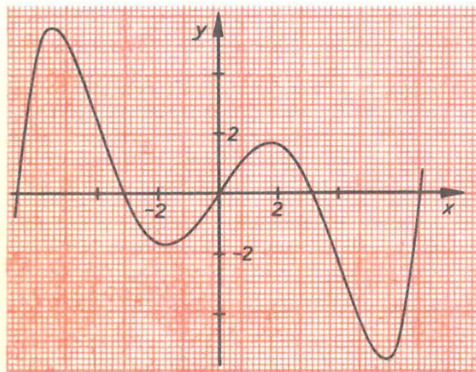
Valori extreme;

$$f'(x_m) = 0 \to x_{m1} = -\sqrt{30}; \quad x_{m2} = -\sqrt{3}; \quad x_{m3} = +\sqrt{3}; \quad x_{m4} = +\sqrt{30};$$

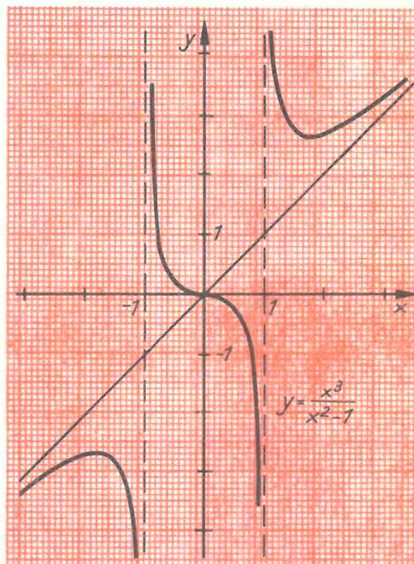
$$M_1 \equiv (-5{,}48;\ 5{,}48);\ M_2 \equiv (1{,}73;\ 1{,}7);\ m_1 \equiv (-1{,}73;\ -1{,}7);\ m_2 = (5{,}48;\ -5{,}48).$$

Puncte de inflexiune: $f''(x_w) = 0 \to x_{w1} = -4{,}06$

$$x_{w2} = 0; \quad x_{w3} = +4{,}06; \quad W_1 \equiv (-4{,}06;\ 2{,}58);\ W_2 \equiv (0;\ 0);\ W_3 \equiv (4{,}06;\ -2{,}58).$$



19.5.1. Graficul funcției $y = \frac{x}{300}(x^2 - 45)(x^2 - 10)$



19.5.2. Graficul funcției $y = x^3/(x^2 - 1)$

Exemplul 2. Funcția $y = f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ (fig. 19.5.2) este definită pentru orice x cu excepția valorilor $x = \pm 1$, în care numitorul se anulează. Derivatele ei sînt:

$$y' = f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}; \qquad y'' = f''(x) = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}; \qquad y''' = f'''(x) = \frac{-6(x^4 + 6x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^4}.$$

Comportarea la infinit: $\frac{x^3}{x^2 - 1} = x + \frac{x}{x^2 - 1} \to \pm\infty$ cînd $x \to \pm\infty$.

Asimptote: $y = x$ (v. cap. 5).

Intersecția cu axele: $y_0 = 0,\ x_0 = 0$.

Discontinuități: Poli pentru $x_1 = 1$ și $x_2 = -1$ cu asimptote verticale.

Valori extreme: $f'(x_m) = 0 \to x_{m1} = -\sqrt{3};\ x_{m2} = +\sqrt{3},\ x_{m3} = 0 = x_w,$

$$M \equiv (-1{,}73;\ -2{,}6);\ m \equiv (1{,}73;\ 2{,}6).$$

Puncte de inflexiune: $f''(x_w) = 0 \to x = 0,\ W \equiv (0, 0)$ cu $f'(x_w) = 0$.

Exemplul 3. Funcţia $y = f(x) = x\sqrt{9 - x^2}$ este definită numai în intervalul $-3 \leqslant x \leqslant 3$ (fig. 19.5.3). Derivatele ei sînt:

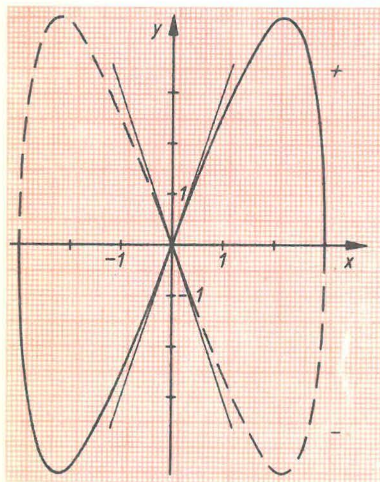
$$y' = f'(x) = \frac{9 - 2x^2}{\sqrt{9 - x^2}}; \quad y'' = f''(x) = \frac{x(2x^2 - 27)}{\sqrt{(9 - x^2)^3}}; \quad y''' = f'''(x) = \frac{-243}{\sqrt{(9 - x^2)^5}}.$$

Punctele de intersecţie cu axele sînt: $y_0 = 0$; $x_{01} = 0$; $x_{02} = 3$; $x_{03} = -3$.

Valori extreme: $f'(x_m) = 0 \rightarrow x_{m1} = -\frac{3}{2}\sqrt{2}$; $x_{m2} = +\frac{3}{2}\sqrt{2}$; $m \equiv (-2{,}12;\ -4{,}5)$; $M \equiv (2{,}12;\ 4{,}5)$.

Puncte de inflexiune: $f''(x_w) = 0 \rightarrow x_{w1} = 0$; $x_{w2} = +\frac{3}{2}\sqrt{6}$; $x_{w3} = -\frac{3}{2}\sqrt{6}$; x_{w2} şi x_{w3} sînt in afara domeniului de definiţie. $W_1 = (0,\ 0)$.

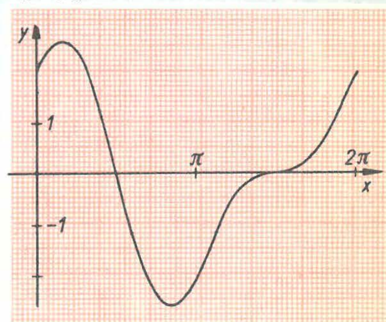
Simetrica acestei curbe faţă de axa Ox este reprezentarea grafică a funcţiei $y = -x\sqrt{9 - x^2}$. Ambele curbe pot fi privite ca două ramuri ale curbei algebrice $x^4 - 9x^2 + y^2 = 0$. $P(0,\ 0)$ este deci un punct singular dublu.



19.5.3. Graficul funcţiei $x^4 - 9x^2 + y^2 = 0$

Exemplul 4. Funcţia $y = f(x) = \sin 2x + 2\cos x$ este definită pentru orice x (fig. 19.5.4); datorită periodicităţii, studiul ei poate fi limitat numai la intervalul $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$. Derivatele ei sînt:

$$y' = f'(x) = 2\cos 2x - 2\sin x;$$
$$y'' = f''(x) = -4\sin 2x - 2\cos x;$$
$$y''' = f'''(x) = -8\cos 2x + 2\sin x.$$



19.5.4. Graficul funcţiei $y = \sin 2x + 2\cos x$

Punctele de intersecţie cu axele: $y_0 = 2$; $x_{01} = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$; $x_{02} = \frac{3\pi}{2} \approx 4{,}71$.

Valori extreme: $f'(x_m) = 0 \rightarrow x_{m1} = \frac{\pi}{6}$; $x_{m2} = \frac{5}{6}\pi$; $x_{m3} = \frac{3}{2}\pi = x_{w3}$. $M \equiv (0{,}52;\ 2{,}6)$; $m \equiv (2{,}62;\ -2{,}6)$.

Puncte de inflexiune: $f''(x_w) = 0 \rightarrow x_{w1} = \frac{\pi}{2}$; $x_{w2} \approx 3{,}39$; $x_{w3} = \frac{3}{2}\pi$; $x_{w4} \approx 6{,}03$; $W_1 \equiv (1{,}57;\ 0)$; $W_2 \equiv (3{,}39;\ -1{,}45)$; $W_3 \equiv (4{,}71;\ 0)$ este punct de inflexiune orizontală deoarece: $f'(x_{w3}) \equiv 0$; $W_4 \equiv (6{,}03;\ 1{,}45)$.

Puncte singulare

Punctele singulare se obţin din studiul direcţiilor diferitelor tangente în anumite puncte. Dacă funcţia este dată sub formă implicită şi φ este unghiul făcut de o tangentă cu direcţie pozitivă a axei Ox, atunci $y' = \operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} = -f_x : f_y$.

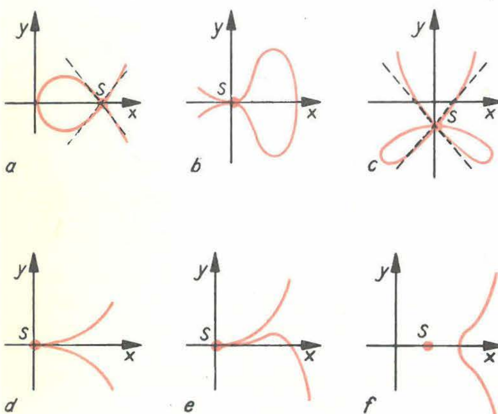
O tangentă paralelă la axa Ox ($\varphi = 0$) se obține pentru $f_x = 0$, iar o tangentă perpendiculară pe axa Ox $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$ pentru $f_y = 0$. Dacă ambele derivate parțiale se anulează într-un punct, atunci punctul respectiv este un punct singular.

Puncte singulare ale unei curbe algebrice. Deoarece $f(x_s, y_s) = 0$, $f_x(x_s, y_s) = 0$ și $f_y(x_s, y_s) = 0$ într-o vecinătate $x_s - h_1 < x < x_s + h_1$, $y_s - h_2 < y < y_s + h_2$ a unui punct singular (x_s, y_s), dezvoltarea în serie Taylor cu restul R_3 ia forma următoare:

$$f(x_s + h_1, y_s + h_2) = \frac{1}{2}(h_1^2 f_{xx} + 2h_1h_2 f_{xy} + h_2^2 f_{yy}) + R_3.$$

Cînd $h_1 = \Delta x$ și $h_2 = \Delta y$ tind la zero, atunci (R_3/h_1^2) tinde de asemenea la zero, deoarece conține numai puteri ale lui h_1 și h_2 cu exponent mai mare sau egal cu trei.

Cînd cele trei derivate parțiale de ordinul doi sînt diferite de zero, valoarea funcției $y' = \operatorname{tg}\varphi$ se determină din ecuația de gradul doi: $f_{xx} + 2y'f_{xy} + 2y'^2 f_{yy} = 0$. Dacă $f_{yy} \neq 0$, atunci numărul soluțiilor acestei ecuații depinde de valoarea luată de $\Delta = f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy}$. Cînd $\Delta > 0$, există două tangente diferite; curba are un *punct dublu* în care se intersectează două ramuri ale ei. Cînc $\Delta = 0$ există două tangente confundate, două ramuri ale curbei sînt tangente și au tangentă comună într-un *punct tacnodal (autotangențial)* sau într-un *punct de întoarcere* de speța întii sau de speța a doua după cum cele două ramuri se găsesc pe părți opuse sau de aceeași parte a tangentei. Pentru $\Delta < 0$ nu există tangente reale, curba are un *punct izolat*. Dacă $f_{yy} = 0$, atunci pe lîngă $y' = -\frac{1}{2} f_{xx} : f_{xy}$, și $y' = \infty$ este o tangentă după cum se poate vedea din considerații analoage asupra lui $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}$. Acest punct este de asemenea un *punct dublu*. Uneori pot să apară mai multe puncte singulare (singularități). Un *punct triplu* este un punct in care curba admite trei tangente (fig. 19.5.5).



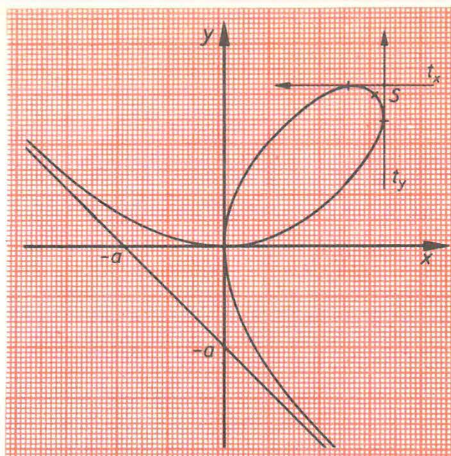
19.5.5. Puncte singulare ale curbelor algebrice:

a — punct dublu; *b* — punct tacnodal; *c* — punct triplu; *d* — punct de întoarcere de speța întîi; *e* — punct de întoarcere de speța a doua; *f* — punct izolat.

Exemplu de punct dublu. Foliul lui Descartes. Funcția $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0$ are derivatele parțiale $f_x = 3x^2 - 3ay$, $f_y = 3y^2 - 3ax$ și $f_{xx} = 6x$, $f_{xy} = -3a$, $f_{yy} = 6y$. Ecuațiile $f_x = 0$ și $f_y = 0$ au două soluții $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ și $x_2 = a$, $y_2 = a$. Numai (x_1, y_1) satisface ecuația $f=0$. Pentru $x_1=0$, $y_1=0$, $f_{xx}=0$, $f_{xy}=0$, $f_{xy}=-3a$, $f_{yy}=0$, deci $\Delta = 9a^2 > 0$. Punctul singular $(x_1; y_1)$ este *punct dublu*. Deoarece $f_{yy} = 0$, direcțiile tangentelor sînt date de $y' = \infty$ și $y' = -\frac{1}{2} f_{xx} : f_{xy} = 0$; tangentele *coincid* deci cu axele de coordonate. Derivata funcției explicite este $\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}$. Pentru $f_x = 0$, $f_y \neq 0$ se obține tangenta t_x paralelă la axa Ox; pentru $f_y = 0$, $f_x \neq 0$, tangenta t_y paralelă la axa Oy. Se obține: $f_y = 0$, $f_x \neq 0$; $y^2 = ax \longrightarrow \frac{y^6}{a^3} + y^3 - 3y^3 = 0$ sau $y^6 = 2y^3a^3$ cînd $y \neq 0 \longrightarrow y_3 = a\sqrt[3]{2} \approx 1{,}26a$ și $x_3 = a\sqrt[3]{4} \approx 1{,}59\,a$; pentru $f_x = 0, f_y = 0$, valorile $x_4 = a^3\sqrt[3]{2} \approx 1{,}26a$ și $y_4 \approx a\sqrt[3]{4} \approx 1{,}59\,a$.

Dacă în $f(x, y) = 0$ se substituie $y = mx$ se obține $x^3(1 + m^3) - 3amx^2 = 0$ sau $1 + m^3 - \frac{3am}{x} = 0$. Pentru $x \to \pm\infty$ se obține $1 + m^3 = 0$ sau $m = -1$. Foliul lui Descartes are

deci o asimptotă dată de direcţia $m = -1$. Scriind ecuaţia $y = -x + n$ a acestei asimptote, din $f(x, y) = 0$ se obţine pentru n valoarea: $x^3 + (n - x)^3 - 3ax(n - x) = 0$ sau $3x^2(a + n) - 3x(n^2 + an)^3 + n^3 = 0$, cînd $x \to \pm\infty$, $a + n = 0$ sau $n = -a$. Ecuaţia asimptotei va fi $y = -x - a$ (fig. 15.5.6).



19.5.6. Foliul lui Descartes

Exemplu de punct tacnodal. Curba dată de ecuaţia $x^5 - 5x^4 + 16y^2 = 0$ are punctul singular S (0, 0), deoarece coordonatele acestui punct verifică ecuaţia curbei şi anulează $f_x = 5x^4 - 20x^3$ şi $f_y = 32y$. Deoarece $(f_{xy})^2 = f_{xx}f_{yy}$, S (0, 0) este un punct tacnodal. Studiul extremelor arată că în (0, 0) curba admite atît un maxim cît şi un minim. Deci, în acest punct sînt tangente două ramuri ale curbei. Axa Ox este tangentă comună.

Exemplu de punct triplu. Funcţia $-x^4 + 2y^3 - 4x^2 + 6y^2 - 4x^2y + 6y + 2 = 0$ are derivatele parţiale $f_x = -4x^3 - 8x - 8xy$ şi $f_y = 6y^2 + 12y - 4x^2 + 6$. Punctul $S(0, -1)$ este un punct singular al curbei. Şi în acest caz $(f_{xy})^2 = f_{xx}f_{yy}$. Din studiul extremelor rezultă că în acest punct curba are un maxim cu tangenta $y = -1$. Se mai observă că în acest punct se mai intersectează alte două ramuri ale curbei. Este vorba de un punct triplu. Panta celor două tangente la ramurile care se intersectează se obţine din termenul de ordinul trei al dezvoltării în serie Taylor. Din $f_{xxx}m^3 + 3f_{xxy}m^2 + 2f_{xyy}m + f_{yyy} = 0$ rezultă $m_{2,3} = \pm\sqrt{2}$.

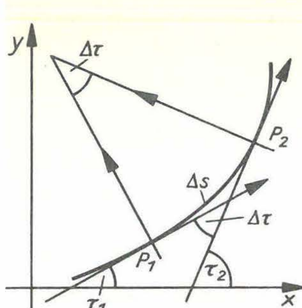
Exemplu de punct de întoarcere. Originea S a sistemului de coordonate este un punct singular al curbei $x^3 - 4y^2 = 0$ cu $(f_{xy})^2 = f_{xx}f_{yy}$. Din derivata $y'_{1,2} = \pm\frac{3}{4}\sqrt{x}$ a formei explicite, se obţine axa Ox ca tangentă comună la două ramuri ale curbei. S va fi deci un punct de întoarcere de speţa întîi. Şi pentru curba definită de funcţia $x^5 - x^4 - y^2 + 2x^2y = 0$ punctul $S(0, 0)$ este un punct singular deoarece $(f_{xy})^2 = f_{xx}f_{yy}$. Din calculul derivatei întîi, $y'_{12} = x^2 \pm x^2\sqrt{x}$, a formei explicite rezultă că axa Ox este în acest caz tangentă comună la două ramuri. Din studiul acestei curbe rezultă însă că în imediata vecinătate a punctelor singulare ambele ramuri se găsesc de aceeaşi parte a tangentei. Este vorba deci de un punct de întoarcere de speţa a doua.

Exemplu de punct singular izolat. Punctul $S(1, 0)$ este un punct singular al curbei $x^3 - 4x^2 + 5x - y^2 - 2 = 0$. Deoarece $(f_{xy})^2 < f_{xx}f_{yy}$, acest punct este un punct izolat.

Curbura unei curbe. Evoluta şi evolventa

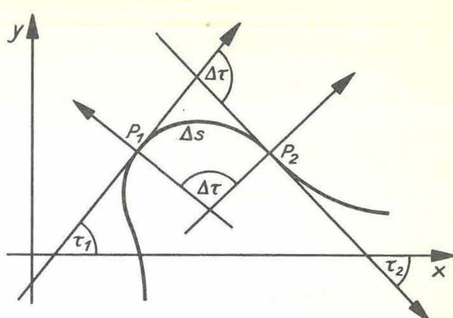
Curbură. Cînd s-a introdus punctul de inflexiune s-a folosit noţiunea de curbură şi s-a afirmat că un punct de inflexiune poate fi recunoscut prin aceea că curbura este diferită înainte şi după el. Aceeaşi comportare a curbei poate fi însă caracterizată şi prin variaţia unghiului τ dintre două tangente consecutive. Cum în mod evident curbura k este cu atît mai mică cu cît porţiunea de arc Δs (fig. 19.5.7) necesară pentru modificarea $\Delta\tau$ a unghiului direcţiilor este mai mare, se poate defini curbura k, prin variaţia acestui unghi în funcţie de lungimea arcului s, adică $\varkappa = \lim\limits_{\Delta s \to \infty} \frac{\Delta\tau}{\Delta s} = \frac{d\tau}{ds}$. Unghiul τ este însă definit prin $\tau = \text{arctg}\, y'$ după regula de derivare a funcţiilor compuse se obţine

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{d\tau}{dx} : \frac{ds}{dx} = \frac{y''}{\sqrt{1 + y'^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{y''}{(y + y'^2)^{3/2}} = \varkappa.$$



19.5.7. Curbura unei curbe plane cu curbură mică îndreptată spre stînga

19.5.8. Curbura unei curbe plane cu curbura mare îndreptată spre dreapta



Dacă se consideră x și y ca funcții de un parametru și se indică derivarea printr-un punct, atunci se obține

$\tau = \operatorname{arctg}\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, $\varkappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$. Curbura poate fi exprimată și în coordonate polare $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Se obține $\dot{x} = \cos\varphi\,\dot{r} - r\sin\varphi\dot{\varphi}$; $\dot{y} = \sin\varphi\,\dot{r} + r\cos\varphi\dot{\varphi}$ și $\ddot{x} = \ddot{r}\cos\varphi - 2\dot{r}\sin\varphi\dot{\varphi} - r\cos\varphi\dot{\varphi}^2 - r\cos\varphi\ddot{\varphi}$, $\ddot{y} = \ddot{r}\sin\varphi + 2\dot{r}\cos\varphi\dot{\varphi} - r\sin\varphi\dot{\varphi}^2 +$

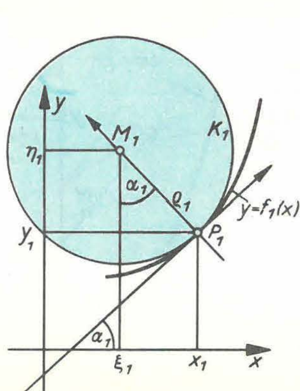
$$+ r\cos\varphi\ddot{\varphi} \text{ și astfel } \varkappa = \frac{2\dot{r}^2\dot{\varphi} + r\dot{r}\ddot{\varphi} - r\ddot{r}\dot{\varphi} + r^2\dot{\varphi}^3}{(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2r'^2 - rr'' + r^2}{(r'^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}, \text{ deci}$$

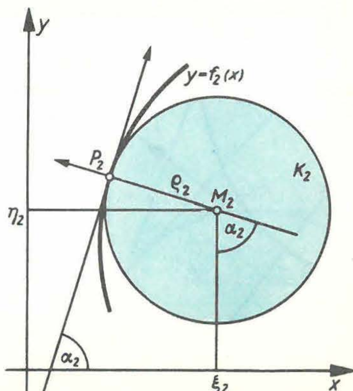
$$r' = \frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} \text{ și } r'' = \frac{dr'}{dt}\cdot\frac{dt}{d\varphi} = \frac{\ddot{r}\dot{\varphi} - \dot{r}\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}^3}.$$

Din prima formulă se observă că curbura are același semn ca y''. Deci dacă derivata este o funcție crescătoare, atunci derivata a doua este pozitivă și deci și $\varkappa$ este pozitiv; dintr-un punct P cu ordonata foarte mare curba apare *concavă*. O șosea care are o astfel de curbură are un *viraj la stînga* (fig. 19.5.7). Cînd curba apare din P *convexă*, atunci șoseaua are un *viraj la dreapta* și derivata descrește, adică y'' și $\varkappa$ sînt negative (fig. 19.5.8).

Cerc de curbură. Cercul este o curbă cu curbura constantă; din reprezentarea parametrică rezultă $x = \rho\cos t$, $y = \rho\sin t$, $\varkappa = \frac{1}{\rho}$. Acest rezultat confirmă opinia intuitivă că *curbura unui cerc* este cu atît mai mică cu cît raza este mai mare (fig. 19.5.9).

Fiecărui punct (x, y) al curbei definite de funcția $y = f(x)$ i se atașează un cerc de curbură $y = g(x)$ în modul următor: atît curba cît și cercul trec prin acest punct $f(x) = g(x)$ și au





19.5.9. Cerc de curbură K, rază de curbură ρ și centru de curbură M; $\rho_1 > 0$, $\rho_2 < 0$.

în punctul respectiv aceeași tangentă $f'(x) = g'(x)$ și *aceeași curbură* $f''(x) = g''(x)$. Tangenta t în punctul (x, y) este orientată; dacă face cu direcția pozitivă a axei Ox unghiul α și cu direcția pozitivă a axei Oy unghiul $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, atunci cosinusurile directoare ale tangetei vor fi $\cos\alpha = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$ și $\cos\beta = \sin\alpha = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$ (fig. 19.5.10). Direcția pozitivă a *normalei* n se obține din cea a tangentei printr-o rotație de $\frac{\pi}{2}$. Deoarece $\bar{\alpha} = \alpha + \frac{\pi}{2}$, cosinusurile directoare ale normalei vor fi $\cos\bar{\alpha} = \frac{-\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$ și $\cos\bar{\beta} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$. Această orientare este astfel aleasă încît la o curbură pozitivă direcția pozitivă a normalei privind din centrul de curbură este îndreptată spre interior, iar pentru k negativ spre exterior. Așezînd lungimea $\rho = \frac{1}{\varkappa}$ de-a lungul normalei, se obțin coordonatele ξ, η ale *centrului de curbură*:

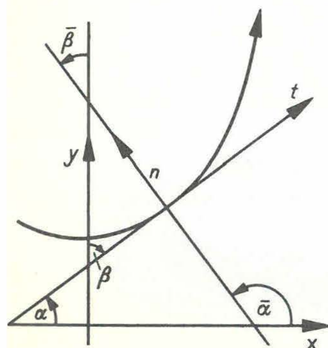
$$\xi = x + \rho\cos\bar{\alpha} = x - \frac{\rho\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}},$$

Raza de curbură	$\rho = \frac{1}{\varkappa}$

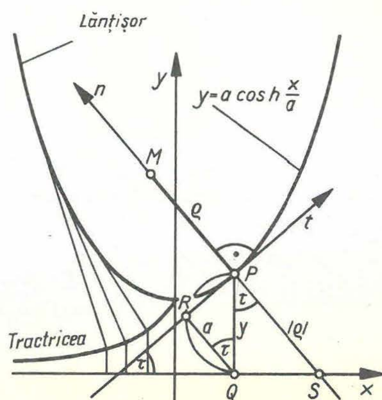
$$\eta = y + \rho\cos\bar{\beta} = y + \frac{\rho\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}.$$

Considerînd în aceste formule $\rho = 1/\varkappa$ se obțin ecuațiile care definesc pe ξ și η.

Funcția	$y = f(x)$	$x = x(t),\ y = y(t)$	$r = f(\varphi)$
Curbura	$\varkappa = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$	$\varkappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$	$\varkappa = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}$
Centrul de curbură	$\xi = x - \frac{1 + y'^2}{y''}\cdot y'$ $\eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}$	$\xi = x - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}\cdot\dot{y}$ $\eta = y + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}\cdot\dot{x}$	$\xi = r\cos\varphi - \frac{(r^2 + r'^2)(r\cos\varphi + r'\sin\varphi)}{r^2 + 2r'^2 - rr''}$ $\eta = r\sin\varphi - \frac{(r^2 + r'^2)(r\sin\varphi - r'\cos\varphi)}{r^2 + 2r'^2 - rr''}$



19.5.10. Cosinusurile directoare ale tangentei t și normalei n



19.5.11. Centrul de curbură al lănțișorului

Lănțișorul. Poziția de echilibru a unui fir greu și omogen flexibil și neextensibil ale cărui capete sînt fixate descrie curba plană denumită *lănțișor.* Această curbă este evoluta curbei plane denumită *tractrice* care este imaginea funcției $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ cu derivatele $y' = \operatorname{sh} \frac{x}{a}$ și $y'' = \frac{1}{a} \operatorname{ch} \frac{x}{a}$. Deoarece $1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a} = \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}$, se obțin raza de curbură $\rho = a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} = \frac{y^2}{a}$ și coordonatele *centrului de curbură* $\xi = x - a \operatorname{sh} \frac{x}{a} = x - ay'$ și $\eta = 2a \operatorname{ch} \frac{x}{a} = 2y$ (fig. 19.5.11).

Construcția tangentei t și a centrului de curbură. Cercul lui Thales cu diametrul PQ taie cercul cu centrul în Q și raza a în punctul R. Acest punct se găsește pe tangentă, deoarece unghiul τ format de dreapta ce trece prin P și R, cu axa Ox, verifică relația $\operatorname{tg} \tau = \overline{RP} : \overline{RQ} = \sqrt{y^2 - a^2} : a = \operatorname{sh} \frac{x}{a} = y'$. Perpendiculara pe t în P este normala n, care taie axa Ox în S. Din $\cos \tau = \frac{a}{y} = \frac{y}{\overline{PS}}$ rezultă $\overline{PS} = y^2 : a = |\rho|$. Lungimea $|\rho|$ se așază de-a lungul direcției pozitive sau negative a normalei ținîndu-se seama de semnul curburii. Deoarece $\frac{d}{dx}\left(a^2 \operatorname{sh} \frac{x}{a}\right) = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, rezultă că aria cuprinsă între lănțișor și axa Ox este dată de $A = a^2 \operatorname{sh} \frac{x}{a}$. Lungimea l a arcului ce pornește din vîrful $(0; a)$ este $l = \operatorname{sh} \frac{x}{a}$.

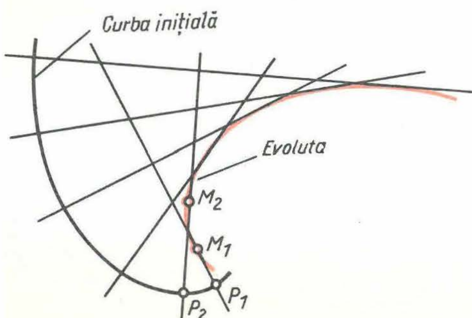
Evolută. Cînd funcția $y = f(x)$ admite derivate de ordinul întîi și doi continue, atunci coordonatele ξ, η ale centrului de curbură sînt funcții continue (fig. 19.5.12). Curba descrisă de acest centru se numește *evolută.*

Evoluta unei curbe plane este locul geometric al centrelor ei de curbură.

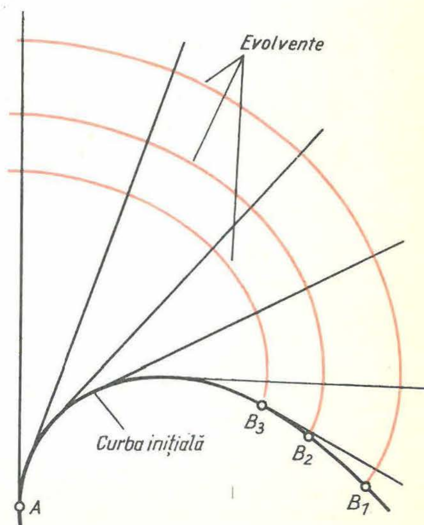
În mod constructiv, evoluta se obține ca înfășurătoare a normalelor, adică normalele curbei inițiale sînt tangente ale evolutei.

Evoluta unei elipse este astroida.

Deoarece punctele evolutei sînt centrele de curbură ale curbei inițiale, rezultă că formulele obținute pentru coordonatele centrului de curbură dau reprezentarea



19.5.12. Evolută



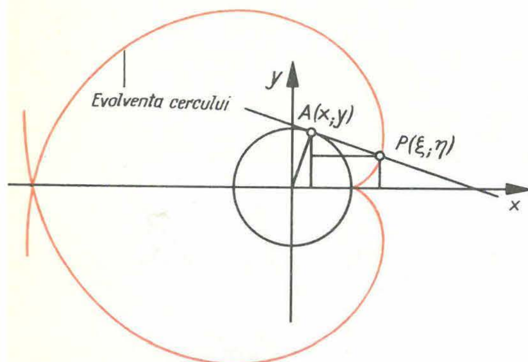
19.5.13. Familia de evolvente a unei curbe plane

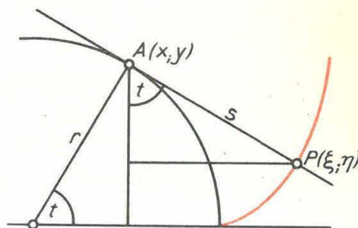
parametrică a evolutei; ξ şi η se vor considera coordonate ale punctului curent al evolutei. Din reprezentarea parametrică a elipsei $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, rezultă pentru coordonatele centrului de curbură al evolutei, reprezentarea parametrică $\xi(t) = \left(a - \frac{b^2}{a}\right)\cos^3 t$; $\eta(t) = \left(b - \frac{a^2}{b}\right)\sin^3 t$. Prin eliminarea parametrului t se obţine ecuaţia astroidei $\left(\frac{a}{e^2}\,\xi\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{b}{e^2}\,\eta\right)^{\frac{2}{3}} = 1$, unde $e = a^2 - b^2$ este excentricitatea elipsei.

Evolventă. *Evolventa* mai este denumită şi curbă desfăşurătoare (lat. evolvere = a desfăşura). Să ne reprezentăm o curbă de-a lungul căreia este aşezat un fir neextensibil (fig. 19.5.13). Fixînd firul într-un punct pe curbă, un alt punct fix de pe fir B_1 va descrie, cînd firul se desfăşoară de pe curbă, o altă curbă care este o evolventă a curbei iniţiale. Cum orice punct B descrie o evolventă rezultă că orice curbă admite o familie de evolvente. Deoarece în procesul de desfăşurare, firul este întins, înseamnă că partea desfăşurată este tangentă la curbă. Punctul B_1 descrie pe cercul cu centrul în punctul de contact al acestei tangente un arc infinitezimal, de unde rezultă că partea desfăşurată, adică tangenta, este normală a evolventei. Deci, tangentele curbei iniţiale taie evolventa sub un unghi drept. De aici rezultă concluziile:

Evolventele unei curbe plane sînt traiectorii ortogonale tangentelor acestei curbe.
Orice curbă este evoluta evolventelor ei.
Orice curbă este una din evolventele evolutei ei.

Exemplu. În construcţia de maşini are aplicaţie evolventa cercului. Din figura 19.5.14 se observă că coordonatele punctului P al evolventei se pot scrie ca $\xi = x + s\sin t$ şi $\eta = y - s\cos t$. Din reprezentarea parametrică a cercului $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $s = rt$ fiind lungimea arcului desfăşurat, se obţine pentru evolventa cercului următoarea reprezentare parametrică: $\xi = r(\cos t + t\sin t)$, $\eta = r(\sin t - t\cos t)$.





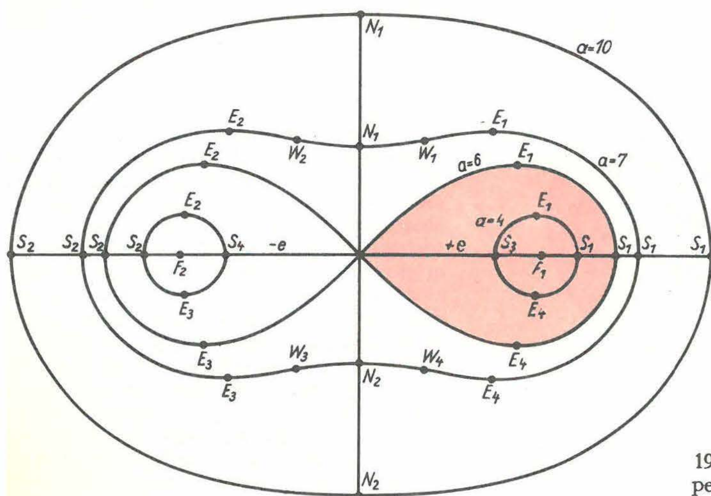
19.5.14. Evolventa cercului

Curbe remarcabile

În paragraful precedent au fost deja expuse principalele proprietăţi ale *foliului lui Descartes* şi ale *lănţişorului* în special în ce priveşte punctele duble şi centrul de curbură. Va urma acum discuţia altor curbe remarcabile.

Curbele lui Cassini. Curbele lui Cassini se definesc ca locurile geometrice ale punctelor P, pentru care produsul distanţelor $r_1 = \overline{F_1P}$ şi $r_2 = \overline{F_2P}$ la două puncte fixe F_1 şi F_2 are o valoare

constantă a^2. Dacă punctele F_1 și F_2 se găsesc pe axa Ox a unui sistem de coordonate carteziene, la distanța $+e$ și $-e$ de origine, atunci $r_1^2 = (x-e)^2 + y^2$; $r_2^2 = (x+e)^2 + y^2$; $r_1^2 r_2^2 = a^4$ sau $(x^2+y^2)^2 - 2e^2(x^2-y^2) = a^4 - e^4$, respectiv $r^4 - 2e^2r^2\cos 2\varphi = a^4 - e^4$, $r^2 = e^2\cos 2\varphi \pm \sqrt{e^4\cos^2 2\varphi + a^4 - e^4}$.



19.5.15. Curbele lui Cassini pentru $e=6$; $a=10$; 7; 6 și 4, $e=a=6$ este lemniscata

În funcție de raportul constantelor a și e se obțin curbe Cassini de diferite forme (fig. 19.5.15). În cele ce urmează se notează cu S_1, S_2, S_3, S_4 punctele de intersecție cu axa Ox, cu N_1 și N_2 intersecțiile cu axa Oy, valorile extreme cu E_1, E_2, E_3, E_4 și punctele de inflexiune cu W_1, W_2, W_3, W_4.

1. $a > e\sqrt{2}$, curba se aseamănă cu o elipsă. $S_1, S_2 \equiv (\pm\sqrt{a^2+e^2};\ 0)$ $N_1, N_2 \equiv (0;\ \pm\sqrt{a^2-e^2})$ și pentru $a = e\sqrt{2}$ curba se aseamănă cu elipsa, $S_1, S_2 \equiv (e \pm \sqrt{3},\ 0)$; $N_1, N_2 \equiv (0;\ \pm e)$ dar în N_1 și N_2 curbura este nulă.

2. $e < a < e\sqrt{2}$, formă ovală. $S_1', S_2' \equiv (\pm\sqrt{a^2+e^2};\ 0;)$ $N_1', N_2' \equiv (0;\ \pm\sqrt{a^2-e^2})$; $E_1', E_2', E_3', E_4' \equiv \left(\pm\frac{1}{2e}\sqrt{4e^4-a^4};\ \pm\frac{a^2}{2e}\right)$; $W_1', W_2', W_3', W_4' \equiv \left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}(v-u)};\ \pm\sqrt{\frac{1}{2}(u+v)}\right)$, unde $u = \frac{1}{3e^2}(a^4-e^4)$ și $v = \sqrt{\frac{1}{3}(a^4-e^4)}$.

3. $a < e$, două ovale. $S_1'', S_2'' \equiv (\pm\sqrt{a^2+e^2};\ 0)$: $S_3'', S_4'' \equiv (\pm\sqrt{e^2-a^2};\ 0)$; $E_1'', E_2'', E_3'', E_4'' \equiv \left(\pm\frac{1}{2e}\sqrt{4e^4-a^4};\ \pm\frac{a^2}{2e}\right)$.

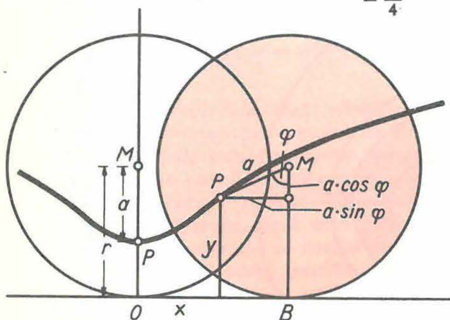
4. $a = e$, *lemniscata*. Pentru ecuația lemniscatei se obține $(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) = 0$ sau $r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$, $r = a\sqrt{2\cos 2\varphi}$, deci în reprezentarea parametrică $x = a\cos\varphi\sqrt{2\cos 2\varphi}$, $y = a\sin\varphi\sqrt{2\cos 2\varphi}$.

Din $\frac{dx}{d\varphi} = -2a\frac{\sin 3\varphi}{\sqrt{2\cos 2\varphi}}$ și $\frac{dy}{d\varphi} = 2a\cdot\frac{\cos 3\varphi}{\sqrt{2\cos 2\varphi}}$ rezultă $y' = \frac{dy}{dx} = -\operatorname{cotg} 3\varphi$, adică valori extreme există pentru $3\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$, respectiv $\varphi = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$. Valorile extreme sînt $x_{1,2} = \pm\frac{a}{2}\sqrt{3}$, $y_{1,2} = \pm\frac{a}{2}$, $r_{1,2} = a$. Punctul (0,0) este un punct dublu, valo-

rile derivatelor parțiale pentru (0; 0) sînt $f_x = 4(x^3 + xy^2 - a^2x) = 0$; $f_y = 4(x^2y + y^3 + a^2y) = 0$; $f_{xx} = 4(3x^2 + y^2 - a^2) = -4a^2$; $f_{xy} = 8xy = 0$; $f_{yy} = 4(x^2 + 3y^2 + a^2) = 4a^2$; $\Delta = +16a^4$.

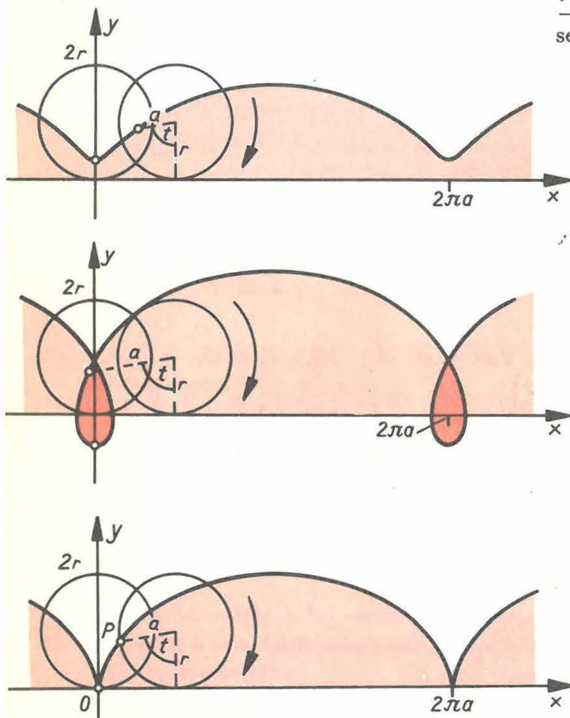
Din $-a^2 + y'^2a^2 = 0$, rezultă $y' = \pm 1$, adică $y = \pm x$ sînt tangente în punctul (0; 0). Intersecțiile cu axele sînt $S_1^0, S_2^0 = (\pm a\sqrt{2}; 0)$. Aria unei bucle se obține astfel

$$A = \frac{1}{2}\int r^2(\varphi)\, d\varphi = a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi\, d\varphi = \frac{a^2}{2}\sin 2\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} = a^2.$$



19.5.16. Deducerea ecuației cicloidei

Cicloidă. Din punct de vedere mecanic o cicloidă este generată de un punct P fix aflat în interiorul unui cerc de rază r, la distanța a de centrul acestuia, cînd cercul se rostogolește fără să alunece de-a lungul unei drepte. Se poate alege un sistem de coordonate în care axa Ox este dreapta de rostogolire. Fie φ *unghiul de rostogolire*. Ca origine a sistemului de coordonate se poate alege proiecția pe axa Ox a punctului în care P are poziția cea mai joasă. Astfel, arcul desfășurat $OB = r\varphi$ este mai lung decît abscisa x a lui P cu $a \sin\varphi$ și r este cu $a\cos\varphi$ mai lung decît ordonata acestui punct (fig. 19.5.16): $x = r\varphi - a\sin\varphi$; $y = r - a\cos\varphi$. După valoarea raportului $a:r$ se pot deosebi (fig. 19.5.17) cicloida scurtată ($a < r$), alungită ($a > r$) și cicloida comună (propriu-zisă) ($a = r$).



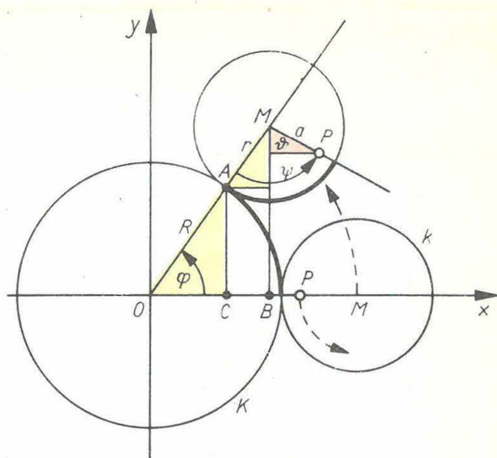
19.5.17. Cicloida scurtată, alungită și comună

Cicloida scurtată are pentru $\varphi = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$, puncte de minim cu $y_m = r - a$, *cicloida alungită* are pentru aceste valori ale lui φ cîte două puncte cu aceeași abscisă. Unul este un minim cu $y_m = r - a$. Valoarea φ a celuilalt este dată de ecuația trigonometrică $r\varphi = a\sin\varphi$. *Cicloida propriu-zisă (comună)* are pentru aceste valori ale lui φ vîrfuri. Elementul ei de arc este $ds = 2r\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi$, deci lungimea s a unui *arc de cicloidă* va fi $s = \int_{\varphi=0}^{2\pi} ds = 8r$. Aria delimitată de acest arc este $A = \int_{\varphi=0}^{2\pi} y\,dx = r^2\int_0^{2\pi}(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\,d\varphi = 2\pi r^2 + 0 + \pi r^2 = 3\pi r^2$, adică de trei ori aria cercului care se rostogolește.

Epicicloidă. Mecanic o epicicloidă este generată de un punct P fix față de un cerc k cu raza r, cînd cercul se rostogolește de-a lungul părți exterioare a unui cerc K cu raza R (fig. 19.5.18). După distanța a dintre punctul P și centrul M al cercului k se pot deosebi epiciloida *scurtată* ($a < r$), *alungită* ($a > r$) și *comună* ($a = r$).

Cînd raza $\overline{OM} = R + r$ se rotește cu un unghi φ, atunci cercul k se rotește cu unghiul ψ, unde $\varphi R = \psi r$. Perpendiculara MB coborîtă din M pe axa Ox separă din ψ unghiul $\frac{\pi}{2} - \varphi$

19.5.18. Deducerea ecuației epicicloidei

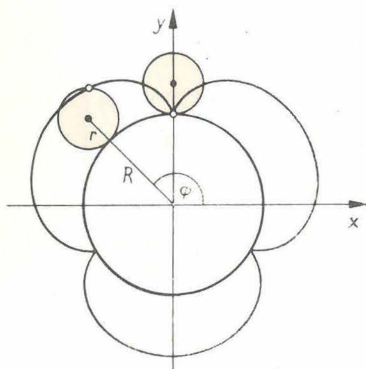


astfel încît unghiul care rămîne este $\theta = \psi + \varphi - \frac{\pi}{2} = \frac{R+r}{r}\varphi - \frac{\pi}{2}$ Se obțin astfel coordonatele punctului P:

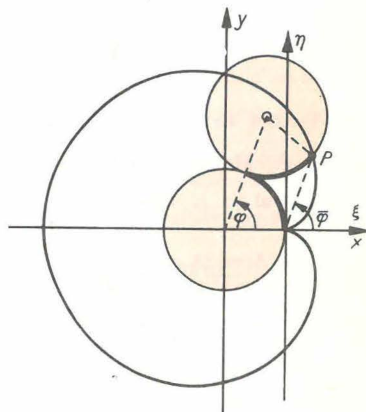
$$x = (R + r)\cos\varphi - a\cos\frac{R+r}{r}\varphi,$$

$$y = (R + r)\sin\varphi - a\sin\frac{R+r}{r}\varphi.$$

Ca și în cazul cicloidei, epicicloida va avea în raport cu cercul K, vîrfuri, bucle sau minime fără puncte duble. Dacă lungimea $2\pi R$ a cercului K este un multiplu întreg al perimetrului $2\pi r$ al cercului k, atunci curba este formată din $R:r$ arce. Dacă $R:r$ este un număr rațional p/q, atunci deoarece $qR = pr$, după ce cercul K a fost înconjurat de q ori, punctele se repetă. *Lungimea l a unui arc de epicicloidă* (fig. 19.5.19) este $l = 8r(R + r): R$; aria A cuprinsă între cercul K și arcul de epicicloidă este $A = \frac{\pi r^2}{R}(3R + 2r)$.



19.5.19. Epicicloida comună $R : r = 3$



19.5.20. Cardioida

Cardioidă. Pentru $r = R$ se obține cardioida cu reprezentarea parametrică $x = R\,(2\cos\varphi - \cos 2\varphi)$; $y = R(2\sin\varphi - \sin 2\varphi)$. Prin eliminarea lui φ se obține funcția algebrică $(x^2 + y^2 - R^2)^2 = 4R^2[(x - R)^2 + y^2]$. Lungimea l a curbei este $l = 8R$, iar aria este $A = 6\pi R^2$, adică de șase ori aria cercului fix K. În sistemul de coordonate ξ, η, ecuația cardiodei este foarte simplă: $\xi = x - R$, $\eta = y$, astfel încît $\xi = 2R\cos\varphi\,(1 - \cos\varphi)$, $\eta = 2R\sin\varphi\,(1 - \cos\varphi)$. În coordonate polare ρ, $\overline{\varphi}$, unde $\rho = 2R(1 - \cos\varphi)$ cu $\cos\overline{\varphi} = \xi/\rho = \cos\varphi$ și $\sin\overline{\varphi} = \eta: \rho = \sin\varphi$, ecuația în coordonate polare este $\rho = 2R(1 - \cos\overline{\varphi})$.

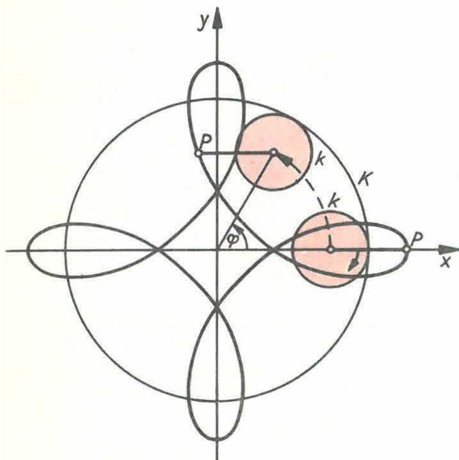
Hipocicloidă. Spre deosebire de epicicloidă, o hipocicloidă este generată mecanic prin rostogolirea unui cerc k, fără alunecare pe partea interioară a unui cerc fix K. Pentru deducerea ecuației acestei curbe se consideră simetricul cercului mobil k față de tangenta la cercul fix K.

Segmentele r şi a ca şi unghiul de rostogolire ψ îşi schimbă semnul. Se obţine reprezentarea parametrică

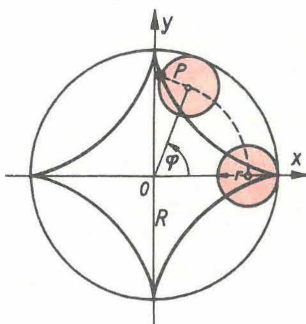
$$x = (R - r)\cos\varphi + a\cos\frac{R-r}{r}\varphi; \quad y = (R - r)\sin\varphi - a\sin\frac{R-r}{r}\varphi.$$

Pentru *hipocicloida scurtată* $a < r$, pentru cea *alungită* (fig. 19.5.21) $a > r$ şi în cazul *hipocicloidei comune* $a = r$. Curbele respective au vîrfuri rotunjite (minime în raport cu cercul fix), bucle sau vîrfuri.

Forma hipocicloidei depinde de raportul $R : r$. Dacă acest raport este un număr întreg, atunci curba se închide cînd cercul mobil parcurge o dată cercul fix. Dacă acest raport este raţional $\frac{R}{r} = \frac{m}{n}$ (m şi n primi), atunci curba se închide după ce cercul mobil a parcurs cercul fix



19.5.21. Hipocicloida alungită



19.5.22. Astroida

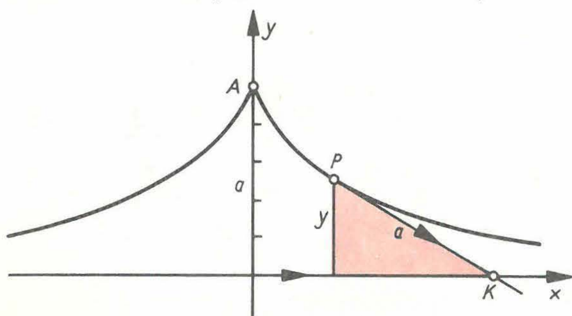
de n ori. Pentru un raport $\frac{R}{r}$ iraţional curba nu este închisă. Cînd $R : r$ este un număr întreg, atunci hipocicloida are lungimea $l = 8(R - r)$ şi aria porţiunii cuprinse între arcul de hipocicloidă şi cercul fix K este $A = \frac{\pi r^2}{R}(3R - 2r)$.

Astroidă. Această curbă este o hipocicloidă comună cu $4r = R$. Reprezentarea ei parametrică este $x = 4r\cos^3\varphi = R\cos^3\varphi$, $y = 4r\sin^3\varphi = R\sin^3\varphi$ (s-a ţinut seama de $\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$ şi $\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$). În coordonate carteziene se obţine ecuaţia $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}$ (fig. 19.5.22).

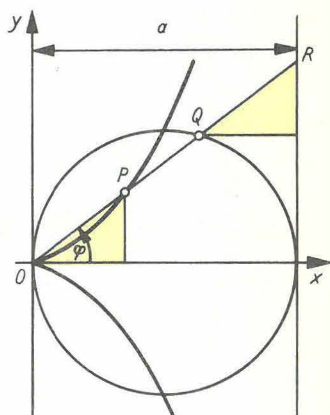
Tractrice, lănţişor. Un punct greu P (fig. 19.5.23) aflat la capătul unui fir neextensibil de lungime a, descrie o *tractrice*, atunci cînd celălalt capăt al firului se mişcă de-a lungul axei Ox. În această mişcare firul este întins pe direcţia tangentei la curbă, adică $\frac{dy}{dx} = \mp\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$. Prin integrare se obţine ecuaţia $x = a\ln\left|\frac{a \pm \sqrt{a^2 - y^2}}{y}\right| \mp \sqrt{a^2 - y^2} = \operatorname{arg\,ch}\frac{a}{y} \mp \sqrt{a^2 - y^2}$. Punctul A este un punct de întoarcere. Lungimea arcului l socotită din punctul A este $l = a\ln\frac{a}{y}$.

Cisoidă. Fie un cerc tangent la două paralele aflate la distanţa a. O secantă dusă prin punctul de contact O al cercului cu una dintre paralele taie cercul şi cealaltă paralelă în punctele Q

și R. Cisoida este locul geometric al punctelor P aflate pe secantele duse prin O astfel încît $\overline{OP} = \overline{QR}$ (fig. 19.5.24). Secanta mobilă formează cu axa Ox unghiul φ; $m = \operatorname{tg}\varphi$ se ia drept parametru al curbei. Punctul R are coordonatele $x_1 = a$ și $y_1 = am$; din $(x - r)^2 + m^2x^2 = r^2$ pentru Q se obțin valorile $x_2 = \frac{a}{1 + m^2}$, $y_2 = \frac{am}{1 + m^2}$ și deci coordonatele punctului P: $x = x_1 - x_2 = \frac{am^2}{1 + m^2}$, $y = y_1 - y_2 = \frac{am^3}{1 + m^2}$. Parametrul se poate elimina din $m^2 = x : (a - x)$ și $1 + m^2 = a : (a - x)$, obținînd $y^2 = x^3 : (a - x)$. În coordonate polare se obține reprezentarea $\rho^2 = x^2 + y^2 = \frac{a^2m^4}{1 + m^2}$ sau $\rho = a \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi}$. Punctul O este un punct de întoarcere iar paralela $x = a$ este o asimptotă a cisoidei. Aria A între curbă și asimptotă este $A = \frac{3}{4} \pi a^2$, adică triplul ariei cercului de rază $\frac{a}{2}$.

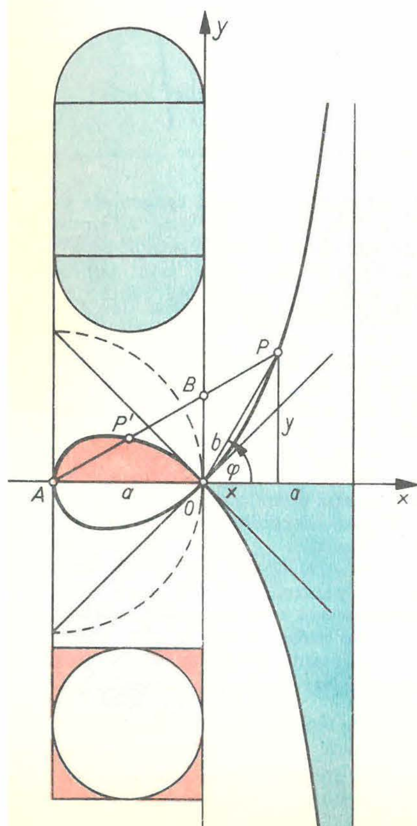


19.5.23. Tractrice $a = 5$



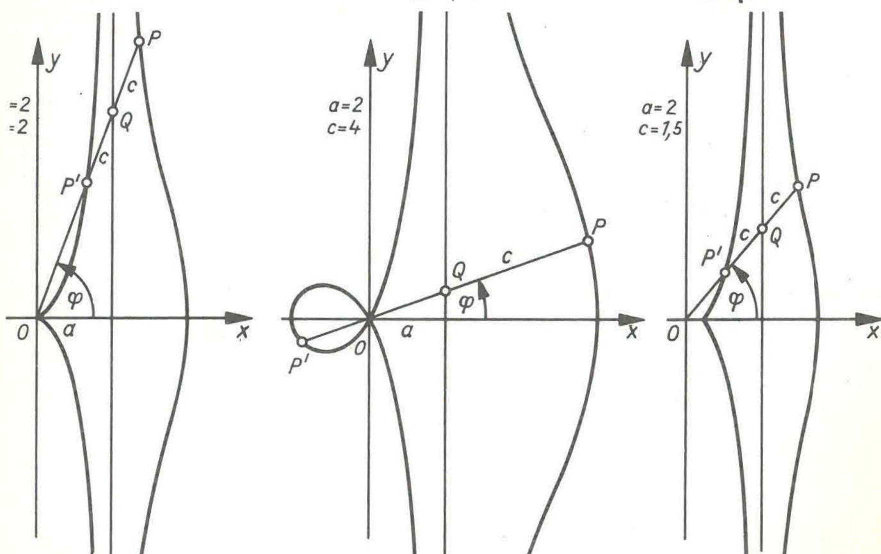
19.5.24. Cisoida

Strofoidă. Fie într-un sistem de coordonate punctul $A(-a\,;\,0)$ suportul unui fascicul. Pe o dreaptă din fascicul care taie axa Oy în punctul $B(0, b)$ se determină punctele P și P' prin relația $\overline{BP} = \overline{BP'} = \overline{OB}$. Locul geometric al punctelor P și P' se numește strofoidă (fig. 19.5.25), b se elimină din ecuația dreptei $y = \frac{b}{a}x + b$ și din condiția $(y - b)^2 + x^2 = b^2$. Din $b = \frac{ya}{a + x}$ rezultă $\frac{y^2}{x^2} = \frac{a + x}{a - x}$. Se obține astfel $\overline{AP'} = (a - x)\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$, $\overline{AP} = (a + x)\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$ și deoarece $\overline{OB} \perp \overline{AO}$, exprimînd puterea punctului A față de cercul dus prin $P'OP$, se obține $\overline{AP} \cdot \overline{AP'} = a^2$. Punctele strofoidei se transformă unul în celălalt prin polare (raze) reciproce. Se ia ca parametru $m = \operatorname{tg}\varphi =$

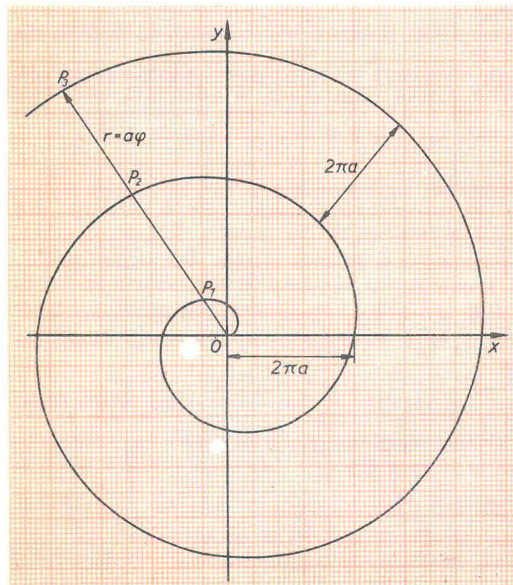


19.5.25. Strofoida, suprafețele colorate la fel sînt egale

$= \frac{y}{x}$, unde φ este unghiul dintre direcția pozitivă a axei Ox și dreapta OP. Din ecuația strofoidei se obține $m^2 = \frac{a+x}{a-x}$ sau $x = a \cdot \frac{(m^2-1)^2}{m^2+1}$, $y = am \cdot \frac{m^2-1}{m^2+1}$ și de aici ecuația în coordonate polare $\rho^2 = x^2 + y^2 = \frac{a^2(m^2-1)^2}{m^2+1}$, adică $\rho = -a\frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi}$. Punctul (0, 0)



19.5.26. Concoide: *a*) $a = 2$; $c = 2$; *b*) $a = 2$; $c = 4$; *c*) $a = 2$; $c = 1{,}5$

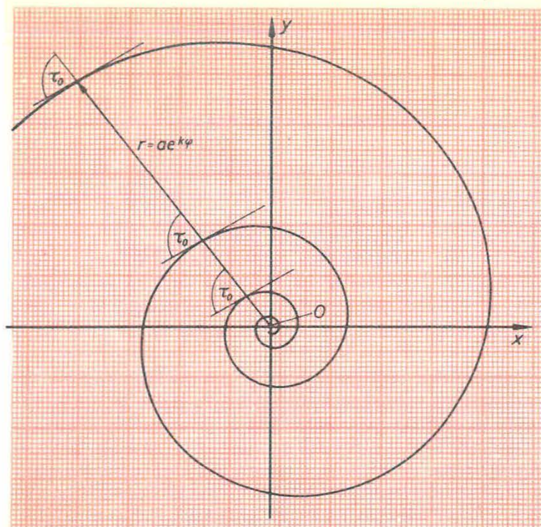


19.5.27. Spirala arhimedică, $a = 2$

este un punct dublu cu tangentele $y = \pm x$. Dreapta $x = a$ este asimptotă. Jumătate din aria buclei este $A' = a^2 - \pi a^2/4$ și jumătate din aria cuprinsă între curbă și asimptotă este $A = a^2 + \pi\, a^2/4$.

Concoide ale dreptelor. Fie într-un sistem de axe de coordonate o paralelă la Oy dusă la distanța a. O dreaptă dusă prin origine taie paralela $x = a$ în punctul Q. Punctele P și P' aflate pe OQ la distanța c de Q, de o parte și alta a acestui punct, generează o concoidă.

Forma concoidei depinde de raportul segmentelor a și c (fig. 19.5.26). Pentru $c = a$, O este un punct de întoarcere; pentru $c > 0$ un punct dublu. Paralela $x = a$ este asimptotă a ambelor ramuri ale curbei. Dacă φ este unghiul făcut de dreapta OQ cu axa Ox atunci punctul Q se va găsi la distanța $\rho_Q = \frac{a}{\cos\varphi}$ de punctul O; în coordonate polare se obține ecuația $\rho = \frac{a}{\cos\varphi} \pm c$.



19.5.28. Spirala logaritmică

De aici rezultă $x = \rho\cos\varphi = a \pm c\cos\varphi$ și $y = \rho\sin\varphi = a\ \mathrm{tg}\ \varphi \pm c\sin\varphi$. Prin eliminarea funcțiilor trigonometrice se obține o ecuație algebrică de gradul patru: din $(x-a)^2 = c^2\cos^2\varphi$ și $x^2 + y^2 = \dfrac{a^2}{\cos^2\varphi} \pm \dfrac{2ac}{\cos\varphi} + c^2$ rezultă $(x-a)^2(x^2+y^2) = c^2(a \pm c\cos\varphi)^2 = c^2x^2$.

Spirale. Se numesc spirale curbele ale căror raze vectoare r sînt funcții univoce de unghiul φ, $r = f(\varphi)$, unde φ variază între 0 sau $-\infty$ și $+\infty$ iar $r(\varphi)$ poate fi diferit de $r(\varphi + 2\pi)$. De exemplu $r = a\varphi$ sau $r = a\,e^{k\varphi}$.

Spirala lui Arhimede. În coordonate polare această spirală (fig. 19.5.27) are ecuația $r = a\varphi$. Distanța dintre punctele $P_1, P_2, \ldots$ care se găsesc pe aceeași rază este constantă și egală cu $2\pi a$ deoarece $r_2 = a(\varphi + 2\pi) = a\varphi + 2\pi a = r_1 + 2\pi a$. Elementul de arc d$s$ are valoarea $ds = a\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi$; lungimea arcului va fi deci

$$s = a\int_0^{\varphi_1}\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi = \frac{a}{2}\left(\varphi_1\sqrt{1+\varphi_1^2} + \operatorname{arg\,sh}\varphi_1\right).$$

Pentru valori mari ale lui φ_1, $s \approx \dfrac{a}{2}\varphi_1^2$. Aria unui sector determinat de două raze $r_1 = a\varphi_1$ și $r_2 = a\varphi_2$ este $A = \dfrac{a^2}{6}(\varphi_2^3 - \varphi_1^3)$.

Spirala logaritmică. În coordonatele polare, această spirală are ecuația $r = ae^{k\varphi}$, $k > 0$. Pentru valori negative ale lui φ curba se „înfășoară" tot mai strîns, cu raza vectoare descrescătoare, în jurul polului O (fig. 19.5.28); acesta este un *punct asimptotic.*

Prin derivare se poate vedea că orice dreaptă care trece prin polul O taie spirala logaritmică sub același unghi $\tau_0 = \mathrm{arccotg}\ k$ și tangentele în punctele de intersecție sînt paralele. Se mai obține

$$\frac{dr}{d\varphi} = r' = \frac{r}{\mathrm{tg}\,\tau} = rk \quad \text{sau} \quad d\varphi = \frac{dr}{rk}.$$

Cu ajutorul unei relații deduse în capitolul 20 se poate calcula lungimea arcului s:

$$ds = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\,d\varphi = \sqrt{r^2 + r^2k^2}\,d\varphi = r\sqrt{(1+k^2)}\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{k}\sqrt{(1+k^2)}\,dr \quad \text{sau} \quad s = \frac{1}{k}\sqrt{1+k^2}\,(r_2 - r_1).$$

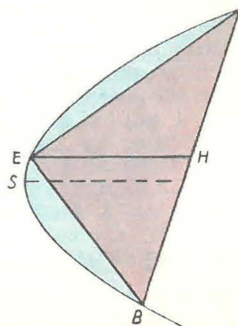
20. Calculul integral

Calculul diferențial oferă fizicianului și inginerului mijloacele de a determina pentru o traiectorie dată, viteza instantanee. Această variație instantanee a unei mărimi fizice se măsoară experimental. Astfel, *calculul diferențial* servește la *analiza* proceselor fizice, descrise cu ajutorul unei funcții.

În fizica experimentală se ridică însă și problema determinării proprietăților unei funcții, cînd din experiment rezultă valori ale derivatei acestei funcții. A apărut astfel conceptul de integrală: denumirea rezultă din ideea deducerii unei concluzii asupra întregului din concluzii asupra părților (lat. *integer* înseamnă întreg). După cum calculul diferențial a apărut în legătură cu *problema tangentelor*, așa și calculul integral a apărut legat de probleme de cvadratură, adică problema determinării ariei unei figuri cînd se cunoaște curba care o mărginește. Denumirea de *cvadratură* este legată de presupunerea grecilor că se pot calcula numai ariile acelor figuri ce se pot transforma într-un pătrat. Lunulele lui HIPPOCRATE arată că această problemă are soluții.

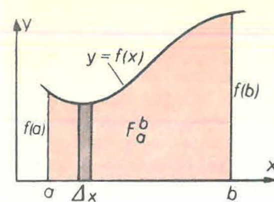
20.1. Integrala definită

ARHIMEDE (287—212 î.e.n.) a demonstrat că aria segmentului de parabolă ASB este 4/3 din aria triunghiului ABC (fig. 20.1.1). Metoda lui Arhimede constă în *aproximarea* ariei suprafeței prin suprafețe cu aria cunoscută. Johannes KEPLER (1571—1630) a obținut prin descompunerea suprafețelor și corpurilor în foarte multe părți, foarte mici, reguli utile pentru calculul volumului butoaielor. Și principiul lui CAVALIERI are la bază aceleași considerații. Aproape toți matematicienii de vază din secolele 17 și 18 s-au ocupat cu acest gen de probleme și au rezolvat unele probleme speciale cu ajutorul unor artificii. Este însă meritul lui Isaac NEWTON (1643—1727) și al lui Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646—1716) de a recunoaște că dintr-un anumit punct de vedere integrarea și derivarea sînt operații inverse; modul de scriere ilustrează în mod genial această idee. În acest mod a apărut noțiunea de *integrală nedefinită* care constituie punctul de pornire în studiul funcțiilor integrabile. În deceniile și secolele următoare s-a dezvoltat noțiunea precisă de integrală și calculul integral a fost fundamentat în mod riguros. S-a putut dovedi că un calcul integral nu este numai un procedeu potrivit pentru calculul ariilor ci și pentru rezolvarea diverselor probleme geometrice ca de exemplu, calculul lungimii arcelor, al volumelor sau al suprafețelor ce mărginesc corpuri rotunde; de asemenea, calculul integral servește la formularea matematică a multor noțiuni din fizică ca centru de greutate, momentul forței, lucru mecanic potențial. Calculul integral a condus și la lărgirea domeniului funcțiilor cunoscute; astfel s-au găsit unele funcții reprezentate prin integrale ce nu se pot exprima prin funcții elementare.

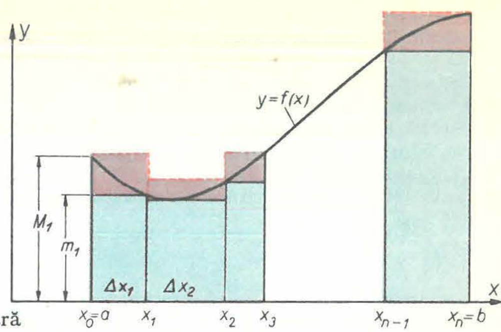


20.1.1. Cvadratura segmentului de parabolă

Pornind de la problema cvadraturii, integrala definită reprezintă intuitiv aria F_a^b a suprafeței mărginite de segmentul ab al axei Ox, de dreptele $x = a$ și $x = b$ și de porțiunea din curba definită de funcția $y = f(x)$ cuprinsă între punctele $(a, f(a))$ și $(b, f(b))$. Se presupune că această curbă este continuă, fără salturi și că ia numai valori pozitive. Aria F_a^b apare ca sumă a unui număr mare de fîșii măr-



20.1.2. Aria mărginită de curba $y = f(x)$ între $x = a$ şi $x = b$

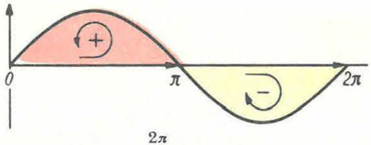


20.1.3. Sume integrale inferioară şi superioară

ginite (fig. 20.1.2) de o porţiune foarte mică a axei Ox, Δx, de paralele la axa Oy duse prin extremităţile acestui segment şi de porţiunea corespunzătoare a curbei $y = f(x)$. Semnul $\int_a^b f(x)\,dx$ (se citeşte integrală de la a la b din $f(x)\,dx$) folosit pentru aria F_a^b a fost sugerat de litera S ca iniţială a cuvîntului sumă. Integrala nu trebuie însă privită ca o sumă infinită de părţi deoarece în realitate ea se defineşte ca o limită.

Integrala definită ca limită

Limite ale sumelor integrale inferioare şi superioare. Se împarte intervalul (a, b) în n intervale parţiale Δx_i, $i = 1, ..., n$, de exemplu în n intervale egale Δx, $n\,\Delta x = b - a$. Perpendicularele ridicate pe Ox în extremităţile intervalului Δx, mărginesc o fişie de lăţime Δx. Se consideră dreptunghiuri de lăţime Δx avînd ca înălţime valoarea minimă (m_i), respectiv maximă (M_i) a funcţiei în intervalul Δx, a căror arie va fi $\Delta x m_i$, respectiv $\Delta x M_i$. Atunci $\Sigma \Delta x m_i$ este mai mică şi $\Sigma \Delta x M_i$ este mai mare decît aria căutată (fig. 20.1.3). Aceste sume se numesc sume integrale inferioară, respectiv superioară. Dacă se trece la diviziunea mai fină, de exemplu prin împărţirea intervalelor de diviziune în altele mai mici avînd intervalele de diviziune tot egale, atunci valorile minime ale funcţiilor în aceste intervale sînt cel puţin egale cu ordonatele m_i şi valorile maxime cel mult egale cu M_i. Suma integrală inferioară creşte rămînînd însă mai mică decît F_a^b şi suma superioară descreşte rămînînd mai mare decît F_a^b. Sumele integrale inferioare formează un şir monoton crescător mărginit superior iar sumele integrale superioare formează un şir monoton descrescător mărginit inferior. Cele două şiruri au deci limită. Ele vor avea aceeaşi limită atunci cînd şirul diferenţelor lor $\Sigma(M_i - m_i)\,\Delta x$ tinde la zero cînd lungimea intervalului de diviziune tinde la zero, $\Delta x \to 0$ şi numărul punctelor de diviziune n creşte nemărginit, $n \to \infty$. În aceste condiţii se spune că există integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ care este limita comună a şirurilor de sume integrale inferioare respectiv superioare. Pentru funcţiile continue, integrala există întotdeauna.



20.1.4. Integrala $I = \int_0^{2\pi} \sin\varphi\,d\varphi = 0$ privită ca o arie

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x = F_a^b = \int_a^b f(x)\,dx$$

Ipoteza privind pozitivitatea valorilor funcţiei, făcută iniţial, este de prisos. Pentru părţi ale curbei care se găsesc sub axa Ox, aria orientată ia valori negative deoarece termenii $f(\xi)\,\Delta x_i$ sînt negativi, $f(\xi)$ fiind negativi şi Δx_i pozitivi. Pe figură se poate vedea că în cazul funcţiei sinus integrala acestei funcţii în intervalul $(0, 2\pi)$ este nulă deoarece aria figurii mărginite de două bucle alăturate ale sinusoidei este nulă, cele două porţiuni de arie corespunzătoare fiecărei bucle avînd orientări diferite (fig. 20.1.4).

Definiția analitică a integralei definite. Noțiunea de integrală este independentă de interpretarea ei geometrică ca arie. Fie $f(x)$ o funcție mărginită în intervalul $a \leqslant x \leqslant b$. Se va proceda din nou la împărțirea acestui interval în n intervale parțiale Δx_i, astfel încît cînd $n \to \infty$, cel mai mare dintre intervalele Δx_i să tindă la zero. Deoarece o funcție mărginită nu are neapărat un maxim sau un minim în acest interval parțial, la alcătuirea sumelor integrale se va folosi marginea superioară (supremum) G_i și marginea inferioară (infimum) g_i a funcției în intervalul considerat. Dacă diferența $\sum(G_i-g_i)\,\Delta x_i$ tinde la zero cînd $\Delta x_i \to 0$, $n \to 0$, atunci șirul sumelor superioare și șirul sumelor inferioare au aceeași limită. De asemenea orice șir $F_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$, unde ξ_i este un punct oarecare din intervalul Δx_i, converge către aceeași limită.

Dacă limita sumei $F_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$ cînd $n \to \infty$, $\Delta x_i \to 0$ există, $\lim_{n\to\infty} F_n = I$ și este independentă de punctele de diviziune x_i și de punctele ξ_i din intervalele de diviziune Δx_i, atunci funcția $f(x)$ se zice integrabilă în intervalul $[a, b]$ și limita I este integrala funcției $f(x)$ de la $x = a$ la $x = b$.

Noțiunea de integrală a fost introdusă de matematicianul Bernhard RIEMANN (1826—1866); o generalizare a acesteia este *integrala Lebesgue*. Mărimea x se numește *variabila de integrare*; valoarea I a integralei pentru aceeași funcție f este independentă de notația folosită pentru variabila de integrare.

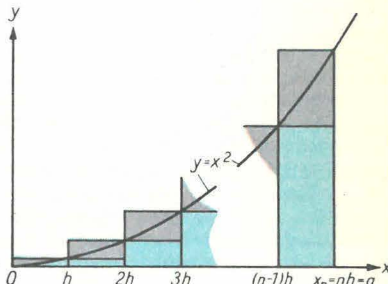
Integrala definită a funcției $f(x)$ de la $x = a$ la $x = b$	$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

O funcție continuă este integrabilă.

Considerațiile făcute rămîn valabile și pentru funcții care au în intervalul închis $[a, b]$ un număr finit de discontinuități, dar care sînt mărginite.

Orice funcție mărginită în intervalul $[a, b]$ care are în acest interval un număr finit de discontinuități este integrabilă în acest interval.

Integrarea funcțiilor complicate, de exemplu a unei funcții care ia în intervalul $0 \leqslant x \leqslant 1$ pentru abscise raționale valoarea 1 și pentru abscise iraționale valoarea 2, face obiectul teoriei măsurii (v. cap. 35).



20.1.5. Aria mărginită de parabola $y = x^2$

Exemplu. Pentru calculul ariei parabolei $y = x^2$ între $x = 0$ și $x = a$, se împarte intervalul $[0, a]$ în n intervale egale de lungime $h = \frac{a}{n}$ (fig. 20.1.5). Cele n puncte care servesc ca extremitate stîngă a intervalelor de diviziune sînt $x_0 = 0$, $x_1 = h, \ldots$ $\ldots, x_{n-1} = (n-1)\,h$ iar cele n puncte care servesc ca extremitate dreaptă $x_1 = h$, $x_2 = 2h, \ldots$ $\ldots, x_n = nh = a$. Deoarece funcția $y = x^2$ este monoton crescătoare în intervalul $[0, a]$, se obțin sumele integrale inferioare $\underline{F}_n$ și sumele superioare $\overline{F}_n$

$$\underline{F}_n = 0 + 1^2\cdot h^2 h + 2^2 h^2\cdot h + \ldots + (n-1)^2 h^2\cdot h = h^3[1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2] = h^3\,\frac{(n-1)\cdot n(2n-1)}{6}$$

$$\overline{F}_n = 1^2\cdot h^2\cdot h + 2^2\cdot h^2\cdot h + \ldots + n^2 h^2\cdot h = h^3[1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2] = h^3\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\underline{F}_n = \frac{a^3}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdot 1\cdot\left(2 - \frac{1}{n}\right) \qquad \overline{F}_n = \frac{a^3}{6}\cdot 1\cdot\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

Pentru $n \to \infty$ cele două șiruri au limita comună $F = \frac{a^3}{3}$. Deci aria mărginită de parabolă și de dreptele $x = 0$ și $x = a$ este $F = \frac{a^3}{3}$. Pentru $a = 6$, $F = 72$ cm². Tabelul alăturat arată variația sumelor integrale cînd n crește.

n	h	$\underline{F}_n$	$\overline{F}_n$
6	1	55	91
12	$\frac{1}{2}$	$63\frac{1}{4}$	$81\frac{1}{4}$
24	$\frac{1}{4}$	$67\frac{9}{16}$	$76\frac{9}{16}$
48	$\frac{1}{8}$	$69\frac{49}{64}$	$74\frac{17}{64}$
96	$\frac{1}{16}$	$70\frac{225}{256}$	$73\frac{33}{256}$

Proprietăți ale integralei definite

Dacă se schimbă limitele de integrare, atunci factorii Δx_i considerați ca lungimi de segmente orientate își schimbă semnul. În consecință, se schimbă semnul fiecărei sume $F_n = \sum f(\xi_i)\,\Delta x_i$ și cum $f(\xi_i)$ are același semn, rezultă că și integrala își schimbă semnul.

La schimbarea limitelor de integrare, integrala își schimbă semnul.

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Descompunerea unei integrale într-o sumă. Dacă funcția $f(x)$ este integrabilă în intervalul $[a, b]$ și dacă c este un punct din acest interval, atunci c poate fi punct de diviziune în orice diviziune a intervalului $[a, b]$ și deci fiecare sumă $\sum f(\xi_i)\,\Delta x_i$ se poate descompune în două sume, una corespunzătoare intervalului $[a, c]$ și cealaltă intervalului $[c, b]$. Cum limita unei sume este egală cu suma limitelor, rezultă că integrala pe întreg intervalul $[a, b]$ este egală cu suma integralelor pe intervalele $[a, c]$ și $[c, b]$.

Tot din proprietatea de aditivitate a limitei rezultă

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

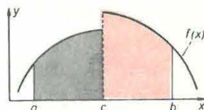
$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Integrala sumei funcțiilor integrabile $f(x)$ și $g(x)$ este egală cu suma integralelor acestor funcții.

Descompunerea integralei într-o sumă prin descompunerea intervalului de integrare își găsește aplicații la calculul porțiunilor de arie pozitivă și negativă, alegîndu-se ca punct c un zero al funcției $f(x)$, de exemplu

$$I = \int_0^{2\pi} \sin\varphi\,d\varphi = \int_0^{\pi} \sin\varphi\,d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} \sin\varphi\,d\varphi = 2 - 2 = 0.$$

Și în cazul funcțiilor care prezintă salturi finite este indicat să se împartă intervalul de integrare în două intervale, ca punct c fiind ales punctul în care funcția prezintă saltul (fig. 20.1.6). Nu se poate face însă integrarea în intervale care conțin puncte de discontinuitate cu salt infinit; de exemplu, integrala $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$ nu are sens deoarece intervalul de integrare conține punctul $x = 0$ în care



20.1.6. Integrala unei funcții discontinue

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$



funcția este nedefinită. Aceste cazuri se vor studia în subcapitolul despre integrale improprii.

Integrarea unei funcții multiplicate cu un factor constant. Dacă funcția care se integrează este de forma $cf(x)$, unde c este un factor constant, atunci acesta poate fi dat în factor în orice sumă $\sum cf(\xi_i)\,\Delta x_i$ și deci apare și ca factor al limitei.

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

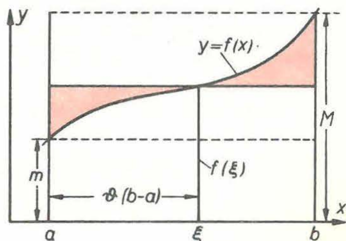
Exemplu. $\int_0^3 4x^2\,dx = 4\int_0^3 x^2\,dx = 4\cdot\frac{27}{3} = 36.$

Teoreme de medie a calculului integral. Orice funcție continuă $y = f(x)$ își atinge într-un interval închis $[a, b]$ marginea superioară M și marginea inferioară m. Dacă funcția ia numai valori pozitive, atunci din definiția integralei definite rezultă inegalitatea

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a),$$

adică aria mărginită de curbă este cuprinsă între ariile a două dreptunghiuri $m(b-a)$ și $M(b-a)$. Trebuie deci să existe o valoare μ cuprinsă între m și M astfel încît $\mu(b-a)$ să fie egal cu $\int_a^b f(x)\,dx$ (fig. 20.1.7). Funcția $f(x)$ fiind continuă, există un punct $x = \xi$ din $[a, b]$ astfel încît $\mu = f(\xi)$ și deci $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi)$.

La fel ca în cazul teoremei lui Lagrange din calculul diferențial punctul ξ poate fi notat și cu $a + \theta\,(b-a)$, unde θ este o valoare cuprinsă între 0 și 1.



20.1.7. Teorema mediei din calculul integral

$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\,f(\xi)$, unde $\xi\in[a, b]$	$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\,f[a+\theta\,(b-a)],\ 0\leqslant\theta\leqslant 1$

Dacă funcția $f(x)$ este continuă în intervalul $[a, b]$, atunci integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ se poate exprima ca produs între lungimea intervalului, $b-a$ și valoarea funcției într-un anumit punct al intervalului.

Teorema de medie se folosește, de exemplu, pentru evaluarea integralelor definite ale funcțiilor ce nu pot fi integrate prin metode elementare sau a căror integrare este dificilă. Dacă $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ sînt funcții integrabile pe intervalul $a \leqslant x \leqslant b$ care satisfac inegalitățile $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, atunci

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b h(x)\,dx.$$

Exemplu. În intervalul $0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}$ funcția e^{-x^2}, care nu poate fi integrată prin metode elementare, satisface inegalitățile $1 - x^2 \leqslant e^{-x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2}$. Rezultă $0{,}458 = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{1/2} =$

$$= \int_0^{1/2}(1-x^2)\,dx \leqslant \int_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx \leqslant \int_0^{1/2}\frac{dx}{1+x^2} = [\text{arctg}\ \alpha]_0^{1/2} = 0{,}464.$$

Integrala definită mai satisface și teorema a doua de medie pe care o enunțăm fără demonstrație.

Dacă funcțiile $f(x)$ și $g(x)$ sînt continue în intervalul închis $[a, b]$ și $g(x)$ nu-și schimbă semnul în acest interval, atunci există un punct ξ din intervalul $[a, b]$ astfel încît

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Integrarea ca operație inversă a derivării. Dacă se consideră una din limitele de integrare, de exemplu cea superioară, ca o variabilă x, atunci se poate defini funcția $\Phi(x) = \int_a^x f(\xi)\,d\xi$;

dar $\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(\xi)\,d\xi$ iar din teorema lui Lagrange rezultă $\int_x^{x+\Delta x} f(\xi)\,d\xi =$ $=\Delta x \cdot f(x+\theta\,\Delta x)$; deci $\dfrac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=\dfrac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(\xi)\,d\xi = f(x+\theta\Delta x)$. Funcția $f(x)$ fiind continuă, $f(x+\theta\Delta x)$ tinde către $f(x)$ cînd $\Delta x \to 0$. Astfel $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=f(x)$.

Această relație exprimă legătura fundamentală între calculul diferențial și calculul integral.

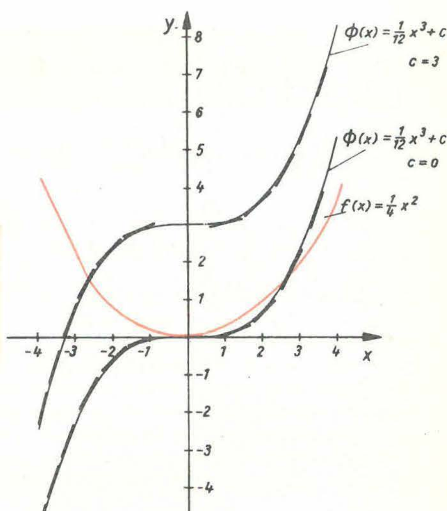
Dacă funcția $f(x)$ este continuă în intervalul considerat, atunci funcția $\Phi(x)=\int_a^x f(\xi)\,d\xi$ este derivabilă în acest interval și derivata ei va fi funcția $f(x)$; $\Phi'(x)=\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(\xi)\,d\xi = f(x)$.

$$\Phi(x)=\int_a^x f(\xi)\,d\xi \longrightarrow \Phi'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(\xi)\,d\xi = f(x)$$

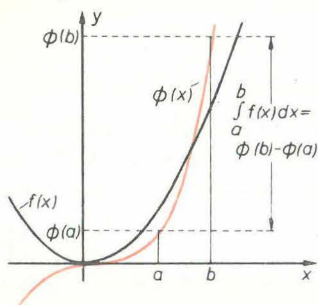
Orice funcție $\Phi(x)$ a cărei derivată este funcția $f(x)$ se numește *primitivă* a lui $f(x)$. Două primitive $\Phi(x)$ și $\Psi(x)$ ale aceleiași funcții $f(x)$ au în intervalul de integrare aceeași derivată. Derivata diferenței $\Phi(x)-\Psi(x)$ este deci, identic nulă. Din teorema lui Lagrange din calculul diferențial rezultă însă că diferența $\Phi(x)-\Psi(x)$ trebuie să fie o constantă. Două primitive diferă deci numai printr-o constantă.

Orice funcție continuă $f(x)$ are o infinitate de primitive care se deosebesc una de cealaltă doar printr-o constantă aditivă. Dacă $\Phi(x)$ și $\Psi(x)$ sînt două primitive ale aceleiași funcții $f(x)$ atunci $\Phi(x)=\Psi(x)+$ $+$ const.

Pe reprezentarea grafică a funcției $\Phi(x)$ se obține o familie de curbe paralele (fig. 20.1.8). Prin cunoașterea primitivelor se cunosc toate funcțiile care au ca derivată pe $f(x)$. Orice astfel de funcție se numește *integrala nedefinită* a funcției $f(x)$ și se scrie $\int f(x)\,dx$.



20.1.8. Primitive: $\int \frac{1}{4}x^2\,dx = \frac{1}{12}x^3 + C$



20.1.9. Integrala definită ca diferență a ordonatelor

Exemple. 1. Integrala nedefinită a funcției $f(x)=3x^2$ este $\Phi(x)=\int_0^x 3\xi^2\,d\xi = x^3+C$, deoarece derivata lui x^3 este $3x^2$.

2. Derivata funcției $\sin x$ este $\cos x$ și deci integrala funcției $\cos x$ este $\sin x$. Se obține astfel integrala nedefinită $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.

3. Funcția $f(x)=2x^2$ este derivata funcției $\Phi(x)$; punînd condiția ca aceasta să ia pentru $x=1$ valoarea $\Phi(1)=1$, atunci se poate calcula constanta de integrare corespunzătoare integralei nedefinite $\int 2x^2\,dx=$

$= \frac{2}{3}x^3 + C$. Dar $\Phi(1) = \frac{2}{3}1^3 + C = 1$, adică $C = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, de unde $\Phi(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}$.

4. Pentru funcția $\Phi(x)$ se cunoaște derivata $\Phi'(x) = 3x^4$ și valoarea funcției $\Phi(5) = 0$. Integrala nedefinită va fi $\int 3x^4 \, dx = \frac{3}{5}x^5 + C$. Din condiția inițială $\frac{3}{5} \cdot 5^5 + C = 0$ rezultă $C = -1875$. Funcția $\Phi(x)$ va fi $\Phi(x) = \frac{3}{5}x^5 - 1875$.

Legătura dintre integrala definită și integrala nedefinită. Cunoașterea integralei nedefinite ușurează calculul integralei definite. Fie $\Phi(x)$ o primitivă a lui $f(x)$ și $\Psi(x) = \int_a^x f(\xi)\,d\xi$ o altă primitivă, astfel încît $\Psi(x) = \Phi(x) + C$. Dar $\Psi(a) = \int_a^a f(\xi)\,d\xi = 0$, astfel că $C = -\Phi(a)$ și rezultă

$$\int_a^b f(\xi)\,d\xi = \Psi(b) = \Phi(b) + C = \Phi(b) - \Phi(a) \qquad \text{(fig. 20.1.9).}$$

Exemple. *1.* $\int_1^2 x^2 dx = [x^3/3]_{x=1}^{x=2} = 8/3 - 1/3 = 7/3.$

2. $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin(\pi/2) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - (-1) = 2.$$

Integrale improprii. Integrala definită ca limită a sumelor $\Sigma f(\xi_i)\,\Delta x_i$ se numește *integrală proprie* spre deosebire de *integralele improprii*. Integralele improprii apar în două cazuri: cînd funcția $f(x)$ tinde la ∞ într-un punct p din intervalul de integrare și cînd intervalul de integrare este nemărginit. Integrala improprie se definește ca limită a unui șir de integrale proprii. Se restrînge intervalul de integrare în primul caz pînă la $p + \varepsilon$ sau $p - \varepsilon$ și în al doilea caz numai pînă la ω și se studiază comportarea valorilor $I(\varepsilon)$ și $I(\omega)$ cînd $\varepsilon \to 0$ și $\omega \to \pm\infty$. Dacă limita există, atunci integrala improprie este *convergentă*, în caz contrar *divergentă*.

Cazul funcțiilor nemărginite în intervalul de integrare. În exemplul de mai jos funcția care se integrează prezintă un pol pentru $x = 0$. Prin excluderea acestui punct, considerînd intervalul de integrare $[\varepsilon, 1]$ $\varepsilon > 0$, se obține o integrală proprie $I(\varepsilon)$ și se cercetează limita lui $I(\varepsilon)$ cînd $\varepsilon \to 0$:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} I(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{1-\alpha}(1 - \varepsilon^{1-\alpha})\right].$$

Existența limitei este determinată de exponentul $\alpha \neq 1$. Dacă $\alpha > 1$, atunci $\varepsilon^{1-\alpha}$ are exponent negativ și diverge pentru $\varepsilon \to 0$. Dimpotrivă dacă $\alpha < 1$, atunci $\varepsilon^{1-\alpha}$ tinde la zero cînd $\varepsilon \to 0$. Integrala improprie este convergentă către $\frac{1}{1-\alpha}$.

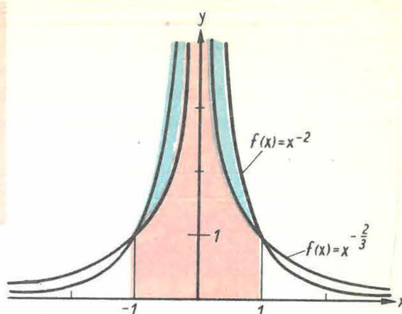
Figura 20.1.10 reprezintă două exemple pentru $\alpha = \frac{2}{3} < 1$ și pentru $\alpha = 2 > 1$.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha}; \quad 0 < \alpha < 1$$

Dacă funcția $f(x)$ este mărginită în intervalul $a \leqslant x < p$ și $\lim_{x \to p} f(x) = \infty$, atunci dacă există $\alpha < 1$ și un K finit, astfel încît $|f(x)| \leqslant \frac{K}{(p-x)^\alpha}$ în intervalul $[a, p]$, atunci integrala improprie $\int_a^p f(x)\,dx$ este convergentă în intervalul $[a, p]$.

Dacă există un $\alpha < 1$ și un K fix, astfel încît $f(x) \leqslant \frac{K}{|p-x|^\alpha}$ în intervalul $[a, p]$, atunci folosind rezultatul obținut

$$\int_a^p f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{p-\varepsilon} f(x)dx \leqslant \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{p-\varepsilon} \frac{K}{|p-x|^\alpha} = \frac{K}{1-\alpha}(p-a)^{1-\alpha}.$$



20.1.10. Comportarea funcțiilor $f(x) = x^{-2/3}$ și $f(x) = x^{-2}$ în vecinătatea originii

Exemplu. Cu ajutorul primitivei se obțin

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \arcsin(1-\varepsilon) = \frac{\pi}{2}.$$

Interval de integrare nemărginit. Diferența dintre cele două tipuri de integrale improprii reiese mai clar cu ajutorul aceluiași exemplu:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{\omega \to \infty} I(\omega) = \lim_{\omega \to \infty} \int_1^\omega \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\omega \to \infty} \left[\frac{1}{1-\alpha}(\omega^{1-\alpha} - 1)\right].$$

Dacă numărul pozitiv α este diferit de 1, atunci comportarea lui $I(\omega)$ depinde de termenul $\omega^{1-\alpha}$; dacă exponentul $1-\alpha$ este pozitiv, adică $\alpha < 1$, atunci cînd $\omega \to \infty, \omega^{1-\alpha}$ crește nemărginit și integrala este divergentă; dacă exponentul este negativ, adică $\alpha > 1$, atunci $\frac{1}{\omega^{\alpha-1}}$ pentru $\omega \to \infty$ tinde la zero și integrala converge către $\frac{1}{\alpha-1}$.

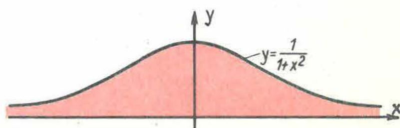
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx = \frac{1}{\alpha-1};\ \alpha > 1$$

Dacă $f(x)$ este integrabilă în orice subinterval finit din $[a, \infty]$ și dacă există $\alpha > 1$, astfel încît funcția $x^\alpha f(x)$ este mărginită penru orice x pozitiv, $x > a$, atunci integrala improprie $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este convergentă.

Dacă K este o margine superioară a funcției $x^\alpha|f(x)|$, atunci deoarece $\alpha > 1$, ținîndu-se seama de rezultatul găsit $\int_a^\infty |f(x)|\,dx = \lim_{\omega \to \infty} \int_a^\omega |f(x)|\,dx \leqslant \lim_{\omega \to \infty} \int_a^\omega \frac{K}{x^\alpha}\,dx = \frac{Ka^{1-\alpha}}{\alpha - 1}$.

Șirul monoton crescător $I(\omega)$ este de asemenea mărginit și trebuie să aibă o limită.

1. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\omega \to \infty} \int_0^\omega \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\omega \to \infty} (\operatorname{arctg} \omega - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{2}$ (fig. 20.1.11).



20.1.11. Aria aflată dedesubtul curbei $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

2. $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{\omega \to \infty} \int_0^\omega e^{-x}\,dx = \lim_{\omega \to \infty} [-e^{-\omega} + 1] = 1.$

Funcția gama. Funcția gama a apărut ca răspuns la următoarea problemă. Există o funcție care pentru valorile întregi și pozitive ale argumentului să ia valorile $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 1\cdot 2 = 2$, $3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6, \ldots, n! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$? Leonhard EULER (1707—1783) a rezolvat această problemă cu ajutorul integralelor improprii. Adrien-Marie LEGENDRE (1752—1833) a denumit această funcție *funcția gama a lui Euler*. Ea este de forma

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt.$$

Funcția gama nu are zerouri în intervalul $(-\infty, +\infty)$ și este continuă cu excepția punctelor $0, -1, -2, \ldots$ în care admite poli de ordinul întîi (vezi cap. 5). Polii se pot recunoaște mai bine pe următoarea definiție a funcției $\Gamma(x)$ dată de Carl Friedrich GAUSS (1777—1855):

$$\Gamma(x) = x^{-1} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1}\right].$$

Din relația funcțională $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$ și din valoarea $\Gamma(1) = 1$ rezultă pentru argumente întregi ale funcției relația $\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) = n!$

Funcția gama	$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt, \quad x > 0$
Definiția lui Gauss	$\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!\, n^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)}, \quad x \neq 0, -1, -2, \ldots$ $\Gamma(x) = x^{-1} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1}\right]$
Ecuații funcționale	$\Gamma(x + 1) = x\,\Gamma(x);\quad \Gamma(x)\,\Gamma(1 - x) = \dfrac{\pi}{\sin \pi x}$ $\Gamma\left(\frac{1}{2} + x\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - x\right) = \dfrac{\pi}{\cos \pi x};\quad \Gamma(x)\,\Gamma(-x) = \dfrac{-\pi}{x \sin \pi x}$

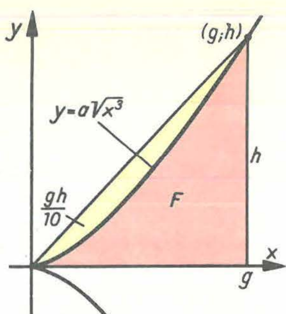
Cvadraturi

Prin *cvadratură* se înțelege calculul ariei unei suprafețe plane mărginite de curbe.

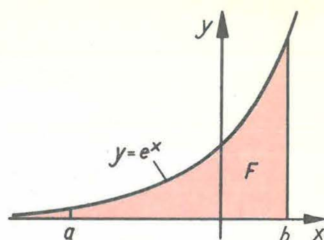
Aria delimitată de o curbă plană. Atunci cînd funcția $f(x)$ ia valori pozitive pentru orice x în intervalul $a \leqslant x \leqslant b$, aria delimitată de curba $y = f(x)$, $x = a$, $y = b$ și Ox este dată de integrala $F = \int_a^b f(x)\, dx$. Dacă funcția își schimbă semnul între două zerouri în intervalul $[a, b]$, atunci intervalul de integrare se descompune în așa fel încît integrala să se descompună într-o sumă de termeni pozitivi și negativi. Acestor termeni le corespund arii orientate pozitiv sau negativ. Neglijînd orientarea, aria totală va fi dată de suma valorilor absolute ale acestor termeni.

Exemplul 1. Cvadratura parabolei lui Neil $y = a\sqrt{x^3}$ (fig. 20.1.12). $F = a\int_0^g x^{3/2}\, dx = \frac{2}{5} a\sqrt{g^5}$. Dacă se notează cu $h = a\sqrt{g^3}$, atunci $F = \frac{2}{5} gh$, adică aria F este cu $\frac{1}{10} gh$ mai mică decît aria triunghiului dreptunghic cu baza g și ipotenuza determinată de punctele $(0, 0)$ și $(g; h)$.

Exemplul 2. Cvadratura curbei exponențiale $y = e^x$ de la $x = -a$ pînă la $x = b$. Dacă a este finit, atunci $\int_{-a}^b e^x\, dx = e^b - \frac{1}{e^a}$. Pentru $a \to -\infty$, $F = e^b$, adică o valoare finită;



20.1.12. Aria aflată dedesubtul ramurii pozitive a parabolei lui Neil

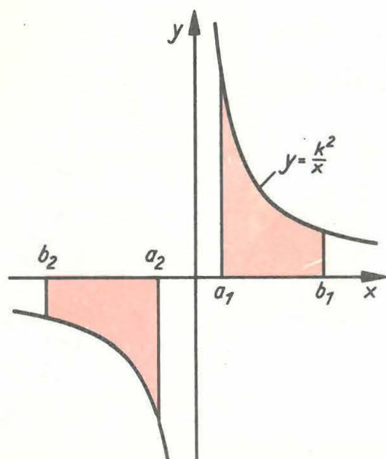


20.1.13. Aria dedesubtul curbei exponențiale $y = e^x$

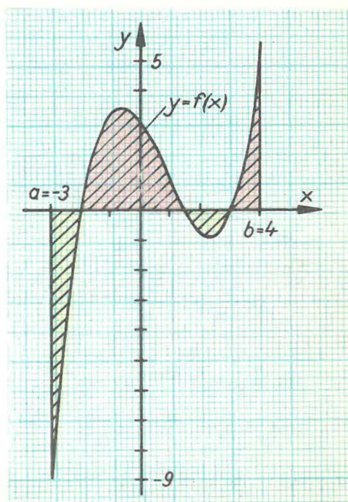
pentru $b = 0$, de exemplu, $F = 1$. Integrala improprie $\int_{-\infty}^{b} e^x\, dx$ (fig. 20.1.13) este convergentă; această suprafață care se întinde pînă la infinit are aria finită.

Exemplul 3. Cvadratura hiperbolei echilatere $y = \frac{k^2}{x}$ de la $x = a$ pînă la $x = b$: $k^2 \int_a^b \frac{dx}{x} = k^2 (\ln b - \ln a)$; $F = k^2 \ln \frac{b}{a}$. În acest caz o curbă rațională mărginește o arie a cărei măsură este dată de un număr transcendent (fig. 20.1.14).

Exemplul 4. Cvadratura sinusoidei $y = \sin x$ de la $x = 0$ pînă la $x = \pi$; $\int_0^{\pi} \sin x\, dx = \cos 0 - \cos \pi$; $F = 2$. În acest caz o curbă transcendentă mărginește o suprafață cu aria dată de un număr rațional.



20.1.14. Aria dedesubtul hiperbolei $y = \frac{k^2}{x}$



20.1.15. Aria dedesubtul curbei $y = f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{6} x^2 - \frac{3}{2} x + 3$

Exemplul 5. Fie de calculat aria mărginită de curba ce reprezintă funcţia $y = f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{6}x^2 - \frac{3}{2}x + 3$, de axa Ox şi de dreptele $x = -3$ şi $x = 4$ (fig. 20.1.15). Funcţia are în intervalul $-3 \leqslant x \leqslant 4$ zerourile $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_3 = 3$. Neţinînd seama de orientarea suprafeţelor, aria căutată este o sumă a valorilor absolute ale integralelor pe intervalul determinat de zerourile succesive:

$$\int\left(\frac{x^3}{3} - \frac{5}{6}x^2 - \frac{3}{2}x + 3\right)\mathrm{d}x = F(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{5}{18}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 3x,$$

$$F = \left|\int_{-3}^{-2} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{-2}^{\frac{3}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{\frac{3}{2}}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{3}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x\right| =$$

$$= \left|F(x)\Big|_{-3}^{-2}\right| + \left|F(x)\Big|_{-2}^{\frac{3}{2}}\right| + \left|F(x)\Big|_{\frac{3}{2}}^{3}\right| + \left|F(x)\Big|_{3}^{4}\right| =$$

$$= |-5{,}444 + 1{,}5| + |2{,}297 + 5{,}444| + |1{,}5 - 2{,}297| + |3{,}556 - 1{,}5| =$$

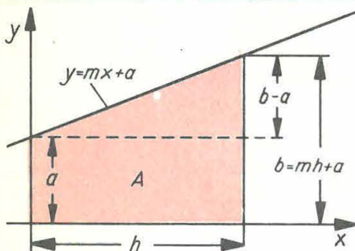
$$= |-3{,}944| + |7{,}741| + |-0{,}797| + |2{,}056| = 14{,}358.$$

Cu ajutorul calculului integral se pot deduce unele formule de calcul pentru arii cunoscute din geometrie.

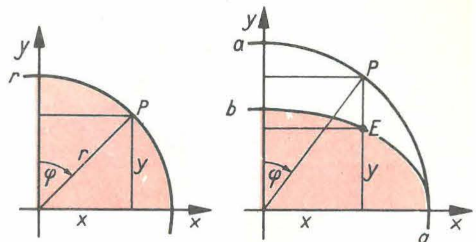
Exemplul 1. Aria trapezului. Se cere aria suprafeţei determinate de dreptele $y = mx + a$, axa Ox şi dreptele $x = 0$ şi $x = h$.

$$\int_0^h (mx + a)\,\mathrm{d}x = \frac{m}{2}h^2 + ah = \frac{h}{2}(mh + 2a).$$

Dacă se notează $mh + a = b$ (fig. 20.1.16), atunci se obţine binecunoscuta formulă a ariei trapezului $A = \frac{h}{2}(a + b)$.



20.1.16. Aria trapezului



20.1.17. Aria cercului şi aria elipsei

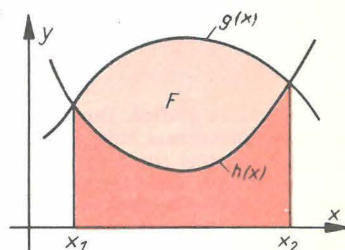
Exemplul 2. Aria cercului. Un sfert din aria cercului A (fig. 20.1.17) este mărginită de arcul $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ şi de dreptele $x = 0$ şi $y = 0$. Substituind $x = r\sin\varphi$, $\mathrm{d}x = r\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$, se obţine

$$\frac{1}{4}A = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} r^2\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{r^2}{2}[\sin\varphi\cos\varphi + \varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{r^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi r^2}{4} \text{ sau } A = \pi r^2.$$

Exemplul 3. Aria elipsei. Un sfert din aria elipsei (fig. 20.1.17) se găsește dedesubtul arcului $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ între punctele $x = 0$ și $x = a$. Din reprezentarea parametrică a elipsei $x = a \sin \varphi$, $y = b \cos \varphi$ se obține $dx = a \cos \varphi \, d\varphi$ și deci:

$$\frac{1}{4} F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ab \cos^2 \varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{4} ab, \quad \text{adică} \quad F = \pi ab.$$

Arii mărginite de două curbe. Dacă o porțiune de suprafață este mărginită de două curbe care se intersectează, atunci aria ei se calculează ca diferență a ariilor care se află dedesubtul fiecăreia din cele două curbe. Limitele de integrare sînt date de abscisele x_1 și x_2 a două puncte de intersecție consecutive (fig. 20.1.18); orientarea părților de arie nu se ia în seamă. Integrala $\int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx$ ne dă aria mărginită de curba $g(x)$; integrala $\int_{x_1}^{x_2} h(x)\,dx$ ne dă aria mărginită de curba $h(x)$. Aria F a suprafeței închise între cele două curbe este diferența celor două integrale $F = \left|\int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} h(x)\,dx\right|$. Cum ambele integrale au aceleași limite, ele se pot scrie sub forma unei singure integrale. Dacă între cele două abscise x_1 și x_2 există porțiuni de curbă și deci și de suprafață care se găsesc sub axa Ox, atunci se presupune figura 20.1.18 translatată de-a lungul axei Oy

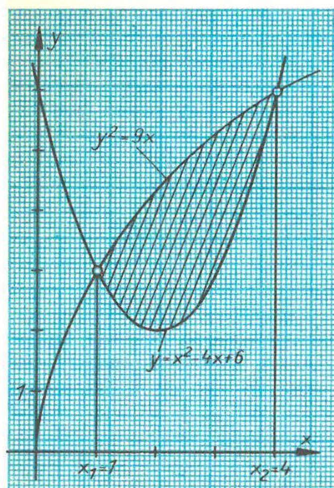


20.1.18. Aria delimitată de două curbe

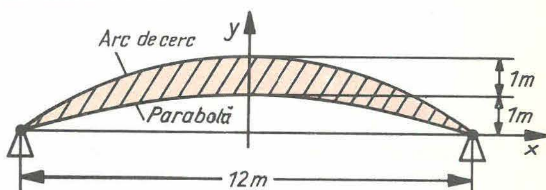
Aria mărginită de două curbe	$F = \left\|\int_{x_1}^{x_2} [g(x) - h(x)]\,dx\right\|$

pînă ce porțiunea de suprafață se găsește în întregime deasupra axei Ox. Cum ambele funcții se modifică numai cu o constantă aditivă, aceasta nu afectează rezultatul final reducîndu-se prin scădere.

Exemplul 1. Curbele ce reprezintă funcțiile $y^2 = 9x$ și $y = x^2 - 4x + 6$ (fig. 20.1.19) se intersectează în punctele (1; 3) și (4; 6). Pentru $g(x) - h(x)$ se obține $g(x) - h(x) = (3\sqrt{x} - x^2 + 4x - 6)$, adică pentru aria $F = \int_1^4 (3x^{\frac{1}{2}} - x^2 + 4x - 6)\,dx = \left[2x\sqrt{x} - \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 6x\right]_1^4 = 5.$



20.1.19. Aria mărginită de curbele $y^2 = 9x$ și $y = x^2 - 4x + 6$



20.1.20. Seceră

Exemplul 2. Lama unei seceri (fig. 20.1.20) se confecționează din tablă de 10 mm. Care este greutatea lamei dacă muchia ei superioară este un arc de cerc și muchia inferioară un arc de parabolă (densitatea materialului fiind $\gamma = 7{,}8$ g/cm³) iar dimensiunile sînt cele de pe figură.

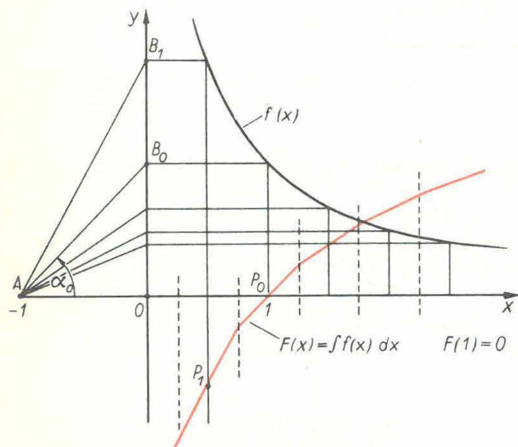
Greutatea G se obține ca produsul dintre aria secțiunii, grosime și densitate: $G = F \cdot s \cdot \gamma$. Aria secțiunii F se va calcula cu ajutorul calculului integral. În sistemul de coordonate ales, ecuația cercului este $x^2 + (y-d)^2 = r^2$ și cea a parabolei $y = ax^2 + C$; se vor scrie $x^2 + (y + 8)^2 = 100$ respectiv $y = -\frac{x^2}{36} + 1$. Deoarece $g(x) - h(x) = \sqrt{100 - x^2} - 8 + \frac{x^2}{36} - 1$, se obține pentru aria secțiunii

$$F = 2\int_0^6 \left(\sqrt{100 - x^2} + \frac{x^2}{36} - 9\right) dx = 2 \left| \frac{1}{2} \cdot 100 \arcsin \frac{x}{100} + \right.$$

$$\left. + x\sqrt{100 - x^2} + \frac{x^3}{108} - 9x \right|_0^6 = 2\left[\frac{1}{2}(100 \cdot 0{,}6435 + 48) - 52\right] = 8{,}36.$$

Lama secerei are deci aria 836 dm² și greutatea $G = 836\ \text{dm}^2 \cdot 0{,}1\ \text{dm} \cdot 7{,}8\ \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = 652\ \text{kg}$.

Integrarea grafică. După cum pentru o curbă plană oarecare se poate găsi grafic curba ce reprezintă derivata ei, la fel se poate proceda și invers: fiind dată reprezentarea grafică a derivatei, se poate construi curba integrală corespunzătoare. Din familia de curbe integrale se va alege apoi aceea care satisface anumite condiții inițiale dinainte date și anume cea care trece prin punctul P_0(cu $x_0 = 1, y_0 = 0$). Fiecare ordonată a curbei derivate $f(x)$ reprezintă panta tangentei în punctul corespunzător la curba integrală construită. Dacă se proiectează ordonata $f(x_0) = f(1)$ pe axa Oy și se unește punctul obținut B_0 cu punctul $A(-1;\ 0)$, atunci deoarece $\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{B_0O}{1} = f(1)$, dreapta determinată de A și B_0 determină direcția curbei integrale în punctul P_0. O paralelă la această direcție prin punctul P_0 este tangentă la curba integrală și aproximează această curbă într-o vecinătate destul de mică a lui P_0. Cum nu se cunosc și alte puncte ale curbei, se duce o paralelă la axa Oy prin mijlocul intervalului $[x_0, x_1]$ și se translatează direcția tangentei în punctul P_1 astfel încît să intersecteze tangenta la P_0 pe această paralelă. Se obține o linie poligonală care aproximează curba integrală (fig. 20.1.21). Descrierea curbei integrale a unei curbe date se poate face mecanic cu ajutorul unor instrumente speciale.

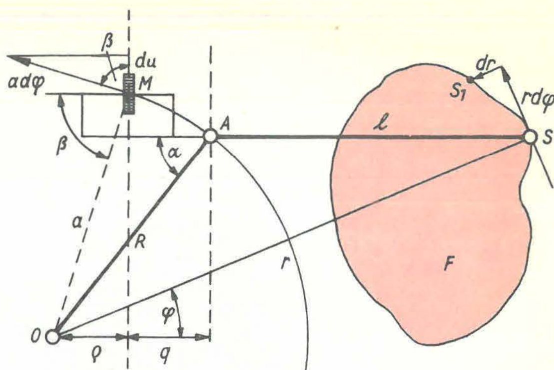


20.1.21. Integrarea grafică

Planimetrul. Planimetrul este un aparat care determină ariile suprafețelor plane prin parcurgerea curbei plane care le limitează. Aceste aparate se folosesc în special pentru obținerea ariilor unor suprafețe pentru care există desene sau planuri micșorate la scară și ale căror perimetre nu sînt exprimate analitic prin funcții. Bara mobilă 1 cu creionul mobil S se pot mișca în jurul punctului A. În cazul planimetrului liniar, A se găsește pe o dreaptă iar în cazul planimetrului polar (fig. 20.1.22) pe un cerc astfel încît A este legat printr-un braț polar de lungime R cu polul fix O. Pe o axă paralelă cu brațul mobil se găsește o rotiță de înregistrări cu diametrul d. Numărul de rotații ale acesteia n pot fi citite pe o scală. Pe figură se poate vedea principiul funcționării planimetrului. Între brațul polar R, lungimea $l = \overline{AS}$ și raza vectoare $r = \overline{OS}$ există relația $r^2 = R + l^2 + 2Rl\cos\alpha = R^2 + l^2 + 2l(\rho + q)$ (dedusă din teorema cosinusurilor). Dacă planul rotiței de înregistrare M trece prin pol, atunci $\rho = 0$ și $g^2 = R^2 + l^2 + 2lq$; segmentul g se numește rază a cercului de bază a cărui arie este $G = \pi g^2$. De aici rezultă că $2l\rho =$

$= r^2 - g^2$. Mișcarea lui S în punctul vecin S_1 se poate descompune într-o componentă tangențială $r\,d\varphi$ și într-o componentă radială dr. La o parcurgere totală a perimetrului curbei care se măsoară, suma componentelor radiale este nulă și nu va produce nici o rotație a rotiței de înregistrare.

La o rotație de unghi $d\varphi$ triunghiul OSA nu se modifică și rotița se deplasează perpendicular la distanța $\overline{OM} = a$ cu $a\,d\varphi$ și în același timp se rostogolește în jurul segmentului $du = a\,d\varphi \cos\beta = a\cos\beta\,d\varphi = \varphi\,d\varphi = \frac{1}{l}\left(\frac{1}{2}r^2\,d\varphi - \frac{1}{2}g^2\,d\varphi\right)$ perpendicular pe axa sa.



20.1.22. Planimetru polar

În coordonate polare r, φ se obține pentru aria porțiunii de suprafață între $\varphi = \varphi_1$ și $\varphi_1 = \varphi_2$ valoarea $\frac{1}{2}\oint r^2\,d\varphi = lu + \frac{1}{2}g^2(\varphi_2 - \varphi_1)$. Prin menținerea în jurul segmentului u, rotița de înregistrare a făcut $n = \frac{\mu}{\pi d}$ rotații. Cînd întreaga suprafață a fost înconjurată, $\varphi_1 = \varphi_2$ și se obține $F = \ln\pi d = kn$, unde s-a introdus constanta $k = 1\pi d$ Unele planimetre s-au construit astfel încît $k = 100$ cm^2. Dacă polul se găsește în interiorul suprafeței F, atunci $F = G + kn$. Constanta planimetrului $G = \pi g^2$ se determină experimental înainte de măsurare.

Alte procedee pentru calculul aproximativ al integralelor se găsesc în capitolul „Metode de calcul",

20.2. Integrala nedefinită

Pentru a aplica relația dintre integrala definită și cea nedefinită este necesară cunoașterea primitivei. Primitivele se deduc cu ajutorul observației că integrarea este operația inversă a derivării.

Primitive

Primitivele se obțin, făcînd abstracție de o constantă aditivă, din formulele obținute pentru derivatele funcțiilor. Dacă se știe că derivata unei funcții $\Phi(x)$ este funcția $f(x)$, atunci $\Phi(x) + C = \int f(x)\,dx$. Formulele obținute nu sînt valabile decît pentru valori ale lui x pentru care atît funcția de sub semnul integralei cît și integrala $\Phi(x)$ sînt definite, de exemplu integrala $\int \frac{dx}{x} = \ln|Cx| = \ln|x| + C$ este definită numai pentru valori ale lui x diferite de zero; însă poate fi extinsă pentru valori negative cînd constanta C are același semn cu x, adică cînd $\ln|Cx| = \ln(|C|\,|x|) = \ln|x| + \ln|C| = \ln|x| + C$. Punctul $x = 0$ nu poate însă aparține intervalului de integrare.

Tabela primitivelor

$$\int dx = x + C \qquad \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \text{ pentru } n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|cx| = \ln|x| + C \qquad \int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C = a^x \log_a e + C \text{ cu } 0 < a \neq 1$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C \qquad \int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{ch} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \text{ pentru } |x| < 1 \text{ numai valori principale}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arccotg} x + C'$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \arg\operatorname{sh} x + C = \ln|x + \sqrt{1+x^2}| + C$$

$$\int \frac{dx}{\pm\sqrt{x^2-1}} = \arg\operatorname{ch}|x| + C = \ln|x \pm \sqrt{x^2-1}| + C \text{ pentru } |x| > 1$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} \begin{cases} = \arg\operatorname{th} x + C = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} + C', & \text{pentru } |x| < 1 \\ = \arg\operatorname{cth} x + C_1 = \ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} + C_1', & \text{pentru } |x| > 1 \end{cases}$$

Formula pentru integrala unei puteri $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ este valabilă pentru ori exponenți reali $n \neq -1$.

Exemple. 1. $\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C.$ 2. $\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C.$

3. $\int \frac{dx}{x^r} = \int x^{-r}\,dx = \frac{x^{-r+1}}{-r+1} + C = \frac{x^{-(r-1)}}{-(r-1)} + C = -\frac{1}{(r-1)\,x^{(r-1)}} + C; \quad (r \neq 1).$

4. $\int \sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C = \frac{3}{4}\,x\sqrt[3]{x} + C.$

5. $$\int \sqrt[m]{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{m}}dx = \frac{x^{\frac{1}{m}+1}}{\frac{1}{m}+1} + C = \frac{x^{\frac{1+m}{m}}}{\frac{1+m}{m}} + C = \frac{m}{m+1}\sqrt[m]{x^{m+1}} + C = \frac{m}{m+1}\,x\sqrt[m]{x} + C.$$

6. $$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int x^{-\frac{2}{3}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = 3\sqrt[3]{x} + C.$$

7. $$\int (5x^3 + 4x^2 - 3x + 2)\,dx = 5\int x^3\,dx + 4\int x^2\,dx - 3\int x\,dx + 2\int dx =$$
$$= \frac{5}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + C,$$

unde C este suma constantelor de integrare.

8. $$\int\left(ax^2 + \frac{1}{x} - \frac{b}{x^2} + \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{a}{3}x^3 + \ln|x| + \frac{b}{x} + \operatorname{arctg} x + C.$$

9. $$\int \frac{x^3 + 2x^2 - x + 3}{x}\,dx = \int\left(x^2 + 2x - 1 + \frac{3}{x}\right)dx = \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 3\ln|x| + C.$$

10. $$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}}\left(\cos x - \sin x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx = \Big[\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x\Big]_{-\pi/4}^{+\pi/4} =$$
$$= \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} + 1\right) - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} - 1\right) = 2 + \sqrt{2}.$$

Integrarea prin părţi

Integrarea prin părţi este o metodă prin care determinarea unei integrale se reduce la determinarea altei integrale de regulă mai simplă. Această metodă se recomandă atunci cînd funcţia de sub semnul integralei se poate reprezenta ca un produs de două funcţii astfel încît pentru una dintre ele se cunoaşte integrala. Regula de integrare prin părţi se deduce din regula de derivare a unui produs $\frac{d(uv)}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$. Integrînd membru cu membru, se obţine

$$\int \frac{d(uv)}{dx}\,dx = uv = \int v\frac{du}{dx}\,dx + \int u\frac{dv}{dx}\,dx$$

Integrarea prin părţi	$\int u\,dv = uv - \int v\,du$	$\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx$

Prin acest procedeu de integrare funcţia de sub semnul integralei se descompune într-un produs uv' de două funcţii u şi v' astfel încît integrala factorului v' să fie cunoscută şi integrala funcţiei $u'v$ să se poată determina mai uşor.

Exemplu. Pentru a calcula integrala $\int x\,e^x\,dx$ se consideră $u = x$ şi $v' = e^x$. De aici se obţine $u' = 1$ şi $v = e^x$. Din regula de integrare prin părţi rezultă

$$\int x\,e^x\,dx = x\,e^x - \int e^x\,dx = x\,e^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$$

Formule de recurență. Integrala $\int x^6 e^x \, dx$ nu poate fi calculată folosind o singură dată formula de integrare prin părți. În acest caz și în alte cazuri asemănătoare se poate întîmpla ca prin aplicarea metodei de integrare prin părți, succesiv să se poată deduce integrala calculată după un număr finit de pași. Pentru cazul menționat se obține astfel o formulă de recurență.

1.	$\int x^n e^x \, dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \, dx$	n întreg.

Deoarece funcția exponențială e^x este egală cu derivata ei; se recomandă pentru funcția $x^n e^x$ descompunerea $u = x^n, v' = e^x$; se obțin $v = e^x$, $uv = x^n e^x$ și $u'v = nx^{n-1} e^x$, de unde rezultă formulele de recurență menționate.

Exemplu. $\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx = x^2 e^x - 2 \left[x e^x - \int e^x \, dx \right] =$

$= x^2 e^x - 2 [x e^x - e^x + C] = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x - 2C =$

$= (x^2 - 2x + 2) e^x + C_1$ unde $C_1 = -2C$

2.	$\int x^n \sin x \, dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x \, dx$ $\int x^n \cos x \, dx = +x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x \, dx$	n întreg pozitiv

Și în acest caz scrierea sub formă de produs a funcției de sub semnul integralei apare ca o consecință logică a faptului că integralele funcțiilor $\sin x$ și $\cos x$ sînt cunoscute.

Exemple. 1. $\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x - \int (-2x \cos x) \, dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx =$

$= -x^2 \cos x + 2 \left(x \sin x - \int \sin x \, dx \right) = -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x + C) =$

$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + 2C.$

2. $\int x^3 \cos x \, dx = x^3 \sin x - 3 \int x^2 \sin x \, dx = x^3 \sin x - 3(-x^2 \cos x + 2x \sin x +$

$+ 2 \cos x + 2C) = x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x - 6C.$

3.	$\int (\ln x)^n \, dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} \, dx$	n întreg, $n \neq -1$

Funcția de sub semnul integralei se consideră în acest caz scrisă sub forma $1 \cdot (\ln x)^n$, adică $v' = 1$ și $(\ln x)^n = u$; se obține astfel $v = x$ și $u' = n(\ln x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x}$ iar produsul $vu' = n(\ln x)^{n-1}$. Cînd exponentul n este un număr natural la a $(n-1)$-a integrare apare integrala $\int \ln x \, dx$ în care funcția $\ln x$ poate fi scrisă din nou ca un produs $1 \cdot \ln x$ și se obține

$\int 1 . \ln x \, dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x + x + C$. Pentru $n = -1$ se obține logaritmul integral (vezi cap. 21).

4. $\int x^n \ln x \, dx = \ln x \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} - \int \frac{x^n}{n+1} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right)$	$n \neq -1$

Alegînd ca și în exemplul precedent $u = \ln x$ și $v' = x^n$, se obține $vu' = \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{n+1}$ și deci în integrala nou obținută $\ln x$ nu mai apare; în acest caz nu se mai obține o formulă de recurență.

5. $\int \sin^n x \, dx = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx$ $\int \cos^n x \, dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx$	n întreg $n \neq 0$

Funcția de sub semnul integralei, de exemplu $\sin^n x$ se descompune în produsul $\sin x \cdot \sin^{n-1} x$; se notează $u = \sin^{n-1} x$, $v' = \sin x$ și se găsește $v = -\cos x$, $u' = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x$, de unde $u'v = -(n-1) \sin^{n-2} x \cos^2 x = -(n-1) \sin^{n-2} x(1 - \sin^2 x) = -(n-1) \sin^{n-2} x + (n-1) \sin^n x$. Astfel $\int \sin^n x \, dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \, dx - (n-1) \int \sin^n x \, dx$ sau $(1+n-1) \int \sin^n x \, dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \, dx$. Împărțind în ambele părți cu n, se obține prima formulă de recurență. În mod analog se deduce și a doua formulă.

Exemple. *1.* $\int \sin^2 x \, dx = -\frac{\cos x \sin x}{2} + \frac{1}{2} \int dx = -\frac{\cos x \sin x}{2} + \frac{x}{2} + C.$

2. $\int_0^{2\pi} \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \Big[\sin x \cos x + x \Big]_0^{2\pi} = \pi.$

3. $\int \cos^3 x \, dx = \frac{1}{3} \sin x \cos^2 x + \frac{2}{3} \int \cos x \, dx = \frac{1}{3} \sin x \cos^2 x + \frac{2}{3} \sin x + C = \frac{1}{3} \sin x (\cos^2 x + 2) + C.$

4. $\int_0^{2\pi} \sin^3 x \, dx = -\frac{1}{3} \Big[\cos x \, (\sin^2 x + 2) \Big]_0^{2\pi} = 0.$

Produsul lui Wallis. Ultima formulă de recurență se poate folosi pentru obținerea unei reprezentări a lui $\frac{\pi}{2}$, reprezentare ce pare să fi fost cunoscută matematicianului englez John Wallis (1616—1703). Cum în intervalul $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$ orice valoare a lui $\sin x$ este mai mică

decît 1, rezultă pentru orice număr natural $k \geqslant 1$ inegalitatea $\sin^{2k+1} x \leqslant \sin^{2k} x \leqslant \sin^{2k-1} x$. Cu ajutorul formulei de recurență se obține:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x \,\mathrm{d}x = \frac{2k-1}{2k}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k-2} x \,\mathrm{d}x = \frac{(2k-1)(2k-3)\ldots 1}{2k(2k-2)\ldots 2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+1} x \,\mathrm{d}x = \frac{2k}{2k+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k-1} x \,\mathrm{d}x = \frac{2k(2k-2)\ldots 2}{(2k+1)(2k-1)\ldots 3}$$

și deci

$$\frac{2\cdot 4\ldots 2k}{3\cdot 5\ldots(2k+1)} \leqslant \frac{1\cdot 3\ldots(2k-1)}{2\cdot 4\ldots 2k}\cdot\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{2\cdot 4\ldots(2k-2)}{3\cdot 5\ldots(2k-1)},$$

$$1 \leqslant (2k+1)\left[\frac{1\cdot 3\ldots(2k-1)}{2\cdot 4\ldots 2k}\right]^2\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{2k+1}{2k} = 1 + \frac{1}{2k}.$$

Deoarece $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2k}\right) = 1$, rezultă $\lim\limits_{k\to\infty}(2k+1)\left[\dfrac{1\cdot 3\ldots(2k-1)}{2\cdot 4\ldots 2k}\right]^2\dfrac{\pi}{2} = 1.$

Produsul lui Wallis	$\dfrac{\pi}{2} = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{2^2\cdot 4^2\ldots(2k)^2}{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\ldots(2k-1)^2(2k+1)}$

Pentru $k = 10$ se obține valoarea aproximativă $\dfrac{\pi}{2} \approx 1{,}5339$ sau $\pi \approx 3{,}0678$.

Metoda substituției

Uneori o integrală se poate calcula mult mai simplu cînd se substituie variabila x printr-o altă variabilă z legată de x printr-o relație $x = \varphi(z)$. Odată cu transformarea lui x în z trebuie considerată și transformarea diferențialei $\mathrm{d}x$ în $\mathrm{d}z$.

Integrarea unei funcții $f[\varphi(x)]$, unde $\varphi(x)$ este o funcție liniară $\varphi(x) = mx + n$. Se face substituția $\varphi(x) = mx + n = z$ și se obține $m\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}z$ sau $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}z}{m}$. Această metodă este recomandabilă atunci cînd $f(x)$ poate fi integrată.

Exemple. *1.* Pentru a calcula $\int (ax+b)^5\,\mathrm{d}x$ se face **substituția** $ax + b = z$, $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}z}{a}$ și se obține

$$\int (ax+b)^5\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int z^5\,\mathrm{d}z = \frac{1}{6a}\,z^6 + C = \frac{1}{6a}\cdot(ax+b)^6 + C.$$

2. În cazul integralei $\int\sqrt{3x-4}\,\mathrm{d}x$ se face substituția $3x - 4 = z$, $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}z}{3}$ astfel încît

$$\int\sqrt{3x-4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sqrt{z}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot z^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9}\,z\sqrt{z} + C = \frac{2}{9}(3x-4)\sqrt{3x-4} + C.$$

3. Prin substituția $\omega t + \frac{\pi}{2} = z$, $dt = \frac{dz}{\omega}$ se calculează integrala

$$\int \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) dt = \frac{1}{\omega}\int \sin z\, dz = -\frac{1}{\omega}\cos z + C = -\frac{1}{\omega}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + C.$$

4. La calculul integralei $\int e^{-3x}\, dx$ se face substituția $-3x = z$, $dx = -\frac{dz}{3}$ și se obține

$$\int e^{-3x}\, dx = -\frac{1}{3}\int e^{z}\, dz = -\frac{1}{3}e^{z} + C = -\frac{1}{3}e^{-3x} + C.$$

Integrale de forma $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx$. În acest caz se face substituția $\varphi(x) = z$ cu $\varphi'(x)\, dx = dz$ sau $dx = \frac{dz}{\varphi'(x)}$ și se obține astfel integrala $\int \frac{dz}{z} = \ln(cz) = \ln|z| + C$.

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \ln|\varphi(x)| + C$$

De exemplu pentru $\varphi(x) = x^n + a$, $\varphi'(x) = nx^{n-1}$ în cazul integralei $\int \frac{x^{n-1}}{x^n + a} dx$ se consideră $x^{n-1} = \frac{nx^{n-1}}{n}$; astfel se obține

$$\int \frac{x^{n-1}}{x^n + a} dx = \frac{1}{n}\int \frac{nx^{n-1}}{x^n + a} dx = \frac{1}{n}\ln|x^n + a| + C$$

Exemple. 1. $\int \frac{3x^2 - 4}{x^3 - 4x + 7} dx = \ln[c(x^3 - 4x + 7)] = \ln|x^3 - 4x + 7| + C.$

2. $\int \frac{x^3}{x^4 - 5} dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{x^4 - 5} dx = \frac{1}{4}\ln[c(x^4 - 5)] = \frac{1}{4}\ln|x^4 - 5| + C.$

3. $\int \frac{3 - 5x}{1 + x^2} dx = 3\int \frac{dx}{1 + x^2} - \frac{5}{2}\int \frac{2x}{1 + x^2} dx = 3\,\mathrm{arctg}\, x - \frac{5}{2}\ln(1 + x^2) + C.$

Cînd funcția de sub semnul integralei este $\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{N}$ prin amplificare cu $x + N$ se obține

$$\frac{1}{N} = \frac{(x + N)}{N(x + N)} = \frac{\frac{x + N}{N}}{x + N} = \frac{1 + \frac{x}{N}}{x + N} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}}{x + \sqrt{x^2 + a^2}}.$$

Numărătorul fracției obținute este derivata numitorului, astfel încît funcția obținută este integrabilă.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C$$

Integrarea funcțiilor tg x, cotg x, th x *și* cth x. Aceste funcții pot fi scrise ca rapoarte de funcții în care funcția de la numărător este derivata funcției de la numitor, de exemplu: $\int \text{tg}\, x\, dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\ln[c(\cos x)] = -\ln|\cos x| + C$.

$$\int \text{tg}\, x\, dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \text{cotg}\, x\, dx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \text{th}\, x\, dx = \ln|\text{ch}\, x| + C$$

$$\int \text{cth}\, x\, dx = \ln|\text{sh}\, x| + C$$

$$\int \text{arctg}\, x\, dx = x\,\text{arctg}\, x - \ln|\sqrt{1+x^2}| + C$$

$$\int \text{arccotg}\, x\, dx = x\,\text{arccotg}\, x + \ln|\sqrt{1+x^2}| + C$$

$$\int \text{argth}\, x\, dx = x\,\text{argth}\, x + \ln|\sqrt{1-x^2}| + C, \ |x| < 1$$

$$\int \text{argcth}\, x\, dx = x\,\text{argcth}\, x + \ln|\sqrt{x^2-1}| + C, \ |x| > 1$$

Integrarea funcțiilor arctg x, arccotg x, argth x, argcth x. Prin integrare prin părți se obține o integrală de forma $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx$; de exemplu arctg x se pornește ca $1 \cdot \text{arctg}\, x$ și se consideră $u = \text{arctg}\, x$ și $v' = 1$, obținîndu-se $v = x$, $u' = \frac{1}{1+x^2}$ și $vu' = \frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2}$. Prin integrare se obține $\int \text{arctg}\, x\, dx = x\,\text{arctg}\, x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} dx = x\ \text{arctg}\ x - \ln|\sqrt{1+x^2}| + C$.

În mod analog se obțin și celelalte integrale.

Integrale de forma $\int f[\varphi(x)]\,\varphi'(x)\,dx$ **cu** $\varphi'(x) \neq 0$. Și în acest caz, substituția $\varphi(x) = z$, $\varphi'(x)\,dx = dz$ conduce la o integrală simplă cînd f este integrabilă. De exemplu, pentru calcularea integralei $\int \varphi(x)\,\varphi'(x)\,dx$ substituția indicată conduce la $\int z\,dz = \frac{1}{2} z^2 + C$.

$$\int \varphi(x)\,\varphi'(x)\,dx = \frac{1}{2}[\varphi(x)]^2 + C$$

Pentru cazul $f(z) = z^n$ prin aceeași substituție se obține

$$\int \varphi^n(x) \cdot \varphi'(x)\,dx = \int z^n\,dz = \frac{1}{n+1}\varphi^{n+1}(x) + C$$

Exemple. *1.* $\int \sin x \cos x\,dx = \int \sin x\,d(\sin x) = \int z\,dz = \frac{1}{2} z^2 + C = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$.

2. $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x\ d(\ln x) = \int z\ dz = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$.

3. $\int \frac{\text{arctg}^5 x}{1+x^2} dx = \int \text{arctg}^5 x\ d(\text{arctg}\, x) = \int z^5\,dz = \frac{z^6}{6} + C = \frac{1}{6}\text{arctg}^6 x + C$.

4. $\int (5+x^7)^5 \cdot 7x^6\,dx = \int (5+x^7)^5 \cdot d(5+x^7) = \int z^5\,dz = \frac{z^6}{6} + C = \frac{1}{6}(5+x^7)^6 + C$.

5. $\int(1-x^4)^7 x^3\,dx = -\frac{1}{4}\int(1-x^4)^7(-4x^3\,dx) = -\frac{1}{4}\int(1-x^4)^7\,d(1-x^4) =$

$= -\frac{1}{4}\int z^7 dz = -\frac{1}{32}z^8 + C = -\frac{1}{32}(1-x^4)^8 + C.$

6. $\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \int\frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}} = \frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}} = \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{\sqrt{(x^2+1)^3}} =$

$= \frac{1}{2}\int z^{-\frac{3}{2}}\,dz = -\frac{1}{2}\cdot 2z^{-\frac{1}{2}} + C = -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + C.$

Integralele funcțiilor arcsin x, arccos x și argsh x, argch x. În cazul acestor integrale, se obține prin integrare prin părți o integrală de forma $\int\varphi(x)\,\varphi'(x)\,dx = \frac{1}{2}\varphi^2$; de exemplu arcsin x se consideră ca produsul $1\cdot\arcsin x$ cu $u=\arcsin x$ și $v'=1$, de unde $v=x$, $u'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ și $vu' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$; se obține apoi integrînd prin părți $\int\arcsin x\,dx = x\arcsin x + \int\frac{-x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \frac{1}{2}\int\frac{dz}{\sqrt{z}} = x\arcsin x + \sqrt{z} + C = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$

În mod analog se integrează și celelalte trei funcții.

$$\int\arcsin x\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$
$$\int\arccos x\,dx = x\arccos x + \sqrt{1-x^2} + C$$
$$\int\text{argsh}\,x\,dx = x\,\text{argsh}\,x - \sqrt{1+x^2} + C$$
$$\int\text{argch}\,x\,dx = x\,\text{argch}\,x - \sqrt{x^2-1} + C$$

Integrarea prin substituție. (Introducerea unei noi variabile $x=\varphi(z)$). Funcția de sub semnul integralei $f(z)$ devine prin această substituție $f[\varphi(z)]$ cu $dz=\varphi'(z)\,dz$ și $\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(z)]\,\varphi'(z)\,dz$. În cazul în care se calculează integrale definite, atunci noile limite de integrare se calculează ca valori ale funcției inverse $z=\psi(z)$ corespunzătoare funcției $x=\varphi(z)$; funcția $\varphi(z)$ trebuie să fie inversabilă în intervalul considerat cu $\varphi'(z)\neq 0$. Cu ajutorul substituțiilor $x=az$, $dx=a\,dz$, respectiv $x=\frac{a}{b}z$, $dx=\frac{a}{b}\,dz$ se obțin următoarele integrale:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C;\quad \int\frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\,\text{arctg}\,\frac{x}{a} + C$$
$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}} = \frac{1}{b}\arcsin\frac{b}{a}x + C;\quad \int\frac{dx}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{ab}\,\text{arctg}\,\frac{b}{a}x + C$$

Exemple. 1. Pentru a înlătura radicalul $\sqrt{x}$ din integrala de mai jos se face substituția $x=\varphi(z)=z^2$, $dx=2z\,dz$. Integrala se calculează apoi prin părți și se obține

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = \int e^z\cdot 2z\,dz = 2\int z e^z\,dz = 2e^z(z-1) + C = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + C.$$

2. $\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\,dx = 2[e^z(z-1)]_1^2 = 2e^2$. Noile limite de integrare se obțin din: $z=+\sqrt{x}$ pentru $x_1=1$ și $x_2=4$.

3. $\int_{-\pi/2}^{\pi} \sin 2x \, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{2\pi} \sin z \, dz =$

$= -\frac{1}{2}\Big[\cos z\Big]_{-\pi}^{2\pi} = -\frac{1}{2}(1+1) = -1.$

Substituția: $2x = z$, $dx = \frac{dz}{2}$;

$z_1 = -2\frac{\pi}{2} = -\pi$, $z_2 = +2\pi$.

4. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{5x}{4-x^2} dx = -\frac{5}{2}\int_4^1 \frac{dz}{z} =$

$= -\frac{5}{2}\ln z\Big|_4^1 = -\frac{5}{2}(\ln 1 - \ln 4) =$

$= \frac{5}{2}\ln 4.$

Substituția: $4 - x^2 = z$, $-2x\,dx = dz$;

$x_1 = 0 \to z_1 = 4$; $x_2 = \sqrt{3} \to z_2 = 4 - 3 = 1.$

5. $\int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x(1-\ln x)}} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)}}$

$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{2\sin u \cos u}{\sin u \cos u} du = 2\int_{\pi/4}^{\pi/2} du =$

$= 2[u]_{\pi/4}^{\pi/2} = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$

Substituția: $z = \ln x$, $dx = x\,dz$;

$z_1 = \sqrt{e} \to z_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = e \to z_2 = 1.$

$z = \sin^2 u$, $dz = 2\sin u \cos u \, du$;

$z_1 = \frac{1}{2} \to u_1 = \frac{\pi}{4}$, $z_2 = 1 \to u_2 = \frac{\pi}{2}$.

Clase de funcții elementar integrabile

Funcțiile integrabile $f(x)$ ale căror integrale nedefinite se exprimă prin funcții elementare, de exemplu x^n, $\sin x$, e^x, se numesc integrabile prin metode elementare (sau *elementar integrabile*). În paragrafele care urmează sînt descrise cele mai importante tipuri de funcții integrabile prin metode elementare și procedeele prin care se găsesc integralele lor nedefinite.

Fracții raționale $R(x)$, **descompunerea în fracții simple.** Deoarece orice funcție putere cu exponent întreg este integrabilă, rezultă că orice fracție rațională de forma $A(x - x_1)^k$, k întreg, este integrabilă. După cum s-a arătat în capitolul despre funcții orice fracție rațională se poate descompune într-o sumă de fracții simple; acestea fiind integrabile, integrala fracției raționale va fi deci suma integralelor fracțiilor simple. Fracțiile simple sînt de forma

$$\frac{A}{x - x_1}, \quad \frac{A}{(x - x_1)^k}, \quad \frac{Ax + B}{x^2 + px + q}, \quad \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k} \quad \text{cu } p^2 < 4q \text{ și } A \neq 0.$$

Integralele primelor două fracții simple rezultă imediat din tabela primitivelor, numitorul celorlalte două fracții simple se descompune într-o sumă $Ax + B = \frac{A}{2}(2x + p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)$. Din primul termen al acestei sume rezultă o funcție de forma $\frac{\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^k}$ care este integrabilă.

$$\int \frac{A}{x - x_1} dx = A \ln|x - x_1| + C; \quad \int \frac{A\,dx}{(x - x_1)^k} = -\frac{A}{(k-1)(x - x_1)^{k-1}} + C$$

Rămîne de arătat că funcția $\frac{1}{(x^2 + px + q)^k}$ este integrabilă pentru orice $k = 1, 2, \ldots$

Pentru $k = 1$ numitorul $x^2 + px + q$ se poate scrie $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$. Prin substituția $x + \frac{p}{2} = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \cdot u$, $dx = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\, du$ se obține

$$\frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \int \frac{du}{u^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} u.$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C$$

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx = \frac{A}{2} \ln|x^2 + px + q| + \frac{2B - Ap}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C$$

Pentru $k > 1$ se obține o formulă de recurență

$$\int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^k} = \frac{c_1 x + c_2}{(x^2 + px + q)^{k-1}} + c_3 \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^{k-1}},$$

în care c_1, c_2, c_3 se determină prin egalarea coeficienților acelorași puteri ale lui x în relația obținută prin derivare și înmulțire cu $(x^2 + px + q)^k$:

$$1 = -(k - 1)(c_1 x + c_2)(2x + p) + (c_1 + c_3)(x^2 + px + q).$$

Coeficienții lui x^2: $-2c_1(k - 1) + c_1 + c_3 = 0.$

Coeficienții lui x: $-2c_2(k - 1) - c_1 p(k - 1) + (c_1 + c_3)p = 0.$

Termen liber: $-c_2 p(k - 1) + (c_1 + c_3) q = 1.$

Se obțin: $c_1 = \frac{2}{(k - 1)(4q - p^2)}$, $c_2 = \frac{p}{(k - 1)(4q - p^2)}$, $c_3 = \frac{2(2k - 3)}{(k - 1)(4q - p^2)}$.

$$\int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^k} = \frac{2x + p}{(k - 1)(4q - p^2)(x^2 + px + q)^{k-1}} + \frac{2(2k - 3)}{(k - 1)(4q - p^2)} \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^{k-1}}$$

Rezultate asemănătoare se obțin și cînd numitorul este de forma $(ax^2 + bx + c)^k$.

$$\int \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^k} dx = -\frac{A}{2a(k - 1)(ax^2 + bx + c)^{k-1}} + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right) \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^k}$$

$$\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^k} = \frac{2ax + b}{(k - 1)(4ac - b^2)(ax^2 + bx + c)^{k-1}} + \frac{2(2k - 3)a}{(k - 1)(4ac - b^2)} \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{k-1}}$$

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} + C, \text{ pentru } b^2 - 4ac < 0$$

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \cdot \ln \left| \frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 + 4ac}} \right| + C, \text{ pentru } b^2 - 4ac > 0$$

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{-2}{2ax + b} + C, \text{ pentru } b^2 - 4ac = 0$$

Exemple. (Descompunerea în fracții simple se presupune cunoscută)

1. $\int \frac{4x^2 - 7x + 25}{x^3 - 6x^2 + 3x + 10}\,dx = 2\int \frac{dx}{x+1} - 3\int \frac{dx}{x-2} + 5\int \frac{dx}{x-5} =$

$= 2\ln|x+1| - 3\ln|x-2| + 5\ln|x-5| + C = \ln\left|\frac{(x+1)^2(x-5)^5}{(x-2)^3}\right| + C.$

2. $\int \frac{3x^2 - 20x + 20}{(x-2)^3(x-4)}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x-2} + 6\int \frac{dx}{(x-2)^2} + 4\int \frac{dx}{(x-2)^3} - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x-4} =$

$= \frac{3}{2}\ln|x-2| - \frac{6}{x-2} - \frac{2}{(x-2)^2} - \frac{3}{2}\ln|x-4| + C = \frac{2(5-3x)}{(x-2)^2} +$

$+ 3\ln\sqrt{\frac{x-2}{x-4}} + C.$

3. $\int \frac{3x^2 - 3x - 10}{x^3 - 5x^2 + 11x - 15}\,dx = \int \frac{dx}{x-3} + \int \frac{2x+5}{x^2-2x+5}\,dx = \ln|x-3| +$

$+ \ln|x^2-2x+5| + \frac{7}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2} + C = \ln|(x-3)(x^2-2x+5)| + \frac{7}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2} + C.$

4. $\int \frac{-3x^3 + x - 4}{(x+1)(x^2+x+1)^2}\,dx = -2\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{2x-3}{x^2+x+1}\,dx + \int \frac{8x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx =$

$= -2\ln|x+1| + \ln|x^2+x+1| - \frac{8}{3}\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{4}{x^2+x+1} - \frac{2x+1}{x^2+x+1} -$

$- \frac{4}{3}\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C = \ln\left|\frac{x^2+x+1}{(x+1)^2}\right| - 4\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{2x+5}{x^2+x+1} + C.$

Integrarea funcțiilor de formă $R(x, \sqrt[n]{ax+b})$ **sau** $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$. Aceste funcții sînt funcții raționale de x și de $\sqrt[n]{ax+b}$, respectiv $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$. Prin substituția $z = \sqrt[n]{ax+b}$ cu $x = \frac{z^n - b}{a}$, respectiv $z = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ cu $x = \frac{b - dz^n}{cz^n - a}$ se obțin funcții raționale în z care sînt integrabile. Pentru unele funcții R, ținînd seama de particularitățile lor se pot găsi metode mai simple de integrare.

Integrarea funcțiilor de forma $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$. În funcție de valorile coeficienților a, b și c se pot folosi diferite substituții care transformă aceste funcții în funcții raționale de o nouă variabilă z.

1. Dacă a și ax^2+bx+c sînt pozitive iar $b^2-4ac \neq 0$, se face substituția $\sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a} + z$.

2. Dacă c nu este negativ, se folosește substituția $\sqrt{ax^2+bx+c} = xz + \sqrt{c}$.

3. Dacă a este negativ și ecuația $ax^2+bx+c = 0$ are rădăcini reale și distincte x_1 și x_2, se folosește substituția $\sqrt{ax^2+bx+c} = z(x - x_1)$.

$I = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left\|\frac{2ax+b}{2\sqrt{a}} + \sqrt{ax^2+bx+c}\right\|$		$+C$ pentru $a>0$, $b^2-4ac\neq 0$
$I = -\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}} + C$ pentru $a<0$, $b^2-4ac>0$	$I = \frac{1}{\sqrt{a}}\arcsin\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C$ pentru $a>0$, $b^2-4ac<0$	$I = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln(2ax+b) + C$ pentru $a>0$, $b^2-4ac=0$

O altă metodă de calcul a acestor integrale constă în transformarea funcției de sub radical într-o sumă sau diferență de pătrate:

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

și transformarea în funcții raționale prin folosirea unor substituții ce conțin funcții trigonometrice sau hiperbolice.

Integrala	Substituția
$\int R(x, \sqrt{\alpha^2 - x^2})\,dx$	$x = \sin z$
$\int R(x, \sqrt{\alpha^2 + x^2})\,dx$	$x = \alpha \operatorname{sh} z$
$\int R(x, \sqrt{x^2 - \alpha^2})\,dx$	$x = \alpha \operatorname{ch} z$

Exemple. 1. Prin substituția $x = \sin z$, $dx = \cos z\,dz$, $z = \arcsin x$ se obține

$$\int\sqrt{1 - x^2}\,dx = \int\sqrt{1 - \sin^2 z}\cos z\,dz = \int\cos^2 z\,dz = \frac{1}{2}(z + \sin z\cos z) + C =$$
$$= \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1 - x^2}) + C.$$

2. Prin $x = r\sin z$, $dx = r\cos z\,dz$ se obține

$$\int\sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(r^2\arcsin\frac{x}{r} + x\sqrt{r^2 - x^2}\right) + C.$$

Integrala	Soluția	Substituția
$\int\sqrt{1 + x^2}\,dx$	$\frac{1}{2}(\operatorname{argsh} x + x\sqrt{1 + x^2}) + C$	$x = \operatorname{sh} z$
$\int\sqrt{a^2 + x^2}\,dx$	$\pm\frac{a^2}{2}\operatorname{argsh}\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + C;\ a \lessgtr 0$	$x = a\operatorname{sh} z$
$\int\frac{dx}{a^2 - b^2x^2}$	$\frac{1}{ab}\operatorname{argth}\frac{bx}{a} + C$ pentru $\lvert x\rvert < \left\lvert\frac{a}{b}\right\rvert$	$x = \frac{a}{b}\operatorname{th} z$

Integrarea funcțiilor de forma $R(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x)$. Transformarea într-o funcție rațională de z se face cu ajutorul substituției $z = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2z}{1 + z^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2z}{1 - z^2},$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1 - z^2}{2z}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1 + z^2}{2}, \quad \frac{dx}{dz} = \frac{2}{1 + z^2}.$$

$$\int R(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x)\,dx = \int R\left(\frac{2z}{1+z^2}, \frac{1-z^2}{1+z^2}, \frac{2z}{1-z^2}, \frac{1-z^2}{2z}\right)\frac{2\,dz}{1+z^2}$$

Exemple. 1. $\int \frac{dx}{\sin x} = 2\int \frac{1+z^2}{2z(1+z^2)}\,dz = \int \frac{dz}{z} = \ln(cz) = \ln\left(c\cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right).$

$$2. \int \frac{1-\sin x}{\sin x(1-\cos x)}\,dx = \int \frac{\left(1-\frac{2z}{1+z^2}\right)\frac{2}{1+z^2}}{\frac{2z}{1+z^2}\left(1-\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)}\,dz = \frac{1}{2}\int \frac{z^2-2z+1}{z^3}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{z}-\frac{2}{z^2}+\frac{1}{z^3}\right)dz = \frac{1}{2}\left[\ln|z| + \frac{2}{z} - \frac{1}{2z^2}\right] + C =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + 2\operatorname{cotg}\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{cotg}^2\frac{x}{2}\right] + C.$$

Integrarea funcțiilor de forma $R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x, \operatorname{th} x, \operatorname{cth} x)$. Din definiția funcțiilor hiperbolice rezultă că prin substituția $e^x = t$ aceste funcții se transformă în funcții raționale de exemplu $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$. Prin analogie cu funcțiile trigonometrice se poate folosi și substituția $z = \operatorname{th}\frac{x}{2}$:

$$\operatorname{sh} x = 2\operatorname{sh}\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{2} = \frac{2\operatorname{th}\frac{x}{2}\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}-\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}} = \frac{2z}{1-z^2},$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}+\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}-\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}} = \frac{1+z^2}{1-z^2},$$

$$\operatorname{th} x = \frac{2\operatorname{th}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{th}^2\frac{x}{2}} = \frac{2z}{1+z^2}, \qquad \operatorname{cth} x = \frac{1+z^2}{2z},$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}} = \frac{\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}-\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-z^2}{2}, \qquad \frac{dx}{dz} = \frac{2}{1-z^2}.$$

Integrale binome $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$, a, b **numere reale și** m, n, p **numere raționale.** P.L. Cebîșev (1821–1894) a demonstrat că aceste integrale se pot exprima prin funcții elementare atunci cînd cel puțin unul din numerele p, $\frac{m+1}{n}$ sau $\frac{m+1}{n}+p$ sînt întregi.

Dacă p este întreg, atunci integrala devine o sumă de integrale de puteri cu exponent rațional. Dacă $\frac{m+1}{n}$ este întreg și $p = \frac{s}{r}$, se folosește substituția $z = \sqrt[r]{a+bx^n}$; în cazul $\frac{m+1}{n} + p$ întreg, se face substituția $z = \sqrt[r]{\frac{a+bx^n}{x^n}}$.

Integrale care nu se pot exprima prin funcții elementare

Cînd se calculează lungimea arcului de elipsă, la studiul oscilației pendulului și în alte probleme apar *integrale eliptice*. Acestea sînt integrale pentru care funcția de sub semnul integral este rădăcina pătrată dintr-un polinom de gradul al treilea sau al patrulea fără rădăcini multiple. Joseph Liouville (1809—1882) a arătat că aceste integrale nu se pot reprezenta sub formă finită prin funcții elementare. Din categoria acestora fac parte unele integrale de formă aparent simplă ca de exemplu $\int \frac{dx}{\sqrt{\cos\alpha - \cos x}}$, $\int \frac{\sin x\, dx}{x}$ sau $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

Integrale eliptice de speța I și a II-a	$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$, $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$, $0 < k^2 < 1$,

Nu înseamnă că aceste integrale sînt lipsite de sens; ca integrale de funcții continue, ele sînt funcții continue de limita superioară de integrare. În analiză, integralele care nu se pot exprima prin funcții elementare se numesc *funcții neelementare*. Aceste integrale se calculează de regulă prin dezvoltarea în serie a funcției de sub semnul integral și integrare termen cu termen (vezi cap. 21).

Dacă seria $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ este uniform convergentă în intervalul $a \leqslant x \leqslant b$ și fiecare termen al ei este o funcție integrabilă, atunci seria obținută prin integrare termen cu termen este de asemenea convergentă în $[a, b]$.

În capitolul „Serii de funcții" sînt date dezvoltările în serie pentru integrala erorilor a lui Gauss, sinusul integral, cosinusul integral și logaritmul integral.

20.3. Integrarea funcțiilor de mai multe variabile

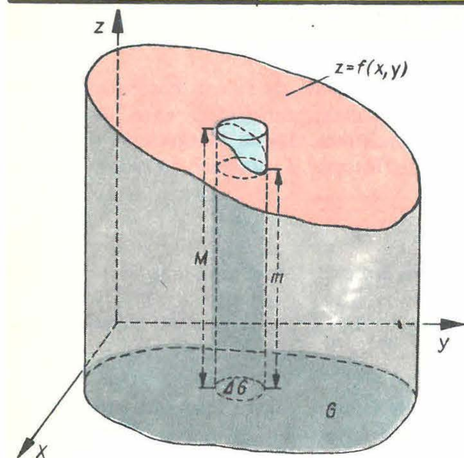
Funcțiile de o variabilă se integrează în intervalul $[a, b]$ al axei abscisei; o funcție de mai multe variabile se poate integra în domenii aflate în spații cu mai multe dimensiuni. Se ajunge astfel la integrale multiple care în spațiul cu două dimensiuni se numesc integrale duble, în spații cu trei dimensiuni integrale triple ș.a.m.d. De asemenea, într-un spațiu cu două dimensiuni, o curbă poate fi considerată ca un spațiu cu o dimensiune, în spațiul cu trei dimensiuni o curbă strîmbă este un subspațiu cu o dimensiune și o suprafață un subspațiu cu două dimensiuni. Și pe astfel de subspații se pot defini funcții și integrale ale acestor funcții. Integrala de-a lungul unei curbe plane sau strîmbe este *integrală curbilinie* iar integrala pe o suprafață se numește *integrală de suprafață*.

Integrale multiple (duble)

Integrala dublă. Integrala definită s-a introdus ca limită a unor sume de produse în care un factor este lungimea unui interval de diviziune, Δx_i și celălalt valoarea ordonatei $f(\xi)$ (ξ' fiind un punct din acest interval), cînd numărul n al intervalelor diviziunii crește nemărginit și deci lungimea intervalului de diviziune tinde la zero. În locul intervalului $[a, b]$ se va considera acum un domeniu G cuprins în domeniul de definiție al funcției de două variabile $z = f(x, y)$ și se împarte acest domeniu în n subdomenii G_i de arii $\Delta G_i, \bigcup G_i = G$, $G_i \cap G_j = 0$, $i = 1, 2, ..., n$.

Se presupune funcția mărginită în G și fie $\gamma_i = \inf\limits_{(x, y) \in G_i} f(x, y)$ și $\Gamma_i = \sup\limits_{(x, y) \in G_i} f(x, y)$. Se formează cu ajutorul acestor mărimi sumele integrale inferioară, respectiv superioară. Atunci cînd se folosesc diviziuni din ce în ce mai fine, în anumite condiții de regularitate impuse funcției f (de exemplu continuitate) cînd $n \to \infty$ șirul sumelor integrale superioare și șirul sumelor integrale inferioare tind către aceeași limită. Tot către aceeași limită tinde și șirul sumelor $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta G_i$ independent de alegerea punctului (ξ_i, η_i) în subdomeniul G_i. Această limită comună a șirurilor menționate mai sus se numește *integrala dublă* a funcției $z = f(x, y)$ în domeniul G.

Integrala dublă	$\iint\limits_G f(x, y)\,dG = \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_i \Delta G_i = \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \Gamma_i \Delta G_i.$



20.3.1. Volumul determinat de suprafețele $z = f(x, y)$ și G

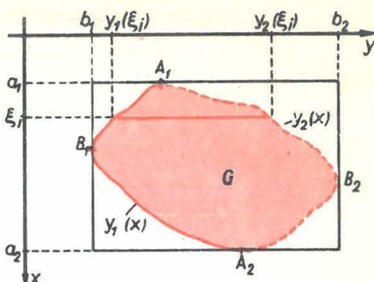
Dacă funcția $z = f(x, y)$ este mărginită în G și continuă pe porțiuni, atunci ea este integrabilă.

Interpretarea geometrică a integralei duble. Integrala simplă definită reprezintă aria mărginită de o curbă. În mod analog, integrala dublă a unei funcții de două variabile continue și pozitive în G, $z = f(x, y)$ poate fi interpretată ca volumul delimitat de suprafața $z = f(x, y)$ (fig. 20.3.1). ΔG_i sînt elemente de arie în planul xOy și pot fi exprimate în coordonate carteziene prin $dx\, dy$ iar în coordonate polare prin $r\, dr\, d\varphi$. În fiecare din aceste elemente de suprafață funcția își atinge valoarea minimă $\gamma = m_i$ și valoarea maximă $\Gamma_i = M_i$.

Fiecare produs $m_i\ \Delta G_i$ reprezintă volumul unui cilindru avînd ca bază pe G_i și ca înălțime pe m_i. În mod corespunzător, fiecare produs $M_i \Delta G_i$ reprezintă volumul unui cilindru (fig. 20.3.1) cu aceleași baze dar cu înălțimea M_i. Volumul V mărginit de suprafața $z = f(x, y)$ satisface atunci condiția $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\, \Delta G_i \leqslant \leqslant V \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} M_i \Delta G_i$. Trecînd la subdiviziuni pentru $n \to \infty$, șirul sumelor inferioare crește monoton și șirul sumelor superioare descrește monoton. Ambele șiruri vor avea aceeași limită deoarece diferența lor tinde la zero.

Calculul integralei duble. O integrală dublă se poate uneori calcula prin două integrări succesive în raport cu cele două variabile. Să presupunem că frontiera domeniului de integrare G are în comun cu dreptunghiul $a_1 \leqslant x \leqslant a_2$, $b_1 \leqslant y \leqslant b_2$ punctele A_1, A_2, B_1, B_2 (fig. 20.3.2).

Punctele A_1 și A_2 împart frontiera în două părți: $A_1B_1A_2$ care este imaginea funcției $y = y_1(x)$ și $A_1B_2A_2$ care este imaginea funcției $y = y_2(x)$. În mod analog, punctele B_1 și B_2 împart frontiera în părțile $B_1A_1B_2$ cu ecuația $x = x_1(y)$ și $B_1A_2B_2$ cu ecuația $x = x_2(y)$. Pentru $x = \xi_i$ fixat, $y_1(\xi_i)$ și $y_2(\xi_i)$ sînt extremitățile unui interval $y_1(\xi_i) \leqslant y \leqslant y_2(\xi_i)$ în care funcția de o variabilă $f(\xi_i, y)$ poate fi integrată. Valoarea integralei $\varphi(\xi_i) = \int_{y_1(\xi_1)}^{y_2(\xi_2)} f(\xi_i, y)\,dy$ este pentru valoarea fixă $x = \xi_i$ o constantă și pentru valori diferite $a_1 \leqslant x \leqslant a_2$ o funcție $\varphi(x)$ de x care în anumite condiții impuse frontierei domeniului este continuă. Pentru $y = \eta_1$ fixat, integrala $\psi(\eta_i) = \int_{x_1(\eta_1)}^{x_2(\eta_2)} f(x, \eta_1)\,dx$ este constantă iar pentru diferite valori ale lui y, o funcție continuă de y, $\psi(y)$. Se demonstrează că prin integrarea funcției $\varphi(x)$ în raport cu x cît și prin integrarea lui $\psi(y)$ în raport cu y se obține aceeași valoare și anume integrala dublă. Intuitiv acest lucru rezultă din aceea că $\varphi(x)$ și $\psi(y)$ reprezintă ariile secțiunilor paralele cu planul xz și respectiv yz, duse prin corpul mărginit de suprafața $z = f(x, y)$.



20.3.2. Descompunerea frontierei domeniului de integrare G

$$\iint_G f(x, y)\,dG = \int_{x=a_1}^{x=a_2} \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy \right) dx = \int_{y=b_1}^{y=b_2} \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,dx \right) dy$$

Pentru o funcție $\Phi(r, \varphi)$ dată în coordonate polare, elementul de arie dG are forma $dG = r\,dr\,d\varphi$ după cum reiese din calculul determinantului funcțional

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

$$\iint_G \Phi(r, \varphi)\,dG = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} \Phi(r, \varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

Exemplul 1. Se cere integrala dublă $\iint_G (x+y)\,dG$, G fiind domeniul delimitat de dreptele $x = 0$, $y = 1$ și $x + y = 3$ (fig. 20.3.3). Pentru x fixat, integrarea în raport cu y se face între limitele $y_1(x) = 1$ și $y_2(x) = 3 - x$:

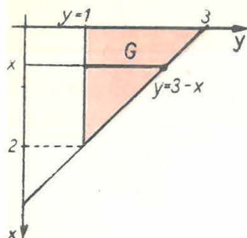
$$\varphi(x) = \int_1^{3-x} (x + y)\,dy = \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_1^{3-x} = x(3-x) + \frac{1}{2}(3 - x)^2 - \left(x + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 4 - x - \frac{1}{2}x^2.$$

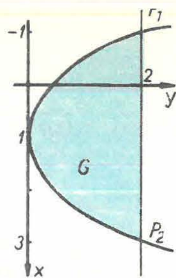
Funcția $\varphi(x)$ se integrează apoi în raport cu x. Limitele de integrare se obțin din $x = 3 - y$ pentru $y_1 = 3$ și $y_2 = 1$, $a_1 = x_1 = 0$ și $a_2 = x_2 = 2$. Valoarea integralei este

$$\int_0^2 \left(4 - x - \frac{1}{2}x^2\right) dx = \left[4x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right]_0^2 = 8 - 2 - \frac{4}{3} = \frac{14}{3};$$

$$\int_0^2 \int_1^{3-x} (x + y)\,dy\,dx = \frac{14}{3}.$$



20.3.3. Domeniul de integrare determinat de dreptele $x = 0$, $y = 1$ și $x + y = 3$



20.3.4. Domeniul de integrare determinat de curbele $(x - 1)^2 = 2y$ și $y = 2$

Exemplul 2. Domeniul de integrare G pentru integrala $\iint xy\,dG$ este delimitat de curbele $(x - 1)^2 = 2y$ și $y = 2$ care se intersectează în punctele $P_1(-1;\ 2)$ și $P_2(3;\ 2)$ (fig. 20.3.4). Frontiera lui G se va reprezenta deci cu ajutorul funcțiilor $y_1 = 2$ și $y_2 = \frac{1}{2}(x - 1)^2$, respectiv $x = 1 \pm \sqrt{2y}$.

Calculele se simplifică dacă se face întîi integrarea în raport cu x:

$$\int_{-\sqrt{2y}+1}^{+\sqrt{2y}+1} xy\,dx = \left[y\frac{x^2}{2}\right]_{-\sqrt{2y}+1}^{+\sqrt{2y}+1} = \frac{1}{2}y(\sqrt{2y}+1)^2 - \frac{1}{2}y(1-\sqrt{2y})^2 = 2\sqrt{2y^3};$$

$$2\sqrt{2}\int_0^2 \sqrt{y^3}\,dy = 2\sqrt{2}\left[\frac{2}{5}y^2\sqrt{y}\right]_0^2 = \frac{32}{5};\quad \int_0^2\int_{1-\sqrt{2y}}^{1+\sqrt{2y}} xy\,dx\,dy = \frac{32}{5}.$$

Schimbînd ordinea de integrare, se obțin

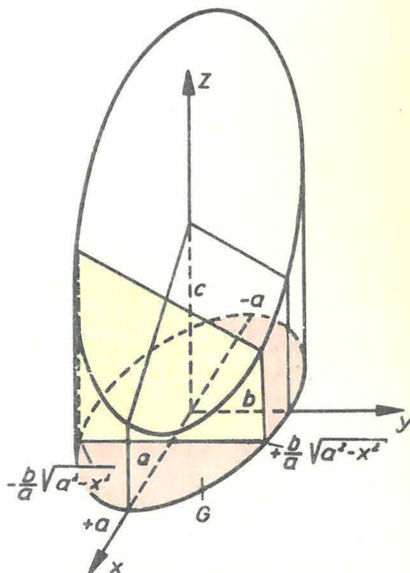
$$\int_{\frac{1}{2}(x-1)^2}^{2} xy\,dy = \left[x\frac{y^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}(x-1)^2}^{2} = 2x - \frac{1}{8}x(x-1)^4 =$$

$$= -\frac{1}{8}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 +$$

$$+ \frac{15}{8}x = \varphi(x),$$

$$\int_{-1}^{3}\varphi(x)\,dx = \left[-\frac{x^6}{48} + \frac{x^5}{10} - \frac{3x^4}{16} + \frac{x^3}{6} + \right.$$

$$\left. + \frac{15x^2}{16}\right]_{-1}^{3} = \frac{32}{5}.$$



20.3.5. Cilindru eliptic secționat oblic

Exemplul 3. Prin elipsa de ecuație $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ din planul xy trece un cilindru drept (fig. 20.3.5). Acesta este tăiat cu planul $z = f(x, y) = mx + ny + c$; c este astfel ales încît planul $z = f(x, y)$ să intersecteze planul xy în afara elipsei. Volumul acestui cilindru este dat de integrala dublă $\iint_G (mx + ny + c)dG$, unde domeniul G este mărginit de elipsa $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

Se obţine

$$V = \int_{-a}^{+a}\left[\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} (mx + ny + c)\, dy\right] dx =$$

$$= \int_{-a}^{+a}\left[mxy + \frac{ny^2}{2} + cy\right]_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dx =$$

$$= \int_{-a}^{+a} 2\frac{b}{a}(mx + c)\sqrt{a^2 - x^2}\, dx =$$

$$= 2\frac{b}{a}\left[m\int_{-a}^{+a} x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx + c\int_{-a}^{+a}\sqrt{a^2 - x^2}\, dx\right].$$

Prima integrală, cea cu factorul m, are valoarea 0 (integrala nedefinită se poate obţine cu ajutorul substituţiei $a^2 - x^2 = z$, $-2x\, dx = dz$). La fel integrala a doua se calculează cu ajutorul substituţiei $x = a \sin z$, $dx = a \cos z\, dz$ şi este egală cu $\frac{1}{2} a^2 c\pi$. Volumul V va fi deci $V = abc\pi$.

Integrale multiple

În acelaşi mod se pot defini integrale multiple, adică integrale ale funcţiilor de n variabile, $n>2$, pe domenii în spaţii n-dimensionale. Fie $f(x, y, z)$ o funcţie cu domeniul de definiţie R din spaţiul cu trei dimensiuni. Se consideră o diviziune a lui R, formată din mulţimile $R_i \subset R$, $\bigcup R_i = R$, $R_i \cap R_j = \emptyset$, $i \neq j$. Atunci se pot forma sumele integrale inferioare $\sum_{i=1}^{n} g_i \Delta R_i$, sumele integrale superioare $\sum_{i=1}^{n} G_i \Delta R_i$ şi sumele integrale $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, \Delta R_i$, unde $m_i = \inf f(x, y, z)$, $M_i = \sup f(x, y, z)$, $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in R_i$ şi ΔR_i este volumul lui R_i. Se va presupune din nou că funcţia f este mărginită. Dacă şirurile sumelor integrale inferioare şi superioare converg către aceeaşi limită, atunci şi şirul sumelor integrale va converge către aceeaşi limită care se numeşte *integrala triplă* a funcţiei $f(x, y, z)$ pe domeniul R.

Integrala triplă	$\iiint_R f(x, y, z)\, dR = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta R_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta R_i$

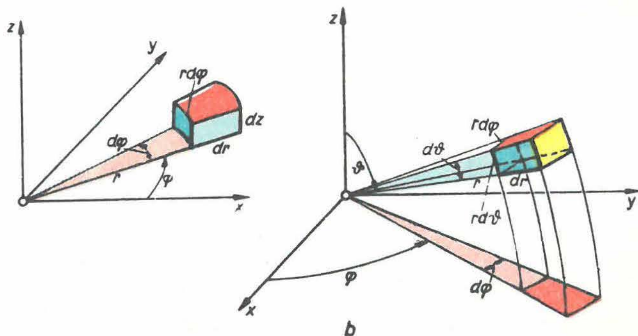
Cu toate că domeniul de integrare mai poate fi reprezentat geometric ca o porţiune a spaţiului, o interpretare geometrică a integralei nu mai este însă posibilă în acest caz. Din punct de vedere mecanic, integrala poate fi interpretată ca masă, $f(x, y, z)$ fiind considerată repartiţia densităţii în spaţiul R. În cazul integralelor multiple, definite analog pentru funcţii de mai mult decît trei variabile, domeniului de integrare nu i se mai poate da o interpretare geometric intuitivă. Calculul integralelor multiple se poate de asemenea face prin integrare succesivă în raport cu fiecare din variabile. Limitele de integrare depind de forma frontierei lui R.

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dR = \int_{x=a_1}^{x=a_2}\left\{\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\right] dy\right\} dx$$

Transformarea integralelor multiple. În multe cazuri este avantajos să se raporteze spaţiul R nu la un sistem de coordonate carteziene ci la un alt sistem de coordonate. Sistemele de coordonate folosite cel mai frecvent sînt sistemele de coordonate polare, cilindrice şi sferice.

Pe figura 20.3.6, sînt date reprezentările elementului de volum ΔR în coordonate cilindrice și sferice. Pentru deducerea mărimii acestui element se ține seama de faptul că noile coordonate u, v, w sînt legate de cele vechi x, y, z prin funcțiile $x = x(u, v, w)$, $y=y(u, v, w)$ $z = z(u, v, w)$ univoce și derivabile, cu derivate parțiale continue. Cînd determinantul funcțional (jacobianul) $D(u, v, w)$ atașat acestei transformări nu este identic nul, atunci funcția $f(x, y, z)$ se transformă într-o funcție $F(u, v, w)$ de coordonatele u, v, w și elementul de volum $\mathrm{d}R$ se

$$D(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$



20.3.6. Element de volum:
a — în coordonate cilindrice; *b* — în coordonate sferice

transformă în $|D|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$. Pentru *coordonate cilindrice* $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$, iar pentru *coordonate sferice* $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ cu determinanții funcționali corespunzători D_c și D_s:

$$D_c = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \qquad D_s = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix},$$

adică $D_c = r$ și $D_s = r^2\sin\theta$ și deci $\mathrm{d}R$ se transformă în $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$, respectiv $r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$.

$$\iiint_R f(x, y, z)\,\mathrm{d}R = \int_{z_1}^{z_2}\int_{\varphi_1(z)}^{\varphi_2(z)}\int_{r_1(\varphi, z)}^{r_2(\varphi, z)} F(r, \varphi, z)\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z =$$

$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)}\int_{r_1(\theta, \varphi)}^{r_2(\theta, \varphi)} \varphi(r, \theta, \varphi)\, r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

Calculul volumelor

Volumul V al unui corp poate fi calculat prin metodele calculului integral în mai multe moduri. Unul dintre aceste moduri constă în calculul integralei triple $\iiint_R \mathrm{d}R = V$, unde $\mathrm{d}R$ este elementul de volum, justificarea fizică intuitivă a acestei metode rezultă din considerarea funcției $f(x, y, z)$ care reprezintă densitatea, identic egală cu 1. Forma suprafeței care mărginește volumul considerat se reflectă în limitele de integrare.

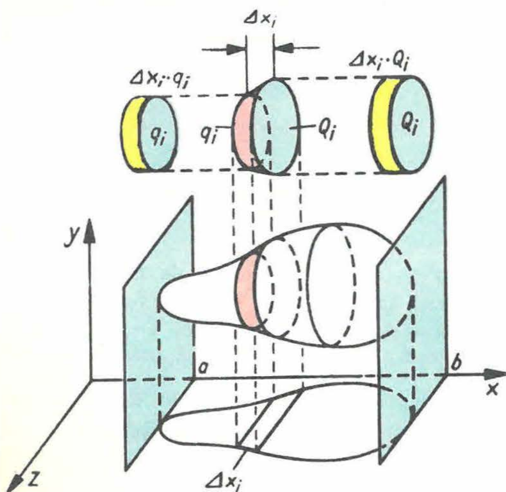
Cu ajutorul integralei duble $\iint_G f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ se calculează volumul corpului care se găsește dedesubtul suprafeței $z = f(x, y)$. Funcția $z = f(x, y)$ pune în corespondență fiecărui punct (x, y) din planul xy, coordonata celei de-a treia dimensiuni. Similar cu procedeele folosite în cazul cvadraturilor, volumul corpurilor cu forme speciale (de exemplu cele asemănătoare cu elipsoizi) se poate calcula ca diferența a două integrale duble ale funcțiilor $g(x\ y)$ și $h(x, y)$ convenabil alese. În special pentru corpurile de rotație este indicat calculul volumului cu ajutorul suprafeței de secțiune $q(x)$.

Calculul volumelor cu ajutorul secțiunilor. Corpul al cărui volum se calculează se raportează la un sistem de axe de coordonate astfel încît să se găsească între două plane perpendiculare pe axa Ox: $x = a$ și $x = b$. Toate planele perpendiculare pe axa Ox intersectează corpul după o suprafață de secțiune a cărei arie $q(x)$ este o funcție cunoscută, continuă de variabila x. Atunci ne putem reprezenta corpul alcătuit din felii de grosimea Δx_i (fig. 20.3.7). Volumul fiecărei felii este cuprins între volumul cilindrului avînd baza secțiunea cu aria cea mai mică q_i și înălțimea Δx_i și volumul cilindrului cu baza secțiunea cu aria cea mai mare Q_i și înălțimea Δx_i. Se obțin astfel pentru volumul corpului V un șir de sume integrale inferioare $v(n)$ și un șir de sume integrale superioare $V(n)$:

$$v(n) = \sum_{i=1}^{n} q_i\Delta x_i \leqslant V \leqslant \sum_{i=1}^{n} Q_i\Delta x_i = V(n)$$

care tind către aceeași limită atunci cînd n crește. Astfel volumul V poate fi reprezentat printr-o integrală definită

$$V = \int_b^a q(x)\mathrm{d}x$$



20.3.7. Determinarea volumului unui corp

Principiul lui Cavalieri. Dacă există o altă funcție care exprimă aria secțiunii altui corp în intervalul $[a, b]$, $\bar{q}(x)$, care pentru orice abscisă să coincidă cu $q(x)$, $\bar{q}(x) \equiv q(x)$, atunci volumele V și $\bar{V}'$ sînt egale. Acesta este conținutul principiului fundamentat de Francesco Bonaventura CAVALIERI (1598 — 1647) încă înainte de descoperirea calcului integral.

Două corpuri au volume egale atunci cînd secțiunile duse la distanțe egale de un plan fix au arii egale.

Volumul corpurilor de rotație. Suprafața unui corp de rotație este generată prin rotația unei curbe reprezentate prin ecuația $y = f(x)$ sau a curbei reprezentate prin funcția inversă $x=\varphi(y)$, în jurul axei Ox, respectiv Oy. Sfera rezultă prin rotația unui cerc în jurul oricăreia dintre cele două axe. Dimpotrivă, forma elipsoidului de rotație depinde de axa în jurul căreia s-a rotit o elipsă. Cînd un corp este generat prin rotația unei suprafețe plane, mărginită de porțiuni de curbe, atunci se calculează în general volumele generate de fiecare curbă și se procedează apoi prin însumare. De asemenea, analog cu calculul ariei mărginite de două curbe, volumul rezultat se poate obține și prin integrarea diferenței pătratelor a două funcții convenabil alese

$$\pi\int_{x_1}^{x_2}\{[g(x)]^2 - [h(x)]^2\}\,\mathrm{d}x.$$

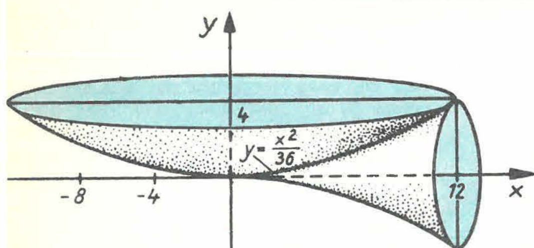
Axa de rotație	Aria secțiunii	Volumul
axa Ox	$q(x) = \pi\,[f(x)]^2$	$V_x=\pi\int_{x_1}^{x_2}[f(x)]^2\,\mathrm{d}x$
axa Oy	$q(y) = \pi[\varphi(y)]^2$	$V_y=\pi\int_{y_1}^{y_2}[(\varphi(y)]^2\mathrm{d}y$

Exemplul 1. Curba reprezentată de funcția $y = f(x) = \dfrac{x^2}{36}$ se rotește între limitele $x_1 = 0$ și $x_2 = 12$: a) în jurul axei Ox, b) în jurul axei Oy. Volumele corpurilor de rotație obținute vor fi (fig. 20.3.8)

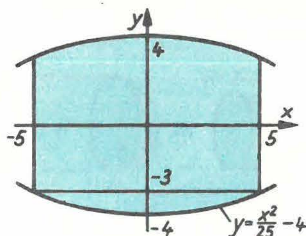
$$\text{a)}\ V_x = \pi\int_{x_1}^{x_2}[f(x)]^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^{12}\frac{x^4}{1296}\,\mathrm{d}x = \frac{192}{5}\pi \approx 120{,}6.$$

b) Deoarece $x = \varphi(y) = 6\sqrt{y}$ și $y_1 = f(0) = 0$, $y_2 = f(12) = 4$, se obține

$$V_y = \pi \int_{y_1}^{y_2} [\varphi(y)]^2 \, dy = \pi \int_0^4 36y \, dy = 288\pi \approx 904{,}8.$$



20.3.8. Rotația în jurul axei Ox și în jurul axei Oy



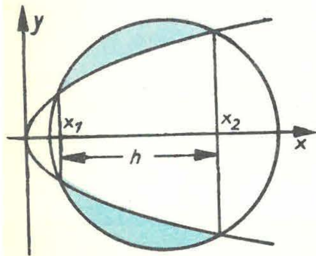
20.3.9. Paraboloid de rotație

Exemplul 2. Un butoi este generat prin rotația unei porțiuni a parabolei $y = ax^2 + c$ în jurul axei Ox. Lungimea butoiului este de 1 metru și diametrele celor două baze de 60 cm, respectiv 90 cm (fig. 20.3.9).

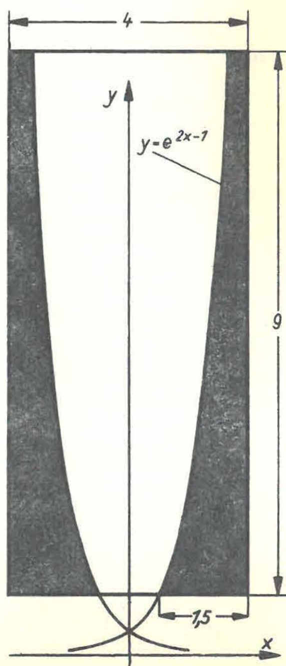
Constantele care intervin în ecuația parabolei și limitele de integrare se obțin din dimensiunile indicate pe figură: $y = \frac{x^2}{25} - 4$; $x_1 = -5$, $x_2 = 5$, de unde se obține volumul

$$V_x = \pi \int_{-5}^{5} \left(\frac{x^4}{25^2} - \frac{8x^2}{25} + 16 \right) dx = 2\pi \int_0^5 \left(\frac{x^4}{25^2} - \frac{8x^2}{25} + 16 \right) dx \approx 425{,}2.$$

Exemplul 3. Parabola $y^2 = 2px$ se intersectează cu cercul $y^2 = r^2 - (x-c)^2$ în punctele de abscisele x_1 și x_2 (fig. 20.3.10). Cînd se rotește în jurul axei Ox suprafața colorată albastru pe



20.3.10. Inel sferic parabolic



20.3.11. Rotația în jurul axei Oy

figură, aceasta descrie un inel sferic parabolic cu înălțimea $h = x_2 - x_1$. Volumul acestuia se calculează cu formula

$$V_x = \pi \int_{x_1}^{x_2} 2px \, dx - \pi \int_{x_1}^{x_2} [r^2 - (x-c)^2] \, dx =$$

$$= \pi \int_{x_1}^{x_2} [2px - r^2 + (x-c)^2] \, dx.$$

Deoarece funcția de sub semnul integral se anulează în punctele x_1 și x_2 și x^2 are coeficientul 1, se poate scrie $2px - r^2 + (x-c)^2 = (x-x_1)(x-x_2)$. Atunci $V_x = \pi \int_{x_1}^{x_2} (x-x_1)(x-x_2) \, dx$ și făcînd substituția $x - x_1 = t$,

$$V_x = \pi \int_0^h t(h-t) \, dt = \frac{\pi}{6} h^3.$$

Același rezultat se obține și în cazul inelului sferic cilindric.

Exemplul 4. Partea interioară, goală a unui cilindru din oțel este obținută prin rotația curbei $y = e^{2x-1}$ în jurul axei Oy. Volumul acestei părți se obține cu formula $V_y = \pi \int_{y_1}^{y_2} x^2 \, dy$. Limitele de integrare se obțin din dimensiunile arătate pe figura 20.3.11, deci $y_1 = 1$ și $y_2 = 10$. Rezolvînd în raport cu x, se obține

$$x^2 = \frac{1}{4} (\ln^2 y + 2 \ln y + 1).$$

Volumul căutat va fi

$$V_y = \frac{\pi}{4} \int_1^{10} (\ln^2 y + 2 \ln y + 1) \, dy = \frac{\pi}{4} [y \ln^2 y + y]_1^{10} \approx 48{,}73.$$

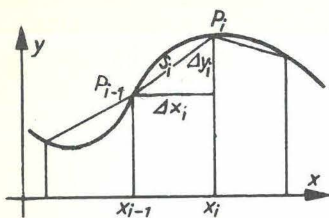
Calculul lungimii curbelor și al ariilor suprafețelor

Calculul lungimii curbelor se mai numește *rectificare* iar calculul ariilor suprafețelor ce mărginesc unele corpuri — *complanare.*

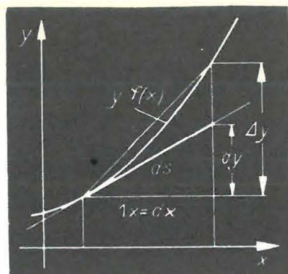
Lungimea arcelor. Orice pieton, biciclist sau conducător auto consideră normal să-și măsoare drumul între două puncte în metri și kilometri chiar cînd acesta este curbiliniu. De-a lungul oricărei curbe plane sau în spațiu, se poate așeza un fir subțire neextensibil a cărui lungime se consideră a fi lungimea porțiunii de curbă măsurate. Pentru a preciza această reprezentare să considerăm curba împărțită în n părți prin punctele de diviziune $P_0, \ldots, P_n$ și să aproximăm curba prin linia poligonală obținută prin unirea acestor puncte; aproximarea este cu atît mai bună cu cît numărul punctelor de diviziune este mai mare. Dacă coordonatele punctului de diviziune P_i se notează cu (x_i, y_i), $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, lungimea s_i a coardei $P_{i-1}P_i$ se obține din teorema lui Pitagora $s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \Delta x_i \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}$ iar lungimea liniei poligonale va fi $s_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_1}\right)^2} \Delta x_i$. După teorema lui Lagrange din calculul diferențial, există în intervalul $x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i$ un punct ξ_i astfel încît raportul $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$ este egal cu $f'(\xi_i)$ și deci $s_i = \Delta x_i \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}$.

Lungimea arcului	În coordonate carteziene rectangulare	$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} \, dx$
	În reprezentare parametrică	$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \, dt$
	În coordonate polare	$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right) + r^2} \, d\varphi$

Fiecărei diviziuni a intervalului $[a, b]$, $x_0 = a_i$, $x_n = b$, îi corespunde o linie poligonală de lungime s_n. Uneori, atunci cînd se folosesc diviziuni din ce în ce mai fine astfel încît cel mai mare interval de diviziune Δx_i tinde la zero cînd n tinde la infinit, șirul lungimilor liniilor poligonale s_n are o limită (fig. 20.3.12). Această limită este lungimea arcului de curbă considerat.



20.3.12. Lungimea arcului unei curbe plane



20.3.13. Element de arc

În cazul cînd limita există, curba se numește *rectificabilă*. Deci lungimea arcului de curbă se definește ca o integrală. Sub radical în expresia funcției de sub semnul integral se găsește pătratul derivatei funcției $y = f(x)$. De aici rezultă o condiție necesară de rectificabilitate ca funcția $f(x)$ să aibă derivata continuă cel puțin pe porțiuni. Se spune în acest caz că curba este netedă pe porțiuni.

Elemente de arc. Cînd limita inferioară de integrare este fixă și limita superioară variabilă, atunci lungimea arcului este funcție de limita superioară, $s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + y'^2}\, dx$. Diferențiala d$s$ a acestei funcții se numește element de arc al curbei (fig. 20.3.13). Lungimea arcului de curbă este deci integrala elementului de arc.

Element de arc	$ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$

Exemplul 1. Pentru aflarea lungimii s a cercului se obține

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}; \quad y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}};$$

$$1 + y'^2 = \frac{r^2}{r^2 - x^2}; \quad s = 4\int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx = 4r\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} =$$

$$= 4r\,[\arcsin z]_0^1 = 2\pi r.$$

Exemplul 2. Din reprezentarea parametrică a cicloidei $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ se obțin derivatele $\dot{x} = a(1 - \cos t)$, $\dot{y} = a \sin t$ și elementul de arc

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt = \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\, dt = a\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\, dt =$$

$$= a\sqrt{2}\cdot\sqrt{1 - \cos t}\, dt = a\sqrt{2}\sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}}\, dt = 2a \sin\frac{t}{2}\, dt.$$

De aici se obține lungimea arcului

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt = -4a\left[\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8a.$$

Lungimea cicloidei este egală cu de patru ori diametrul cercului care generează cicloida prin rostogolire.

Calculul ariei suprafeţelor. Fie P_1 şi P_n punctele curbei $y = f(x)$ corespunzătoare lui $x_1 = a$ şi $x_n = b$. Porţiunea din curbă care se găseşte între aceste puncte descrie printr-o rotaţie în jurul axei Ox suprafaţa laterală a unui corp de rotaţie. Considerînd linia poligonală formată din $n - 1$ coarde, introdusă pentru deducerea lungimii arcului, această linie descrie prin rotaţie o sumă de suprafeţe laterale ale unor trunchiuri de con. Din formula ariei laterale a trunchiului de con $\pi s(r_1 + r_2)$ se obţine

$$M_{K_\nu} = \pi [f(x_\nu) + f(x_{\nu+1})] \sqrt{(\Delta x_\nu)^2 + (\Delta y_\nu)^2} = \pi [f(x_\nu) + f(x_{\nu+1})] \Delta x_\nu \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_\nu}{\Delta x_\nu}\right)^2}$$

Din teorema lui Lagrange a calculului diferenţial rezultă în intervalul $(x_{\nu-1}, x_\nu)$ o valoare ξ_ν în care derivata $f'(\xi_\nu)$ este egală cu raportul $\frac{\Delta y_\nu}{\Delta x_\nu}$. Suma ariilor laterale ale trunchiurilor de con va fi

$$M_K = \pi \sum_{\nu=1}^{n-1} [(f(x_\nu) + f(x_{\nu+1})] \sqrt{1 + [f'(\xi_\nu)]^2}\, \Delta x_\nu.$$

Prin creşterea numărului punctelor de diviziune ale intervalului $a \leqslant x \leqslant b$ suma ariilor trunchiurilor de con dă o aproximare mai bună a ariei laterale a corpului de rotaţie. Dacă curba este rectificabilă cînd $n \to \infty$ şi $\Delta x_\nu \to 0$, şirul sumelor ariilor laterale ale trunchiului de con are ca limită o integrală definită. Factorul 2 apare deoarece prin trecerea la limită $f(x_\nu)$ cît şi $f(x_{\nu+1})$ tind către $f(x)$. Folosind expresia elementului de arc, se obţine $M = 2\pi \int_{s_1}^{s_2} y\, ds$.

Aria laterală a unui corp de rotaţie	$M = 2\pi \int_b^a y \sqrt{1 + y'^2}\, dx$

Exemplu. Se cer formulele pentru aria sferei, calotei sferice şi zonei sferice

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}; \quad 1 + y'^2 = \frac{r^2}{r^2 - x^2}.$$

Aria sferei $O = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \frac{r\, dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 4\pi r \int_0^r dx = [4\pi r x]_0^r = 4\pi r^2.$

Aria calotei $M = 2\pi r \int_\xi^r dx = [2\pi r x]_\xi^r = 2\pi r (r - \xi) = 2\pi r h$, unde $h = r - \xi$.

Aria zonei $M_z = 2\pi r \int_{\xi_1}^{\xi_2} dx = [2\pi r x]_{\xi_1}^{\xi_2} = 2\pi r(\xi_2 - \xi_1) = 2\pi r h$, unde $h = \xi_2 - \xi_1$.

Integrale curbilinii şi integrale de suprafaţă

Integrale curbilinii. Pentru înţelegerea unor noţiuni din fizică şi tehnică, de exemplu lucru mecanic şi potenţial, este necesar să se generalizeze noţiunea de integrală în modul următor: se consideră limite de sume, ale căror termeni depind într-un anumit mod de o curbă, de un drum. Se ajunge astfel la noţiunea de *integrală curbilinie*.

Fie în spaţiul cu trei dimensiuni o curbă C dată în reprezentarea parametrică prin funcţiile $x = x(s)$, $y = y(s)$ şi $z = z(s)$, presupuse cu derivate de ordinul întîi continue. Se poate alege ca parametru lungimea arcului s. Fie de asemenea definită pe porţiunea de curbă AB

care corespunde parametrilor din intervalul $\sigma_1 \leqslant s \leqslant \sigma_2$ o funcție continuă $f(x, y, z)$ prin care fiecărui punct $P_i(x_i, y_i, z_i)$, al curbei C corespunzător parametrului $s_i \in [\sigma_1, \sigma_2]$ i se pune în corespondență valoarea $f(x_i, y_i, z_i)$; deoarece $f(x, y, z) = f[x(s), y(s), z(s)]$, această funcție va fi de asemenea o funcție de parametrul s. Dacă se împarte arcul AB prin $n - 1$ puncte arbitrare în n arce sau, ceea ce este echivalent, se împarte intervalul $[\sigma_1, \sigma_2]$ în subintervale s_i de lungime Δs_i $(i = 1, 2, ..., n)$ și se formează sumele $\sum_{i=1}^{n} f[x(s_i), y(s_i), z(s_i)] \Delta s_i$, unde s_i este un parametru din intervalul s_i, atunci se obține un șir de sume. Dacă acest șir are limită cînd lungimea celui mai mare interval de diviziune tinde la zero și $n \to \infty$ și această limită este independentă de modul de descompunere și de alegerea lui s_i, atunci această limită se numește integrala curbilinie a funcției $f(x, y, z)$ de-a lungul curbei C de la A la B.

Integrala curbilinie	$\int_C f(x, y, z) \mathrm{d}s = \lim_{\substack{\Delta s_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f[x(s_i), y(s_i), z(s_i)] \Delta s_i.$

Calculul integralei curbilinii se reduce la calculul integralei definite. Dacă $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ este o reprezentare parametrică oarecare a curbei C (arcul AB corespunzînd intervalului $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$), atunci ținînd seama de $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}$, rezultă

$$\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t_1} f[x(t), y(t), z(t)] \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t_1} f[x(t), y(t), z(t)] \cdot \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

Dacă $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ și $R(x, y, z)$ sînt funcții definite de-a lungul curbei C, atunci în mod analog se definesc integralele $\int_C P(x, y, z)\,\mathrm{d}x$; $\int_C Q(x, y, z)\,\mathrm{d}y$; $\int_C R(x, y, z)\,\mathrm{d}z$. De exemplu, prima dintre acestea se definește ca limită a șirului de sume $\sum_{i=1}^{n} P[x_i(s), y_i(s), z_i(s)] \Delta x_i$, unde Δx_i este proiecția diviziunii a i-a a arcului de curbă pe axa Ox. Cuprinzînd aceste trei integrale într-una singură, se obține *integrala curbilinie de* speța a doua:

$$\int [P(x, y, z)\,\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\,\mathrm{d}y + R(x, y, z)\,\mathrm{d}z].$$

Calculul acesteia este deosebit de simplu în cazul bidimensional. Are loc teorema

Dacă $P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y$ este diferențiala totală $\mathrm{d}F(x, y)$ a unei funcții $F(x, y)$, atunci valoarea integralei curbilinii $\int_C [P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y]$ este independentă de drum și depinde numai de limitele de integrare.

Această teoremă rezultă din

$$\int_C [P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y] = \int_C \mathrm{d}F(x, y) = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}F[x(t), y(t)] =$$

$$= F[x(t_1) y(t_1)] - F[x(t_0), y(t_0)] = F(x_1, y_1) - F(x_0, y_0)$$

și deci depinde numai de limite.

Rezultă că integrala curbilinie este nulă de-a lungul unei curbe închise care mărginește un domeniu simplu conex.

Următoarea teoremă, care se va da fără demonstrație, stabilește condițiile în care $P\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ este o diferențială totală.

O condiție necesară și în anumite condiții și suficientă pentru ca expresia $P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y$ să fie diferențiala unei funcții $F(x, y)$ este condiția de integrabilitate $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$,

În capitolul 22 se arată că atunci cînd $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ nu este o diferențială totală, atunci se poate găsi un factor $\mu(x, y)$ astfel încît produsul $\mu(x,y)\,(P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y) = \mathrm{d}F(x,y)$ să fie o diferențială totală.

Condiția de integrabilitate	$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

Exemplu. Pentru a calcula integrala $\int_C (x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y)$ de-a lungul parabolei $y = x^2$ între punctele $A(0; 0)$ și $B(2; 4)$ se ia x drept parametru. Atunci $\mathrm{d}y = 2x\,\mathrm{d}x$ și se obține

$$\int_C (x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y) = \int_0^2 (x\,\mathrm{d}x + x^2 \cdot 2x\,\mathrm{d}x) = \int_0^2 (x + 2x^3)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2}\right]_0^2 = 10.$$

Deoarece condiția de integrabilitate $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ este îndeplinită, integrala este independentă de curbă. Integrînd de-a lungul curbei $y = 4 \sin \frac{\pi x}{4}$ între punctele $A(0, 0)$ și $B(2, 4)$, se obține același rezultat.

Integrale de suprafață. După cum integrala curbilinie generalizează integrala definită simplă, integrala de suprafață este o generalizare analoagă a integralei duble în domenii plane. Fie S o suprafață netedă, mărginită de o curbă netedă pe porțiuni în spațiul cu trei dimensiuni, raportat la un sistem de coordonate carteziene (x, y, z); aici prin neted se înțelege că planul tangent în punctele interioare depinde în mod continuu de punctele de contact. Se consideră S dată în reprezentare parametrică (v. cap. 26) $x = x(u, v)$, unde parametrii u și v aparțin domeniului $U = \{u_1 \leqslant u \leqslant u_2,\ v_1 \leqslant v \leqslant v_2\}$ și fie $f(x, y, z)$ o funcție continuă definită pe S. Se împarte S în mici porțiuni S_i determinate printr-o rețea de curbe netede pe S, se aleg puncte arbitrare $P_i(x_i, y_i, z_i)$ în S_i și se formează sumele $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta S_i$, unde ΔS_i este aria suprafeței S_i. Dacă această sumă are o limită cînd $n \to \infty$ și $\Delta S_i \to 0$, independent de alegerea punctelor P_i, această limită este integrala de suprafață a funcției $f(x, y, z)$ extinsă la suprafața S și se notează prin $\int_S f(x, y, z)\,\mathrm{d}S$.

Integrala de suprafață	$\int_S f(x, y, z)\,\mathrm{d}S = \lim\limits_{\Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta S_i$

Calculul integralei de suprafață poate fi redus la acela al integralei duble în mod următor: se folosește reprezentarea parametrică a coordonatelor x, y, z în $f(x, y, z)$ astfel încît elementul de arie $\mathrm{d}S$ (v. cap. 26) are forma

$$\mathrm{d}S = \sqrt{EG - F^2}, \qquad \text{unde } E = x_u x_u, \quad F = x_u x_v, \quad G = x_v x_v.$$

Se obține astfel:

$$\int_S f(x, y, z)\, dS = \int_G f[x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)]\ \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

Pentru $f = 1$ integrala exprimă aria suprafeței S.

Integrala de suprafață de speța a doua se definește prin analogie cu integrala curbilinie de speța a doua.

Aplicații în mecanică

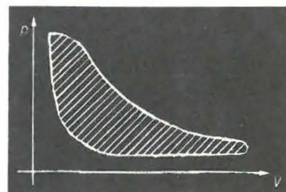
Lucru mecanic. Noțiunea de lucru mecanic efectuat de o forță se definește cu ajutorul integralei curbilinii. Forța $\boldsymbol{F}$ este un caz special de cîmp vectorial (vezi 20.4).

Fie F_x, F_y, F_z componentele forței $\boldsymbol{F}$ într-un sistem de coordonate carteziene x, y, z. Dacă punctul $P(x, y, z)$, în care este aplicată forța $\boldsymbol{F}$, se deplasează de-a lungul unei curbe netede C, atunci

$$W = \int_C (F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz)$$

este lucrul mecanic al forței $\boldsymbol{F}$ de-a lungul curbei C (fig. 20.3.14). Dacă se notează cu $d\boldsymbol{r}$ vectorul de componente dx, dy, dz, atunci lucrul mecanic poate fi scris sub forma vectorială ca produs scalar $\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$.

Lucrul mecanic este integrala curbilinie a forței.



20.3.14. Diagrama lucrului unei mașini cu aburi

Lucrul mecanic sub formă de integrală	$W = \int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$

De exemplu, dacă forța $\boldsymbol{F}$ este constantă și curba C este un segment ce pornește din origine, reprezentat prin vectorul $\boldsymbol{r}$ de lungime $|\boldsymbol{r}|$, atunci unghiul φ dintre direcțiile lui $\boldsymbol{F}$ și $\boldsymbol{r}$ este de asemenea cunoscut și integrala lucrului mecanic devine $W = |\boldsymbol{F}|\ |\boldsymbol{r}| \cos\varphi$; în acest caz, lucrul mecanic este produsul dintre componenta forței $|\boldsymbol{F}| \cos\varphi$ pe direcția curbei și lungimea curbei $|\boldsymbol{r}|$. În problemele de fizică, componentele forței sînt de regulă derivatele parțiale ale unei funcții V, numită *potențial*. Atunci lucrul mecanic este integrala curbilinie a unei diferențiale totale și depinde numai de extremitățile traiectoriei. Cîmpul forței se zice atunci *conservativ*.

Exemplul 1. Care este lucrul mecanic produs prin rotirea unui arc în formă de spirală avînd l unități de lungime, cînd forța acționează în direcția arcului? Dacă D este constanta arcului, atunci $F = Dx$. Lucrul mecanic va fi $W = \int F\, dx = D\int_0^l x\, dx = \frac{1}{2} Dl^2$.

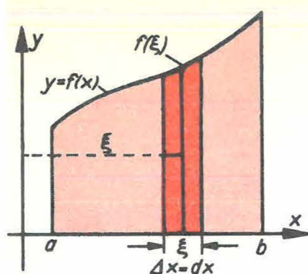
Exemplul 2. Pentru a accelera un corp de masă m de la viteza v_1 la viteza v_2, trebuie produs un lucru mecanic W. Fie $m \cdot b = m \frac{dv}{dt}$, unde b este accelerația. Atunci:

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F\, ds = \int_{s_1}^{s_2} m \frac{dv}{dt}\, ds = m \int_{v_1}^{v_2} v\, dv = \frac{m}{2} (v_2^2 - v_1^2).$$

Lucrul mecanic de accelerare este egal cu creșterea energiei cinetice.

Moment static. Prin *moment static* al unei mase punctiforme în raport cu o axă se înțelege produsul dintre distanța l a punctului la axă și masa m a punctului.

Moment static al unei mase distribuite continuu	$M = \int_m l\, dm = \rho \int_V l\, dV$



20.3.15. Momentul static al unei suprafețe

Pentru momentul static dM al unui element al unei mase distribuite continuu se obține d$M = l \cdot dm$. Prin integrare se obține momentul static pentru întreaga masă. Fie ρ densitatea constantă și dV volumul unui element de masă; atunci $dm = \rho\, dV$. Pentru determinarea momentului static al suprafeței aflate dedesubtul curbei $y = f(x)$ în raport cu axa Oy se împarte suprafața în benzi de lățime $\Delta x = dx$. Aplicînd teorema de medie a calculului integral, alegînd pe ξ convenabil în Δx, $f(\xi)\, dx$ reprezintă aria benzii (fig. 20.3.15). În ipoteza $\rho = 1$ și $d = 1$, momentul static al fiecărei benzi va fi $dM = \xi f(\xi)\, dx$. Prin integrare se obține momentul static al întregii suprafețe. Pentru a determina momentul static al suprafeței considerate în raport cu axa Ox, fiecare bandă se divide la rîndul ei în subelemente de lățime $\Delta y = dy$. Pentru un astfel de subelement momentul static este dat de $dM = \eta\, dy\, dx$, unde $\eta \in \Delta y$. Prin integrare în raport cu y, se obține momentul static pentru întreaga bandă $dM = \int_0^{\eta} \eta\, dy\, dx$. Integrînd în raport cu x, se obține momentul static al întregii suprafețe.

Momentul static al suprafeței limitate superior de curba $y = f(x)$, între a și b, în raport cu axa Oy	$M_y = \int_a^b xy\, dx$

Momentul static al suprafeței limitate superior de curba $y = f(x)$ între a și b, în raport cu axa Ox	$M_x = \int_a^b \int_0^y \eta\, dy\, dx = \frac{1}{2} \int_a^b y^2\, dx$

În mod analog se poate deduce din momentul static al unei mase distribuite uniform cu densitatea $\rho = 1$ momentul static al unei porțiuni de curbă plană omogenă; se obține momentul

în raport cu axa Ox, $M_x = \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx$

și în raport cu axa Oy, $M_y = \int_a^b x \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$

Pentru a obține momentul static M al unui corp de rotație în jurul axei Ox, se calculează momentul static în raport cu planul perpendicular pe axa Ox, prin originea sistemului de coordonate și se obține

$$M = \pi \int_a^b xy^2\, dx$$

Centru de greutate. Orice corp poate fi privit ca un sistem de mase punctiforme. Pentru fiecare corp există un punct în care este concentrată întreaga masă a corpului, numit *centrul masei* sau *centrul de greutate* al corpului. Momentul static al unei mase distribuite continuu este egal cu momentul static al centrului de greutate, în raport cu aceeași axă: $M = \int_m l\, dm = l_c m$. Din expresia momentului static se deduc coordonatele centrului de greutate pentru o masă distribuită uniform pe o porțiune de curbă plană, pe o suprafață limitată de o curbă $y = f(x)$ sau într-un corp de rotație:

$$x_c = \frac{M_y}{s} \quad \text{și} \quad y_c = \frac{M_x}{s}, \qquad x_c = \frac{M_y}{A} \quad \text{și} \quad y_c = \frac{M_x}{A}, \qquad x_c = \frac{M}{V}.$$

Coordonatele (x_c, y_c) ale centrului de greutate
a) ale unei porțiuni de curbă plană omogenă: $$x_c = \frac{M_y}{s} = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx}; \qquad y_c = \frac{M_x}{s} = \frac{\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx}$$
b) ale unei suprafețe omogene limitate de curba $y = f(x)$ $$x_c = \frac{M_y}{A} = \frac{\int_a^b xy\,dx}{\int_a^b y\,dx}; \qquad y_c = \frac{M_x}{A} = \frac{\int_a^b y^2\,dx}{2\int_a^b y\,dx}$$
c) ale unui corp de rotație omogen cu axa de rotație Ox $$x_c = \frac{M}{V} = \frac{\int_a^b xy^2\,dx}{\int_a^b y^2\,dx}, \qquad y_c = z_c = 0$$

În cazul corpului de rotație omogen, axa de rotație este axa Ox. Centrul de greutate se află pe această axă și deci $y_c = z_c = 0$.

Exemplu. Fie de găsit coordonatele centrului de greutate al suprafeței mărginite de curba $y = f(x) = \cos x$ între 0 și $\frac{\pi}{2}$.

În acest caz $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = 1$. Integrînd prin părți se obține $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = \frac{\pi}{2} + 1$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{4}$. Cu ajutorul formulelor pentru găsirea centrului de greutate al unei suprafețe se obțin $x_c = \frac{\pi}{2} - 1$ și $y_c = \frac{\pi}{8}$.

Cu ajutorul acestor formule se deduc *formulele lui Guldin.* Suprafața generatoare a unui corp de rotație cu axa de rotație Ox are momentul static $M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx$ și coordonatele centrului de greutate $y_c = \frac{M_x}{A}$. De aici rezultă pentru volumul corpurilor de rotație relația

$$V_x = \pi\int_a^b y^2\,dx = 2\pi\,\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx = 2\pi M_x = 2\pi y_c A.$$

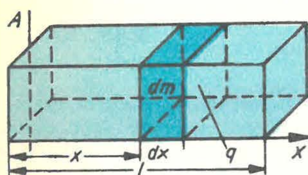
***Regula lui Guldin pentru volumele corpurilor de rotație**: volumul unui corp de rotație este egal cu produsul dintre aria suprafeței generatoare și lungimea curbei descrise în rotație de centrul ei de greutate.*

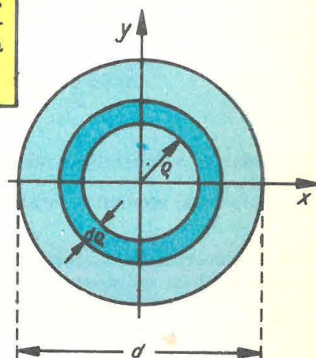
Porţiunea de curbă care generează aria laterală a unui corp de rotaţie cu axa de rotaţie Ox, are momentul static $M_x = \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx$ şi coordonata centrului de greutate $y_c = \frac{M_x}{s}$. De aici rezultă pentru aria suprafeţei laterale a corpului de rotaţie relaţia $S_x = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx = 2\pi\, M_x = 2\pi y_c s$.

Regula lui Guldin pentru aria suprafeţei laterale a unui corp de rotaţie: aria suprafeţei laterale a unui corp de rotaţie este egală cu produsul dintre lungimea porţiunii de curbă care generează suprafaţa şi lungimea curbei descrise în rotaţie de centrul de greutate al acesteia.

Moment de inerţie. Energia cinetică W a unui corp de masă M şi viteză v este $W = \frac{v^2}{2} M$. Cînd un corp rigid se roteşte în jurul unei axe fixe A, diferitele părţi ale masei acestui corp vor avea viteze diferite. Dacă se notează cu ω viteza unghiulară constantă a corpului, cu x distanţa elementului de masă dm la axa de rotaţie, atunci acest element va avea viteza $v = x\omega$ şi energia lui cinetică va fi $dW = \frac{1}{2} x^2\omega^2\, dm$. Energia cinetică a întregului corp se obţine prin integrare în raport cu elementele de masă, $W = \frac{\omega^2}{2}\int_m x^2\, dm$.

Moment de inerţie axial	$I_A = \int_m x^2\, dm$	dm element de masă; x distanţa la axa de rotaţie A, r distanţa la punctul de referinţă P
Moment de inerţie polar	$I_P = \int_m r^2\, dm$	





20.3.16. Moment de inerţie

Comparînd cele două formule pentru energia cinetică, se observă că în locul masei M a apărut integrala $\int_m x^2\, dm$. Această integrală defineşte *momentul de inerţie* I_A al corpului în raport cu axa de rotaţie A (fig. 20.3.16). Dacă se consideră momentul de inerţie nu în raport cu axa de rotaţie, ci în raport cu un punct, se obţine *momentul polar de inerţie* I_p. Considerînd relaţia $r^2 = x^2 + y^2$, se obţine o relaţie importantă între momentul de inerţie polar I_p relativ la originea O a unui sistem de coordonate carteziene rectangulare şi între momentele de inerţie axiale I_x, I_y (r fiind distanţa elementului de masă la origine, iar x şi y distanţa lui la cele două axe)

$$I_P = \int_m r^2\, dm = \int_m (x^2+y^2)\, dm = \int_m x^2\, dm + \int_m y^2\, dm = I_x + I_y.$$

Legătura dintre momentele de inerţie polar şi axial	$I_P = I_x + I_y$

Exemplul 1. Fie de determinat momentul de inerţie al unei bare subţiri drepte prismatice, omogene, de lungime l şi densitate ρ, în raport cu o axă perpendiculară pe bară care trece

prin una din extremitățile ei (fig. 20.3.16). Dacă se notează aria secțiunii cu q, atunci elementul de masă va fi $dm = \rho q\, dx$. Se obține astfel $I_A = \int_m x^2\, dm = \int_0^l x^2 \rho q\, dx = \rho q \int_0^l x^2\, dx = q\rho \frac{l^3}{3} = \frac{Ml^2}{3}$, unde $M = \rho q l$ este masa totală a barei.

Exemplul 2. Fie de calculat momentele de inerție ale unei plăci circulare de diametru d în raport cu centrul cercului și în raport cu axele de coordonate ce trec prin centru (fig. 20.3.16), Grosimea și densitatea plăcii se consideră egale cu 1. Se va calcula mai întîi momentul de inerție polar I_P. Masa dm a inelului circular colorat mai intens pe figură este $dm = 2\pi\rho\, d\rho$. Rezultă deci:

$I_P = \int_0^r \rho^2\, dm = \int_0^r \rho^2 \cdot 2\pi\rho\, d\rho = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$. Din motive de simetrie $I_x = I_y$ și deci $I_P = I_x + I_y = 2I_x$, $I_x = \frac{1}{2} I_P$ și deci momentele de simetrie axiale vor fi $I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64}$.

Teorema lui Steiner. Fie $I_C = \int_m x^2\, dm$ momentul de inerție al unui corp în raport cu o axă C ce trece prin centrul de greutate al acestuia. Momentele de simetrie I_A în raport cu axa A paralelă cu C și la distanță a de aceasta va fi în mod evident $I_A = \int_m (x + a)^2\, dm$. Rezultă

$$I_A = \int_m (x + a)^2\, dm = \int_m (x^2 + 2ax + a^2)\, dm = \int_m x^2\, dm + \int_m a^2\, dm +$$

$$+ 2a \int_m x\, dm = I_C + a^2 m + 2a \int_m x\, dm.$$

Deoarece x reprezintă distanțele elementelor de masă la axa C, ultima integrală $\int_m x\, dm$ care reprezintă momentul static în raport cu aceasta axă va fi nulă.

Teorema lui Steiner. Momentul de inerție I_A al unui corp în raport cu o axă oarecare A este egal cu momentul de inerție I_C în raport cu o axă C, paralelă cu A, dusă prin centrul de greutate al corpului la care se adaugă produsul dintre masa corpului și pătratul distanței dintre cele două axe.

Teorema lui Steiner	$I_A = I_C + a^2 m$

20.4. Analiză vectorială

În analiza vectorială, vectorii se consideră funcții de una sau mai multe variabile și se folosesc noțiunile și metodele calculului diferențial și integral. Domeniile de aplicare ale analizei vectoriale sînt în special fizica matematică și geometria diferențială.

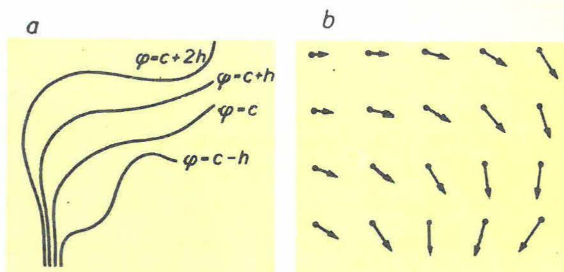
Cîmpuri

Cîmpuri scalare. O funcție scalară definită pentru orice punct din spațiu se numește *timp scalar*, dacă ea realizează o corespondență prin care fiecărui punct $P(x, y, z)$, respectiv fiecărui vector de poziție $\mathbf{r}$ dintr-un anumit domeniu, i se atribuie un scalar $\varphi(x, y, z) = \varphi(\mathbf{r})$; de exemplu temperatura și densitatea unui corp sînt cîmpuri scalare. Cîmpurile se pot reprezenta intuitiv

prin suprafețele $\varphi(x, y, z) = \text{const}$, numite *suprafețe de nivel*; în plan prin liniile de nivel $\varphi(x, y) = \text{const}$. De exemplu pe hărți liniile de egală altitudine și liniile de egală temperatură (izotermele) sînt linii de nivel.

Exemplu. Liniile de nivel ale cîmpului scalar $\varphi = x^2 + y^2 + z^2 = \mathbf{r}^2$ sînt sferele cu centrul în originea coordonatelor.

Cîmpuri vectoriale. Dacă prin funcția $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\mathbf{r})$, respectiv $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(x, y, z)$ i se atribuie fiecărui punct din spațiu un anumit vector, atunci funcția $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\mathbf{r})$ definește un cîmp vectorial; de exemplu, cîmpurile de forță $\boldsymbol{F}(\mathbf{r})$ sau de electricitate $\boldsymbol{E}(\mathbf{r})$ sînt cîmpuri vectoriale. Ele se reprezintă grafic prin săgeți duse în diferite puncte $\mathbf{r}$ ale spațiului, ale căror direcții și lungimi reprezintă vectorul $\boldsymbol{v}(\mathbf{r})$ (fig. 20.4.1).



20.4.1. a) Cîmp scalar. b) Cîmp vectorial

Pentru reprezentarea cîmpurilor vectoriale, funcțiile vectoriale se scriu în general sub forma

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z, t) = u(x, y, z, t)\,\mathbf{i} + v(x, y, z, t)\,\mathbf{j} + w(x, y, z, t)\,\mathbf{k},$$

adică vectorul cîmpului $\mathbf{a}$ depinde de timpul t și de coordonatele punctului din spațiu x, y, z, care la rîndul lor pot fi funcții de t. Diferențierea funcțiilor vectoriale se definește prin

$$\mathrm{d}\mathbf{a} = \mathrm{d}u\,\mathbf{i} + \mathrm{d}v\,\mathbf{j} + \mathrm{d}w\,\mathbf{k},$$

unde

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z + \frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}t,$$

$$\mathrm{d}v = \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial v}{\partial z}\mathrm{d}z + \frac{\partial v}{\partial t}\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}w = \frac{\partial w}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial w}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial w}{\partial z}\mathrm{d}z + \frac{\partial w}{\partial t}\mathrm{d}t.$$

și se reduce astfel la diferențierea funcțiilor scalare u, v, w. O definiție echivalentă este următoarea;

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathbf{a}(x + \Delta x, y, z, t) - \mathbf{a}(x, y, z, t)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial x}\mathbf{j} + \frac{\partial w}{\partial x}\mathbf{k}$$

și în mod analog

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial w}{\partial y}\mathbf{k}, \qquad \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial z}\mathbf{j} + \frac{\partial w}{\partial z}\mathbf{k},$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}\mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial t}\mathbf{j} + \frac{\partial w}{\partial t}\mathbf{k}.$$

Cu alte cuvinte, *derivarea* funcțiilor vectoriale se face derivînd *fiecare componentă* după regulile obișnuite. De exemplu, dacă $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ sînt funcții vectoriale și φ o funcție scalară, atunci

1) $$\frac{\partial}{\partial x}(\varphi\mathbf{a}) = \varphi\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\mathbf{a}, \quad \frac{\partial}{\partial y}(\varphi\mathbf{a}) = \varphi\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\mathbf{a}, \quad \frac{\partial}{\partial z}(\varphi\mathbf{a}) = \varphi\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\mathbf{a},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi\mathbf{a}) = \varphi\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\mathbf{a};$$

2) $\dfrac{\partial}{\partial x}(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2) = \mathbf{a}_1 \cdot \dfrac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial x} \cdot \mathbf{a}_2, \quad \dfrac{\partial}{\partial y}(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2) = \mathbf{a}_1 \cdot \dfrac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial y} \cdot \mathbf{a}_2,$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2) = \mathbf{a}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial z} \cdot \mathbf{a}_2, \quad \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2) = \mathbf{a}_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial t} \cdot \mathbf{a}_2;$$

3) $\dfrac{\partial}{\partial x}(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) = \mathbf{a}_1 \times \dfrac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial x} \times \mathbf{a}_2, \quad \dfrac{\partial}{\partial y}(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) = \mathbf{a}_1 \times \dfrac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial y} \times \mathbf{a}_2,$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) = \mathbf{a}_1 \times \frac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial z} \times \mathbf{a}_2, \quad \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) = \mathbf{a}_1 \times \frac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial t} \times \mathbf{a}_2.$$

Pentru simplificare se va presupune în cele ce urmează că toate funcțiile și derivatele care intervin sînt continue astfel încît se poate inversa ordinea de derivare la calculul derivatelor parțiale, de exemplu $\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}$ (vezi cap. 19).

Cele mai importante sînt următoarele cazuri particulare de funcții vectoriale:

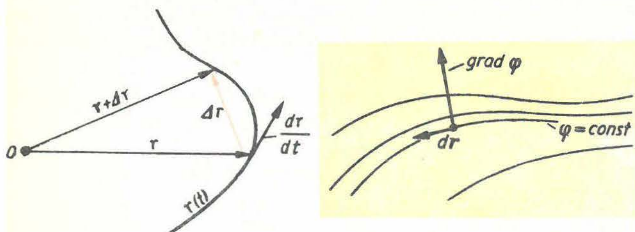
1. Cîmpul $\mathbf{a}$ nu depinde explicit de timp și deci are forma

$$\mathbf{a}(x, y, z) = u(x, y, z)\,\mathbf{i} + v(x, y, z)\,\mathbf{j} + w(x, y, z)\,\mathbf{k},$$

Cîmpul în acest caz se zice *constant în timp*.

2. $u = x(t)$, $v = y(t)$, $w = z(t)$ sau $\mathbf{a} = \mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$, unde t nu este neapărat timpul. Vectorul de poziție $\mathbf{r}(t)$ în raport cu originea coordonatelor descrie, cînd t variază, o curbă în spațiu; dacă t este timpul și $\mathbf{r}(t)$ poziția unui punct mobil, atunci $\mathbf{r}(t)$ descrie traiectoria punctului. Derivata $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\mathbf{i} + \dfrac{dy}{dt}\mathbf{j} + \dfrac{dz}{dt}\mathbf{k} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$ reprezintă *viteza* punctului și $\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ este *accelerația*. Vectorul $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ este tangent la curba $\mathbf{r}(t)$ (fig. 20.4.2). Dacă $\mathbf{r}(t)$ are mărimea constantă $|\mathbf{r}| = \text{const}$, atunci și $\mathbf{r}^2 = \text{const}$ și deci $\mathbf{r}\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} + \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\mathbf{r} = 0$, $\mathbf{r}$ și $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ sînt perpendiculari.

20.4.2. Vector tangent.



20.4.3. Suprafețe de nivel și gradient

Gradient și potențial

Gradient. Fie funcția scalară $\varphi = \varphi(\mathbf{r}) = \varphi(x, y, z)$. Variația $d\varphi$ a funcției φ pentru $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$ este $d\varphi = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}dz$. Această expresie poate fi privită ca produsul scalar dintre vectorul $d\mathbf{r}$ și un *vector* $\operatorname{grad}\varphi = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\mathbf{k}$. Variația funcției corespunzătoare variației vectorului de poziție $d\mathbf{r}$ va fi atunci $d\varphi = \operatorname{grad}\varphi\, d\mathbf{r}$. Dacă se alege direcția $d\mathbf{r}$ astfel încît $d\mathbf{r}$ să fie pe o *suprafață de nivel* $\varphi = \text{const}$, atunci φ nu se schimbă și deci $d\varphi = 0$, adică vectorul grad φ este *perpendicular pe suprafețele*

Gradient	$\operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k}$

de nivel $\varphi = \text{const}$ (fig. 20.4.3). Dacă $d\mathbf{r}$ face cu gradientul unghiul ϑ, atunci $d\varphi = \operatorname{grad} \varphi \, d\mathbf{r} = |\operatorname{grad} \varphi| \, |d\mathbf{r}| \cos \vartheta$, deci funcția crește *cel mai repede în direcția gradientului*, cînd $\vartheta = 0$. Dacă se ia $|d\mathbf{r}| = ds$, atunci se obține $\frac{d\varphi}{ds} = |\operatorname{grad} \varphi| \cos \vartheta$. Se poate deci conchide:

Derivata lui φ pe o anumită direcție este egală cu proiecția gradientului pe această direcție.

Potențial. Prin introducerea gradientului s-a obținut dintr-un cîmp scalar $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ un cîmp vectorial grad φ. În general, reciproca nu este însă adevărată, adică un cîmp vectorial nu poate fi întotdeauna considerat gradientul unui cîmp scalar. Cîmpurile vectoriale $\mathbf{a} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k}$ pentru care acest lucru este posibil se numesc *conservative* sau potențiale și φ potențialul cîmpului $\mathbf{a}$ (vezi cap. 37). Să considerăm integrala

$$\int_{P_0}^{P} \mathbf{a} \, d\mathbf{r} = \int_{P_0}^{P} (u \, dx + v \, dy + w \, dz).$$

Dacă curba pe care se face integrarea este definită prin reprezentarea parametrică $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$, atunci integrala curbilinie se transformă într-o integrală obișnuită

$$\int_{t_0}^{t} \left(\mathbf{a} \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) dt = \int_{t_0}^{t} \left[u(t)\frac{dx}{dt} + v(t)\frac{dy}{dt} + w(t)\frac{dz}{dt}\right] dt.$$

În general această integrală depinde atît de punctele P_0 și P cît și de curba pe care se face integrarea. Dacă G este un domeniu simplu conex, cîmpul vectorial $\mathbf{a} = u(x, y, z)\,\mathbf{i} + v(x, y, z)\,\mathbf{j} + w(x, y, z)\,\mathbf{k}$ și curba de integrare $\mathbf{r} = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$ au în acest domeniu componente continue, cu derivate continue, condiția $\mathbf{a} = \operatorname{grad} \varphi$ este necesară și suficientă pentru ca integrala curbilinie să nu depindă de drum. Are loc teorema:

Integrala curbilinie a unui vector într-un cîmp potențial este independentă de curba de integrare și este egală cu diferența potențialelor în punctele final și inițial ale curbei. Reciproc, dacă $\int \mathbf{a} \, d\mathbf{r}$ este independentă de drum, atunci a este gradientul unui potențial φ.

Un rezultat echivalent este următorul:

$\oint \mathbf{a} \, d\mathbf{r} = 0$ pentru orice curbă închisă conținută în domeniul simplu conex G dacă și numai dacă $\mathbf{a} = \operatorname{grad} \varphi$, unde φ este o funcție scalară.

Condiții necesare și suficiente pentru $\mathbf{a} = \text{grad}\ \varphi$ sînt relațiile

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y}; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z},$$

adică rot $\mathbf{a} \equiv 0$ (vezi rotorul unui cîmp vectorial).

Exemplu. Se cere integrala $\oint(-y\,dx + x\,dy)$ de-a lungul cercului cu centrul în origine și raza unitate. Reprezentarea parametrică a acestui cerc este $x = \cos t$, $y = \sin t$. Atunci $\oint(-y\,dx + x\,dy) = \int_0^{2\pi} [-\sin t(-\sin t) + \cos t \cos t]\,dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = 2\pi$. Integrala este diferită de 0, adică cîmpul vectorial $\mathbf{a} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ nu este gradientul unui cîmp scalar. Acest rezultat se obține și direct din $\frac{\partial u}{\partial y} = -1$, $\frac{\partial v}{\partial x} = +1$.

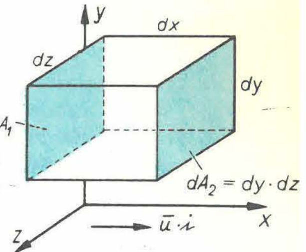
Divergența și teorema lui Gauss

Divergență. Divergența este un cîmp scalar care este dedus dintr-un cîmp vectorial

$$\bar{\mathbf{a}} = \bar{u}(x, y, z)\,\mathbf{i} + \bar{v}(x, y, z)\,\mathbf{j} + \bar{w}(y, x, z)\,\mathbf{k}.$$

De exemplu, cîmpul $\bar{\mathbf{a}}$ poate fi considerat cîmpul vitezei unui lichid care curge, a cărui densitate este $\rho(x, y, z)$; se consideră curentul staționar, adică astfel încît nici $\mathbf{a}$ și nici ρ nu depind de timp. Componenta $\bar{u}\mathbf{i}$ reprezintă drumul parcurs de o particulă a fluidului în unitatea de timp în direcția axei Ox. Considerînd un element de volum de forma unui paralelipiped dreptunghic cu laturile paralele cu axele (fig. 20.4.4), atunci prin suprafața perpendiculară pe axa Ox, de arie $dA_1 = dy\,dz$ intră în paralelipiped, în unitatea de timp, un volum de lichid $dA_1\bar{u} = \bar{u}\,dy\,dz$ și deci de masă $\rho\bar{u}\,dy\,dz$. Prin suprafața de arie $dA_2 = dy\,dz$ iese masa de lichid

$$\rho(x + dx, y, z)\,\bar{u}(x + dx, y, z)\,dy\,dz = \left[\rho\bar{u} + \frac{\partial(\rho\bar{u})}{\partial x}\,dx\right] dy\,dz.$$



20.4.4. Interpretarea divergenței

Diferența dă pierderea de masă prin fețele dA_1 și dA_2: $\frac{\partial(\rho\bar{u})}{\partial x}\,dx\,dy\,dz$. *Pierderea totală de masă a elementului de volum* se obține considerînd și celelalte perechi de fețe, și este dată de

$$\left[\frac{\partial(\rho\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\bar{w})}{\partial z}\right] dx\,dy\,dz.$$

Pierderea de masă în unitatea de volum și de timp, sau *divergența* cîmpului vectorial se obține luînd $\mathbf{a} = \rho\bar{\mathbf{a}}$ $u = \rho\bar{u}$, $v = \rho\bar{v}$ și $w = \rho\bar{w}$ este dată de

$$\text{div}\ \mathbf{a} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Un *cîmp de divergență nulă* se numește *solenoidal*.
Punctele în care div $\mathbf{a} > 0$ se numesc surse pozitive (iese mai multă masă decît intră) iar punctele cu div $\mathbf{a} < 0$ se numesc surse negative (intră mai multă masă decît iese).

Teorema lui Gauss. *Pierderea totală de masă* pentru un domeniu finit G se calculează prin integrala de volum $\iiint_G \text{div}\ \mathbf{a}\,d\tau$. Această masă trebuie să se scurgă prin frontiera S a dome-

niului G. Dacă se notează cu $d\mathbf{s} = \mathbf{n}\, d\sigma$ un element de arie orientat, adică un vector cu direcția normalei exterioare $\mathbf{n}$ ($|\mathbf{n}| = 1$) și cu mărimea ariei $d\sigma$ a elementului, atunci, ținînd seama de considerațiile anterioare, masa care se scurge în unitatea de timp prin $d\sigma$ este $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$. De aceea scurgerea totală prin suprafața S este dată de integrala de suprafață $\iint_S (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})\, d\sigma = \iint_S a_n\, d\sigma$. Egalînd cele două expresii, se obține teorema lui Gauss.

Teorema lui Gauss	$\iiint_G \operatorname{div} \mathbf{a}\, d\tau = \iint_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iint_S a_{\mathbf{n}}\, d\sigma$
în componente	$\iiint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\tau = \iint_S [u \cos(x, \mathbf{n}) + v \cos(y, \mathbf{n}) + w \cos(z, \mathbf{n})]\, d\sigma$

Teorema lui Gauss dedusă aici pe un exemplu din hidrodinamică este în general valabilă pentru cîmpuri vectoriale, cînd G este simplu conex și frontiera S a lui G are normala continuă.

Teorema lui Gauss permite transformarea unei integrale de volum într-o integrală de suprafață.

De asemenea din această teoremă rezultă în mod evident propoziția:

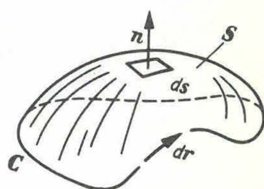
Dacă într-un domeniu div a = 0, atunci fluxul total este nul pe frontiera domeniului.

Rotorul și teorema lui Stokes

Rotorul. Rotorul este un operator diferențial prin care dintr-un cîmp vectorial $\mathbf{a} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ se deduce un alt cîmp vectorial.

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

Teorema lui Stokes. Fie suprafața S limitată de curba închisă (nu neapărat plană) C. Se presupune că S admite un vector normal care variază continuu (cu excepția a cel mult un număr finit de puncte sau linii) și C admite o tangentă continuă (cu excepția a cel mult un număr finit de puncte). Pe C se alege un sens de parcurgere pozitiv, în așa fel încît, la o astfel de parcurgere, suprafața S să fie la stînga, considerînd pe S de partea indicată de $\mathbf{n}$ (fig. 20.4.5). În aceste condiții are loc teorema lui Stokes.



20.4.5. Teorema lui Stokes

Teorema lui Stokes	$\oint_C \mathbf{a}\, d\mathbf{r} = \iint_S (\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{a})\, d\sigma = \iint_S \operatorname{rot}_{\mathbf{n}} \mathbf{a}\, d\sigma$
în componente	$\oint_C (u\, dx + v\, dy + w\, dz) = \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \cos(x, \mathbf{n}) + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \cos(y, \mathbf{n}) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cos(z, \mathbf{n}) \right\} d\sigma$

Potrivit acestei teoreme, $\iint_S (\mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{a})\, d\sigma$ depinde numai de curba C, nu însă și de forma suprafeței S limitate de această curbă. Integrala curbilinie $\oint_C \mathbf{a}\, d\mathbf{r}$ se numește *circulația* lui **a** de-a lungul lui C; potrivit teoremei lui Stokes circulația este egală cu fluxul componentei normale a rotorului prin suprafața S limitată de C. Dacă **a** reprezintă cîmpul unei forțe, atunci $-\mathbf{a}\, d\mathbf{r}$ este lucrul îndreptat contra forței **a** de-a lungul drumului $d\mathbf{r}$ și $\oint \mathbf{a}\, d\mathbf{r}$ este lucrul efectuat la parcurgerea completă a curbei C. Lucrul este nul și deci independent de drum, atunci cînd $\text{rot } \mathbf{a} = 0$. Cîmpurile pentru care $\text{rot } \mathbf{a} = 0$ se numesc *irotaționale* sau *lamelare*. Un cîmp irotațional **a** se reprezintă sub forma $\mathbf{a} = \text{grad } \varphi$. De aici rezultă $\text{rot grad } \varphi = 0$.

Operatorul nabla, reguli de calcul

Cei trei operatori diferențiali grad, div, rot se pot reprezenta cu ajutorul unui singur operator, introdus de HAMILTON, *operatorul hamiltonian* sau *operatorul nabla*, notat prin simbolul ∇; această denumire vine de la un vechi instrument de coarde, ebraic, care avea aproximativ forma acestui simbol.

Operatorul ∇ este definit prin

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} .$$

Dacă prin „produsul" $\frac{\partial}{\partial x} \cdot \varphi$ se înțelege $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, atunci $\nabla\varphi = \text{grad } \varphi$. Din produsul scalar $\nabla \cdot \mathbf{a}$ rezultă divergența $\nabla \cdot \mathbf{a} = \text{div } \mathbf{a}$ și din produsul vectorial $\nabla \times \mathbf{a}$ rotorul $\nabla \times \mathbf{a} = \text{rot } \mathbf{a}$.

Un alt operator introdus de Pierre-Simon LAPLACE (1749—1827), denumit delta și notat cu Δ, se definește pentru un cîmp scalar $\varphi(x, y, z)$ prin

$$\Delta\varphi = \text{div grad } \varphi = \nabla \cdot (\nabla\varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2},$$

și pentru un cîmp vectorial $\mathbf{a}(x, y, z)$

$$\Delta \mathbf{a} = \text{grad div } \mathbf{a} - \text{rot rot } \mathbf{a} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial z^2} .$$

Au loc relațiile:

$\text{grad } (\varphi_1\varphi_2) = \varphi_1 \text{ grad } \varphi_2 + \varphi_2 \text{ grad } \varphi_1$	$\text{div } (\varphi\mathbf{a}) = \varphi \text{ div } \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \text{grad } \varphi$
$\text{rot } (\varphi\mathbf{a}) = \varphi \text{ rot } \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \text{grad } \varphi$	$\text{rot grad } \varphi = 0$
$\text{div } (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) = \mathbf{a}_2 \cdot \text{rot } \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_1 \cdot \text{rot } \mathbf{a}_2$	$\text{div rot } \mathbf{a} = 0.$

În încheiere, trebuie subliniat că gradientul, divergența și rotorul unui cîmp sînt noțiuni independente de sistemul de coordonate ales. Din acest motiv, se spune că aceste mărimi sînt invariante la o schimbare de coordonate.

21. Serii de funcții

Matematica modernă nu mai poate fi concepută fără teoria și aplicațiile seriilor de funcții. Această teorie este deosebit de importantă pentru analiză și pentru teoria funcțiilor. După cum s-a văzut în capitolul 20, integrarea anumitor funcții se poate face numai folosind dezvoltarea lor în serie de puteri. Seriile de puteri reprezintă în multe cazuri un important instrument ajutător pentru aplicațiile practice. Cu ajutorul lor se pot uneori enunța proprietăți ale unor funcții pentru care se cunoaște numai un număr mic de valori, se pot găsi valori aproximative ale unor funcții și se poate aprecia precizia unui procedeu de calcul.

În capitolul 18 s-au prezentat proprietăți ale seriilor cu termeni constanți. În prezentul capitol se vor studia serii ale căror termeni sînt funcții de o variabilă. Două cazuri speciale de astfel de funcții au o deosebită importanță, *seriile de puteri*, pentru care termenul al n-lea are forma $a_n x^n$ și *seriile Fourier* în care al n-lea termen este $(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$.

21.1. Serii de funcții

Ca o generalizare a considerentelor făcute la deducerea proprietăților seriilor cu termeni constanți (numere) se consideră expresia $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ care are următoarea semnificație.

1. Pentru orice număr natural $n = 0, 1, 2, \ldots$ se dă o funcție $f_n(x)$ din șirul de funcții $f_0(x)$, $f_1(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ Orice funcție $f_n(x)$ este definită într-un interval I, adică oricărei valori x din acest interval îi corespunde univoc o valoare din domeniul valorilor.

2. Pentru orice x se consideră funcția de aproximare (*suma parțială*) definită pentru orice n finit prin $F_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \ldots + f_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

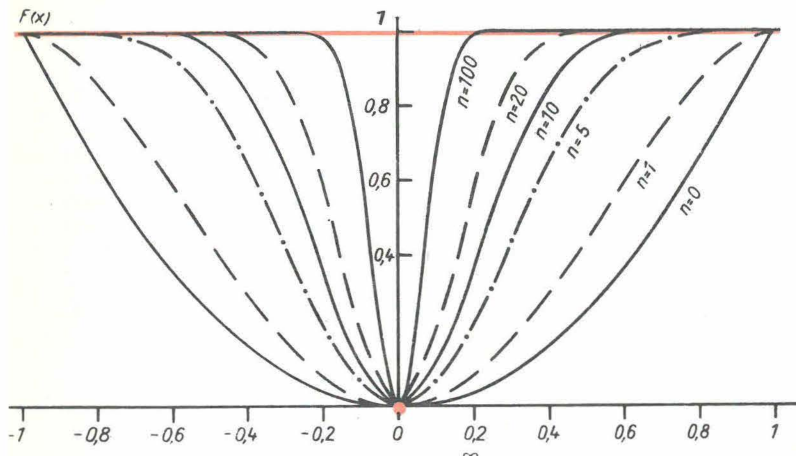
3. Pentru orice x din I șirul $F_n(x)$ este convergent, adică există $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$.

Această funcție este *limita seriei de funcții* iar intervalul I, *intervalul* ei de *convergență*.

Diferența $F(x) - F_n(x)$ dintre funcția limită și o sumă parțială se numește *rest* și se notează cu $R_n(x)$. Dacă seria converge, $R_n(x)$ trebuie să tindă la zero, cînd $n \to \infty$.

Convergența uniformă. În cazul seriei de funcții $F(x) = x^2 + x^2(1 - x^2) + x^2(1 - x^2)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^2(1 - x^2)^n$ funcțiile $f_n(x) = x^2(1 - x^2)^n$ sînt continue. Cu excepția punctului $x = 0$ șirul sumelor parțiale $F_0(x) = x^2$, $F_1(x) = x^2 + x^2(1 - x^2), \ldots$ converge în intervalul $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Acest lucru se obține majorînd în $F(x) = x^2[1 + (1 - x^2) + (1 - x^2)^2 + \ldots]$ expresia $1 - x^2$ pentru $x \neq 0$ printr-un număr $q < 1$. Pentru orice n, suma parțială este deci mai mică decît suma parțială corespunzătoare a unei progresii geometrice cu rația q. Se obține $F(x) = x^2 \dfrac{1}{1 - (1 - x^2)} = 1$. Pentru $x = 0$ se obține $F(0) = 0$. Spre deosebire de funcțiile $f_n(x)$, $F(x)$ nu este continuă în punctul $x = 0$.

Se ridică problema în ce condiții proprietăți ca continuitatea și derivabilitatea pot fi transpuse de la termenii $f_n(x)$ la limita $F(x)$. Reprezentările curbelor de aproximare ale funcției $F(x) = \Sigma x^2(1 - x^2)^n$ dau o indicație asupra acestei probleme. Pe cînd pentru $n > 10$ și $|x| > 0{,}6$ curbele sînt foarte apropiate, pentru $x = 0{,}2$ ele diferă foarte mult una de cealaltă (fig. 21.1.1). Aceasta înseamnă că indicele N, începînd cu care restul $R_n(x)$ devine mai mic decît o constantă ε dinainte dată, depinde în general de alegerea lui x în acest interval. Pentru $\varepsilon > 0$ acești indici $N(\varepsilon, x)$ cresc nemărginit pentru $x \to 0$. Dacă însă pentru o serie de funcții $F(x)$ se poate determina N, independent de punctul x, atunci este vorba de o *convergență uniformă*. Acesta este cazul cînd $N(\varepsilon, x)$ admite o margine superioară. În cele ce urmează se va demonstra că în acest caz $F(x)$ este continuă, derivabilă și integrabilă termen cu termen. Seria $\Sigma x^2(1 - x^2)^n$ este convergentă dar nu și uniform convergentă în intervalul $[-1, 1]$.



21.1.1. Aproximațiile $F_n(x)$ ale lui $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^2(1 - x^2)^n$ pentru $n = 0,\ 1,\ 5,\ 10,\ 20,\ 100$

O serie de funcții $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ este uniform convergentă în intervalul I, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $N = N(\varepsilon)$ care depinde de ε nu însă și de x, astfel încît pentru orice x din I, $|R_n(x)| = |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots| < \varepsilon$ cînd $n \geqslant N$.

Noțiunea de convergență uniformă a fost introdusă de Karl WEIERSTRASS (1815–1897). Această noțiune cît și următorul criteriu de convergență pot fi generalizate și pentru valori complexe.

Criteriul lui Weierstrass (al majorantelor). Dacă fiecare termen $f_n(x)$ al seriei de funcții $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ este mărginit în intervalul I, adică satisface o inegalitate de forma $|f_n(x)| \leqslant M_n$ și dacă seria $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ este convergentă, atunci $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ este uniform convergentă în intervalul I. Se spune că $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ este o serie majorantă convergentă a seriei $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.

Exemplul 1. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ este pentru orice x uniform convergentă, deoarece $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leqslant$ $\leqslant \frac{1}{n^2}$ și seria majorantă $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă.

Exemplul 2. Seria geometrică $x + x^2 + x^3 + \ldots$ are intervalul de convergență $-1 < x <$ $< +1$. Pentru un anumit x_0, $0 < x_0 < 1$ pentru un $\varepsilon > 0$ dat $|R_n(x_0)| = |x_0^{n+1} + x_0^{n+2} + \ldots| =$ $= x_0^n(x_0 + x_0^2 + \ldots) = \frac{x_0^{n+1}}{1 - x_0} < \varepsilon$ cînd $n > N(\varepsilon)$. Cînd însă x_0 tinde către $+1$, atunci pentru $n > N(\varepsilon)$, $|R_n|$ poate să depășească orice valoare finită, $\frac{x_0^{n+1}}{1 - x_0} \to \infty$. S-a arătat astfel că seria geometrică converge uniform în orice subinterval închis al lui $(-1, 1)$.

Se poate demonstra că în locul restului $R_n(x)$ se poate considera o diferență de forma $F_{n+k}(x) - F_n(x)$ cu $k \geqslant 1$; atunci seria de funcții converge uniform dacă

$$|F_{n+k}(x) - F_n(x)| = |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots + f_{n+k}(x)| < \varepsilon$$

pentru orice x din I, pentru orice $n \geqslant N(\varepsilon)$ și pentru orice $k \geqslant 1$.

Limita unei serii de funcții. Dacă seria $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ este uniform convergentă în intervalul $a < x < x_0$, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ se poate determina un indice n_1, astfel încît pentru orice x din acest interval, $n > n_1$ și $k \geqslant 1$

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots + f_{n+k}(x)| < \varepsilon.$$

Dacă se presupune în plus că orice funcție $f_n(x)$ are o limită la stînga a_n pentru $x \to x_0 - 0$, atunci

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots. + a_{n+k}| < \varepsilon,$$

adică seria Σa_n converge către aceeași limită. Fie s suma acestei serii și s_n sumele ei parțiale. Atunci se poate alege un indice n_2 astfel încît $|s_m - s| < \frac{\varepsilon}{3}$ pentru orice $m > n_2$ și $|R_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ pentru orice x. Se poate demonstra acum că și funcția $F(x)$ are pentru $x \to x_0 - 0$ limita s. Pentru indicele ales m și pentru orice x din $a < x < x_0$.

$$|F(x) - s| = |(F_m(x) - s_m) - (s - s_m) + R_m(x)| < |F_m(x) - s_m| + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}.$$

$F_m(x)$ fiind o sumă de un număr finit de termeni $f_n(x)$, are pentru $x \to x_0 - 0$ limita s_m, adică pentru orice număr pozitiv $\delta < x_0 - a$ se poate determina un subinterval $x_0 - \delta < x < x_0$ astfel încît pentru orice x din acest interval $|F_m(x) - s_m| < \frac{\varepsilon}{3}$ și deci $|F(x) - s| < \varepsilon$. Suma s este deci limita la stînga a lui $F(x)$ cînd $x \to x_0 - 0$. Rezultatul se poate scrie sub forma

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \left[\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\lim_{x \to x_0 - 0} f_n(x)\right].$$

ceea ce înseamnă că în cazul seriilor de funcții uniform convergente trecerea la limită se poate face termen cu termen.

Aceleași considerații sînt valabile și pentru limita la dreapta. Dacă funcțiile $f_n(x)$ sînt continue în x_0, atunci limitele la dreapta și la stînga sînt egale și egale cu valoarea $f_n(x_0)$; deci suma seriei $F(x)$ este continuă în x_0.

Dacă seria de funcții $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ este uniform convergentă în intervalul I și termenii $f_n(x)$ sînt funcții continue în punctul $x = x_0$, atunci $F(x)$ este continuă în $x = x_0$.

Derivare și integrare termen cu termen. Dacă funcțiile $f_n(x)$ definite în I sînt derivabile în acest interval, seria formată cu derivatele termenilor $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x)$ este uniform convergentă în I și seria $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ este convergentă cel puțin într-un punct x_0 din I, atunci seria $\Sigma f_n(x)$ converge uniform în I către $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, $F(x)$ este derivabilă și $F'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x)$. Nu vom da aici demonstrația acestui rezultat. De multe ori el este enunțat sub următoarea formă mai puțin precisă.

Dacă seria formată cu derivatele termenilor unei serii de funcții este uniform convergentă, atunci seria se poate deriva termen cu termen.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x)$$

Pentru a sublinia rolul pe care îl joacă convergența uniformă în derivarea termen cu termen, Niels Henrik ABEL (1802—1829) a dat următoarele exemple:

1. Seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ converge pentru orice x real; seria obținută din aceasta prin derivare termen cu termen $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$ este însă divergentă pentru orice x. 2. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ converge uniform pentru orice x; seria $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = \sum \frac{\cos nx}{n}$ este însă divergentă pentru $x = 0$.

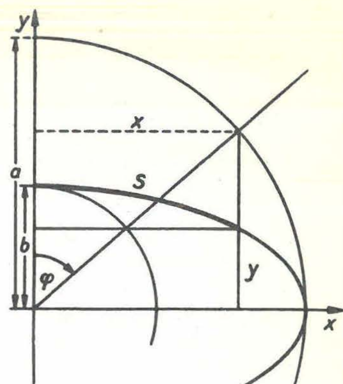
Dacă se consideră termenii $f_n(x)$ ai unei serii de funcții uniform convergente, ca derivatele integralelor lor și dacă seria obținută prin integrare termen cu termen este convergentă cel puțin într-un punct x_0, atunci această serie este în I uniform convergentă și are ca sumă $\int F(x)\,\mathrm{d}x$, unde $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, astfel încît $\int F(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

O serie de funcții uniform convergentă se poate integra termen cu termen.

Arcul de elipsă. Perimetrul elipsei se poate calcula prin integrare termen cu termen. Lungimea arcului S al elipsei cu reprezentarea parametrică $x = a \sin\varphi$, $y = b\cos\varphi$ (fig. 21.1.2) se obține din $\mathrm{d}x = a\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$, $\mathrm{d}y = -b\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$, cu $\varepsilon^2 = 1 - b^2/a^2$,

$$S = \int_0^{\varphi} \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \int_0^{\varphi} \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = a\int_0^{\varphi} \sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi$$

Deoarece $|\varepsilon| < 1$, cu ajutorul sumei binomiale $\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}$ se poate dezvolta într-o serie uniform convergentă $1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\sin^2\varphi - \frac{\varepsilon^4}{2\cdot 4}\sin^4\varphi - \frac{1\cdot 3\varepsilon^6}{2\cdot 4\cdot 6}\sin^6\varphi - \ldots$ din care se obține pentru S expresia $S = a\left(\varphi - \frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^\varphi \sin^2\varphi\, d\varphi - \frac{\varepsilon^4}{2\cdot 4}\int_0^\varphi \sin^4\varphi\, d\varphi - \ldots\right)$ cu ajutorul căreia se poate calcula lungimea arcului S pentru orice unghi φ.



21.1.2. Reprezentare parametrică a elipsei

Pentru valoarea $\varphi = \frac{\pi}{2}$ a parametrului evaluarea integralei $\int_0^\varphi \sin^{2k}\varphi\, d\varphi$ se simplifică. Din relațiile date în capitolul 20 pentru deducerea produselor lui Wallis, rezultă

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k}\varphi\, d\varphi = \frac{1\cdot 3\ldots(2k-1)}{2\cdot 4\ldots 2k}\,\frac{\pi}{2},\quad k = 1, 2, 3\ldots$$

Prin introducerea acestor valori se obține dezvoltarea în serie pentru sfertul de elipsă și se obține astfel lungimea elipsei. Din compararea dezvoltărilor în serie pentru valoarea exactă și pentru valoarea de aproximare se observă că eroarea are ordinul de mărime $\frac{3}{16000}\,\varepsilon^2$.

Lungimea elipsei	$U = 2\pi a\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\varepsilon^2 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{\varepsilon^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\frac{\varepsilon^6}{5} - \ldots\right]$
Formula de aproximare	$U \approx \pi\left[\frac{3}{2}(a+b) - \sqrt{ab}\right]$ $\varepsilon^2 = 1 - b^2/a^2$

Pentru a găsi eroarea rezultată cînd se folosește formula de aproximare, se pornește de la relațiile

$$(a+b)/2 = (a/2)[1 + \sqrt{1-\varepsilon^2}],\quad \sqrt{ab} = a\sqrt[4]{1-\varepsilon^2}$$

care se dezvoltă în serie binomială cu resturile R_3', respectiv R_3'' pentru care se pot găsi evaluări superioare r' și r''. Din aceste dezvoltări se obține o dezvoltare în serie pentru $\pi[3(a+b)/2 - \sqrt{ab}]$, care diferă de seria exactă numai prin termenii conținînd pe $\varepsilon^8, \varepsilon^9, \ldots$ Dacă r este o margine superioară pentru precizia seriei exacte, atunci se poate găsi o evaluare a erorii Δ, $\Delta < r + 3r' + r''$ și efectuînd calculele se obține $\Delta < 0{,}4/\varepsilon^8/(1-\varepsilon^2)$.

21.2. Serii de puteri

Seriile de puteri sînt cazuri particulare de serii de funcții în care funcțiile sînt puteri ale variabilei multiplicate cu un factor constant, $f_n(x) = a_n x^n$. Sumele parțiale $F_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ sînt polinoame și sînt definite pentru orice x. Intervalul de convergență al seriei

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$ trebuie studiat pentru fiecare caz.

Se poate întîmpla ca seria să fie peste tot convergentă, adică convergentă pentru orice x, sau, nicăieri convergentă cu excepția lui $x = 0$.

Exemple. 1. Seria $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n = x + 4x^2 + 27x^3 + 256x^4 + \ldots$ nu este convegentă în nici un punct cu excepția lui $x = 0$.

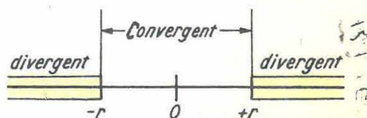
2. Seria $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots$ este peste tot convergentă.

Convergența seriilor de puteri

Pentru orice valoare fixată $x = x_0$, termenii seriei de puteri sînt constante și deci se pot aplica rezultatele găsite în capitolul 18. În special se va folosi noțiunea de convergență absolută, adică convergența seriei valorilor absolute ale termenilor seriei inițiale.

Se poate arăta că seria $\Sigma a_n x^n$ converge absolut pentru orice x, $|x| < |x_1|$ dacă seria $\Sigma a_n x_1^n$ este convergentă.

Raza de convergență a seriilor de puteri. Numărul pozitiv r este raza de convergență a unei serii de puteri, dacă aceasta converge pentru orice x, $|x| < r$ și diverge pentru $|x| > r$; intervalul $(-r, r)$ se numește *interval de convergență* (fig. 21.2.1). Pentru o serie peste tot convergentă $r = \infty$, pentru una nicăieri convergentă $r = 0$.



21.2.1. Intervalul de convergență al unei serii de puteri

Teorema lui Abel. Pentru orice serie de puteri care nu este nicăieri convergentă dar nici peste tot convergentă, există o valoare $r > 0$ astfel încît seria converge pentru $|x| < r$ și diverge pentru $|x| > r$.

Formulele lui Cauchy-Hadamard. Pentru determinarea razei de convergență r, Augustin-Louis Cauchy (1789—1857) a găsit în anul 1821 o formulă care a rămas atunci neobservată. Abia 70 de ani mai tîrziu Jacques-Solomon Hadamard (1865—1963) regăsește aceeași formulă. Se consideră limita superioară $\mu = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$ a șirului de numere pozitive

$$|a_1|, \quad \sqrt{|a_2|}, \quad \sqrt[3]{|a_3|}, \ldots, \sqrt[n]{|a_n|},$$

μ este deci un număr care are proprietatea că o infinitate de termeni ai șirului sînt mai mari decît $\mu - \varepsilon$ însă cel mult un număr finit dintre ei sînt mai mari decît $\mu + \varepsilon$, unde ε este un număr pozitiv ce poate fi ales oricît de mic. Dacă μ are o valoare finită, $0 < \mu < \infty$, atunci și $\frac{1}{\mu}$ este finit și se pot găsi două numere x_1 și ρ astfel încît $|x_1| < \rho < \frac{1}{\mu}$, respectiv $\frac{1}{\rho} > \mu$. Aceasta înseamnă că pentru orice $n > N_1$, $\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\rho}$ sau $\sqrt[n]{|a_n x_1^n|} < \frac{|x_1|}{\rho} < 1$. Seria de puteri converge deci absolut pentru x_1. Pentru $|x_2| > \frac{1}{\mu}$ au loc pentru o infinitate de valori ale lui n, $\sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{|x_2|}$ sau $|a_n x_2^n| > 1$, adică pentru x_2 seria diverge. Astfel, $r = \frac{1}{\mu}$ poate fi privit ca raza de convergență. Teorema următoare care se enunță fără demonstrație afirmă că uneori pentru determinarea razei de convergență, în locul șirului $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ se poate folosi șirul $\left\{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right\}$.

Raza de convergență	$r = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$

Fie a_n coeficienții unei serii de puteri. Dacă șirul $\left\{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right\}$ *este convergent, atunci șirul* $\{\sqrt[n]{|a_{n+1}|}\}$ este de asemenea convergent și ambele șiruri *au aceeași limită.*

Exemple. Seriile de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}, \ldots,$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}$, $p \geqslant 0$, au aceeași rază de convergență $r = 1$. Este suficient să se găsească limita: $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| =$
$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n^p}{(n+1)^p}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^p = 1.$

În ce privește comportarea seriei de puteri în punctele extreme $x = +r$ și $x = -r$ ale intervalului de convergență, nu există metode generale pentru studiul acesteia. Convergența trebuie cercetată separat pentru fiecare punct. Astfel pentru primele trei serii din exemplul precedent se obține:

1. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ diverge pentru $x = -1$ și pentru $x = +1$;

2. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ converge pentru $x = -1$ și diverge reducîndu-se la seria armonică pentru $x = +1$;

3. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ converge pentru $x = -1$ și pentru $x = +1$.

Dacă seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ are raza de convergență r, atunci pentru orice x cu $|x| < r$ seria este absolut convergentă.

Convergența uniformă a seriilor de puteri. Următoarea teoremă este datorată lui Abel.

O serie de puteri converge uniform în orice interval închis care se găsește cuprins în intervalul de convergență.

Datorită acestei propoziții rămîn valabile pentru seriile de puteri toate rezultatele obținute pentru seriile de funcții uniform convergente. Astfel, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este funcție continue în orice interval închis cuprins în intervalul de convergență; integrala acestei funcții se poate obține prin integrare termen cu termen. După cum se va arăta în paragraful următor, derivata funcției $f(x)$ se poate obține prin derivare termen cu termen.

Serii de puteri în domeniul complex. Pentru seriile de puteri cu variabile complexe, și coeficienți complecsi, în locul intervalului de convergență apare cercul de convergență, a cărui rază este raza de convergență (vezi capitolul 23).

Proprietăți importante ale seriilor de puteri

Egalitatea seriilor de puteri. În interiorul intervalului de convergență $|x| < r$ și în special în punctul $x = 0$, seria de puteri $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ reprezintă o funcție continuă. Se poate

întîmpla ca în același interval și seria $f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ să reprezinte o funcție continuă. Dacă există un număr infinit de puncte x_k, diferite de zero, cu $k = 0, 1, 2, \ldots$ al căror punct de acumulare este $x = 0$ și pentru care ambele serii au aceeași sumă $f(x_k) = f_1(x_k)$, atunci $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = a_0$ și $\lim_{k\to\infty} f_1(x_k) = b_0$, și deci $a_0 = b_0$. Deoarece $x_k \neq 0$, se pot forma două funcții noi $g(x)$ și $g_1(x)$ care pentru $x = x_k$ iau aceleași valori:

$$g(x_k) = \frac{f(x_k) - a_0}{x_k} = a_1 + a_2 x_k + a_3 x_k^2 + \ldots$$

$$g_1(x_k) = \frac{f_1(x_k) - b_0}{x_k} = b_1 + b_2 x_k + b_3 x_k^2 + \ldots$$

Prin trecere la limită cînd $k \to \infty$ se obține $a_1 = b_1$. În acest mod prin inducție completă se poate arăta că coeficienții ambelor serii sînt egali și deci cele două serii sînt identice.

Dacă seriile de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ sînt convergente pentru $|x| < r$ și au aceeași sumă pentru un șir de puncte x_k din intervalul de convergență, $x_k \neq 0$, care tinde la 0, atunci cele două serii sînt identice, adică pentru orice n avem $a_n = b_n$.

Acest rezultat este valabil și pentru serii de puteri de forma $\Sigma a_n (x - x_0)^n$. Cînd o funcție $f(x)$ se poate reprezenta în vecinătatea unui punct x_0 printr-o serie de puteri, această reprezentare este unică. Dacă ar exista două astfel de reprezentări, atunci coeficienții puterilor corespunzătoare sînt egali. Metodele de identificare a coeficienților pentru polinoame găsite în capitolul 5 pot fi generalizate pentru seriile de puteri.

Exemplu. Pentru două numere reale a și b, $(1 + x)^a (1 + x)^b = (1 + x)^{a+b}$. În domeniul de convergență $|x| < 1$ fiecare factor se poate reprezenta ca serie binomială:

$$(1 + x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n; \quad (1 + x)^b = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{b}{n} x^n; \quad (1 + x)^{a+b} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a+b}{n} x^n$$

Aplicînd mai departe teoremele valabile pentru produsul a două serii de puteri, rezultă

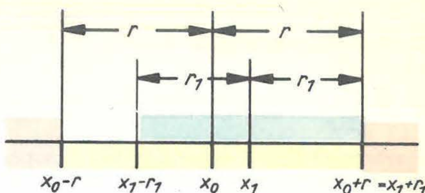
$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a+b}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\binom{a}{0}\binom{b}{n} + \binom{a}{1}\binom{b}{n-1} + \cdots + \binom{a}{n}\binom{b}{0}\right] x^n.$$

De aici, prin egalarea coeficienților, se obține regula de adunare a coeficienților binomiali.

Regula de adunare a coeficienților binomiali*	
$\binom{a}{0}\binom{b}{n} + \binom{a}{1}\binom{b}{n-1} + \cdots + \binom{a}{n-1}\binom{b}{1} + \binom{a}{n}\binom{b}{0} = \binom{a+b}{n}$	a, b reali $n = 0, 1, 2, \ldots$

Transformarea în raport cu un nou centru. Toate relațiile găsite pentru seriile de puteri sînt valabile și în cazul cînd se consideră în loc de x variabila $x - x_0$. În interiorul intervalului $|x - x_0| < r$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ reprezintă o funcție continuă. În loc de cen-

* V. pag. 722 și 899



21.2.2. Transformarea unei serii de puteri

trul x_0, poate să servească ca centru al reprezentării orice alt punct x_1 care se găsește în interiorul intervalului $|x - x_0| < r$, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x - x_1)^k$.
Raza de convergență r_1 are cel puțin mărimea $r - |x_1 - x_0|$. Din figura 21.2.2 se observă că pentru fiecare punct x în intervalul $|x - x_1| < r_1$ are loc $|x_1 - x_0| + |x - x_1| < r$.
Dacă se înlocuiește $x - x_0 = (x_1 - x_0) + (x - x_1)$ în seria cu centrul x_0, atunci nu numai seria $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n[(x_1 - x_0) + (x - x_1)]^n$ este absolut convergentă dar și seria $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(|x_1-x_0| + |x - x_1|)^n$ este convergentă. În aceste ipoteze este valabilă o teoremă de transformare care nu va fi demonstrată aici. Dezvoltînd parantezele $[(x_1-x_0) + (x - x_1)]^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ în serie binomială și ordonînd după puterile lui $x - x_1$, se obține,

$$f(x) = a_0(x_1 - x_0)^0 +$$

$$+ a_1(x_1 - x_0)^1 + a_1 \binom{1}{1} (x_1-x_0)^0 (x - x_1) +$$

$$+ a_2(x_1 - x_0)^2 + a_2 \binom{2}{1} (x_1 - x_0)^1 (x - x_1) + a_2 \binom{2}{2} (x_1 - x_0)^0 (x - x_1)^2 + \ldots$$

$$+ a_3(x_1 - x_0)^3 + a_3 \binom{3}{1} (x_1 - x_0)^2 (x - x_1) + a_3 \binom{3}{2} (x_1 - x_0)^1 (x - x_1)^2 + \ldots$$

$$\cdots$$

$$+ a_n(x_1 - x_0)^n + a_n \binom{n}{1} (x_1 - x_0)^{n-1} (x - x_1) + a_n \binom{n}{2} (x_1 - x_0)^{n-2} (x - x_1)^2 + \ldots$$

$$f(x) = \underbrace{\sum_{n=a}^{\infty} \binom{n}{0} a_n(x_1 - x_0)^n}_{=b_0} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{1} a_{n+1}(x_1 - x_0)^n (x - x_1)}_{+b_1\cdot(x-x_1)} +$$

$$+ \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} a_{n+2}(x_1 - x_0)^n (x - x_1)^2}_{+b_2(x-x_1)^2} + \ldots$$

Seriile pe fiecare coloană ca și suma acestor serii sînt absolut convergente și pentru fiecare x în intervalul $|x - x_1| < r_1$, $\Sigma b_k(x - x_1)^k$ reprezintă valoarea lui $f(x)$. Deci:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x - x_1)^k \quad \text{cu} \quad b_k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} a_{n+k}(x_1 - x_0)^n.$$

Derivarea termen cu termen a unei serii de puteri. Cu ajutorul transformării expuse în paragraful precedent orice punct x_1 din interiorul intervalului de convergență poate servi ca centru al transformării în serie de puteri a funcției respective. Funcția $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x - x_1)^k$ este chiar derivabilă în $x = x_1$, deoarece din $f(x_1) = b_0$ se obține

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = b_1 + b_2(x - x_1) + b_3(x - x_1)^2 + \ldots$$

Cînd $x \to x_1$, această expresie tinde către $f'(x_1) = b_1$.

După cum s-a văzut mai sus $b_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{1} a_{n+1}(x - x_0)^n$ este o serie absolut convergentă. Ea se obţine prin derivare termen cu termen din seria $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, are aceeaşi rază de convergenţă şi reprezintă derivata funcţiei $f(x)$. Raţionamentul se poate repeta. După derivarea termen cu termen a seriei cu centrul x_1 se obţine

$$\frac{f'(x) - f'(x_1)}{x - x_1} = 2!\, b_2 + 3!\, b_3(x - x_1) + \dots$$

sau $\frac{1}{2!} f''(x_1) = b_2$, unde $b_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} a_{n+2}(x - x_0)^n$ este la rîndul ei convergentă. Prin inducţie completă se obţine propoziţia:

O funcţie reprezentată printr-o serie de puteri admite derivată de orice ordin, în orice punct interior al intervalului ei de convergenţă. Derivata ei se obţine prin derivare termen cu termen.

Suma, diferenţa şi produsul unei serii de puteri. În orice punct $x = x_1$ din interiorul intervalelor de convergenţă a două serii de puteri $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$ şi $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, ambele serii sînt absolut convergente. Cu ajutorul teoremelor introduse în capitolul 18, suma, diferenţa şi produsul funcţiilor $f(x)$ şi $g(x)$ pot fi reprezentate prin serii de puteri.

Pentru orice x care aparţine domeniilor de convergenţă ale seriilor $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ şi $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, seriile obţinute prin adunare şi scădere termen cu termen $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)\, x^n$, respectiv $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n)\, x^n$, converg absolut şi reprezintă funcţiile $f(x) + g(x)$, respectiv $f(x) - g(x)$.

Pentru orice x care aparţine intervalelor de convergenţă ale seriilor $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ şi $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ seria produs $\sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0)\, x^n$ converge absolut şi reprezintă funcţia $f(x)\, g(x)$.

Coeficienţii se pot determina prin procedeul diagonal dintr-o schemă a produselor parţiale sau din schema liniilor deplasate (vezi cap. 18).

Exemplu. Pentru $|x| < 1$ seria geometrică $\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$ este convergentă. După cum se poate vedea cu ajutorul schemei de mai jos, se obţin prin înmulţirea acestei serii cu ea însăşi seriile

$$\frac{1}{(1 - x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^2 + \dots \quad \text{şi} \quad \frac{1}{(1 - x)^3} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \dots$$

$\dots + x^3 + x^2 + x + 1$ →

$1 + x + x^2 + x^3 \dots$

$\dots + x^3 + x^2 + x + 1$ →

$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$

Alte exemple privind seriile de puteri ale funcțiilor sinus și cosinus se vor da cînd se vor introduce aceste serii.

Compunerea seriilor de puteri. În capitolul 19 s-au considerat funcții compuse de forma $y = f[\varphi(x)]$. Cînd funcția $z = \varphi(x)$ este reprezentată printr-o serie de puteri $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ și pentru orice valoare x din intervalul de convergență a acestei serii de puteri, ia valori z care aparțin intervalului de convergență al unei serii de puteri $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, atunci $y = F(x) = f[\varphi(x)]$ este o funcție de x. Se pune problema dacă această funcție se poate reprezenta ca serie de puteri $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ și în ce mod pot fi determinați coeficienții c_n cu ajutorul coeficienților a_n și b_n. Seria de puteri căutată trebuie să satisfacă relația

$$F(x) = b_0 + b_1(a_0 + a_1 x + \ldots) + b_2(a_0 + a_1 x + \ldots)^2 + \ldots$$

Printr-un procedeu care se aseamănă cu cel folosit la transformarea seriilor de puteri, se determină puterile z^k ale lui $z = \Sigma a_n x^n$ prin înmulțirea seriilor $z^k = a_{k0} + a_{k1}x + \ldots + a_{kn}x^n + \ldots$ și ordonarea după puterile lui x. Se poate arăta că seriile rezultate pe coloană, $c_n = \sum_{k=0}^{\infty} b_k a_{kn}$, sînt absolut convergente și deci seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge absolut și reprezintă pentru orice valoare x funcția $F(x) = f[\varphi(x)]$.

Împărțirea seriilor de puteri. Problema împărțirii unei serii de puteri $\Sigma b_n x^n$ la seria $\Sigma a_n x^n$ se reduce la problema formării produsului, atunci cînd este posibilă reprezentarea lui $\dfrac{1}{\Sigma a_n x^n}$ ca serie de puteri. Dacă se presupune că divizorul $\Sigma a_n x^n = a_0 + (a_1 x + a_2 x^2 + \ldots) = a_0 + z$ are o rază de convergență $r > 0$ și că a_0 este diferit de zero, atunci într-o porțiune a intervalului de convergență $|z| = |a_1 x + a_2 x^2 + \ldots| < |a_0|$. Valoarea inversă a divizorului se poate dezvolta atunci în serie de puteri $\dfrac{1}{\Sigma a_n x^n} = \dfrac{1}{a_0} - \dfrac{z}{a_0^2} + \dfrac{z^2}{a_0^3} - \dfrac{z^3}{a_0^4} + \ldots$ care converge pentru valorile x ale unui interval în care converge și $z = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ Înlocuind seria lui z în serie geometrică, se obține, așa cum s-a indicat în paragraful precedent, o serie de puteri $\Sigma c_n x^n$ care este absolut convergentă și care reprezintă funcția $\dfrac{1}{\Sigma a_n x^n}$.

După ce s-a stabilit în ce condiții există seria de puteri $\Sigma c_n x^n$, coeficienții c_n se pot determina simplu, prin identificare. Din produsul $\Sigma a_n x^n \cdot \Sigma c_n x^n = 1$, rezultă un sistem de ecuații în care c_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ sînt necunoscute care se pot determina succesiv:

$$a_0 c_0 = 1,\; a_0 c_1 + a_1 c_0 = 0, \ldots, a_0 c_n + a_0 c_{n-1} + \ldots + a_n c_0 = 0, \ldots$$

Mai general, cînd se împarte seria de puteri $\Sigma b_n x^n$ la seria $\Sigma a_n x^n$, atunci coeficienții c_n rezultă din $\Sigma b_n x^n = \Sigma a_n x^n \cdot \Sigma c_n x^n$, unde prin egalarea coeficienților acelorași puteri ale lui x se obțin ecuații în c_n.

Exemplu. Din dezvoltarea în serie de puteri a funcției

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \quad \text{și} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

se poate găsi prin împărțire dezvoltarea în serie de puteri a funcției $\operatorname{tg} x = \sin x/\cos x$. Din condițiile de existență a seriei de puteri $\Sigma c_n x^n$ rezultă că împărțirea se poate face în porțiunea intervalului de convergență $r = \infty$ a seriei cosinus în care $\cos x \neq 0$, adică în intervalul

$|x| < \frac{\pi}{2}$. Coeficienții se obțin din identitatea $\sin x = \cos x \cdot \sum c_n x^n$. Primii cinci coeficienți ai produsului rezultă din schema

$$\ldots + c_5x^5 + c_4x^4 + c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x \; + \; c_0$$

$$1 + 0 \cdot x - \frac{x^2}{2!} + 0 \cdot x^3 + \frac{x^4}{4!} + 0 \cdot x^5 - \ldots$$

Se obține:

$$0 = c_0, \; 1 = c_1, \; 0 = c_2 - \frac{c_0}{2!}, \quad -\frac{1}{3!} = c_3 - \frac{c_1}{2!}, \quad 0 = c_4 - \frac{c_2}{2!} + \frac{c_0}{4!}, \ldots$$

de unde se obțin succesiv:

$c_0 = 0$, $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} = \frac{1}{3}$ $c_4 = 0$, $c_5 = \frac{1}{5!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{3 \cdot 2!} = \frac{2}{15}$, $c_6 = 0$, $c_7 = \frac{1}{7!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{3 \cdot 4!} + \frac{2}{15 \cdot 2!} = \frac{17}{315}, \ldots$ adică pentru $|x| < \frac{\pi}{2}$ rezultă dezvoltarea: $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \ldots$

Numerele lui Bernoulli. Folosind dezvoltarea funcției exponențiale (care se va deduce mai tîrziu), $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots$, funcția

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots} = B_0 + \frac{B_1}{1!} x + \frac{B_2}{2!} x^2 + \ldots$$

satisface condițiile necesare pentru posibilitatea efectuării împărțirii și deci se poate dezvolta într-o serie de puteri. Coeficienții acestei serii se vor căuta de forma $\frac{B_n}{n!}$. Numerele B_n se numesc *numerele lui Bernoulli* și pot fi calculate din produsul

$$1 = \left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ldots\right)\left(B_0 + \frac{B_1}{1!} x + \frac{B_2}{2!} x^2 + \ldots\right).$$

Din compararea coeficienților folosind schema se obțin relațiile:

$$\ldots + \frac{B_3}{3!} x^3 + \frac{B^2}{2!} x^2 + \frac{B_1}{1!} x + B_0$$

$$1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \ldots$$

$$B_0 = 1, \quad \frac{B_0}{2!} + B_1 = 0,$$

$$\frac{B_0}{3!} + \frac{B_1}{1!2!} + \frac{B_2}{2!} = 0,$$

$$\frac{B_0}{4!} + \frac{B_1}{1!3!} + \frac{B_2}{2!2!} + \frac{B_3}{3!} = 0, \ldots$$

care prin aducere la același numitor iau forma

$$B_0 = 1, \quad 2B_1 + B_0 = 0, \quad 3B_2 + 3B_1 + B_0 = 0, \quad 4B_3 + 6B_2 + 4B_1 + B_0 = 0,$$

$$5B_4 + 10\,B_3 + 10\,B_2 + 5B_1 + B_0 = 0, \ldots$$

de unde rezultă:

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \dots$$

Toți coeficienții B_n de indice impar $n \geqslant 3$ sînt nuli.

Inversarea seriilor de puteri. După cum s-a arătat în capitolul 5, în anumite condiții de monotonie, funcția $y = f(x)$ admite o funcție inversă $x = \varphi(y)$. Cu ajutorul unor considerații care nu se vor expune aici în amănunțime, se poate deduce o teoremă analoagă și pentru serii de puteri.

Fiind dată seria de puteri $y = f(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$ cu raza de convergență r și $a_1 \neq 0$, există o singură serie de puteri $x = \varphi(y) = b_1y + b_2y^2 + b_3y^3 + \dots$ convergentă într-o vecinătate a lui $y = 0$ astfel încît $y \equiv f[\varphi(y)]$.

Dacă s-a demonstrat că seria de puteri $x = b_1y + b_2y^2 + \dots$ are o rază de convergență r_1 diferită de zero, atunci coeficienții $b_1, b_2, b_3, \dots$ se determină prin identificare după ce s-a introdus în dezvoltarea lui x seria de puteri $y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$ Această determinare este unică, adică există o singură dezvoltare în serie de puteri pentru $x = \varphi(y)$.

Exemplu. Din dezvoltarea în serie de puteri a lui $y = \sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dots$ se pot obține prin înlocuire coeficienții seriei $x = \text{Arcsin}\, y = b_1y + b_2y^2 + b_3y^3 + \dots$ Se obține:

$$\begin{aligned} y = {} & b_1y + b_2y^2 + b_3y^3 + b_4y^4 + b_5y^5 + \dots \\ & - \frac{1}{6}[b_1^3y^3 + 3b_2b_1^2y^4 + 3b_1b_2^2y^5 + 3b_1^2b_3y^5 + \dots] \\ & + \frac{1}{120}[b_1^5y^5 + \dots] \end{aligned}$$

adică ecuațiile

$$1 = b_1, \quad 0 = b_2, \quad 0 = b_3 - \frac{b_1^3}{6}, \quad 0 = b_4 - \frac{b_2b_1^2}{2},$$

$$0 = b_5 - \frac{b_1b_2^2}{2} + \frac{b_1^2b_3}{2} + \frac{b_1^5}{120}, \dots$$

Succesiv se obțin

$$b_1 = 1, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = \frac{1}{6}, \quad b_4 = 0, \quad b_5 = \frac{3}{40}, \dots$$

sau $$x = \text{Arcsin}\, y = y + \frac{y^3}{6} + \frac{3y^5}{40} + \dots$$

Serii Taylor

S-a arătat în paragraful precedent că o serie de puteri Σa_nx^n cu raza de convergență pozitivă $|x| < r$, definește o funcție $f(x) = \Sigma a_nx^n$ care este continuă și pentru care prin derivare termen cu termen se pot găsi derivate de orice ordin. Invers, fiind dată o funcție $f(x)$, de exemplu $\sin x$, $\sqrt{1 + x^2}$ sau $\text{arctg}\, x$, să se arate că această funcție poate fi reprezentată

printr-o serie de puteri convergente și să se determine coeficienții acestei serii. Această problemă a fost rezolvată de Brook TAYLOR (1685—1731) și Colin MACLAURIN (1698 — 1741).

Dacă se presupune că funcția dată $f(x)$ se poate dezvolta în serie de puteri $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ...$, atunci funcția $f(x)$ admite derivate de orice ordin și prin derivare termen cu termen și trecere la limită cînd $x \to 0$ se obțin

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + ... + na_nx^{n-1} + ... \longrightarrow f'(0) = a_1,$$

$$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + ... + n(n-1)\,a_nx^{n-2} + ... \qquad f''(0) = 2a_2,$$

$$f'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1a_3 + ... + n(n-1)(n-2)\,a_nx^{n-3} + ... \longrightarrow f'''(0) = 3!a_3,$$

. . . .

$$f^{(n)}(x) = n!\,a_n + (n+1)\,...\,2a_{n+1}x + ... \longrightarrow f^{(n)}(0) = n!a_n.$$

Deci în cazul cînd seria de puteri este convergentă ea se mai poate scrie sub forma $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ...$ Această formă a dezvoltării poartă numele lui MACLAURIN.

Aceleași considerații se pot face pentru o dezvoltare în serie de puteri cu centrul în x_0, $\Sigma a_n(x - x_0)^n$ din care prin trecere la limită $x \to x_0$ se obține dezvoltarea în serie TAYLOR

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ...$$

care se mai poate scrie în funcție de h, unde $x = x_0 + h$:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + ...$$

Teorema lui Taylor. Pentru studiul convergenței acestor serii se scrie dezvoltarea în serie Taylor cu ajutorul sumelor parțiale și a restului R_n, sub forma (vezi formula lui Taylor în cap. 18):

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + R_n.$$

Restul R_n reprezintă diferența dintre funcția dată și (funcția de aproximare) suma parțială și se poate evalua cu ajutorul derivatei de ordinul $n + 1$ a funcției $f(x)$. Examinînd forma restului, se poate observa că pentru $n \to \infty$ aceasta are limita 0 și deci seria converge.

Teorema lui Taylor. Dacă funcția $f(x)$ admite în intervalul închis $[x_0, x_0+h]$ derivată de ordinul n continuă $f^{(n)}(x)$ și derivata de ordinul $n + 1$ există cel puțin în interiorul acestui interval, atunci restul R_n din dezvoltarea

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + R_n$$

se poate exprima astfel:

a) sub forma lui Lagrange: există cel puțin un număr θ cuprins între 0 și 1, $0 < \theta < 1$, astfel încît

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0 + \theta h), \quad \textbf{sau}$$

b) sub forma lui Cauchy: există cel puțin un număr θ', $0 < \theta' < 1$, astfel încît

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{n!}(1 - \theta')^n f^{(n+1)}(x_0 + \theta' h).$$

Pentru deducerea acestor forme se folosește teorema lui Cauchy din calculul diferențial care se enunță astfel: Dacă două funcții continue $F(x)$ și $\varphi(x)$ sînt derivabile și au derivata continuă în intervalul $[x_0,x_0 + h]$, atunci pentru cel puțin un θ, $0 < \theta < 1$

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)} = \frac{F'(x_0 + \theta h)}{\varphi'(x_0 + \theta h)}.$$

Se poate lua $\varphi(x) = (x_0 + h - x)^{n+1}$. Atunci $\varphi(x_0) = h^{n+1}$, $\varphi(x_0 + h) = 0$ și $\varphi'(x) = - (n + 1)(x_0 + h - x)^n$.

Funcția $F(x)$ se obține înlocuind în expresia restului

$$R_n = f(x_0 + h) - f(x_0) - \frac{h}{1!} f'(x_0) - \ldots - \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

pe $x_0 + h$ prin x_1 și $x_1 - x_0$ prin h și considerînd pe x_0 ca variabila x. Această funcție

$$F(x) = f(x_1) - f(x) - \frac{(x_1 - x)}{1!} f'(x) - \frac{(x_1 - x)^2}{2!} f''(x) - \ldots - \frac{(x_1 - x)^n}{n!} f^{(n)}(x)$$

este continuă în intervalul $[x_0, x_0 + h]$, derivabilă în interiorul acestui interval și ia valorile

$$F(x_0) = R_n, \quad F(x_0 + h) = 0 \quad \text{și} \quad F'(x) = - \frac{(x_1 - x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x).$$

Din teorema lui Cauchy rezultă

$$\frac{-R^n}{-h^{n+1}} = \frac{-\dfrac{h^n(1 - \theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{-(n + 1) h^n(1 - \theta)^n}$$

sau

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta h),$$

adică restul sub forma lui Lagrange.

Cu ajutorul altor funcții $\varphi(x)$ se obțin alte forme ale restului. Forma lui Cauchy se obține pentru $\varphi(x) = x_0 + h - x$.

Restul în dezvoltarea MacLaurin. Și în acest caz, teorema lui Taylor rămîne valabilă. Restul capătă forma Lagrange $R_n = \frac{x^{n+1}}{(x + 1)!} f^{(n+1)}(\theta x)$ sau forma Cauchy $R_n = \frac{x^{n+1}}{n!}(1 - \theta)^n f^{(n+1)}(\theta' x)$.

Funcții trigonometrice. Derivatele funcțiilor sinus și cosinus pentru $x = 0$ sînt

sin x			
$f(0)$	$= f^{(4k)}(0)$	$= \sin 0 =$	0
$f'(0)$	$= f^{(4k+1)}(0)$	$= \cos 0 =$	1
$f''(0)$	$= f^{(4k+2)}(0)$	$= -\sin 0 =$	0
$f'''(0)$	$= f^{(4k+3)}(0)$	$= -\cos 0 =$	-1

cos x			
$f(0)$	$= f^{(4k)}(0)$	$= \cos 0 =$	1
$f'(0)$	$= f^{(4k+1)}(0)$	$= -\sin 0 =$	0
$f''(0)$	$= f^{(4k+2)}(0)$	$= -\cos 0 =$	-1
$f'''(0)$	$= f^{(4k+3)}(0)$	$= \sin 0 =$	0

Cînd n este un număr par 2ν, pentru orice valoare a variabilei și pentru $0 < \theta < 1$, respectiv $0 < \theta' < 1$ se obțin:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{\nu-1} \frac{x^{2\nu-1}}{(2\nu - 1)!} + (-1)^\nu \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu + 1)!} \cos(\theta x),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^{\nu-1} \frac{x^{2\nu-2}}{(2\nu - 2)!} + (-1)^\nu \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!} \cos(\theta' x)$$

Cînd $\nu \to \infty$ resturile ambelor serii tind pentru orice x la 0, deci seriile respective sînt convergente.

Prin înmulțirea acestor serii cu ele însele, se obțin dezvoltări în serie ale puterilor funcțiilor sinus, respectiv cosinus. Tot în acest scop pot fi folosite și teoremele privind adunarea seriilor. De exemplu:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2}\left[\frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^6}{6!} + \dots\right].$$

Seria pentru tg x se obține prin împărțire $\frac{\sin x}{\cos x}$. La fel se pot obține și seriile pentru $\frac{1}{\cos x}$, $\frac{x}{\sin x}$ și x cotg x.

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \qquad r = \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \qquad r = \infty$$

$$\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2}{45}x^6 - \dots \qquad \cos^2 x = 1 - x^2 + \frac{x^4}{3} - \frac{2}{45}x^6 + \dots$$

$$\sin^3 x = x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{13}{120}x^7 - \dots \qquad \cos^3 x = 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{8}x^4 - \frac{61}{240}x^6 + \dots$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots, \qquad r = \frac{\pi}{2}$$

$$x \operatorname{cotg} x = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \frac{2x^6}{945} - \frac{x^8}{4725} - \dots, \qquad r = \pi$$

$$\frac{x}{\sin x} = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + \frac{31x^6}{15120} + \dots, \qquad r = \pi$$

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \dots, \qquad r = \frac{\pi}{2}.$$

Funcții exponențiale și hiperbolice. Cum toate derivatele funcției e^x sînt tot e^x și iau pentru $x = 0$ valoarea 1, se obține ($r = \infty$) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$ unde $0 < \theta < 1$. Pentru funcția exponențială generală $a^x = e^{x \ln a}$, se obține o serie corespunzătoare convergentă pentru orice x.

Cu ajutorul dezvoltării în serie Taylor se pot obține unele proprietăți ale funcției exponențiale, de exemplu:

$$e^{x_0+h} = e^{x_0} + e^{x_0}\frac{h}{1!} + e^{x_0}\frac{h^2}{2!} + e^{x_0}\frac{h^3}{3!} + \dots = e^{x_0}\left[1 + \frac{h}{1!} + \frac{h^2}{2!} + \dots\right],$$

de unde

$$e^{x_0+h} = e^{x_0} \cdot e^h.$$

Cu ajutorul funcției exponențiale se obțin dezvoltările în serie de puteri ale funcțiilor hiperbolice $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ și $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$; $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ și $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, r = \infty$$

$$a^x = e^{x \ln a} = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \dots, r = \infty, \quad a > 0$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad r = \infty$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad r = \infty$$

$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \dots, \quad r = \frac{\pi}{2}$$

$$x \operatorname{cth} x = 1 + \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} + \frac{2}{945}x^6 - \frac{x^3}{4725} + \dots, \quad r = \pi$$

Logaritmul. Pentru funcția logaritmică $\ln(1+x)$, $f(1) = 0$, $\frac{d^n \ln x}{dx^n} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$ sau $\frac{1}{n!}f^{(n)}(1) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Se obține astfel dezvoltarea în serie Taylor, $0 < \theta < 1$, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}}$. Restul tinde la zero pentru $0 \leqslant x \leqslant 1$ cînd $n \to \infty$. Aceeași serie s-ar fi putut obține prin integrare termen cu termen în intervalul $|x| < 1$ a seriei geometrice $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$

Funcția logaritmică	$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad \lvert x \rvert < 1$

Această serie nu este indicată pentru calcularea logaritmului natural deoarece converge foarte încet, atunci cînd x nu este foarte mic.

Din $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$ se obține ținînd seama de $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ o serie care converge pentru $|x| < 1$; pentru $\xi > 1$, $\frac{1}{\xi} = x < 1$ și se obține a doua formulă.

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right)$$

$$\ln \sqrt{\frac{\xi+1}{\xi-1}} = \frac{1}{\xi} + \frac{1}{3\xi^3} + \frac{1}{5\xi^5} + \dots$$

Pentru a calcula logaritmi cu ajutorul seriilor este de dorit să se combine serii care converg rapid. Astfel de exemplu din

$$2 = \frac{2^{13} \cdot 3^{14} \cdot 5^7}{2^{12} \cdot 3^{14} \cdot 5^7} = \frac{10^7 \cdot 24^2 \cdot 81^3}{9^7 \cdot 25^2 \cdot 80^3}$$

rezultă $\ln 2 = 7 \ln \frac{10}{9} - 2 \ln \frac{25}{24} + 3 \ln \frac{81}{80}$.

Analog

$$\ln 3 = 11 \ln \frac{10}{9} - 3 \ln \frac{25}{24} + 5 \ln \frac{81}{80},$$

$$\ln 5 = 16 \ln \frac{10}{9} - 4 \ln \frac{25}{24} + 7 \ln \frac{81}{80}.$$

Fiecare din logaritmii aflați în partea dreaptă a egalităților de mai sus se calculează cu ajutorul unor dezvoltări în serie. Dintre acestea, cea care converge cel mai lent are forma

$$\ln \frac{10}{9} = -\ln\left(1 - \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{10} + \frac{1}{2 \cdot 100} + \frac{1}{3 \cdot 1000} + \dots$$

Varietatea metodelor și posibilităților care apar în calculul logaritmilor a fost remarcată de Carl Friedrich GAUSS (1777—1855) care afirma: „există un fel de poezie în calculul tabelelor de logaritmi".

Seria binomială. Pentru orice număr întreg pozitiv m, din $f(x) = (1 + x)^m$ rezultă

$$f(x) = 1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \dots + \binom{m}{m} x^m.$$

Dacă m nu este un număr întreg pozitiv, atunci pentru $|x| < 1$, $f(x) = (1 + x)^m$ se poate dezvolta în seria MacLaurin convergentă. Se obține $f(0) = 1$, $f'(0) = m$, $f''(0) = m(m-1), \dots$
$\dots, f^{(n)}(0) = \binom{m}{n} \cdot n!$.

Seria binomială	$(1 + x)^m = 1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \binom{m}{3} x^3 + \dots;\quad r = 1$

Această serie a fost descoperită de NEWTON în 1676; forma ei exactă a fost dedusă însă de EULER 100 de ani mai tîrziu. Această serie se folosește în calculul aproximativ al rădăcinilor și puterilor cu exponent oarecare. Pentru $m = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}$ și $-\frac{1}{3}$ se obțin pentru $|x| < 1$:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2 \cdot 4} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} x^n + \dots$$

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3} x - \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 6} x^2 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} x^3 - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-4)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 \dots 3n} x^n + \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2} x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} x^n + \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = 1 - \frac{1}{3} x + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 6} x^2 - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9} x^3 + \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \dots 3n} x^n + \dots$$

Puterile seriei geometrice, adică puteri întregi negative ale lui $\frac{1}{1-x}$, prin derivarea ei termen cu termen se deduc ușor. Se obține pentru $|x| < 1$:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n + \dots$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + (n+1) x^n + \dots$$

$$\frac{1}{(1-x)^3} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \dots + \frac{1}{2} (n+1)(n+2) x^n + \dots$$

Inversele funcțiilor trigonometrice și hiperbolice. Deoarece primele derivate ale acestor funcții sînt funcții algebrice care se pot dezvolta în serie binomială, rezultă că dezvoltările funcțiilor însăși se pot obține prin integrare termen cu termen a dezvoltării derivatei lor. De exemplu, din $\frac{d(\operatorname{arctg} x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$ pentru $|x| < 1$ se obține $\int \frac{dx}{1+x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + c$ cu constanta de integrare $c = \operatorname{arctg} 0 = 0$. Din $\operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$ se poate obține o dezvoltare corespunzătoare și pentru arccotg x.

Prin integrarea seriei lui $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ se obține o dezvoltare în serie de puteri pentru arcsin x și din relația $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ și pentru arccos x. În mod corespunzător se poate proceda și pentru inversele funcțiilor hiperbolice, însă nu toate dezvoltările ce se obțin sînt serii de puteri.

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \ldots + \frac{1\cdot 3\ldots(2n-3)\,x^{2n-1}}{2\cdot 4\ldots(2n-2)(2n-1)} + \ldots,\quad r = 1$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5} - \ldots,\quad r = 1$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots,\quad r = 1 \text{ și pentru } x = +1$$

$$\operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \ldots,\quad r = 1 \text{ și pentru } x = 1$$

$$\operatorname{arcsh} x = x - \frac{1\cdot x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5} - \ldots + (-1)^n\frac{1\cdot 3\ldots(2n-3)\,x^{2n-1}}{2\cdot 4\ldots(2n-2)(2n-1)},\quad r = 1$$

$$\operatorname{arcch} x = \pm\left[\ln(2x) - \frac{1}{2\cdot 2x^2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 4x^4} - \ldots\right],\quad x > 1$$

$$\operatorname{arcth} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots,\quad r = 1$$

$$\operatorname{arccth} x = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \ldots,\quad |x| > 1$$

Dezvoltări în serie de puteri ale unor funcții speciale

Ca exemple de integrale ce pot fi evaluate numai prin dezvoltare în serie se pot da integrala erorilor a lui Gauss, funcțiile sinus integral, cosinus integral și logaritm integral.

Exemplu. Pentru sinusul integral se obține prin integrare termen cu termen o dezvoltare în serie uniform convergentă a funcției $\frac{\sin \xi}{\xi}$

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \ldots\right)dt = x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \ldots$$

Integrala lui Gauss $r = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = 1$	$\varphi(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2}\,dt = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\dfrac{x}{1} - \dfrac{x^3}{1!\,3} + \dfrac{x^5}{2!\,5} - \dfrac{x^7}{3!\,7} + \ldots\right)$
Sinus integral, $r = \infty$	$\mathrm{si}(x) = \displaystyle\int_0^x \dfrac{\sin t}{t}\,dt = x - \dfrac{x^3}{3!\,3} + \dfrac{x^5}{5!\,5} - \dfrac{x^7}{7!\,7} + \ldots$
Cosinus integral, $r = \infty$	$\mathrm{ci}(x) = \displaystyle\int_0^x \dfrac{\cos t}{t}\,dt = \ln\gamma + \ln x - \dfrac{x^2}{2!\,2} + \dfrac{x^4}{4!\,4} - \ldots$
Constanta lui Euler (Constanta lui Mascheroni)	$\ln\gamma = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} - \ln n\right)$ $\ln\gamma = 0{,}57722\ldots$
Logaritm integral, $r = \infty$	$\mathrm{Li}(x) = \displaystyle\int_0^x \dfrac{dt}{\ln t}$, $t = e^{-u}$ $\mathrm{Li}(e^{-u}) = \ln\gamma + \ln\lvert u\rvert - u + \dfrac{u^2}{2!\,2} - \dfrac{u^3}{3!\,3} + \dfrac{u^4}{4!\,4} - \ldots$

Valori de aproximare și formule de aproximare

Exemple de aplicare a teoremei lui Taylor. Teorema lui Taylor este în mod frecvent folosită la calculul valorilor unei funcții $f(x)$. Cu ajutorul restului se poate decide cîți termeni ai dezvoltării trebuie considerați pentru a se obține o precizie dată și care este eroarea de calcul pentru un număr fix de termeni.

Calculul numărului e. Din teorema lui Taylor pentru e^x cu $x = 1$ se obține următoarea dezvoltare în serie: $e = 1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!} + \dfrac{e^\theta}{(n+1)!}$, $0 < \theta < 1$. Pentru calculul lui e cu șapte zecimale exacte, cu ajutorul expresiei restului se determină numărul n al termenilor dezvoltării, ce trebuie considerați. Restul satisface inegalitatea $\dfrac{1}{(n+1)!} < R_n < \dfrac{3}{(n+1)!}$, deoarece $e^0 = 1 < e^\theta < e^1 < 3$. Pentru a se evita erorile de rotunjire, se pune condiția $R_n < 10^{-8}$. Pentru n rezultă relația $\dfrac{3}{(n+1)!} < 10^{-8}$ sau $(n+1)! > 3 \cdot 10^8$. Din $12! \approx 4{,}8 \cdot 10^8$ rezultă că este suficient să se ia $n = 11$ termeni. Se obține astfel

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{11!} = 2{,}718281826\ldots$$

Restul se evaluează din $\dfrac{1}{12!} \approx 2 \cdot 10^{-9}$ și $\dfrac{3}{12!} \approx 6 \cdot 10^{-9}$.
Numărul e satisface astfel inegalitățile

$$2{,}718281828\ldots < e < 2{,}718281832\ldots$$

e = 2,718 ...

21.2.3. Numărul e, baza logaritmului natural

Numărul e (fig. 21.2.3) cu șapte zecimale exacte este deci $e = 2{,}7182818$. Efectuînd acest calcul, se poate observa că efortul pentru mărirea preciziei nu este prea mare. În acest caz, intervine o problemă care apare în mod curent în calculele efective, aceea a erorilor de rotunjire. Termenii seriilor de funcții care apar în unele calcule numerice sînt aproape întotdeauna fracții zecimale periodice care trebuie rotunjite. Această rotunjire afectează uneori

precizia rezultatului. Din acest motiv, în practică, se obișnuiește a se calcula rezultatul, în raport cu dimensiunea problemei, cu una sau două zecimale mai mult decît este necesar. De asemenea, valorile rotunjite în plus sau în minus se indică ca atare, astfel încît în rezultatul final să se poată recunoaște eroarea de rotunjire.

De exemplu, fie de calculat $e^{-0,1}$ cu ajutorul teoremei lui Taylor $e^{-0,1} = 1 - 0,1 + 0,005 - \ldots + R_n$. Aici $R_n = \dfrac{0,1^{n+1}}{(n+1)!} e^{-0,1\theta}$ cu $0 < \theta < 1$. Aici $e^{-0,1\theta}$ satisface inegalitățile $0,905 < e^{-0,1\theta} < 1$. Considerînd numai primii patru termeni ai seriei, rezultă calculele alăturate. R_3 verifică inegalitățile $0,000004167 > R_3 > 0,000003770$ iar $e^{-0,1}$ verifică $0,904837103 < e^{-0,1} < 0,904837500$. Astfel, $e^{-0,1}$ s-a evaluat cu șase zecimale exacte $e^{-0,1} = 0,904837\ldots$ Folosindu-se patru termeni ai seriei, se poate aștepta în cel mai bun caz ca rezultatul să aibă patru, cel mult cinci zecimale exacte. Metoda este surprinzător de precisă pentru că abia la a șaptea zecimală apare o eroare de patru unități. Cu ajutorul teoremei lui Taylor se obțin evaluări bune atunci cînd valorile $f^{(n+1)}(x_0)$ și $f^{(n+1)}(x_0 + h)$ diferă foarte puțin și cînd funcția $f^{(n+1)}(x)$ este monotonă în intervalul $(x_0, x_0 + h)$.

1,000 000 000
−0,100 000 000
+0,005 000 000
−0,000 166 667
0,904 833 333

Calculul numărului π. Dezvoltarea în serie a funcției arctangentă poate fi folosită pentru calculul lui π. Fie $\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \ldots$ În acest caz găsirea expresiei restului R_n din teorema lui Taylor este complicată. Funcția $f(x) = \operatorname{arctg} x$ admite derivate de orice ordin, dar aceste derivate au o formă foarte complicată care nu se pretează la o exprimare printr-o formulă generală. Rămîne deci posibilitatea de a exprima restul cu ajutorul teoremei lui Lagrange din calculul diferențial. Se obține:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\cdot\frac{1}{1+\theta x^2}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Pentru $x = 1$, $\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \ldots + \dfrac{(-1)^{2k-1}}{2k-1} + \dfrac{(-1)^k}{2k+1}\cdot\dfrac{1}{1+\theta}$, $0 < \theta < 1$.

Această ecuație a fost găsită de matematicianul englez J. GREGORY (1638–1675) ca și de G.W. LEIBNIZ și este denumită *ecuația Gregory-Leibniz*. Restul se găsește în acest caz între $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2k+1}$ și $\dfrac{1}{2k+1}$. De aici se vede că această formulă nu este adecvată pentru calculul efectiv al lui π. Pentru a calcula pe π cu cinci zecimale exacte, ar trebui reținuți 100 000 termeni ai seriei, ceea ce este prea mult. Se poate reduce numărul acestor termeni prin considerarea altor valori ale lui x. Pentru $\operatorname{arctg}(1/\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{6}$ se obține

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \ldots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)3^k}\cdot\frac{1}{1+\theta}\right], \quad 0 < \theta < 1.$$

Prin combinarea mai multor dezvoltări ale funcției arctangentă pentru diferite argumente s-a ajuns la formule mai comode dintre care unele se folosesc la calculul lui π cu ajutorul calculatoarelor:

John MACHIN (1706) $\quad \pi = 16 \operatorname{arctg}\dfrac{1}{5} - 4\operatorname{arctg}\dfrac{1}{239}$;

C.F. GAUSS (1777–1855) $\quad \pi = 48 \operatorname{arctg}\dfrac{1}{18} + 32\operatorname{arctg}\dfrac{1}{57} - 20\operatorname{arctg}\dfrac{1}{239}$;

C. STÖRMER (1896) $\quad \pi = 24 \operatorname{arctg}\dfrac{1}{8} + 8\operatorname{arctg}\dfrac{1}{57} + 4\operatorname{arctg}\dfrac{1}{239}$.

Ultimele două s-au folosit în anul 1961 pentru calcularea lui π cu 100265 zecimale exacte. Două calculatoare au determinat pe π în sistem dual, pentru control, fiecare pe baza altei formule. Procedeul bazat pe formula lui Gauss a necesitat 4 ore 22 minute iar cel bazat pe formula lui C. Störmer 8 ore și 43 minute. Transcrierea în sistem zecimal a durat 42 minute, textul a ocupat 20 pagini.

Pentru practică aceste „precizii" sînt de mică importanță. Este suficient să se folosească valoarea lui π calculată cu 14 zecimale exacte pentru ca să se obțină lungimea unui cerc cu raza de 6400 km (raza Pămîntului) cu o eroare mai mică decît 0,001 mm. Pentru ca un astfel de ordin de mărime al erorii să aibă sens, ar trebui măsurată raza cu o eroare de același ordin de mărime, ceea ce nu este realizabil în stadiul actual al tehnicii de măsurare.

Aplicații ale seriei binomiale. Seria binomială se aplică în mod frecvent la aproximarea radicalilor. În acest caz dezvoltarea în serie Taylor este

$$(1+x)^a = 1 + \binom{a}{1} x + \binom{a}{2} x^2 + \dots + \binom{a}{n} x^n + \binom{a}{n+1} x^{n+1}(1+\theta x)^{a-n-1}$$

cu $0 < \theta < 1$ și $|x| < 1$.

Dacă, de exemplu, se calculează $\sqrt[3]{999}$ cu 12 zecimale exacte, atunci în formula de mai sus se pune $x = -\frac{1}{1000}$ și $a = \frac{1}{3}$, deoarece $\sqrt[3]{999} = 10\left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{\frac{1}{3}}$. Pentru obținerea preciziei cerute este suficient să se folosească termenii de rang pînă la $n = 2$, deoarece valorile derivatei de ordinul $n+1$ în punctele $x_0 = 0$ și $x_0 + h = -0{,}001$ diferă foarte puțin: $\frac{1}{1{,}62 \cdot 10^{10}} < R_2 < \frac{1{,}003}{1{,}62 \cdot 10^{10}}$ și se obține

$$9{,}996665556173 < \sqrt[3]{999} < 9{,}996665556175 \text{ sau } \sqrt[3]{999} = 9{,}99666555617\dots$$

Această precizie se obține foarte greu cu alte procedee.

Pentru a aplica seria binomială la aproximarea radicalilor, expresia de sub radical trebue adusă prin anumite transformări la forma $1 \pm \delta$ iar δ nu trebuie să fie mai mare decît 0,1. Aceste transformări se fac de la caz la caz cu unele artificii de calcul care se pot ilustra cu ajutorul unor exemple. Dacă se calculează $\sqrt[n]{a}$ și există $b^n \approx a$, atunci $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b^n \frac{a}{b^n}} = b\sqrt[n]{1 + \frac{a - b^n}{b^n}}$, de exemplu $\sqrt[5]{33} = 2 \cdot \sqrt[5]{1 + \frac{1}{32}}$.

Dacă nu se poate găsi o formă adecvată pentru dezvoltarea în serie, atunci se procedează în continuare la o transformare a cantității de sub radical. Dacă o valoare aproximativă a rădăcinii este dată de fracția p/q, atunci p^n/q^n va satisface condiția cerută. Un exemplu clasic este evaluarea lui $\sqrt{2}$; $\sqrt{2} \approx 1{,}4 = \frac{7}{5}$ și deci

$$\sqrt{2} = \sqrt{\frac{7^2 5^2 2}{5^2 7^2}} = \frac{7}{5}\sqrt{\frac{50}{49}} = \frac{7}{5}\sqrt{1 + \frac{1}{49}}.$$

În mod analog se determină $\sqrt[3]{92} \approx 4{,}5 = \frac{9}{2}$, adică

$$\sqrt[3]{92} = \sqrt[3]{\frac{9^2 2^3 92}{2^3 9^3}} = \frac{9}{2}\sqrt[3]{\frac{736}{729}} = \frac{9}{2}\sqrt[3]{1 + \frac{7}{729}}.$$

Aceste exemple arată că pentru calcularea oricărui radical cu o precizie mare se poate folosi seria binomială. Această serie poate fi folosită și pentru calculul puterilor cu exponenți fracționari. Cu ajutorul ei se simplifică calculele și se obțin rezultate bune în cazurile cînd nu se mai obține o precizie satisfăcătoare prin interpolare.

Formule de aproximare. Cînd volumul calculelor ce trebuie efectuate este mare, se obișnuiește aproximarea valorilor unor funcții prin primii termeni ai dezvoltării în serie. Se pot da exemple de astfel de procedee în special în fizică și în tehnică; neglijarea puterilor cu expo-

nent mai mare decît 2 este în general posibilă, de exemplu în termodinamică, cînd coeficientul de dilatare cubică se ia egal cu de trei ori coeficientul de dilatare liniară. În mod frecvent pentru valori mici ale unghiului x, $\sin x$ se înlocuiește prin x. Tabelul alăturat conține principalele formule de aproximare folosite mai frecvent cu indicația domeniului în care se aplică. Pentru ca eroarea ce se realizează prin folosirea formulei să nu depășească 0,001, valorile nu trebuie să depășească marginea indicată în tabel. Se observă că în unele cazuri, în probleme practice, nici nu este necesar să se lucreze cu funcții tabelate. În special, în tehnică se acceptă valori aproximative pentru care eroarea este mai mică decît 0,1%, Astfel, în intervalul [0°, 10°] $\arcsin x$ se poate înlocui prin x. Economia de calcule care se realizează astfel este apreciabilă. Cu ajutorul unor formule de aproximare adecvate, se evită căutarea valorilor pentru unele funcții tabelate (de exemplu funcțiile hiperbolice și inversele lor) și se pot evalua unele integrale definite cu o precizie suficient de bună.

Exemple

1. $\sqrt[4]{258,3} = 4 \cdot \sqrt[4]{\frac{258,3}{256}} = 4 \cdot \left(1 + \frac{2,3}{256}\right)^{1/4} \approx 4\left(1 + \frac{2,3}{4 \cdot 256}\right) = 4,009$. Valoarea cu cinci zecimale exacte este 4,00895.

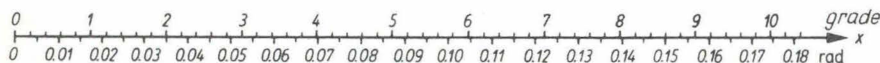
2. $e^{-0,1} \approx 1 - 0,1 + \frac{0,1^2}{2} = 0,905$. Valoarea exactă este 0,90484 ... .

3. $e^{-0,023} \approx 1 - 0,023 = 0,977$. Valoarea exactă este 0,977226 ... .

Formule uzuale de aproximare

Funcția	Prima aproximare $\approx$	Eroarea $< 10^{-3}$ pentru $\lvert x \rvert \leqslant$	A doua aproximare $\approx$	Eroarea $<$ 10^{-3} pentru $\lvert x \rvert \leqslant$
$\frac{1}{1+x}$	$1 - x$	0,032	$1 - x + x^2$	0,096
$\frac{1}{(1+x)^2}$	$1 - 2x$	0,018	$1 - 2x + 3x^2$	0,063
$\frac{1}{(1+x)^3}$	$1 - 3x$	0,013	$1 - 3x + 6x^2$	0,046
$\sqrt{1+x}$	$1 + \frac{x}{2}$	0,089	$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$	0,25
$\sqrt[3]{1+x}$	$1 + \frac{x}{3}$	0,095	$1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}$	0,25
$\sqrt[4]{1+x}$	$1 + \frac{x}{4}$	0,10	$1 + \frac{x}{4} - \frac{3x^2}{32}$	0,26
$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$	$1 - \frac{x}{2}$	0,052	$1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8}$	0,15
$\sqrt[3]{1+x}$	$1 - \frac{x}{3}$	0,065	$1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9}$	0,18
$\frac{1+x}{1-x}$	$1 + 2x$	0,022	$1 + 2x + 2x^2$	0,080
$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2$	$1 + 4x$	0,011	$1 + 4x + 8x^2$	0,044
$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$	$1 + x$	0,045	$1 + x + \frac{x^2}{2}$	0,12

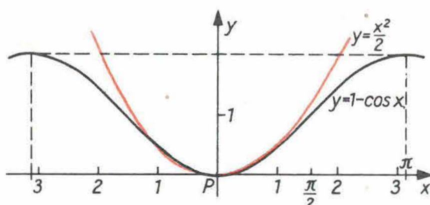
Funcția	Prima aproximare ≈	Eroarea $< 10^{-3}$ pentru $\mid x \mid \leqslant$	A doua aproximare ≈	Eroarea $< 10^{-3}$ pentru $\mid x \mid \leqslant$
$\sin x$	$\begin{Bmatrix} x \\ 0{,}01745(x^\circ) \end{Bmatrix}$	0,18 ≙ 10,4°	$x - \frac{x^3}{6}$ $0{,}01745(x^\circ)$ $-0{,}0000009(x^\circ)^3$	0,63 ≙ 36°
$\sin^2 x$	0	0,031 ≙ 1,8°	x^2	0,23 ≙ 13,2°
$\cos x$	1	0,45 ≙ 2,6°	$1 - \frac{x^2}{2}$	0,394 ≙ 22,6°
$\cos^2 x$	1	0,031 ≙ 1,8°	$1 - x^2$	0,23 ≙ 13,2°
$\operatorname{tg} x$	x	0,14 ≙ 8,2°	$x + \frac{x^3}{3}$	0,38 ≙ 21,6°
$\arcsin x$	x	0,18 ≙ 10,4°	$x + \frac{x^3}{6}$	0,42 ≙ 24°
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2} - x$	0,18 ≙ 10,4°	$\frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6}$	0,42 ≙ 24°
$\operatorname{arctg} x$	x	0,14 ≙ 8,2°	$x - \frac{x^3}{3}$	0,35 ≙ 20°
$\operatorname{arccotg} x$	$\frac{\pi}{2} - x$	0,14 ≙ 8,2°	$\frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3}$	0,35 ≙ 20°
e^x	$1 + x$	0,045	$1 + x + x^2/2$	0,18
$\ln(1 + x)$	x	0,045	$x - x^2/2$	0,14
$\lg(1 + x)$	$0{,}43429\ x$	0,069	$0{,}43429x -$ $0{,}21715x^2$	0,21
$\operatorname{sh} x$	x	0,18	$x + x^3/6$	0,63
$\operatorname{ch} x$	1	0,045	$1 + x^2/2$	0,39
$\operatorname{th} x$	x	0,14	$x - x^3/3$	0,37
$\operatorname{argsh} x$	x	0,18	$x - x^3/6$	0,42
$\operatorname{argth} x$	x	0,14	$x + x^3/3$	0,37



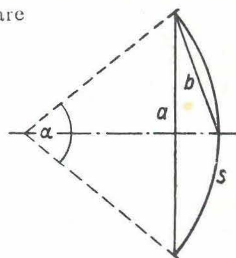
Aplicații ale formulei lui Taylor în geometrie

Parabola oscilatoare. Fie într-un anumit sistem de coordonate curba dată de ecuația $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ Schimbînd sistemul de coordonate cu unul a cărui axă Ox este tangentă la curbă în punctul P și axa Oy este normala în același punct, în raport cu noul sistem de coordonate funcția $f(x)$ ia în punctul P al curbei valorile $x = 0,\ f(x) = 0,\ f'(x) = 0.$ Curbura $\varkappa$ va fi $\varkappa = \frac{f''}{(1+f'^2)^{3/2}}$ sau $f''(0) = \varkappa$. De asemenea $f(0) = a_0 = 0, f'(0) = a_1 = 0,$ $f''(0) = 2a_2 = \varkappa$. Ecuația curbei în noul sistem de coordonate va fi $f(x) = \frac{1}{2}\ \varkappa x^2 + \ldots$ În

punctul P curba se poate deci aproxima prin parabola oscilatoare, $g(x) = \frac{1}{2}\varkappa x^2$. Aproximarea este de ordinul doi (fig. 21.2.4).



21.2.4. Parabola oscilatoare în cazul funcției $y = 1 - \cos x$



21.2.5. Determinarea lungimii arcului

Determinarea lungimii unui arc. Pentru determinarea lungimii arcului de cerc corespunzător unui unghi la centru α (fig. 21.2.5), se folosește formula aproximativă $s \approx \frac{8b - a}{3}$ în care a este coarda corespunzătoare arcului și b coarda corespunzătoare jumătății de arc. Formula exactă este $s = r\alpha$. Cum $a = 2r \sin \frac{\alpha}{2}$, $b = 2r \sin \frac{\alpha}{4}$, se obține cu ajutorul dezvoltării în serie pentru $\sin x$

$$\frac{8b-a}{3} = \frac{2r}{3}\left(8 \sin \frac{\alpha}{4} - \sin \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2r}{3}\left\{8\left[\frac{\alpha}{4} - \frac{(\alpha/4)^3}{3!} + \right.\right.$$

$$\left.+ \frac{(\alpha/4)^5}{5!}\cos\frac{\alpha\theta}{4} - \frac{(\alpha/4)^7}{7!}\cos\frac{\alpha\theta}{4}\right] - \left[\frac{\alpha}{2} - \frac{(\alpha/2)^3}{3!} + \frac{(\alpha/2)^5}{5!} - \right.$$

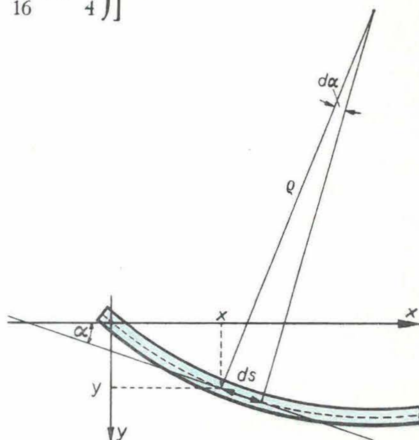
$$\left.\left. - \frac{(\alpha/2)^7}{7!}\cos\frac{\alpha\theta'}{2}\right]\right\} =$$

$$= \frac{2r}{3}\left[\frac{3\alpha}{2} - \frac{3\alpha^5}{2^7 \cdot 5!} + \frac{\alpha^7}{2^7 \cdot 7!}\left(\cos\frac{\alpha\theta'}{2} - \frac{\cos(\alpha\theta/4)}{2^4}\right)\right]$$

sau
$$\frac{8b-a}{3} = s - \frac{r\alpha^5}{5!\cdot 64}\left[1 - \frac{\alpha^2}{126}\left(\cos\frac{\alpha\theta'}{2} - \frac{1}{16}\cos\frac{\alpha\theta}{4}\right)\right]$$

Dacă paranteza dreaptă din ultima expresie se înlocuiește cu 1, eroarea crește astfel încît eroarea aproximației este cel mult $r\alpha^5/7680$. Pentru $r = 1$ și $\alpha = 30°$ eroarea este mai mică decît $5 \cdot 10^{-6}$.

Încovoierea unei grinzi. Momentul de încovoiere al unei grinzi, $M(x)$ este dat prin $M(x) = EJ\varkappa$ unde E este elasticitatea, J momentul forței și $\varkappa$ curbura mijlocului grinzii în poziția x (fig. 21.2.6). În cazurile importante pentru practică, unghiul α este foarte mic și în ecuația $\varkappa = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$ numitorul se poate dezvolta după puterile lui $y'^2 = \text{tg}^2\alpha$. Se obține $\varkappa = y''(x)\left[1 - \frac{3}{2}y'(x)^2 + \frac{15}{8}y'(x)^4 + \dots\right]$. Pentru grinzi ușor încovoiate se poate lua ca o primă aproximație $\varkappa = y''(x)$ și se obține *ecuația diferențială a barei elastice* $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ}$.



21.2.6. Încovoierea unei bare

Teorema lui Taylor pentru funcții de mai multe variabile

Teorema lui Taylor se poate extinde asupra funcțiilor de mai multe variabile. Pentru o funcție de două variabile alegînd $n = 0$ se obține

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + hf_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + kf_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k), \quad 0 < \theta < 1,$$

ceea ce este tocmai teorema lui Lagrange pentru funcții de două variabile. Alegînd $n = 1$, atunci pentru $0 < \theta < 1$ rezultă

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + hf_x(x_0, y_0) + kf_y(x_0, y_0) +$$
$$+ \frac{1}{2!}[h^2 f_{xx}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + 2hkf_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + k^2 f_{yy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)].$$

Formula devine din ce în ce mai complicată cînd n este mai mare. Pentru $n = 5$ se obțin deja 28 termeni și fiecare dintre derivatele de ordin superior este desemnată prin 6 indici. Din acest motiv, se folosește o scriere simbolică $hf_x(x_0, y_0) + kf_y(x_0, y_0) = \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0, y_0)$. Termenii de ordin superior vor apărea deci prin ridicarea simbolică la putere a operatorului $\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)$.

Teorema lui Taylor pentru funcții de două variabile

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0, y_0) + \dots$$
$$+ \frac{1}{n!}\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0, y_0) + \frac{1}{(n+1)!}\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k), \quad 0 < \theta < 1$$

Mărimea θ are în toți termenii restului pentru aceleași valori h și k, valori egale; ea este o funcție de n, x_0, y_0, h și k. Pentru a preciza această dependență, uneori se mai scrie $\theta = \theta(n, x_0, y_0, h, k)$. Aceeași scriere simbolică se poate folosi și pentru funcții de trei sau mai multe variabile. Pentru trei variabile se obține

$$f(x_0 + h, y_0 + k, z_0 + l) = f(x_0, y_0, z_0) + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu!}\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + l \frac{\partial}{\partial z}\right)^{\nu} f(x_0, y_0, z_0)$$
$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + l \frac{\partial}{\partial z}\right)^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k, z + \theta l), \quad 0 < \theta < 1.$$

O extindere a procedeului de aproximare al lui Newton. Fie de rezolvat ecuațiile $f(x, y) = 0$ și $g(x, y) = 0$ și se cunosc valorile aproximative x_0 și y_0. Se poate scrie atunci $f(x_0 + h, y_0 + k) = 0$, $g(x_0 + h, y_0 + k) = 0$ și se dezvoltă în serie Taylor. Pentru $n = 0$ se obține

$$f(x_0, y_0) + hf_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + kf_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) = 0,$$
$$g(x_0, y_0) + hg_x(x_0 + \theta' h, y_0 + \xi' k) + kg_y(x_0 + \theta' h, y_0 + \theta' k) = 0.$$

Înlocuind în aceste ecuații pe θ și θ' prin zero, se obțin erori, obținîndu-se pentru h și k valorile aproximative h_1 și k_1 care determină valorile aproximative $x_1 = x_0 + h_1$ și $y_1 = y_0 + k_1$ cu care se continuă procedeul. h_1 și k_1 au forma

$$h_1 = -\left[\frac{fg_y - gf_y}{f_x g_y - f_y g_x}\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \qquad k_1 = \left[\frac{fg_x - gf_x}{f_x g_y - f_y g_x}\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$$

Exemplu. Fie de rezolvat sistemul de ecuații $f(x, y) = x^2 + y - 2 = 0$, $g(x, y) = xy - 2 = 0$. Valori aproximative sînt $x_0 = -1{,}8$ și $y_0 = -1{,}1$. Cu aceste valori se obțin $h_1 = 0{,}031$ și $k_1 = -0{,}030$ cît și noile valori aproximative $x_1 = -1{,}769$, $y_1 = -1{,}130$.

21.3. Serii trigonometrice și analiza armonică

Bazele teoriei seriilor trigonometrice au fost puse în cartea matematicianului Joseph de FOURIER (1768—1830), *„Théorie analitique de la chaleur"* apărută în anul 1822. Fourier s-a ocupat cîțiva ani de seriile de funcții care îi poartă numele. Cercetările sale au dezvoltat teoria acestor serii care sînt de mare importanță pentru matematică, fizică și tehnică. Ideia care stă la baza acestei teorii este reprezentarea funcțiilor periodice prin serii de funcții periodice trigonometrice.

Seriile Fourier se folosesc la cercetarea mișcărilor periodice în acustică, electrodinamică, optică, termodinamică etc. În electrotehnică se rezolvă cu ajutorul seriilor Fourier probleme de comportare a frecvențelor și propagarea impulsului. Pentru navigație este foarte importantă prognoza mareelor; fiind vorba de procese periodice, ele conduc la serii Fourier. S-au construit dispozitive mecanice, mașini de calcul pentru maree cu care se efectuează analza Fourier în mod mecanic și cu care se prognozează nivelul apelor în toate porturile mari. Astăzi, în toate domeniile fizicii, matematicii și tehnicii se folosesc intens seriile Fourier.

Serii trigonometrice

Seriile de funcții $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ in care termenul general este de forma $f(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$, cu coeficienți constanți a_n și b_n, se numesc serii trigonometrice. Dacă aceste serii converg într-un interval de lungime 2π, atunci, funcțiile trigonometrice fiind periodice, ele converg pentru orice x și reprezintă o funcție periodică $f(x)$. Dar această funcție nu este în mod necesar continuă, deseorii ea reprezintă puncte de discontinuitate între care funcția se exprimă prin expresii diferite (fig. 21.3.1). Pe de altă parte, dacă seria converge uniform, atunci suma ei $f(x)$, este continuă. În acest caz, se poate stabili o legătură între coeficienții a_n, b_n și funcția $f(x)$. Înmulțind funcția

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

cu factorii mărginiți $\cos px$ sau $\sin px$, unde p este un întreg nenegativ, convergența seriei nu se alterează, astfel încît se pot calcula integralele

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos px \, dx \quad \text{și} \quad \int_0^{2\pi} f(x) \sin px \, dx$$

prin integrare termen cu termen a seriilor $\sum f_n(x) \cos px$ sau $\sum f_n(x) \sin px$. Aceste integrări comportă integrarea în intervalul $(0, 2\pi)$ a funcțiilor $\cos nx \cos px$, $\sin nx \cos px$, $\cos nx \sin px$, $\sin nx \sin px$. Integrînd prin părți, se poate vedea că aceste integrale au valoarea 0 pentru $n \neq p$; pentru $n = p$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 nx \, dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 nx \, dx = \pi \quad \text{pentru} \quad n > 0$$

și

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 nx \, dx = 2\pi, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 nx \, dx = 0 \quad \text{pentru} \quad n = 0.$$

Se justifică astfel scrierea adoptată pentru seriile trigonometrice:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Coeficienții se scriu pentru orice $n \geqslant 0$ astfel:

Formulele lui Euler-Fourier	$a_0 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x) \, dx$, $a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx$, $b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx$

Serii Fourier. Se poate pune întrebarea: ce fel de funcții pot fi reprezentate prin serii trigonometrice?

Dacă $f(x)$ este integrabilă, se pot folosi formulele Euler-Fourier pentru calculul coeficienților a_n și b_n și apoi se poate scrie formal seria $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$.

Aceasta este seria Fourier a funcției $f(x)$ și a_n și b_n sînt coeficienții Fourier ai funcției $f(x)$. Totuși, se poate întîmpla ca seria Fourier a funcției $f(x)$ să nu fie convergentă, sau să conveargă dar suma ei să fie alta decît $f(x)$; acest lucru se poate întîmpla chiar dacă $f(x)$ este continuă. Deci se poate presupune că $f(x)$ admite alte reprezentări prin funcții trigonometrice. Totuși, dacă seria Fourier a unei funcții continue $f(x)$ este uniform continuă, atunci suma ei trebuie să fie $f(x)$ și $f(x)$ nu mai admite altă reprezentare printr-o serie trigonometrică uniform convergentă. Această condiție este numai suficientă; problema găsirii unor condiții necesare și suficiente pentru convergența seriei Fourier a funcției $f(x)$ nu este încă complet rezolvată.

Deoarece termenii $f_n(x)$ ai seriei Fourier sînt funcții periodice de perioadă 2π, funcția sumă este de asemenea o funcție periodică de perioadă 2π. Dacă $f(x)$ este suma seriei

$$f(x + 2\pi) = f(x).$$

Deci, dezvoltarea în serii Fourier are sens pentru funcții periodice cu perioada 2π. În cazul în care funcția este periodică de perioadă $2l$, atunci se înlocuiește variabila x prin variabila $\frac{\pi x}{l}$. Funcția care rezultă are perioada 2π.

De asemenea, uneori se caută o dezvoltare în serie Fourier pentru o funcție definită într-un interval închis de lungime $2l$ și care nu este periodică în acest interval. Atunci, presupunînd funcția periodică la dreapta și la stînga acestui interval, ea poate fi de asemenea dezvoltată în serie Fourier. Seria Fourier este în acest caz dezvoltarea funcției periodice definite și în afara domeniului de definiție a funcției inițiale prin $f(x + 2kl) = f(x)$ $(x \in I;\ k$ întreg) dar nu prezintă interes decît valorile ei pe intervalul de definiție.

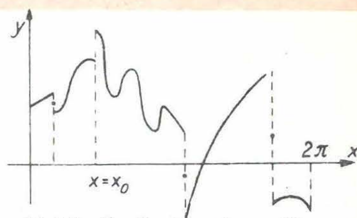
Condiția lui Dirichlet. Cum trebuie să fie o funcție pentru ca să admită o dezvoltare în serie Fourier?

Condițiile pe care trebuie să le satisfacă aceasta nu sînt încă complet cunoscute. Se cunosc de exemplu funcții continue care nu pot fi reprezentate în serie Fourier. De asemenea există o funcție continuă care nu este derivabilă în nici un punct și care admite o reprezentare în serie Fourier uniform convergentă. Este vorba de funcția descoperită de Weierstrass

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),\ 0 < a < 1,\ b > 0 \text{ întreg},\ ab > 1 + \frac{3\pi}{2}.$$

Condiția lui Dirichlet. Dacă intervalul $0 < x < 2\pi$ se poate descompune într-un număr finit de subintervale și $f(x)$ este în fiecare din aceste intervale continuă și monotonă, atunci $f(x)$ admite o reprezentare în serie Fourier și coeficienții Fourier se determină unic prin formulele Euler-Fourier.

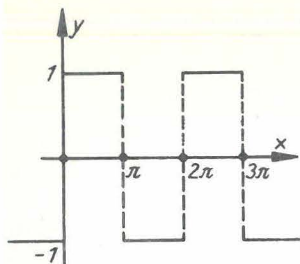
Această condiție este îndeplinită de o clasă foarte largă de funcții $f(x)$ și este satisfăcătoare pentru practică. Chiar funcții ca cea reprezentată în fig. 21.3.1 admit o reprezentare în serie Fourier. Este însă necesară încă o precizare. Dacă într-un punct al domeniului de definiție limita la dreapta diferă de limita la stînga, adică $\lim_{t\to 0} f(x_0 + t) \neq \lim_{t\to 0} f(x_0 - t)$, atunci în acest punct se consideră $f(x_0) = \frac{1}{2} \{\lim_{t\to 0} [f(x_0+t) + f(x_0-t)]\}$.



21.3.1. Graficul unei funcții reprezentabile prin seria sa Fourier

Cu această precizare valoarea seriei Fourier coincide cu valoarea funcției în orice punct al intervalului de definiție.

Exemplu. Fie funcția $f(x)$ definită prin $f(x) = 1$ pentru $0 < x < \pi$, $f(x) = -1$ pentru $\pi < x < 2\pi, f(x + 2k\pi) = f(x), k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$



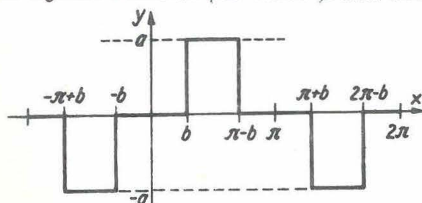
21.3.2. Curba rectangulară

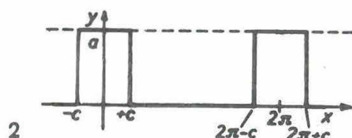
În punctele unde există salturi, se consideră $f(0) = f(k\pi) = 0$. Condiția lui Dirichlet este în mod evident satisfăcută. Funcția este reprezentată pe figura 21.3.2.

Calculînd integralele din formulele Euler-Fourier, se obține $a_n = 0$ pentru orice n, $b_{2n} = 0$, $(n = 1, 2, \ldots)$, $b_{2n+1} = \frac{4}{\pi(2n+1)}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Rezultă seria Fourier: $f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right]$

În figurile 21.3.3 se pot vedea și alte exemple de dezvoltări în serie Fourier.



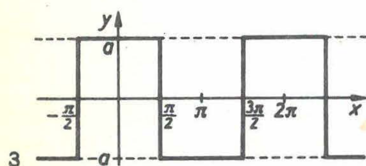


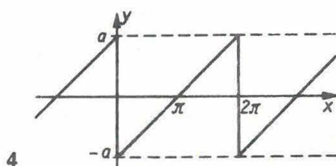
1. Impuls dreptunghiular de primul tip

$$f(x) = \frac{4a}{\pi}\left[\frac{\cos b}{1}\cdot \sin x + \frac{\cos 3b}{3}\cdot \sin 3x + \frac{\cos 5b}{5}\cdot \sin 5x + \ldots\right].$$

2. Impuls dreptunghiular de al doilea tip

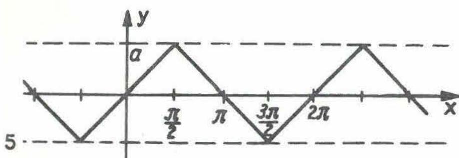
$$f(x) = \frac{2a}{\pi}\left[\frac{c}{2} + \frac{\sin c}{1}\cdot \cos x + \frac{\sin 2c}{2}\cdot \cos 2x + \frac{\sin 3c}{3}\cdot \cos 3x + \ldots\right]$$

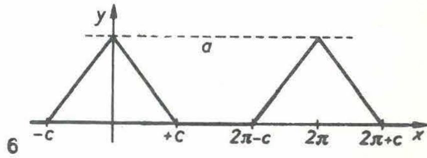




3. Curba dreptunghiulară: $f(\pi/2) = f(3\pi/2) = \ldots = 0, f(x) = \frac{4a}{\pi}\left[\cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \ldots\right].$

4. Curba ferăstrău $f(0) = f(2\pi) = \ldots = 0$, $f(x) = -\frac{2a}{\pi}\left[\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots\right].$

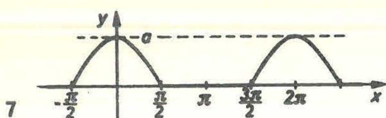


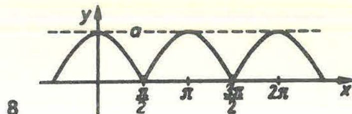


5. Curbă triunghiulară $f(x) = \frac{8a}{\pi^2}\left[\frac{\sin x}{1^2} - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \ldots\right].$

6. Impuls triunghiular

$$f(x) = \frac{ac}{2\pi} + \frac{2a}{\pi^2}\left[\frac{1-\cos c}{1^2}\cos x + \frac{1-\cos 2c}{2^2}\cos 2x + \frac{1-\cos 3c}{3^2}\cos 3x + \ldots\right].$$

7 

8 

7. Curent alternativ rectificat într-o direcție

$$f(x) = \frac{a}{\pi}\left[1 + \frac{\pi}{2}\cdot\cos x + \frac{2}{1\cdot 3}\cdot\cos 2x - \frac{2}{3\cdot 5}\cos 4x + \frac{2}{5\cdot 7}\cdot\cos 6x - \ldots\right].$$

8. Curent alternativ rectificat în două direcții

$$f(x) = |\cos x|,\ f(x) = \frac{2a}{\pi}\left[1 + \frac{2}{1\cdot 3}\cdot\cos x - \frac{2}{3\cdot 5}\cos 4x + \frac{2}{5\cdot 7}\cdot\cos 6x - \ldots\right].$$

Analiză armonică și sinteză armonică

Analiză armonică. Prin analiză armonică se înțelege determinarea coeficienților Fourier $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ Ea se folosește frecvent în tehnică pentru analiza proceselor periodice. O oscilație se poate descompune prin analiză armonică într-o sumă de oscilații sinusoidale (oscilații armonice) și o componentă constantă. În afara *oscilației de bază*, mai apar supraoscilații a căror frecvență este dublul, triplul etc., oscilației de bază. Supraoscilațiile prezintă de regulă o deplasare de fază față de oscilația de bază. În general, se poate scrie $a_n \cos nx + b_n \sin nx = c_n \cos(nx - x_n)$; din $a_n \cos nx + b_n \sin nx = c_n \cos nx \cos x_n + c_n \sin nx \sin x_n$ se obține $a_n = c_n \cos x_n$, $b_n = c_n \sin x_n$ și de aici $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\operatorname{tg} x_n = \frac{b_n}{a_n}$.

Deducerea coeficienților Fourier pentru curba dreptunghiulară prezintă un exemplu de analiză armonică.

Dacă funcția (fx) admite anumite proprietăți de simetrie, atunci calculele privind analiza armonică pot fi mult simplificate.

În dezvoltarea Fourier a unei funcții pare $f(x) = f(-x)$ lipsesc toți termenii care conțin sinusuri, adică $b_n = 0$. Pentru o funcție impară lipsesc toți termenii care conțin cosinusuri, adică $a_n = 0$ (inclusiv a_0). Pentru o funcție cu proprietatea $f(x+\pi) = -f(x)$, $a_0 = 0$ și dezvoltarea conține numai coeficienți cu indici impari ($a_2 = a_4 = \ldots = b_2 = b_4 = \ldots = 0$).

Dacă se caută cea mai bună aproximare a unei funcții periodice $f(x)$ printr-o sumă finită $\Phi_n(x)$ de funcții sinus și cosinus, $\Phi_n(x) = \sum_{j=0}^{n} (a_j \cos jx + b_j \sin jx)$, se ia, prin analogie cu metoda celor mai mici pătrate, ca o măsură a diferenței $f(x) - \Phi_n(x)$ integrala $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [f(x) - \Phi_n(x)]^2\,dx$. Aceasta își atinge minimul cînd a_j și b_j sînt coeficienții Fourier ai funcției $f(x)$. Aceasta constituie o altă proprietate importantă a coeficienților Fourier.

Sinteza armonică. Sinteza armonică este operația inversă analizei armonice. Oscilațiile pure se compun și se obține o rezultantă. Pe desenul alăturat este reprezentată sinteza armonică a primilor termeni ai dezvoltării Fourier din exemplul dat (fig. 21.3.4).

Calculul aproximativ al coeficienților Fourier. În practică funcțiile pentru care se caută reprezentarea în serie Fourier nu sînt date analitic. De regulă, funcțiile sînt date prin curbe trasate de dispozitivul de scriere al unor aparate de măsură, de exemplu diagrama presiunii unei pompe, diagrame trasate de oscilații mecanice sau electrice etc. Și în aceste cazuri este

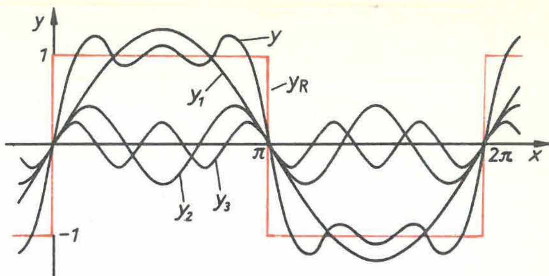


Fig. 21.3.4. Reprezentarea grafică a sintezei armonice a unei curbe rectangulare

posibilă descompunerea în serie Fourier. Integralele din formulele Euler-Fourier se vor calcula prin metode aproximative (fig. 21.3.5). Pentru calculul aproximativ al acestor integrale se împarte intervalul în $2m$ părţi egale. Este avantajos ca numărul părţilor să fie un multiplu de 4 pentru ca să se folosească valorile 12, 24, 36, 72,... deoarece printr-o astfel de împărţire se poate profita de proprietăţile de simetrie ale funcţiilor sinus şi cosinus. După desemnarea unui sistem de coordonate, se măsoară valorile funcţiei în punctele $x_0, x_1, \ldots, x_{2m-1}$. Fie $y_0, y_1, y_2, \ldots$ $\ldots, y_{2m+1}$ aceste valori. Atunci

$$a_0 = \frac{1}{2m} \sum_{i=0}^{2m-1} y_i,$$

$$a_n = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{2m-1} y_i \cos \frac{ni}{m}$$

pentru $n = 1, 2, \ldots, m$,

$$b_n = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{2m-1}{}' \, y_i \sin \frac{ni}{m}$$

pentru $n = 1, 2, \ldots, m-1$.

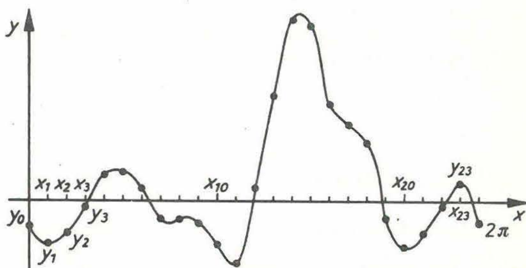


Fig. 21.3.5. Analiza Fourier a unei curbe date empiric

Dacă se alege $2m = 24$, atunci se obţin cei 24 de coeficienţi $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{12}, b_1, b_2, \ldots, b_{11}$. Funcţia care rezultă, $a_0 + \sum_{n=1}^{11} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + a_{12} \cos 12x = f(x)$ are în punctele de diviziune x_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, 23)$ valorile $f(x_i) = y_i$ $(i = 0, 1, \ldots, 23)$.

Calculele pentru analiza armonică sînt laborioase. Un calculator experimentat, folosind o maşină de calcul electrică şi scheme de calcul speciale are nevoie pentru efectuarea acestei analize armonice cu 12 puncte de aproximativ 1/2 oră, cu 24 puncte de 2 ore, cu 36 puncte de 6 ore. Pentru 72 de puncte trebuie efectuate 5000 de produse care trebuie cuprinse în 72 de sume. Un calculator electronic de viteză medie efectuează calculul pentru 36 puncte în aproximativ 2 minute; imprimarea rezultatelor durează mai mult decît calculul propriu-zis.

Analizatori armonici. Marea cantitate de timp necesară pentru efectuarea analizei armonice a curbelor a condus la descoperirea unor instrumente şi dispozitive mecanice. Cu aceasta se lucrează la fel ca şi cu planimetrele. Curba este parcursă de un creion mobil şi în mod automat pe scala indicatoare a unui aparat de calcul apare valoarea coeficientului Fourier. Astfel de aparate poartă numele de *analizatori armonici*. Pentru problema specială a calculării mareelor, în unele ţări, s-au dezvotat maşini de calcul al mareelor cu care se efectuează sînteza armonică.

22. Ecuații diferențiale ordinare

Una din ramurile matematicii cu cele mai întinse domenii de aplicații o constituie studiul ecuațiilor diferențiale. Acestea își găsesc aplicații în cercetarea oscilațiilor pendulului, orbitelor sateliților, cutremurelor, construcțiilor de avioane și de baraje, oscilațiile membranelor difuzoarelor, propagării căldurii în motoarele cu ardere internă, vitezei reacțiilor chimice și a dezintegrării radioactive. Aici se va prezenta numai o introducere succintă în vasta și dificila teorie a ecuațiilor diferențiale. În acest capitol se vor considera numai ecuații diferențiale ordinare, ecuațiile diferențiale cu derivate parțiale făcînd obiectul capitolelor privind teoria potențialului și ecuațiile diferențiale cu derivate parțiale. De asemenea în capitolul de față se vor prezenta ecuații diferențiale pentru variabile reale și funcții cu valori reale. Neglijînd uneori rigoarea matematică, se vor prezenta o serie de metode de rezolvare care se aplică curent în practică. De asemenea se va face o scurtă trecere în revistă asupra modului de a pune problema în acest domeniu al matematicii.

22.1. Introducere

Noțiuni fundamentale

Ecuație diferențială. O *ecuație diferențială* este o relație scrisă sub forma unei ecuații în care intervin o funcție de una sau mai multe variabile, derivate ale acestei funcții și unele dintre variabile. Orice funcție care verifică ecuația diferențială se numește *soluție* sau *integrală* a acesteia, de ex. ecuația diferențială $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 1$ are integrala $y = \sin x$ deoarece prin înlocuire se ajunge la identitatea $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Invers, pornind de la o funcție $z = f(x, y)$ de două variabile x și y, se poate forma o ecuație diferențială care să admită ca integrală funcția dată, de exemplu $z = xy$. Deoarece $\frac{\partial z}{\partial x} = y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x$ în acest caz, $z = xy$ satisface ecuația diferențială $y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2$.

Dacă funcțiile care intervin în ecuația diferențială sînt funcții de o singură variabilă și deci derivatele care intervin sînt în raport cu această variabilă, atunci *ecuația diferențială* respectivă se numește *ordinară*. Astfel de ecuații sînt de exemplu:

$$\frac{dy}{dx} = \cos x, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + y^2 = 3xy, \qquad y'^3 - y'xy = 0.$$

Cînd dimpotrivă funcțiile căutate depind de mai multe variabile și deci apar și derivatele lor parțiale, ecuațiile diferențiale se numesc *ecuații diferențiale cu derivate parțiale*. Astfel de ecuații sînt de exemplu

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + z \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \text{și} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4xy \frac{\partial z}{\partial x}$$

în care funcția necunoscută $z = f(x, y)$ este o funcție de variabilele x și y.

Ordinul și gradul unei ecuații diferențiale. Ordinul unei ecuații diferențiale este dat de ordinul maxim al derivatelor ce apar în ecuație. O ecuație diferențială de ordinul n poate fi scrisă sub forma $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$, unde F este o funcție de argumentele indicate. În particular $y' = f(x, y)$ este ecuația generală explicită și $F(x, y, y') = 0$, *ecuația diferențială implicită* de ordinul întîi. Dacă F este o funcție rațională de argumentele $y, y', ..., y^{(n)}$, atunci gradul acestei funcții este totodată și gradul ecuației diferențiale; dependența de n nu joacă aici nici un rol. Dimpotrivă, în cazul ecuației $y' = x + \sin y'$ nu se poate vorbi de un grad.

Ecuația diferențială	Ordinul	Gradul
$y' = x + \sin y'$	1	—
$y'^2 = x \sin x$	1	2
$y'' = 3x^2y$	2	1
$y'' + 3y' + y \cos x = \sin x$	2	1
$y''' + y'' = y$	3	2

Deosebit de importante pentru aplicații sînt *ecuațiile diferențiale de gradul* 1 numite *ecuații diferențiale liniare* în care funcțiile necunoscute și derivatele lor apar numai la puterea întîi. Astfel, ecuația diferențială liniară generală are forma $f + f_0y + f_1y' + f_2y'' + ... + f_ny^{(n)} = 0$, unde $f, f_0, f_1, ..., f_n$ sînt funcții date de x.

Integrala unei ecuații diferențiale. Dacă ecuația $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ se transformă după înlocuirea funcției $y = \varphi(x)$ și a derivatelor ei $y', y'', ..., y^{(n)}$, într-o identitate în x, atunci $y = \varphi(x)$ se numește *soluție* sau *integrală* a ecuației date; procedeul prin care se determină integrala unei ecuații se numește *integrare* a ecuației, iar graficul lui $y = \varphi(x)$ în planul xOy *curbă integrală*. Soluțiile sînt rareori funcții elementare sau expresii cuprinzînd astfel de funcții. Dimpotrivă, multe funcții neelementare importante pentru aplicații sînt definite ca soluții ale unor tipuri speciale de ecuații diferențiale, de exemplu în 1785 matematicianul francez Adrien Marie LEGENDRE (1752 — 1833), cercetînd puterea de atracție a unui elipsoid asupra unui punct exterior, a stabilit o ecuație diferențială ale cărei soluții sînt *polinoamele lui Legendre*. Deseori este posibil ca neglijînd forma completă a soluției să se stabilească proprietățile analitice ale integralei în vecinătatea unui punct x_0 și să se studieze forma curbelor integrale, unicitatea soluției sau alte probleme. *Teoremele de existență* stabilesc condițiile pe care trebuie să le satisfacă o ecuație diferențială pentru ca să admită soluții.

Natura integralelor ecuațiilor diferențiale. Se deosebesc *integrale generale, particulare* și *singulare*. Relațiile dintre soluții pot fi exprimate în mare și nu tocmai riguros astfel:

Integrala generală a unei ecuații diferențiale de ordinul n conține n constante $C_1, C_2, ..., C_n$, adică o astfel de integrală este determinată abstracție făcînd de n constante.

Corespunzător, în calculul integral, se obține ca soluție a ecuației diferențiale $y' = f(x)$ integrala $y = \int f(x)\,dx + C$. Atribuind constantelor $C_1, ..., C_n$ valori fixe, se obține o integrală particulară. Totalitatea integralelor particulare este astfel cuprinsă în integrala generală.

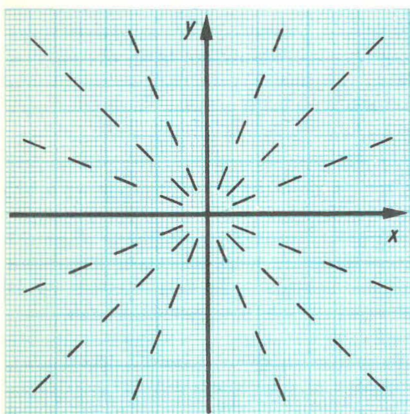
Exemplu. Ecuația diferențială $y'^2 + y^2 = 1$ are integrala generală $y = \sin(x + C)$. Pentru $C = \frac{\pi}{2}$ se obține integrala particulară $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$. Ne convingem ușor că este vorba de o soluție prin înlocuirea în ecuația diferențială.

Pe lîngă integrala generală și integralele particulare, o ecuație diferențială poate să aibă și *integrale singulare* care corespund de regulă unor discontinuități ale ecuației date. Integralele singulare nu pot fi deduse din integrala generală prin particularizarea constantelor; de exemplu, ecuația diferențială $y'^2 + y^2 = 1$ admite integrala singulară $y = \pm 1$.

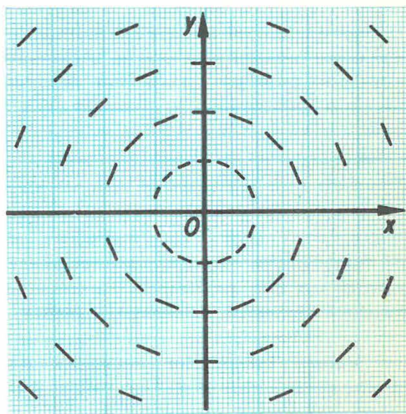
Exemplu. Ecuația diferențială de ordinul doi $y'' + y = 0$ are ecuația generală $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$; prin alegerea corespunzătoare a constantelor C_1 și C_2 se obțin integralele particulare $y = 0$, $y = \cos x$, $y = 2 \cos x$, $y = \sin x$, $y = \pi \sin x$. Această ecuație nu are integrale singulare.

Ecuațiile diferențiale în geometrie

Cîmpul direcțiilor ecuației diferențiale de ordinul întîi. Atît prin forma implicită $F(x, y, y') = 0$ dar mai ales prin forma explicită $y' = f(x, y)$ ecuația diferențială pune în corespondență fiecărui punct din planul xOy pentru care funcția $f(x,y)$ este definită, o valoare $p = y' = f(x, y)$ a derivatei funcției căutate $y(x)$. Această valoare determină direcția tangentei la graficul funcției $y(x)$. În acest fel rezultă *cîmpul direcțiilor* ecuației diferențiale de ordinul întîi. Tripletul x, y, p se numește *element de linie* cu suportul în punctul (x, y). Cu ajutorul cîmpului direcțiilor se poate obține cel puțin o reprezentare aproximativă a comportării curbelor integrale ale unei ecuații diferențiale de ordinul întîi; acest lucru se face trasînd punctat direcțiile tangentelor ce pornesc dintr-un punct (x, y). Din punct de vedere geometric problema integrării unei ecuații diferențiale de ordinul întîi se reduce la determinarea curbelor ce corespund unui cîmp de direcții, adică a curbelor care au în fiecare punct o tangentă și admit numai elemente de linie ce corespund elementelor de linie ale ecuației $y' = f(x, y)$.



22.1.1. Cîmpul direcțiilor ecuației diferențiale $y' = y/x$

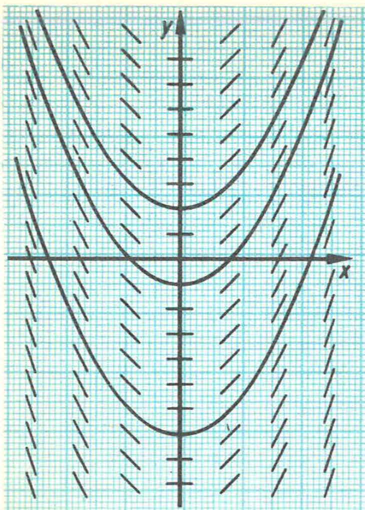


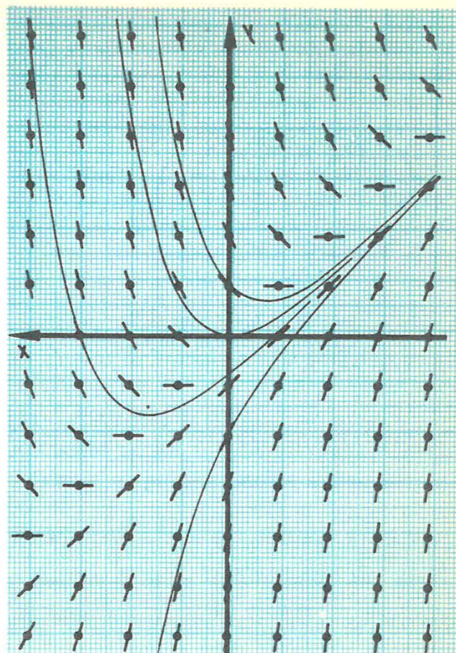
22.1.2. Cîmpul direcțiilor ecuației diferențiale $y' = -x/y$

Ecuații diferențiale și familii de curbe. Rezultatul enunțat mai sus, care afirmă că soluția unei ecuații diferențiale de ordinul întîi depinde de o constantă, se poate exprima geometric astfel: soluția unei ecuații diferențiale de ordinul întîi este *o familie de curbe cu un parametru.* Și afirmația inversă este adevărată: o familie de curbe cu un parametru $y = \varphi(x, C)$ poate fi reprezentată analitic printr-o ecuație diferențială de ordinul întîi. Această ecuație se obține prin eliminarea lui C din sistemul de ecuații $y = \varphi(x, C)$; $\dfrac{dy}{dx} = \varphi'(x, C)$.

Exemplu. Familia tuturor dreptelor care trec prin origine (fig. 22.1.1) are ecuația $y = Cx$. Atunci $y' = C$. De aici rezultă ecuația diferențială $y = y'x$, respectiv $y' = \dfrac{y}{x}$ (fig. 22.1.2).

O familie de curbe cu n parametri se poate exprima analitic printr-o ecuație diferențială de ordinul n. Reciproc, soluția generală a unei ecuații diferențiale de ordinul n este o familie de curbe cu n parametri.





22.1.3. Cîmpul direcțiilor ecuației diferențiale $y' = x$

22.1.4. Cîmpul direcțiilor ecuației diferențiale $y' = x + y$

A doua parte a acestei afirmații rezultă nemijlocit din structura soluției generale a ecuației diferențiale de ordinul n. Din ecuația unei familii de curbe care conține n parametri, se găsește ecuația diferențială corespunzătoare în modul următor: se derivează ecuația familiei de curbe de un număr suficient de mare de ori pentru a putea elimina parametrii între ecuațiile obținute; ecuația obținută prin eliminare este ecuația diferențială căutată.

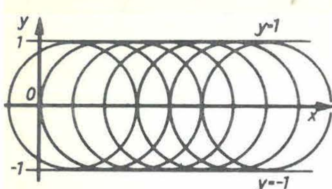
Exemplul 1. $y = C_1x + C_2$ este ecuația care reprezintă familia cu cei doi parametri ai dreptelor din plan neparalele cu axa Oy. Derivînd de două ori, se obține $y'' = 0$. În acest caz nu mai este nevoie de eliminare. Ecuația diferențială obținută arată că familia de curbe conține numai curbe cu curbură nulă; aceste curbe sînt deci drepte.

Exemplul 2. Familia tuturor cercurilor cu raza fixă a are ecuația $(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = a^2$. Prin derivare se obține $x - C_1 + (y - C_2)\,y' = 0$; derivîndu-se încă o dată, $1 + y'^2 + (y - C_2)\,y'' = 0$. Eliminînd, se obține $C_2 = (1 + y'^2 + yy'')/y''$ și $C_1 = x - (1 + y'^2)\,\dfrac{y'}{y''}$ și prin înlocuire $y''^2a^2 = (1 + y'^2)^3$.

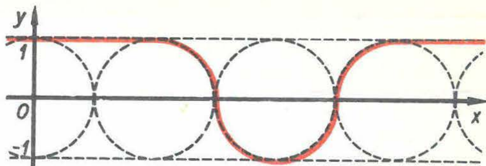
Toate curbele familiei sînt conținute în soluția generală a ecuației diferențiale. Se poate înțelege însă că printre soluțiile ecuației diferențiale să figureze și curbe care nu aparțin familiei inițiale de curbe; de exemplu, familia de curbe $y = C_1x + C_2$, $C_1 > 0$, conduce la ecuația diferențială $y'' = 0$; printre soluțiile acestei ecuații se găsesc însă atît dreptele cu $C_1 > 0$ cît și cele cu $C_2 < 0$.

Soluții singulare, înfășurătoare de familii de curbe. *Familia tuturor cercurilor* cu raza 1 și cu centrul pe axa Ox, $y^2 + (x - C)^2 = 1$ satisface ecuația diferențială $y^2y'^2 + y^2 - 1 = 0$, deoarece $yy' + x - C = 0$, $C = x + yy'$ (fig. 22.1.5). Această ecuație este însă satisfăcută și de funcțiile $y = 1$ și $y = -1$ care nu sînt conținute în integrala generală $(x - C)^2 + y^2 = 1$ și care sînt deci integrale singulare. Din punct de vedere geometric aceste funcții reprezintă *tangente la familia de cercuri* și deși nu sînt conținute în această familie, coincid

cu unele direcții din cîmpul de direcții determinat de ecuația diferențială. Din elementele de linie respective se pot compune alte curbe care reprezintă de asemenea soluții. Din această infinitate de curbe, pe figura 22.1.6 s-a reprezentat una singură trasată cu roșu.



22.1.5. Familia tuturor cercurilor de rază 1 ale căror centre se află pe axa Ox

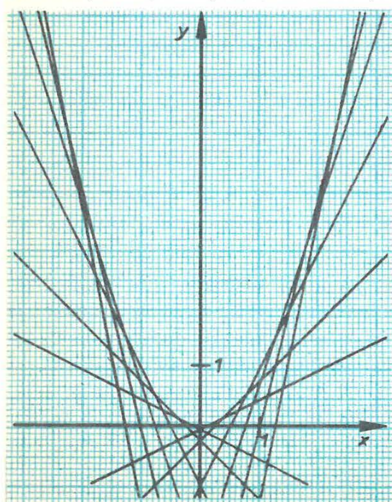


22.1.6. Curba soluțiilor compuse care verifică cîmpul direcțiilor ecuației diferențiale $y^2y'^2 + y^2 - 1 = 0$

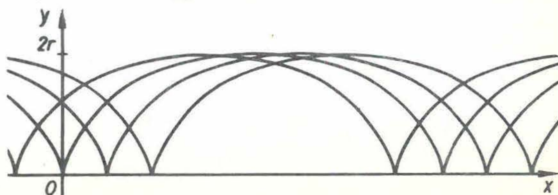
Familia de tangente la parabola $y=x^2$ (fig. 22.1.7). Ecuația tangentei la parabola $y=x^2$ în punctul (x_0, y_0) este $y + y_0 = 2xx_0$. Deoarece $y_0=x_0^2$, considerînd pe x_0 ca parametru C, se obține ecuația familiei de curbe $y = 2Cx - C^2$. Din $y' = 2C$, $C = \frac{y'}{2}$ se obține ecuația diferențială a familiei $y = xy' - \frac{y'^2}{4}$. *Înfășurătoarea* acestei familii de curbe, tangentă la fiecare curbă din familie este în mod evident parabola $y = x^2$. Ea nu este conținută în soluția generală $y = 2Cx - C^2$ a ecuației diferențiale $y = xy' - \frac{y'^2}{4}$, însă satisface aseastă ecuație și este deci o *soluție singulară*.

Înfășurătoarea unei familii de curbe este de asemenea o soluție a ecuației diferențiale care definește familia de curbe.

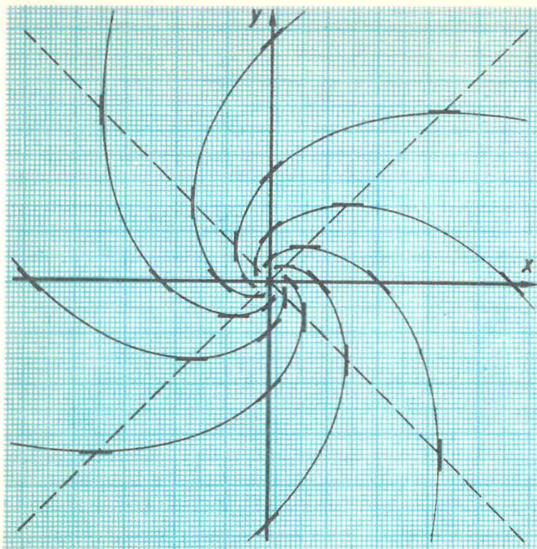
Din această afirmație rezultă procedeul de obținere a înfășurătoarei unei familii de curbe cu un parametru, prezentat fără demonstrație, în cazul cînd o astfel de înfășurătoare există. Cînd se cunoaște soluția generală $\Phi(x, y, C) = 0$ a ecuației diferențiale care definește familia de curbe, atunci înfășurătoarea se obține prin eliminarea parametrului C între $\Phi(x, y, C) = 0$ și $\frac{\partial\Phi(x, y, C)}{\partial C} = 0$. Prin acest procedeu se pot obține pe lîngă înfășurătoare și alte curbe care au de regulă o semnificație geometrică legată de familia de curbe, de exemplu locul vîrfurilor pentru o familie de cicloide (fig. 22.1.8) sau locul nodurilor în cazul cînd curbele din familie prezintă noduri. Și în fizică apar probleme de găsire a înfășurătoarelor unor familii de curbe. De exemplu, reflectatele pe o oglindă sferică ale razelor paralele cu axa înfășoară o suprafață focală a cărei secțiune se numește catacaustică.



22.1.7. Familia tangentelor parabolei $y = x^2$.



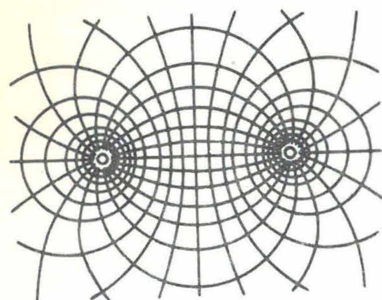
22.1.8. Familia cicloidelor. Dreapta $y = 0$ nu este înfășurătoare



22.1.9. Curbele soluțiilor ecuației diferențiale $(x + y)y' + x - y = 0$, obținută prin metoda izoclinelor

Izocline, traiectorii ortogonale. Curba care unește punctele care au aceeași direcție în cîmp se numește *izoclină* a cîmpului de direcții ale ecuației diferențiale de ordinul întîi. Ecuația unei izocline se obține înlocuind în $y' = f(x, y)$ pe $y' = \text{const} = a$. Cunoscînd izoclinele, se obțin indicații asupra cîmpului de direcții și deci asupra soluțiilor ecuației diferențiale, de exemplu izoclinele $y' = a$ ale ecuației diferențiale $(x + y) y' + x - y = 0$ satisfac pentru $a = 0$ ecuația $y = x$, pentru $a = 1$ ecuația $x = 0$, pentru $a = \infty$, respectiv $a = -1$ ecuațiile $y = -x$, respectiv $y = 0$. Soluțiile ecuației admit un punct focar (fig. 22.1.9).

În geometrie și în fizică apare de multe ori problema găsirii pentru o familie de curbe dată a *familiei traiectoriilor ortogonale*, adică a curbelor care taie ortogonal curbele din familia dată. Liniile de forță ale unui dipol electric sau magnetic formează familia liniilor de cîmp care sînt intersectate sub un unghi drept de liniile cu potențial egal (fig. 22.1.10). Analitic, ecuațiile diferențiale ale traiectoriilor otogonale se obțin din ecuația diferențială $y' = f(x, y)$ care definește familia de curbe $\Phi(x, y, C) = 0$, înlocuind pe y' cu $-\dfrac{1}{y'}$. Această metodă rezultă din aceea că produsul pantelor tangentelor la două curbe ortogonale este egal cu -1.



22.1.10. Linii de forță ale unui dipol care intersectează liniile echipotențiale în unghiuri drepte. O familie de curbe se compune din traiectoriile ortogonale ale celorlalte

Exemplu. Traiectoriile ortogonale ale familiei de parabole $y^2 = -2(x + C)$, a căror ecuație diferențială este $yy' = -1$, satisfac ecuația $y' = y$ cu soluția generală $y = C\, e^x$. Familia curbelor exponențiale formează deci familia traiectoriilor ortogonale familiei de parabole și invers.

22.2. Tipuri integrabile prin metode elementare

O ecuație diferențială este *integrabilă prin metode elementare* dacă soluția ei generală se obține ca o combinație a unui număr finit de funcții elementare prin metode de integrare obișnuite (cvadraturi). Acest lucru este posibil numai pentru unele tipuri de ecuații diferențiale care apar frecvent în aplicații. În cazul metodelor de integrare ce se vor prezenta în continuare, se presupune existența soluțiilor.

Tipuri speciale de ecuații diferențiale de ordinul întîi integrabile prin metode elementare

Ecuația diferențială generală de ordinul întîi sub formă *implicită* $F(x, y, y') = 0$ poate fi rezolvată în raport cu y', în vecinătatea punctului (x_0, y_0, y_0') conform teoremei asupra funcțiilor implicite dacă $\frac{\partial F}{\partial y'} \neq 0$ în acest punct; se obține astfel forma *explicită* $y' = f(x, y)$.

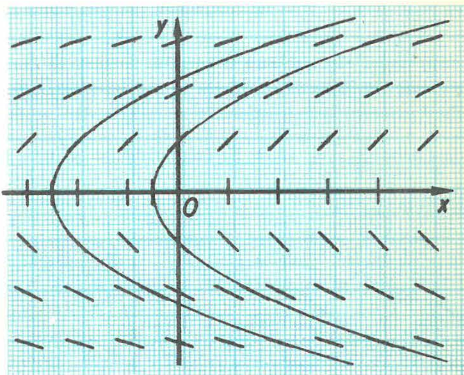
Ecuația diferențială de tipul $y = g(x)$. La acest tip de ecuații diferențiale partea **dreaptă** depinde numai de x. Dacă $g(x)$ este integrabilă în intervalul deschis (a, b), de exemplu **continuă**, atunci pentru un punct ξ oarecare, însă fix din intervalul (a, b) funcțiile

$$y = \int_\xi^x g(t)\, dt + C, \quad a < x < b,$$

unde constanta C ia valori oarecare, satisfac ecuația diferențială $y' = g(x)$. Se știe din calculul integral că aceste funcții constituie totalitatea funcțiilor care verifică această ecuație diferențială; y este deci integrala generală a ecuației date.

Ecuații diferențiale de tipul $y' = h(y)$. Dacă $h(y)$ este funcție numai de y, continuă pentru $c < y < d$ și *nicăieri nulă*, atunci această ecuație diferențială se poate reduce la tipul tratat anterior. Dacă $y = y(x)$ este o soluție a ecuației $y' = h(y)$, atunci funcția inversă $x = \psi(y)$ satisface ecuația. diferențială $\psi' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{h(y)}$. Deci $x = \int \frac{1}{h(y)} dy$ este într-un interval corespunzător intervalului (c, d) inversa soluției $y = y(x)$, $x = \psi(y)$.

Exemplu. Ecuația diferențială $y' = \frac{1}{y}$ este rezolvabilă în intervalul $0 < c < y < d$, deoarece condițiile cerute pentru aceasta sînt îndeplinite de $h(y) = \frac{1}{y}$. *Izoclinele* ei sînt paralele cu axa Ox. Soluția ecuației $\frac{dx}{dy} = y$, care trece prin punctul (ξ, η) cu $\eta > 0$ și se găsește în banda $\{-\infty < x < +\infty,\ c < y < d\}$, se obține din $x = \xi + \int_\eta^y y\, dy = \xi + \frac{1}{2}(y^2 - \eta^2)$ pentru $y > 0$ prin rezolvarea în raport cu y. Se obține $y = \sqrt{\eta^2 + 2(x - \xi)}$ pentru $y > \xi - \frac{1}{2}\eta^2$. După cum se putea observa chiar din cîmpul de direcții, curbele integrale sînt semiparabole (fig. 22.2.1).



22.2.1. Cîmpul direcțiilor ecuației diferențiale $y' = 1/y$

Ecuații diferențiale cu variabile separabile. În ecuațiile diferențiale $y' = e^x \sin y$, $y' = \frac{y}{x^2}$, $y' = \frac{y+1}{x-1}$ partea dreaptă este o funcție de ambele variabile fiind un produs **de** două funcții, una numai de x, $g(x)$ și cealaltă numai de y, $h(y)$. Ecuații ca de exemplu $y' = \sin(xy)$ sau $y' = x + y$ nu sînt de acest tip. Cînd partea dreaptă a ecuației diferențiale $y' = f(x, y)$ se poate scrie ca un produs $g(x) \cdot h(y)$, atunci *variabilele* se zic *separabile*. În acest caz ecuația diferențială $y' = g(x)\, h(y)$ se poate ușor rezolva dacă $g(x)$ și $h(y)$ sînt funcții continue și $h(y)$ este diferită de zero într-un interval (c, d). Din $\frac{dy}{dx} = g(x)\, h(y)$ se obține $\frac{dy}{h(y)} = g(x)\, dx$ și prin integrare în ambii membri

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x) dx + C.$$

Prin rezolvare în raport cu y se obține soluția generală în $c < y < d$.

Exemplul 1. $y' = -\dfrac{y}{x}$ pentru $x > 0$, $y > 0$. Aici $g(x) = -\dfrac{1}{x}$, $h(y) = y$. Se obține

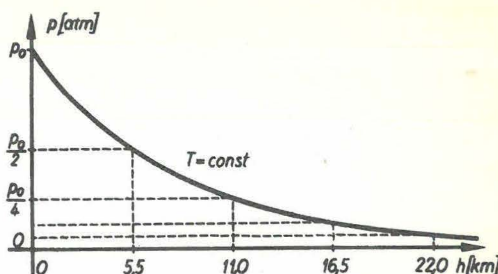
$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} + C,$$

$$\ln y + \ln x = C,$$

$$\ln xy = C,$$

$$xy = e^C = c.$$

Soluțiile sînt hiperbole.



22.2.2. Descrierea presiunii atmosferice p măsurate în atm la temperatură constantă, funcție de distanța h față de Pămînt măsurată în km

Exemplul 2. Presiunea atmosferică p variază cu înălțimea h măsurată de la suprafața Pămîntului (fig. 22.2.2). La o creștere dh a înălțimii, p crește cu $dp = -\rho g\, dh$, unde ρ este densitatea atmosferei și g accelerația gravitației. După legea Boyle-Mariotte rezultă relația $\dfrac{\rho}{p} = \dfrac{\rho_0}{p_0} = a = \text{const}$, de unde

$$dp = -pag\, dh, \qquad \int \frac{dp}{p} = -\int ag\, dh + C,$$

$$\ln p = -agh + C.$$

Relația dintre presiunea atmosferică și înălțime	$p = p_0 e^{-\frac{\rho_0 gh}{p_0}}$

Pentru $h = 0$ presiunea p_0 este presiunea la suprafața Pamîntului și deci $C = \ln p_0$; se obține $\ln \dfrac{p}{p_0} = -agh$ sau $p = p_0 e^{-agh} = p_0 e^{-\frac{\rho_0 gh}{p_0}}$.

Presiunea scade exponențial cînd înălțimea crește; presupunînd temperatura constantă, cu fiecare 5,54 km presiunea scade cu jumătate.

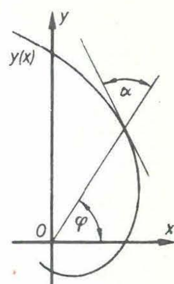
Ecuații diferențiale omogene. O ecuație diferențială $y' = f(x, y)$ este *omogenă* cînd $f(x, y)$ este o funcție de raportul $\dfrac{y}{x}$, $\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$; astfel de ecuații sînt de exemplu $y' = \sin\dfrac{y}{x}$, $y' = \dfrac{\left(\frac{y}{x} - 1\right) x}{y}$ și $y' = -\dfrac{x^2}{y^2}$. Pentru a rezolva astfel de ecuații se face în $y' = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ substituția $\dfrac{y}{x} = t$. Atunci $y = tx$, $y' = \dfrac{dy}{dx} = t'x + t$. Se obține ecuația diferențială $t'x + t = \varphi(t)$ sau $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{\varphi(t) - t}{x}$, în care variabilele sînt separabile; integrala generală este

$$\int \frac{dt}{\varphi(t) - t} = \ln x + C.$$

Se obține de aici $t = t(x)$ și deci și funcția $y = y(x)$. Metoda nu se poate aplica cînd *numitorul* $\varphi(t) - t$ *se anulează*, adică cînd $\varphi(t) = t$ și deci $y' = \dfrac{y}{x}$. În acest caz însă ecuația este de la început o ecuație cu variabile separabile.

Exemplu. Pentru găsirea tuturor curbelor care taie razele vectoare sub același unghi α se consideră dreapta care face unghiul φ cu axa Ox. În punctul de intersecție al acestei drepte cu curba căutată $y(x)$ direcția tangentei este

$$y' = \operatorname{tg}(\varphi + \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\alpha} = \frac{\frac{y}{x} + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \frac{y}{x}\operatorname{tg}\alpha}.$$



22.2.3. Derivata ecuației diferențiale a spiralei echiunghiulare

Punînd $\operatorname{tg}\alpha = a$, rezultă ecuația diferențială $y' = \dfrac{a + \frac{y}{x}}{1 - a\frac{y'}{x}}$ care este omogenă și are soluția $\dfrac{2}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + C = \ln(x^2 + y^2)$. În coordonate polare $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ și $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$, soluția se scrie: $\varphi = a \ln r - \dfrac{a}{2}\cdot C$ si $r = e^{\frac{\varphi}{a} + \frac{1}{2}C}$

Curbele căutate sînt *spirale logaritmice* (fig. 22.2.3).

Ecuații diferențiale liniare $y' + p(x)y + q(x) = 0$. În această ecuație $p(x)$ și $q(x)$ sînt funcții date de x, care se presupun continue. Cînd $q(x) \equiv 0$, ecuația diferențială se numește *liniară omogenă*. În acest caz ea se poate integra ca o ecuație cu variabile separabile. Din $\dfrac{dy}{dx} + p(x)\, y = 0$ se obține $\ln y = -\int p(x)\,dx + C_1$ sau $y = Ce^{-\int p(x)\,dx}$. Pentru a obține o soluție a ecuației *neomogene* $y' + p(x)\,y + q(x) = 0$ se folosește *metoda variației constantelor* introdusă de matematicianul francez Joseph-Louis LAGRANGE (1736—1813). C nu se mai consideră constantă ci o funcție $C = C(x)$. Din $y = C(x)\,e^{-\int p(x)\,dx} = C(x)\,\psi(x)$ se obține $y' = C'(x)\,\psi(x) + C(x)\,\psi'(x)$ și prin introducerea în ecuația neomogenă

$$C'\psi + q + C(\psi' + p\psi) = 0.$$

Expresia din paranteză este nulă cînd ψ verifică ecuația diferențială omogenă. Atunci se obține ecuația diferențială în $C(x)$, $C'(x)\,\psi(x) + q(x) = 0$. Soluția acestei ecuații este $C(x) = C_1 - \int q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}\,dx$.

Soluția generală a ecuației diferențiale $y' + p(x)\,y + q(x) = 0$	$y = e^{-\int p(x)\,dx}\left[C_1 - \int q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}\,dx\right]$

Nu trebuie reținută formula finală ci procedeul: constituirea ecuației omogene, separarea variabilelor, variația constantelor.

Exemplu. $xy' - y = x^2 \cos x$, $y' - \dfrac{y}{x} - x\cos x = 0$; $x \neq 0$. Ecuația omogenă $y' - \dfrac{1}{x}\,y = 0$ are soluția $y = Cx$; prin variația constantelor $y' = C'(x)x + C(x)$ se înlocuiește

$C'(x)\,x + C(x) - C(x) - x\cos x = 0$, $C'(x) - \cos x = 0$, $C(x) = \sin x + C_1$,
adică soluția generală devine $y = x\sin x + C_1 x$.

Ecuații diferențiale de tip Bernoulli $y' + p(x)y + q(x)y^n = 0$. Acest tip de ecuații poartă numele matematicienilor elvețieni Jakob BERNOULLI (1654 — 1705) și Johann BERNOULLI (1667 — 1748) care s-au ocupat de ea în anii 1695 și 1697 în concurență cu Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646—1716). Pentru $n = 0$ ecuația devine liniară; pentru $n = 1$ ecuația devine cu variabile separabile. În cazul general $n \neq 0$, $n \neq 1$ și $y \neq 0$, de exemplu $y > 0$, funcțiile $p(x)$ și $q(x)$ se presupun continue într-un interval $a < x < b$. De acest tip sînt ecuațiile diferențiale

$$y' - (x^2 + 1)\,y - y^2 = 0 \quad \text{cu } n = 2,\ p(x) = -x^2 - 1,\ q(x) = -1$$

sau

$$xy' - y^3 \ln x + y = 0 \quad \text{cu } n = 3,\ p(x) = \frac{1}{x},\quad q(x) = -\frac{\ln x}{x}.$$

Pentru integrarea acestui tip, se introduce prin substituția $y = z^{\frac{1}{1-n}}$ o nouă funcție $z = z(x)$. Se obține

$$y' = \frac{1}{1-n}\, z^{\frac{n}{1-n}} z'(x)$$

și prin înlocuire o ecuație diferențială pentru $z(x)$,

$$z' + (1 - n)\, p(x)\, z + (1 - n)\, q(x) = 0.$$

Din integrala generală $z(x)$ se obține soluția $y = y(x)$ a ecuației inițiale.

Exemplu. În ecuația $y' - \frac{4y}{x} - x\sqrt{y} = 0, n = \frac{1}{2}$, $x \neq 0$, $y > 0$, se face schimbarea de funcție $y = z^{\frac{1}{1-1/2}} = z^2$, deci $y' = 2zz'$; se obține ecuația diferențială $z' - \frac{2z}{x} - \frac{x}{2} = 0$ cu soluția generală $z = x^2\left(\frac{1}{2}\ln x + C\right)$. Integrala ecuației date este deci $y = z^2 = x^4\left(\frac{1}{2}\ln x + C\right)^2$.

Integrarea ecuațiilor diferențiale de ordinul întîi

Orice ecuație diferențială de ordinul întîi se poate integra atunci cînd funcțiile pe care le conține satisfac anumite condiții stabilite prin teoreme de existență, de exemplu continuitatea. Se va presupune în cele ce urmează că toate operațiile ce se efectuează: rezolvarea ecuațiilor implicite, derivarea, integrarea, inversarea funcțiilor etc. sînt posibile.

Ecuații diferențiale exacte. Ecuația diferențială explicită de ordinul întîi $y' = f(x, y)$ se poate reprezenta sub forma $y' = -\frac{h(x, y)}{g(x, y)}$ sau sub forma

$$y'g(x, y) + h(x, y) = 0.$$

Dacă membrul întîi este diferențiala totală a unei funcții $F(x, y)$, adică $y'g(x, y) + h(x, y) = \frac{d}{dx}F(x, y)$, atunci ecuația diferențială se *numește ecuație cu diferențială totală exactă* și $F(x, y)$ se numește *funcție generatoare*. În acest caz integrarea ecuației diferențiale este posibilă și ușoară. Din $\frac{d}{dx}F(x, y) = 0$ rezultă $F(x, y) = C$ și prin rezolvarea în raport cu y se obține integrala generală $y = y(x, C)$. Dacă $h(x, y) + g(x, y)\,y' = \frac{d}{dx}F(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\,y'$ este o diferențială totală, atunci

$$\frac{\partial F}{\partial x} = h(x, y) \text{ și } \frac{\partial F}{\partial y} = g(x, y).$$

Condiții de integrabilitate	$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$

Din $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$ rezultă *condițiile necesare și suficiente de integrabilitate* care sînt condițiile ca ecuația diferențială $y'g(x, y) + h(x, y) = 0$ să fie exactă.

Exemplu. Fie ecuația $y'(6xy + x^2 + 3) + 3y^2 + 2xy + 2x = 0$. Aici $g(x, y) = 6xy + x^2 + 3$, $\frac{\partial g}{\partial x} = 6y + 2x$; $h(x, y) = 3y^2 + 2xy + 2x$, $\frac{\partial h}{\partial y} = 6y + 2x$. Deoarece $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y}$, ecuația diferențială este exactă.

Metoda de rezolvare. Fiind dată o ecuație diferențială $y'g(x, y) + h(x, y) = 0$, se verifică întîi cu ajutorul condițiilor de integrabilitate dacă ecuația este exactă. În acest caz există o funcție generatoare $F(x, y)$. Rezolvînd ecuația $F(x, y) = C$ în raport cu y, se obține integrala generală a ecuației diferențiale. În cele ce urmează se arată cum se găsește funcția $F(x, y)$.

Cazul general	*Exemplu*
$y'g(x, y) + h(x, y) = 0$	$y'(6xy + x^2 + 3) + 3y^2 + 2xy + 2x = 0$
$\frac{\partial F}{\partial x} = h(x, y)$	$\frac{\partial F}{\partial x} = 3y^2 + 2xy + 2x$
$F = \int h(x, y)\,dx + \varphi(y)$	$F = 3y^2 x + x^2 y + x^2 + \varphi(y)$

Rezultatul integrării în raport cu x depinde de o funcție necunoscută de y, $\varphi(y)$.

$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int h(x, y)\,dx + \varphi'(y)$	$\frac{\partial F}{\partial y} = 6xy + x^2 + \varphi'(y)$
$\frac{\partial F}{\partial y} = g(x, y)$	dar și $\frac{\partial F}{\partial y} = 6xy + x^2 + 3$,
$\varphi'(y) = g(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int h(x, y)\,dx$	adică $6xy + x^2 + 3 = 6xy + x^2 + \varphi'(y)$

Aceasta este o ecuație diferențială pentru $\varphi(y)$.

Cu ajutorul condițiilor de integrabilitate se poate demonstra că partea dreaptă nu depinde de x; atunci	Evident
	$\varphi'(y) = 3$
$\varphi(y) = \int \left(g - \frac{\partial}{\partial y}\int h\,dx\right) dy$	nu depinde de x.
	$\varphi(y) = 3y + \text{const}$,
$F(x, y) = \int h(x, y)\,dx + \varphi(y)$.	$F(x, y) = 3y^2 x + x^2 y + x^2 + 3y$

De aici rezultă integrala generală

$\int h(x, y)\,dx + \varphi(y) = C$	$3y^2 x + x^2 y + x^2 + 3y = C$

Metoda factorului integrant. În cazul cînd o ecuație diferențială de forma $y'g(x, y) + h(x, y) = 0$ nu este exactă, atunci folosind metoda matematicianului elvețian Leonhard EULER (1707–1783), ea se înmulțește cu o funcție $\mu(x, y)$ aleasă astfel încît să rezulte o ecuație diferențială exactă, adică astfel încît

$$y'g(x, y)\,\mu(x, y) + h(x, y)\,\mu(x, y) = 0$$

să fie o diferențială totală. O astfel de funcție $\mu(x, y)$ se numește multiplicator eulerian **sau** *factor integrant*.

Exemplu. Ecuația diferențială $y'(xy - x^2) + y^2 - 3xy - 2x^2 = 0$ nu este exactă, deoarece $\frac{\partial g}{\partial x} = y - 2x$ și $\frac{\partial h}{\partial y} = 2y - 3x$. Funcția $\mu(x, y) = 2x$ este pentru această ecuație un factor integrant deoarece prin înmulțire cu $2x$ se obține

$$y'(xy - x^2)\,2x + (y^2 - 3xy - 2x^2)\,2x = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(xy - x^2)\,2x = 4xy - 6x^2$$

și

$$\frac{\partial}{\partial y}(y^2 - 3xy - 2x^2)\,2x = 4xy - 6x^2.$$

Integrarea acestor ecuații diferențiale exacte duce la găsirea integralei generale $y^2x^2 - 2x^3y - x^4 = C$.

Condiția ca $y'g\mu + h\mu$ să fie o diferențială totală este $\frac{\partial(g\mu)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu h)}{\partial y}$ sau $h\frac{\partial \mu}{\partial y} - g\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial y}\right)$. Aceasta este o ecuație diferențială cu derivate parțiale cu funcția necunoscută $\mu(x, y)$. Aparent problema integrării s-a complicat. Dar deoarece este necesară găsirea doar a unei integrale particulare a acestei ecuații, se realizează totuși un progres simțitor. Se poate demonstra că ecuația $y'g + h = 0$ are cel puțin un factor integrant.

Ecuații diferențiale liniare de ordin superior

În aplicații apar deseori ecuații diferențiale liniare de ordin superior. În ecuația diferențială liniară generală de ordinul n, $b_0(x)\,y + b_1(x)\,y' + b_2(x)\,y'' + \ldots + b_n(x)\,y^{(n)} = g(x)$ *coeficienții* $b_i(x)$ și *termenul liber* $g(x)$ sînt presupuși funcții reale continue și mărginite de x iar $b_n(x)$ este în plus presupus diferit de zero în intervalul considerat. Prin împărțirea cu $b_n(x)$ se obține forma $a_0(x)\,y + a_1(x)\,y' + a_2(x)y'' + \ldots + y^{(n)} = f(x)$ în care $a_i(x)$ și $f(x)$ sînt de asemenea funcții continue și mărginite. Cînd $f(x)$ este identic nul, ecuația diferențială se numește *omogenă* iar în caz contrar *neomogenă*. Integrarea ei se face pornind de la ecuația diferențială omogenă; un caz mai simplu este acela cînd coeficienții $a_i(x)$ sînt constante numerice. Cazul ecuației diferențiale liniare de ordinul doi poate servi ca model pentru ecuația diferențială liniară de ordin oarecare.

Ecuația diferențială liniară omogenă de ordinul doi $a_0(x)y + a_1(x)y' + y'' = 0$ Ecuația admite *soluția banală* $y \equiv 0$.

Cum această ecuație diferențială este liniară și omogenă în funcția y și în derivatele ei, dacă $y_1(x)$ și $y_2(x)$ sînt două integrale particulare, atunci și $C_1y_1(x)$ și $C_2y_2(x)$ cît și orice combinație liniară $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ sînt soluții ale ecuației, C_1 și C_2 fiind constante arbitrare.

Pentru ca o combinație liniară $C_1y_1 + C_2y_2$ de două soluții particulare ale ecuației diferențiale să reprezinte integrala generală, soluțiile y_1 și y_2 trebuie să fie *liniar independente.* Dacă nu ar fi așa, atunci s-ar putea găsi două constante α_1 și α_2 ambele diferite de zero, pentru care $\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2 = 0$. Dacă $\alpha_1 \neq 0$, rezultă $y_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\cdot y_2 = \bar{\alpha}_1y_1$ și din $\alpha_2 \neq 0$ ar rezulta $y_2 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\cdot y_1 = \bar{\alpha}_2y_1$; cele două funcții y_1 și y_2 ar reprezenta deci aceeași integrală particulară deoarece diferă numai printr-un factor constant.

Exemplu. $y_1 = \cos^2 x - \cos 2x$ și $y_2 = \frac{1}{2}\sin^2 x$ sînt *liniar dependente* deoarece $y_1 - 2y_2 = 0$ pentru orice x. Dar $y_1 = x$ și $y_2 = x^2$ cît și $y_1 = \sin x$ și $y_2 = \cos x$ sînt *liniar independente.*

Cînd cele două soluții particulare $y_1(x)$ și $y_2(x)$ sînt liniar independente, ele formează un sistem fundamental al ecuației diferențiale. În acest caz raportul $\frac{y_1}{y_2}$ nu este constant și derivata $\frac{d}{dx}\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = \frac{y_1'y_2 - y_2'y_1}{y_2^2}$ nu este identic nulă. Determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1' & y_1 \\ y_2' & y_2 \end{vmatrix} = y_1'y_2 - y_2'y_1$$

poartă denumirea de *determinant wronskian* după numele matematicianului polonez Josef WRONSKI (1778—1853). Are loc teorema:

Două soluții particulare y_1 și y_2 formează un sistem fundamental și deci combinația liniară $y = C_1y_1 + C_2y_2$ reprezintă integrala generală a ecuației diferențiale $a_0(x)\, y + a_1(x)\, y' + y''=0$, dacă și numai dacă determinantul wronskian format cu aceste funcții este diferit de zero.

Exemplu. Ecuația diferențială liniară $xy'' + 2y' + axy = 0$, în care a este un număr oarecare, se transformă prin substituția $u = xy$ într-o ecuație diferențială cu coeficienți constanți. Prin derivare, din $u = xy$ se obține succesiv $u' = y + xy'$ sau $y' = \frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2}$ și de aici $y'' = \frac{u''x - u'}{x^2} - \frac{u'x - 2u}{x^3}$. Înlocuind expresiile găsite pentru y, y' și y'' în ecuația dată, se obține $u'' + au = 0$. După cum se va arăta mai jos, pentru $a = -1$ se obține $u_1 = e^x$ și $u_2 = e^{-x}x$ și deci rezultă soluțiile $y_1 = \frac{e^x}{x}$ și $y_2 = \frac{e^{-x}}{x}$ care formează un sistem fundamental al ecuației $xy'' + 2y' - xy = 0$.

Pentru coeficienți oarecare $a_0(x)$ și $a_1(x)$ nu există o metodă generală de găsire a unui sistem fundamental pentru ecuația

$$a_0(x)\, y + a_1(x)\, y' + y'' = 0.$$

Există însă lucrări de îndrumare în care se indică soluții sau metode de rezolvare adecvate. Cînd coeficienții sînt constante numerice, atunci există o metodă de alcătuire a unui sistem fundamental.

Ecuații diferențiale liniare și omogene de ordinul doi cu coeficienți constanți. Ecuația diferențială este de forma $y'' + c_1y' + c_2y = 0$. Prin substituția $y(x) = e^{rx}$, $y' = re^{rx}$, $y'' = r^2e^{rx}$, această ecuație se transformă în $(r^2 + c_1r + c_2)\, e^{rx} = 0$. Cum funcția exponențială nu se anulează nicăieri, mărimea r se poate determina din ecuația de gradul doi. Dacă r_1 și r_2 sînt rădăcinile acestei ecuații, atunci $y_1 = e^{r_1x}$ și $y_2 = e^{r_2x}$ sînt *soluții particulare* ale ecuației diferențiale; în ceea ce privește integrala generală, există următoarele cazuri.

Ecuația caracteristică	$r^2 + c_1r + c_2 = 0$

1. Rădăcinile r_1 și r_2 sînt *reale* și *diferite*; atunci $\frac{y_1}{y_2} = e^{(r_1-r_2)x}$ nu este o constantă, y_1 și y_2 sînt liniar indepentente și $y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$ cu constantele arbitrare C_1 și C_2 este soluția generală a ecuației.

2. Ecuația caracteristică are rădăcina dublă $r_1 = r_2 = \frac{-c_1}{2}$ și deci y_1 și y_2 sînt liniar dependente. Prin înlocuire se verifică că și $y_2 = xe^{r_1x}$ satisface ecuația diferențială $y'' + c_1y' + c_2y=0$. Cum raportul $\frac{y_2}{y_1} = x$ nu este constant, soluțiile particulare y_1 și y_2 formează un sistem fundamental și $y = C_1e^{r_1x} + C_2xe^{r_1x}$ cu C_1 și C_2 constante arbitrare este integrala generală.

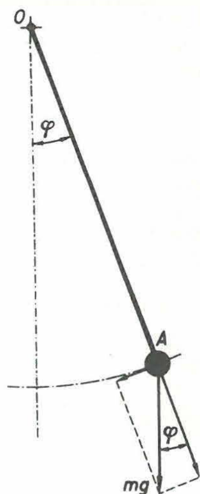
3. Rădăcinile r_1 și r_2 sînt numere complexe. Cum prin ipoteză c_1 și c_2 sînt numere reale, înseamnă că r_1 și r_2 sînt numere *complexe conjugate*: $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$. Cele două soluții particulare $y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i \sin\beta x)$ și $y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$ formează un sistem fundamental și integrala generală este $y^* = y_1C_1 + y_2C_2$ sau, notînd cu $C_1^* = C_1 + C_2$ și $C_2^* = i(C_1 - C_2)$, $y^* = e^{\alpha x}(C_1^* \cos\beta x + C_2^* \sin\beta x)$. Ecuații diferențiale de acest tip se întîlnesc în studiul oscilațiilor.

Exemplu. Ecuația diferențială $y'' - 3y' + 2y = 0$ are ecuația caracteristică $r^2 - 3r + 2 = 0$ cu rădăcinile $r_1 = 1$ și $r_2 = 2$. Integrala ei generală va fi deci $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$.

Exemplu. Pendulul matematic. Un pendul a cărui masă m se presupune concentrată în punctul A (fig. 22.2.4) este atîrnat de punctul O printr-un fir de lungime $l = |\overline{OA}|$. Sub acțiunea gravitației, pendulul oscilează; se vor neglija frecarea și alte influențe. Dacă unghiul dintre pendul și verticală la momentul t este φ, atunci asupra masei m acționează forța mg vertical în jos iar în direcția tangentei forța $mg \sin\varphi$, unde g este accelerația gravitațională. După legea a doua a lui Newton, această forță este egală cu produsul dintre masa m și accelerația $l\dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$; se obține astfel pentru unghiul $\varphi(t)$ ecuația diferențială

$$ml\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg\sin\varphi \text{ sau } \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0.$$

Această ecuație nu este liniară și, prin separarea variabilelor, se ajunge la o *integrală eliptică* care se evaluează prin dezvoltarea în serie,



22.2.4. Pendulul matematic

respectiv, folosind tabele gata calculate. Prin procedeul de liniarizare folosit curent în fizică se obține o ecuație diferențială liniarizată care se rezolvă mult mai simplu; se consideră numai devieri mici de la verticală pentru care $\sin\varphi \approx \varphi$ și se obține $\dfrac{d^2\varphi}{dt^2} + \dfrac{g}{l}\varphi = 0$ cu soluția

$$\varphi = \alpha\cos(\omega t + \delta),$$

unde $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$ reprezintă din punct de vedere fizic *frecvența*, iar $\tau = 2\pi/\omega$ *perioada oscilației*, α și δ fiind constante de integrare. Această formulă exprimă faptul deja remarcat de Galileo GALILEI (1564–1642) că perioada oscilației nu depinde de mărimea oscilației. Pentru perioade mai mici acest lucru rămîne adevărat numai într-o primă aproximație. Pentru oscilații mari perioada este dată de

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \sin^4\frac{\varphi_0}{2} + \cdots\right],$$

unde φ_0 este înclinația maximă, adică *amplitudinea*. Măsurată cu ajutorul acestei formule exacte, obținute prin rezolvarea ecuației diferențiale neliniarizate, eroarea este pentru $\varphi_0 = 1°$ numai de 0,002% și pentru $\varphi_0 = 5°$ de 0,05%.

O curbă de-a lungul căreia mărimea oscilației este independentă de perioadă se numește *curbă tautocronă*: Christian HUYGENS (1629–1695) a găsit în 1673 că *cicloida* are această proprietate și a construit un ceas pendulă bazat pe acest principiu. Firul acestui pendul cicloidal se înfășoară în timpul oscilației pe doi suporți cicloidali. Pendulul va descrie atunci o cicloidă deoarece evoluta cicloidei este tot o cicloidă. Pendulul oscilează tautocron.

Ecuația diferențială liniară neomogenă de ordinul doi $a_0(x)\,y + a_1(x)\,y' + y'' = f(x)$.

Soluția generală a ecuației diferențiale liniare neomogene de ordinul doi este egală cu suma dintre soluția generală a ecuației diferențiale omogene corespunzătoare și o soluție particulară oarecare a ecuației neomogene.

Dacă $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ este soluția generală a ecuației omogene și $p(x)$ o integrală particulară a celei neomogene, atunci $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + p(x)$ va fi integrala generală a ecuației diferențiale neomogene. O *integrală particulară* $p(x)$ a ecuației diferențiale neomogene se obține din integrala generală a ecuației omogene prin *metoda variației constantelor* a lui J. L. Lagrange. În expresia

$$p(x) = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x)$$

se consideră coeficienții C_1 și C_2 funcții de x. Deoarece trebuie determinate două funcții $C_1(x)$ și $C_2(x)$, mai este nevoie de încă o *condiție ajutătoare* și se alege condiția $C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0$. Prin înlocuirea lui $p(x)$, $p'(x)$ și $p''(x)$ în ecuația diferențială neomogenă se ajunge, ținîndu-se seama de ipoteza că y_1 și y_2 sînt soluții ale ecuației omogene, la ecuația

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x).$$

$$\begin{aligned} C_1'y_1 + C_2'y_2 &= 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' &= f(x) \end{aligned}$$

Totodată se obține și sistemul de ecuații alăturat care poate fi rezolvat în raport cu C_1' și C_2', deoarece y_1 și y_2 fiind liniar independente, determinantul wronskian nu se anulează nicăieri. Prin integrare se obțin $C_1(x)$ și $C_2(x)$ și deci și integrala generală a ecuației neomogene. Aplicarea metodei variației constantelor este uneori incomodă deoarece se ajunge la integrale ce nu pot fi evaluate decît prin aproximație.

Exemplu. Pentru ecuația diferențială $xy'' + 2y' - xy = e^x$ funcțiile $y_1 = \dfrac{e^x}{x}$ și $y_2 = \dfrac{e^{-x}}{x}$ formează un *sistem fundamental*. Prin metoda variației constantelor se ajunge la integrala particulară $p(x) = \dfrac{1}{2} e^x$ a ecuației neomogene. *Soluția generală* va fi deci

$$y(x) = C_1 \frac{e^x}{x} + C_2 \frac{e^{-x}}{x} + \frac{1}{2} e^x.$$

Soluții particulare ale ecuației diferențiale liniare neomogene de ordinul doi cu coeficienți constanți, pentru forme particulare ale termenului liber. Cînd coeficienții c_1 și c_2 sînt constante, atunci pentru anumite forme particulare ale termenului liber $f(x)$ se poate determina o integrală particulară a ecuației $y'' + c_1y' + c_2y = f(x)$ fără a se folosi metoda variației constantelor.

Tipul 1. Dacă termenul liber este un polinom $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, $a_n \neq 0$, atunci dacă $c_2 \neq 0$ se ia $p(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1} + b_nx^n$; dacă însă $c_2 = 0$, atunci se mai adaugă expresiei de mai sus termenul $b_{n+1}x^{n+1}$. Coeficienții b_0, b_1, ... se determină prin metoda coeficienților nedeterminați.

Exemplu. $y'' + y = x^2$, adică $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $c_2 = 1$. Luînd $p(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$, se obține $p' = b_1 + 2b_2x$, $p'' = 2b_2$. După înlocuire se obține $(b_0 + 2b_2) + b_1x + b_2x^2 = x^2$ și de aici prin identificarea coeficienților $b_0 = -2$, $b_1 = 0$, $b_2 = 1$. Deci $p(x) = -2 + x^2$ este o soluție particulară și $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 - 2$ soluția generală a ecuației diferențiale.

Tipul 2. Dacă termenul liber este o funcție exponențială $f(x) = a\,e^{kx}$, se ia $p(x) = be^{kx}$; rămîne de determinat valoarea lui b.

Exemplu. $y'' + y = 2e^{3x}$, adică $a = 2$, $k = 3$. Se ia $p(x) = be^{3x}$. Prin înlocuire se obține ecuația $9b + b = 2$. Se găsește astfel integrala particulară $p(x) = \dfrac{1}{5} e^{3x}$ și integrala generală $y = \dfrac{1}{5} e^{3x} + C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Tipul 3. Dacă termenul liber este o funcție trigonometrică de forma $f(x) = a \cos mx + b \sin mx$, atunci $p(x)$ se ia de forma $p(x) = a^* \cos mx + b^* \sin mx$ chiar și atunci cînd unul dintre coeficienții a sau b este nul. Aici a^* și b^* se determină prin metoda coeficienților nedeterminați.

Exemplu. $y''+y=2\sin 3x$, adică $a=0$, $b=2$, $m=3$. Se ia $p(x)=a^*\cos 3x+b^*\sin 3x$. După înlocuire se obține $a^*=0$, $b^*=-\frac{1}{4}$. Integrala generală este $y=-\frac{1}{4}\sin 3x+$ $+C_1\cos x+C_2\sin x$.

Tipul 4. Cînd *termenul liber este o combinație liniară* a unor funcții de tipurile 1, 2, 3, soluția particulară se caută tot sub forma unei combinații liniare de soluții particulare corespunzătoare acestor tipuri.

Exemplu. $y''+y=x^2+2e^{3x}+2\sin 3x$. După cum rezultă din exemplele de mai sus, integrala generală va fi $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x^2-2+\frac{1}{5}e^{3x}-\frac{1}{4}\sin 3x$.

Toate metodele pentru determinarea unei soluții particulare a ecuației diferențiale neomogene nu pot fi aplicate în cazul rezonanței, adică atunci cînd termenul liber sau un termen al acestuia este integrală a ecuației diferențiale omogene. De exemplu acest lucru se întîmplă pentru ecuațiile diferențiale $y''+y=\cos x$ și $y''-y'=e^x$.

22.3. Considerații privind tipurile ce nu sînt integrabile prin metode elementare

Metode de integrare folosite în practică

După cum s-a arătat deja, faptul că o ecuație diferențială poate fi integrată prin metode elementare este o excepție. Există însă metode care permit găsirea soluțiilor — uneori și aproximative — și în cazul ecuațiilor diferențiale mai dificile; de regulă procedeul constă în aproximarea ecuației diferențiale date prin ecuații cu diferențe ce se pot rezolva prin metode elementare. Unele dintre cele mai importante procedee de acest tip se vor expune aici.

Integrare cu ajutorul seriilor de puteri. Se caută soluția ecuației diferențiale $y'=f(x, y)$ sub forma unei serii de puteri $y=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots$ în care coeficienții a_i sînt necunoscuți. Înlocuind pe y și y' în ecuație, coeficienții a_i pot fi găsiți în anumite condiții prin *metoda coeficienților nedeterminați.*

Exemplu. $y'=x^2+y$; se ia $y=x_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\dots$, $y'=a_1+2a_2x+$ $+3a_3x^2+4a_4x^3+\dots$; rezultă $a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\dots=a_0+a_1x+(a_2+1)x^2+$ $+a_3x^3+a_4x^4+\dots$ Metoda coeficienților nedeterminați dă $a_1=a_0$, $a_2=\frac{a_0}{2}$, $a_3=\frac{a_0+2}{6}$, $a_4=\frac{a_0+2}{24}$, ... Se obține astfel integrala $y=a_0+a_0x+\frac{a_0}{2}x^2+\frac{a_0+2}{6}x^3+\frac{a_0+2}{24}x_4+\dots$ sau $y=\frac{a_0+2}{1}+\frac{a_0+2}{1!}x+\frac{a_0+2}{2!}x^2+\frac{a_0+2}{3!}x^3+\dots-2-2x-x^2$ sau $y=(a_0+2)e^x-$ $-2-2x-x^2$.

Prin ultima transformare s-a obținut pentru acest caz o reprezentare a soluției cu ajutorul unei funcții elementare. Cînd acest lucru nu se poate realiza, atunci soluția se exprimă cu ajutorul unei serii considerînd un număr de termeni corespunzător preciziei cerute. Deoarece în acest caz membrul al doilea al ecuației diferențiale este un polinom în x și y, seria obținută este convergentă, după cum rezultă din propoziția de mai jos ce se va da fără demonstrație.

Soluția ecuației diferențiale $y' = f(x,y)$ se poate reprezenta printr-o serie de puteri convergentă dacă partea dreaptă a ecuației se poate dezvolta într-o serie de puteri absolut convergentă într-un domeniu al planului xOy; $f(x, y) = c_{00} + c_{10}x + c_{01}y + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2 + \dots =$ $= \sum c_{\lambda\mu} x^{\lambda} y^{\mu}$

Metoda dezvoltării în serie de puteri se poate aplica și în cazul ecuațiilor diferențiale de ordin superior după cum se va vedea în exemplul următoarelor două importante ecuații diferențiale.

Ecuații diferențiale gaussiene, seria hipergeometrică. Carl Friedrich GAUSS (1777—1855) a studiat în 1812 o ecuație diferențială mai deosebită pe care a denumit-o *hipergeometrică*. Această ecuație conține mai mulți parametri și este de forma

$$x(x-1)\,y'' + [(\alpha+\beta+1)\,x - \gamma]\,y' + \alpha\beta y = 0,$$

α, β, γ fiind parametri. Pentru $\gamma \neq 0, -1, -2, \dots$ ea are ca soluție o serie de puteri de forma $y = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} x^{\nu}$. Pentru coeficienții acestei serii se obține *formula de recurență* $(\nu + 1)(\nu + \gamma)\, a_{\nu+1} = (\nu + \alpha)(\nu + \beta)\, a_{\nu}$ și deci soluția are forma

$$y_0 = a_0 \left\{ 1 + \frac{\alpha}{1!} \cdot \frac{\beta}{\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!} \frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots \right\} = a_0 F(\alpha, \beta, \gamma, x).$$

Raza de convergență a seriei este 1. Seria $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ din paranteză, care depinde de trei parametri și de variabila x, se numește *serie hipergeometrică*. Multe funcții cunoscute în analiză pot fi exprimate printr-o astfel de serie cu valori particulare date parametrilor. De exemplu:

$$F(1, \beta, \beta, x) = \frac{1}{1-x}, \text{ seria geometrică;}$$

$$F(-n, \beta, \beta, -x) = (1+x)^n; \qquad xF(1, 1, 2, -x) = \ln(1+x);$$

$$\lim_{\beta\to\infty} F(1, \beta, 1, x) = e^x; \qquad \lim_{\alpha,\,\beta\to\infty} xF\left(\alpha, \beta, \frac{3}{2}, -\frac{x^2}{4\alpha\beta}\right) = \sin x.$$

Totuși în cazul general $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ nu poate fi exprimată printr-un număr finit de funcții elementare.

Ecuații diferențiale Bessel, funcții cilindrice. Astronomul și matematicianul german Friedrich Wilhelm BESSEL (1784 — 1846) completînd unele studii ale matematicienilor Daniel BERNOULLI (1700 — 1782) și Leonhard EULER (1707—1783) s-a ocupat de ecuații diferențiale de ordinul doi, care apar frecvent în probleme de fizică și tehnică, în special în studiul oscilațiilor. Aceste ecuații sînt de forma

$$xy'' + (1+n)\,y' - y = 0, \quad n = \text{const.}$$

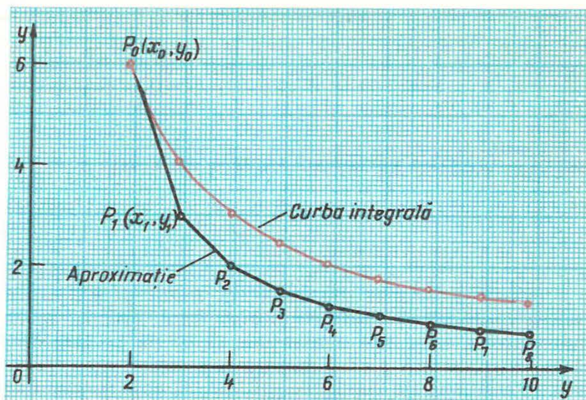
Căutînd o soluție sub forma unei serii de puteri $y = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} x_{\nu}$, se obține $a_{\nu+1} = \dfrac{a_{\nu}}{(\nu+1)(\nu+1+n)}$, adică

$$y = a_0 \left[1 + \frac{x}{1!(1+n)} + \frac{x^2}{2!(1+n)(2+n)} + \dots \right] = a_0 j_n(x).$$

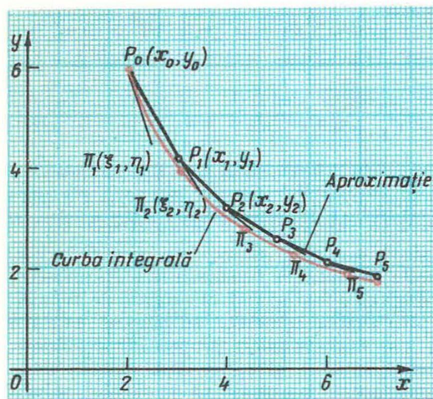
Seriile $j_n(x)$ aflate în paranteză sînt convergente pentru $n \neq -1, n \neq -2, \dots$ Ele poartă numele de *funcții Bessel* sau *funcții cilindrice de prima speță*.

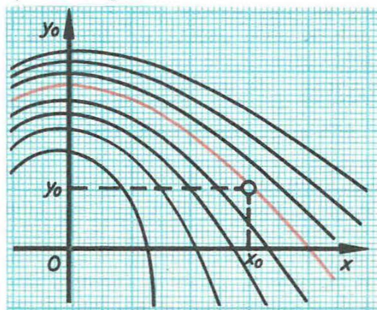
Metode grafice de integrare. Există mai multe metode de integrare grafică a ecuațiilor diferențiale, care corespund tipurilor speciale pentru care se aplică, cît și preciziei cerute. Spațiul nu ne îngăduie aici decît să facem unele considerații de ordin general și numai pentru ecuația diferențială de ordinul întîi.

Metoda liniei poligonale. Dacă dorim să trasăm o curbă integrală a ecuației diferențiale $y' = f(x, y)$ care trece printr-un punct fix $P_0(x_0, y_0)$ și satisface o condiție inițială, atunci $y'_0 = f(x_0, y_0)$ dă *direcția tangentei* la curba integrală în punctul respectiv. La o distanță oarecare de punctul P_0, care cu cît va fi mai mică atît aproximația va fi mai bună, se va alege pe tangentă un punct $P_1(x_1, y_1)$ și procedeul se va repeta. Se ajunge astfel la o aproximare a curbei integrale printr-o linie poligonală. Pe figura 22.3.1 este ilustrat procedeul în cazul ecuației diferențiale $y' = -y/x$ cu condițiile inițiale $x_0 = 2$, $y_0 = 6$. Pe aceeași figură este reprezentată și curba integrală și se constată o abatere considerabilă. Mult mai precis este *procedeul prin intercalarea unor puncte intermediare*. La acest procedeu direcția $y'_0 = f(x_0, y_0)$ în punctul $P(x_0, y_0)$ se folosește numai pentru determinarea direcției $\eta'_1 = f(\xi_1, \eta_1)$ în punctul intermediar $\Pi_1(\xi_1; \eta_1)$. Pe direcția η'_1 se ia primul punct $P_1(x_1; y_1)$ al liniei poligonale. Următorul pas intermediar duce de la P_1 cu $y'_1 = f(x_1, y_1)$ la $\Pi_2(\xi_2; \eta_2)$ și pe direcția $\eta'_2 = f(\xi_2; \eta_2)$ se ia punctul $P_2(x_2, y_2)$. După cum se poate vedea pe figura 22.3.2, aproximarea dată de cea de-a doua metodă este mai bună. Precizia se poate mări prin micșorarea pașilor în special pe porțiunile unde curba prezintă o variație mai rapidă.



22.3.1. Metoda grafică de integrare a ecuației diferențiale $y' = -y/x$ prin metoda liniei poligonale





22.3.3. Curba integrală aleasă ținîndu-se seama de condiția inițială $y(x_0) = y_0$.

22.3.2. Soluția grafică a ecuației diferențiale obținută prin metoda de integrare cu puncte intermediare

Considerații teoretice

Probleme cu condiții inițiale și probleme cu condiții la limită. Imaginea integralei generale a unei ecuații diferențiale de ordinul doi este o familie de curbe cu doi parametri. Pentru aplicații alegerea unei integrale particulare se face în conformitate cu condițiile impuse în problemă. Dacă de exemplu g este accelerația gravitațională, atunci $\frac{d^2y}{dt^2} = g$ este ecuația diferențială a căderii libere. Prin integrarea ei se obține $\frac{dy}{dt} = gt + C_1$, $y = \frac{1}{2} gt^2 +$

$+ C_1 t + C_2$. Vrem însă să știm unde se va găsi corpul în cădere la momentul t, dacă în momentul începerii căderii, adică la momentul $t_0 = 0$ se găsea la înălțimea y_0 și avea viteza inițială v_0. Din aceste *condiții inițiale* trebuie determinate constantele C_1 și C_2. Pentru $t = t_0 = 0$ se obține din $y' = gt + C_1$ ecuația $v_0 = C_1$ și din $y = \frac{1}{2} gt^2 + C_1 t + C_2$ ecuația $y_0 = C_2$. Integrala particulară căutată va fi deci $y = \frac{1}{2} gt^2 + v_0 t + y_0$. O ecuație diferențială de ordinul întîi are integrala generală $y = \varphi(x, C)$ care are ca imagine o familie de curbe cu un parametru. Dacă condiția inițială se poate scrie sub forma $y_0 = \varphi(x_0, C)$, atunci din această ecuație se poate determina o valoare a constantei $C = \psi(x_0, y_0)$. Integrala particulară căutată $y = \varphi[x; \psi(x_0, y_0)] = \Phi(x; x_0, y_0)$ depinde de condițiile inițiale (fig. 22.3.3).

Pentru cercetările din domeniul fizicii și tehnicii este important ca $\Phi(x; x_0, y_0)$ să fie *funcție continuă de condițiile inițiale* care, practic, se cunosc numai aproximativ. Din acest motiv teoria ecuațiilor diferențiale se ocupă pe larg de problema condițiilor pe care trebuie să le îndeplinească *partea* dreaptă a ecuației $y' = f(x,y)$ pentru ca $y = \Phi(x; x_0, y_0)$ să fie o funcție continuă de condițiile inițiale. Pentru continuitatea funcției $f(x, y)$ se arată că satisfacerea unei *condiții Lipschitz* este suficientă (aceeași condiție se dovedește a fi determinantă în *teoremele de existență și unicitate*).

Pentru o *ecuație diferențială de ordinul doi condițiile inițiale* sînt $y(x_0) = y_0$ și $y'(x_0) = y'_0$ și se cere deci ca curba integrală căutată să treacă prin punctul (x_0, y_0) și să aibă în acest punct o direcție determinată de y'_0. În general, condițiile inițiale pentru o ecuație diferențială de ordinul n impun curbei integrale să treacă printr-un punct dat (x_0, y_0) și derivatelor de ordinul întîi pînă la $n - 1$ inclusiv să ia în acest punct valori date. Și în cazul ecuațiilor diferențiale de ordin superior trebuie cercetat dacă soluțiile depind în mod continuu de condițiile inițiale.

Pentru ecuații diferențiale de ordin mai mare decît unu, pe lîngă condițiile inițiale se mai pot considera și *condițiile la limită*; în acest caz problema se pune cu totul altfel. Fie de exemplu de găsit soluția $y(x)$ a ecuației diferențiale $y'' + \lambda y = 0$ în intervalul $0 \leqslant x \leqslant \pi$. Această soluție este legată de probema oscilației unei corzi fixate în punctele 0 și π. Au loc condițiile la limită (de prima speță) $y(0) = y(\pi) = 0$. Din soluția $y(x) = C_1 \sin(x\sqrt{\lambda} + C_2)$ se obține sistemul de ecuații

$$y(0) = C_1 \sin C_2 = 0, \; y(\pi) = C_1 \sin (\pi \sqrt{\lambda} + C_2) = 0.$$

Cînd $\sqrt{\lambda}$ nu este un număr întreg, rezultă $C_1 = C_2 = 0$, adică soluția $y = 0$, coarda *nu va* mai *oscila*. Cînd, dimpotrivă, $\sqrt{\lambda}$ este un număr întreg, deci λ este un pătrat perfect, $\lambda = 1, 4, 9, \ldots$, sistemul de ecuații are soluții și se obțin pentru ecuația diferențială o infinitate de soluții $y(x) = C_1 \sin(x\sqrt{\lambda})$. Între limitele fixate, coarda prezintă oscilații sinusoidale $y = C_1 \sin x$, $y = C_1 \sin 2x$, $y = C_1 \sin 3x, \ldots$; acestea sînt toate *oscilațiile* numite *fundamentale* și armonice, coarda oscilînd independent fără influențe exterioare odată ce a fost scoasă din starea de repaus. Aceste oscilații care se compun și care se pot separa prin analiza armonică se numesc *oscilații proprii* iar valorile $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 9, \ldots, \lambda_n = n^2, \ldots$ se numesc *valori proprii ale problemei*. *Condițiile la limită* sînt *de speța a doua*, cînd în punctele limită, x_1 și x_2, se dau valorile derivatelor $y'(x_1) = a$, $y'(x_2) = b$. Este caracteristic pentru aceste probleme că se obțin soluții nebanale, $y \not\equiv 0$, numai pentru anumite valori discrete ale parametrului, numai pentru valori proprii. Teoretic și practic trebuie determinate valorile proprii și funcțiile proprii.

Teoreme de existență, teoreme de unicitate. Interpretarea geometrică a ecuației diferențiale de ordinul întîi $y' = f(x, y)$ cu ajutorul cimpului direcțiilor sugerează următoarea *teoremă de existență*.

Dacă $f(x, y)$ este o funcție continuă de cele două variabile, atunci prin orice punct (x_0, y_0) din domeniul ei de continuitate G trece o curbă integrală.

Această teoremă a fost demonstrată de Giuseppe PEANO (1858—1932). Problema existenței unei integrale a fost pusă pentru prima dată între anii 1820 și 1830 de matematicianul francez Augustin-Louis CAUCHY (1789—1857), care a demonstrat existența soluției în cazul cînd $f(x,y)$ este o funcție *continuă* și admite o *derivată parțială* $f_y(x, y)$ *continuă*. Este evident

că teorema lui Peano este mai generală decît teorema lui Cauchy pentru că existența soluției are loc în condiții mai puțin restrictive.

O altă problemă la fel de importantă pentru teorie și practică este aceea de a stabili condițiile pe care trebuie să le îndeplinească membrul drept al ecuației diferențiale $y' = f(x, y)$ pentru ca soluția să fie *unică*. Din punct de vedere geometric soluția nu ar fi unică atunci cînd curba integrală se ramifică într-un anumit punct (x_0, y_0). Din punct de vedere fizic aceasta ar avea ca consecință contrazicerea principiului cauzalității legat de fondul problemei, deoarece în aceleași condiții inițiale fenomenul s-ar desfășura în moduri diferite. Hotărîtoare pentru existența cît și pentru unicitatea soluției este condiția găsită în anul 1876 de matematicianul german Rudolf LIPSCHITZ (1832 – 1903). O funcție $f(t)$ de o singură variabilă t satisface condiția lui Lipschitz cu constanta L, în intervalul $[a, b]$ dacă $|f(t_1)-f(t_2)| \leqslant L\,|t_1 - t_2|$ pentru orice t_1 și t_2 din $[a, b]$. O funcție de două variabile $f(x, y)$ satisface această condiție într-un domeniu G al planului xOy, dacă este continuă în acest domeniu și satisface condiția lui Lipschitz în raport cu y, x fiind considerat constant, adică dacă există o constantă L astfel încît pentru orice $(x, y_1) \in G$ și $(x, y_2) \in G$

Condiția lui Lipschitz	$\lvert f(x, y_2) - f(x, y_1) \rvert < L \lvert y_2 - y_1 \rvert$

Geometric această condiție se reduce la aceea că pentru orice ordonată funcția $f(x, y)$ are raportul diferențelor în raport cu y mărginit. Condiția lui Lipschitz este îndeplinită atunci cînd derivata parțială $f_y(x, y)$ este mărginită. *Teorema de existență și unicitate* se poate enunța acum.

Se presupune că funcția $f(x, y)$ este continuă într-un domeniu G și satisface condiția lui Lipschitz în acest domeniu. Atunci pentru orice punct (x_0, y_0) din G există o curbă integrală $y = \varphi(x)$ a ecuației $y' = f(x, y)$ și numai una care trece prin acest punct.

Demonstrația se face prin metoda iterației construindu-se un șir de aproximații succesive $\varphi_n(x)$ în felul următor: $\varphi(x_0) = y_0$ și $\varphi_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x\,\varphi(x))\,\mathrm{d}x,\ n = 0, 1, 2, \ldots$
Folosind condiția lui Lipschitz, se poate arăta că aproximațiile $\varphi_n(x)$ converg uniform către soluția $y = \varphi(x)$: $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$.

Demonstrația este chiar *constructivă*, adică permite determinarea efectivă a soluției. Considerînd de exemplu ecuația diferențială $y' = yx$, a cărei soluție se poate de fapt determina mai comod prin alte metode, cu condițiile inițiale $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, se obține succesiv

$$\varphi_0 = 1$$

$$\varphi_1(x) = 1 + \int_0^x x\,\mathrm{d}x = 1 + \frac{x^2}{2}, \quad \varphi_2(x) = 1 + \int_0^x \left(x + \frac{x^3}{2}\right)\mathrm{d}x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2\cdot 4}, \ldots$$

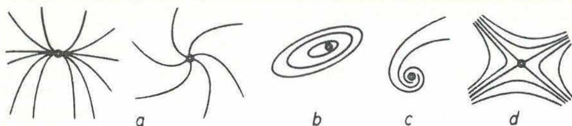
$$\varphi_n(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2\cdot 4} + \ldots + \frac{x^{2n}}{2\cdot 4 \ldots (2n)} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n$$

sau

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{\nu} = e^{\frac{x^2}{2}}.$$

O problemă mult mai dificilă este găsirea condițiilor pentru *existența și unicitatea integralei ecuației diferențiale de ordinul întîi scrise sub formă implicită* $F(x, y, y') = 0$. Problema se complică și mai mult pentru ecuațiile diferențiale implicite de ordin superior.

Cînd condițiile de existență și unicitate nu sînt îndeplinite într-un punct (x_0, y_0), atunci prin acest punct pot trece mai multe — chiar o infinitate — de curbe integrale sau nici una. Un astfel de punct de numește *punct singular* al ecuației diferențiale. În vecinătatea unui astfel de punct curbele integrale pot avea o comportare mai specială (fig. 22.3.4). Din



22.3.4. Comportarea curbelor integrale în vecinătatea unui punct singular: *a* — noduri; *b* — centru; *c* — focar; *d* — punct șa

punct de vedere fizic sau tehnic aceste puncte marchează punctele de tranziție ale fenomenului fizic sau date tehnice critice: fracturarea unei bare supuse încovoierii, ruperea unei membrane supuse întinderii, schimbarea stării unui agregat etc.

Ecuații diferențiale de ordin superior și sisteme de ecuații diferențiale. Ecuația diferențială de ordinul n

$$F(x, y, y', ..., y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$$

se poate scrie ca un sistem de n ecuații diferențiale de ordinul întîi în care se introduc noi funcții $y_1 = y'$, $y_2 = y''$, ..., $y_{n-1} = y^{(n-1)}$. Se obține sistemul $y_1 = y'$, $y_2 = y_1'$, $y_3 = y_2'$, ..., $F(x, y, y_1, ..., y_{n-1}, y_{n-1}') = 0$.

În același mod, un sistem de ecuații diferențiale de ordin superior poate fi scris ca un sistem de ecuații diferențiale de ordinul întîi. Astfel, studiul existenței și unicității soluțiilor ecuațiilor diferențiale de ordin superior se reduce la studiul existenței și unicității soluțiilor sistemelor de ecuații diferențiale de ordinul întîi.

Aplicații în mecanică. Aceste idei sînt de mare importanță pentru aplicațiile în mecanică. Noțiunea fundamentală de accelerație se exprimă matematic prin derivata a doua a coordonatelor $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ ale poziției punctului material la momentul t. Prin urmare, mișcarea punctului material, de masă m, este dată de sistemul

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = P(x, y, z), \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Q(x, y, z), \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = R(x, y, z),$$

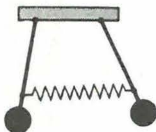
unde P, Q și R sînt componentele forței care acționează asupra punctului material și care depind de (x, y, z). Reducînd acest sistem la un sistem de ecuații diferențiale de ordinul întîi, se obține un sistem de șase ecuații diferențiale

$$u = \dot{x}, \quad v = \dot{y}, \quad w = \dot{z}, \quad m\dot{u} = P(x, y, z), \quad m\dot{v} = Q(x, y, z), \quad m\dot{w} = R(x, y, z)$$

în care noile funcții u, v, w sînt componentele vitezei. Mai frecvent apar sisteme de ecuații diferențiale în care numărul funcțiilor căutate este egal cu numărul ecuațiilor diferențiale. În general un *sistem de n ecuații diferențiale cu n funcții* de variabilă t, în care ecuațiile sînt rezolvate în raport cu derivata, are forma

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n); \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

O *soluție* sau *integrală* a acestui sistem este un sistem de funcții $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ care înlocuite în sistem dau identități în t. Greutatea constă în acest caz în aceea că ecuațiile nu pot fi integrate succesiv una după alta, deoarece o funcție căutată x_i poate să intervină în partea dreaptă a celorlalte ecuații diferențiale. Din punct de vedere fizic se poate spune că mișcările exprimate prin $x_i(t)$ se influențează reciproc; este vorba de o *compunere* a mișcărilor. Ne putem imagina două pendule care oscilează dependent, tijele lor fiind legate printr-un arc extensibil (fig. 22.3.5). Pentru ușurarea exprimării se vor aplica teoriei ecuațiilor diferențiale, noțiunile geometriei multidimensionale. Dacă integrala unei ecuații diferențiale de ordinul întîi este reprezentată geometric printr-o curbă integrală în planul xOy, atunci integralele sistemului $\frac{dx_i}{dt} = f_i$, $i = 1, 2, ..., n$, se reprezintă ca curbe integrale în spații n-dimensionale, unde $x_i(t)$, $i = 1, ..., n$, sînt coordonatele mișcării unui punct.


22.3.5. Cuplare a două pendule oscilante conduce la un sistem de ecuații diferențiale

Teoria integralelor prime. Cu ajutorul acestui limbaj se poate schița și *teoria integralelor prime* deosebit de importante pentru fizică. O ecuație

$F(x_1, ..., x_n) = C$, $C = \text{const}$, definește în spațiul n-dimensional al coordonatelor x_i o hipersuprafață $(n - 1)$-dimensională și, cînd C variază, o familie de hipersuprafețe cu un parametru. Cînd se dau $n - 1$ familii de hipersuprafețe $F_i(x_1, ..., x_n) = C_i$; $i = 1, 2, ..., n - 1$, și se alege din fiecare familie cîte o hipersuprafață, acestea se vor intersecta în general după o curbă din spațiul n-dimensional. În total rezultă o familie de curbe care depinde de $n - 1$ parametri C_i, $i = 1, 2, ..., n - 1$. Cînd este această familie familia curbelor integrale ale sistemului $\frac{dx_i}{dt} = f_i$, $i = 1, ..., n$? Pentru aceasta fiecare curbă integrală a familiei trebuie să fie complet cuprinsă de o anumită hipersuprafață a fiecărei familii de hipersuprafețe, deci $F_i(x_1, ..., x_n)$ trebuie să fie constant. Orice funcție $F(x_1, ..., x_n)$ care este constantă de-a lungul tuturor curbelor integrale ale sistemului se numește *integrală primă* a sistemului. Pentru ca $F(x_1, ..., x_n)$ să fie o integrală primă, atunci dacă F are o diferențială totală, este necesar și suficient ca

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} f_2 + ... + \frac{\partial F}{\partial x_n} f_n = 0.$$

Toate funcțiile F_i, $i = 1, ..., n - 1$, trebuie să satisfacă această condiție și deci ele satisfac sistemul

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_k} f_k = 0, \quad i = 1, 2, ..., n - 1.$$

unde $f_k = \frac{dx_k}{dt}$ sînt cunoscute. Deci (în general) prin cunoașterea a $n - 1$ integrale prime, sistemul se poate integra. Dacă nu se cunosc toate cele $n - 1$ integrale prime ci numai $m < n - 1$ dintre acestea, atunci

$$F_i(x_1, x_2, ..., x_n) = C_i; \quad i = 1, 2, ..., m$$

definește o varietate $(n - m)$-dimensională. Curbele integrale conținute în această varietate trebuie determinate și deci rămîne un sistem de $n - 1 - m$ ecuații diferențiale de ordinul întîi. Prin cunoașterea a m integrale prime, numărul ecuațiilor sistemului scade cu m.

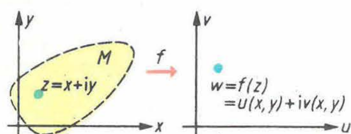
Acest rezultat este deosebit de important în mecanică, de exemplu în mecanica cerească. Celebra *problema a celor trei corpuri* se referă la mișcarea a trei mase care se atrag reciproc, de exemplu Soarele și două planete. Se ajunge la un sistem de 18 ecuații diferențiale cu 18 funcții necunoscute, dintre care 9 sînt funcțiile coordonatelor și 9 componente ale vitezei. Prin cunoașterea a 12 integrale prime această problemă se reduce la integrarea a 6 ecuații diferențiale de ordinul întîi.

23. Analiză complexă

23.1. Diferențierea și integrarea funcțiilor de variabile complexe

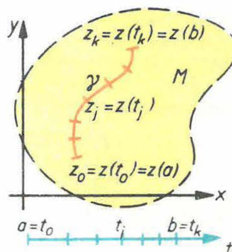
Funcții de o variabilă complexă. Două *funcții u și v de variabile reale* definite pe o mulțime M în planul xOy desemnează fiecărui punct $(x, y) \in M$ un punct (u, v) în planul uOv. Dacă toate punctele (x, y) și (u, v) sînt privite ca numere complexe $z = x + iy$ și $w = u + iv$,

atunci fiecărui număr complex $z \in M$ îi corespunde un număr complex $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Această corespondență se realizează printr-o funcție de variabilă complexă f (fig. 23.1.1). Funcția f este continuă în punctul $z_0 \in M$ dacă pentru orice șir $\{z_n\}$ cu $z_n \in M$ care converge către z_0 pentru $n = 1, 2, ...$, șirul $f(z_n)$ converge către $f(z_0)$. Un șir $\{z_n\}$, $n=1, 2, ...$, de numere complexe se numește convergent dacă șirurile $\{\operatorname{Re} z_n\}$ de părți reale în $\{\operatorname{Im} z_n\}$ de părți imaginare sînt convergente. Dar aceasta înseamnă că f este continuă în $z_0 = x_0 + iy_0$ dacă și numai dacă u și v sînt continue în (x_0, y_0). O funcție definită în M este continuă *pe M* dacă este continuă în orice punct al lui M.



23.1.1. Corespondența dintre punctele $z=x+iy$ și punctele $w = u + iv$ pe baza funcției de variabilă complexă $w=f(z)$.

23.1.2. Subdiviziunile unei curbe γ reprezentate prin $z(t) = x(t) + iy(t)$.



Integrale complexe curbilinii. O curbă continuă în planul z este o mulțime de puncte γ care poate fi reprezentată sub forma $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, unde $a \leqslant t \leqslant b$ și $x(t)$, $y(t)$ sînt funcții continue de variabila reală t. O curbă se numește *continuu diferențiabilă* dacă funcțiile $x(t)$ și $y(t)$ au derivatele de ordinul întîi continue; curba are o lungime finită $l(\gamma)$ (vezi 20.3 „Lungimea arcului și aria suprafeței"). Să presupunem acum că intervalul $[a, b]$ este împărțit în k subintervale $[a, t_1], [t_1, t_2], ..., [t_{k-1}, b]$ prin punctele t_j, $j = 0, 1, ..., k$, $t_0 = a$, $t_k = b$, cărora le corespund pe curbă punctele $z_j = z(t_j)$ (fig. 23.1.2). Dacă mulțimea este conținută în domeniul de definiție M a funcției de variabilă complexă f continuă pe M, atunci pentru subdiviziuni diferite sumele $\sum_{j=1}^{k} f(z_j)(z_j - z_{j-1})$ converg către un număr complex numit integrala curbilinie a funcției complexe f de-a lungul lui γ: $\int_\gamma f(z)\,dz$. Un șir de subdiviziuni se numește *distinct* dacă lungimile celor mai lungi subintervale formează un șir nul cînt $k \to \infty$. Limita este independentă de alegerea șirului de subdiviziuni. Pe baza lui $f = u + iv$ și $z_j = x(t_j) + iy(t_j)$ obținem

$$f(z_j)(z_j - z_{j-1}) = u(x_j, y_j)(x_j - x_{j-1}) - v(x_j, y_j)(y_j - y_{j-1}) + i[v(x_j, y_j)(x_j - x_{j-1}) + u(x_j, y_j)(y_j - y_{j-1})]$$

iar pe baza definiției integralei curbilinii reale de speța a doua (vezi 20.3)

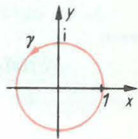
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma (u\,dx - v\,dy) + i\int_\gamma (u\,dy + v\,dx) = \int_{t=a}^{b} \left(u\frac{dx}{dt} - v\frac{dy}{dt}\right)dt + i\int_{t=a}^{b}\left(v\frac{dx}{dt} + u\frac{dy}{dt}\right)dt,$$

deoarece de exemplu $\int_\gamma u(x, y)\,dx = \int_{t=a}^{b} u(x(t), y(t))\frac{dx(t)}{dt}\,dt$. Pe baza definiției $\frac{dx(t)}{dt} + i\frac{dy(t)}{dt} = \frac{dz(t)}{dt}$ obținem în final $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{t=a}^{b} f(z(t))\frac{dz(t)}{dt}\,dt$. Fie $\bar{z} = \alpha - i\beta$ numărul complex conjugat lui $z = \alpha + i\beta$; aceasta înseamnă că $\alpha = (z + \bar{z})/2$ și $\beta = (z - \bar{z})/(2i)$. În mod corespunzător obținem pentru sumele $\sum_{j=1}^{k} f(z_j)(\bar{z}_j - \bar{z}_{j-1})$ integralele curbilinii $\int_\gamma f(z)\,d\bar{z} = \int_{t=a}^{b} f(z(t))\left(\overline{\frac{dz(t)}{dt}}\right)dt$.

Exemplu. Cercul γ cu centrul în $z = 0$ și raza $r = 1$ (fig. 23.1.3) parcurs în sensul pozitiv poate fi reprezentat prin $z(t) = \cos t + \mathrm{i} \sin t$ cu $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. În cazul acestei reprezentări avem $\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = -\sin t + \mathrm{i} \cos t$ și obținem

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int_{t=0}^{2\pi} \frac{1}{z(t)} \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{2\pi} \frac{-\sin t + \mathrm{i}\cos t}{\cos t + \mathrm{i}\sin t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}\int_{t=0}^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi\,\mathrm{i},$$

deoarece $\mathrm{i}(\cos t + \mathrm{i}\sin t) = -\sin t + \mathrm{i}\cos t$.



23.1.3. Integrala $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi\,\mathrm{i}$, unde cercul unitate este parcurs în sensul pozitiv

Derivate parțiale complexe. Două funcții u și v de variabile reale definite pe o mulțime deschisă M a planului z și avînd derivate parțiale de ordinul întîi pot fi liniarizate în $(x_0, y_0) \in M$ și aproximate prin polinoame de ordinul întîi:

$$\tilde{u}(x, y) = u(x_0, y_0) + \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

și

$$\tilde{v}(x, y) = v(x_0, y_0) + \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0).$$

Asemănător $f = u + \mathrm{i}v$ poate fi liniarizată în $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ prin

$$\tilde{f}(z) = f(z_0) + \left[\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}\right](x - x_0) + \left[\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}\right](y - y_0).$$

Substituind $x - x_0 = [(z - z_0) + \overline{(z - z_0)}]/2$ și $y - y_0 = [(z - z_0) - \overline{(z - z_0)}]/(2\mathrm{i})$ și folosind relațiile $\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$ și $\frac{\partial u}{\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}$, liniarizarea devine

$$\tilde{f}(z) = f(z_0) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f(z_0)}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial f(z_0)}{\partial y}\right](z - z_0) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f(z_0)}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial f(z_0)}{\partial y}\right]\overline{(z - z_0)}.$$

Pornind de la aceasta, definim derivatele parțiale de ordinul întîi ale lui f relativ la z și $\bar{z}$ în punctul z_0:

$$\frac{\partial f(z_0)}{\partial z} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f(z_0)}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial f(z_0)}{\partial y}\right] \text{ și } \frac{\partial f(z_0)}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f(z_0)}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial f(z_0)}{\partial y}\right].$$

Pentru aceste derivate sînt valabile regulile funcțiilor de variabile reale, de exemplu

$$\frac{\partial[f(z) + g(z)]}{\partial z} = \frac{\partial f(z)}{\partial z} + \frac{\partial g(z)}{\partial z} \text{ și } \frac{\partial[f(z)\cdot g(z)]}{\partial \bar{z}} = f(z)\cdot\frac{\partial g(z)}{\partial \bar{z}} + g(z)\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}}.$$

Exemple. 1. În cazul $f(z) = \text{const}$ avem $\frac{\partial f(z)}{\partial x} = 0$ și $\frac{\partial f(z)}{\partial y} = 0$, deci $\frac{\partial f(z)}{\partial z} = 0$ și $\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = 0$.

2. Pentru $f(z) = z = x + \mathrm{i}y$ avem $\frac{\partial f(z)}{\partial x} = 1$ și $\frac{\partial f(z)}{\partial y} = \mathrm{i}$, deci $\frac{\partial f(z)}{\partial z} = 1$ și $\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = 0$.

3. În cazul $f(z) = \bar{z} = x - iy$ avem $\frac{\partial f(z)}{\partial x} = 1$ și $\frac{\partial f(z)}{\partial y} = -i$, deci $\frac{\partial f(z)}{\partial z} = 0$ și $\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = 1$.

4. Pe baza regulii de derivare a unui produs aplicat la $z^2, z^3, \ldots, z^n$ obținem prin inducție

$$\frac{\partial z^2}{\partial z} = 2z, \quad \frac{\partial z^3}{\partial z} = 3z^2, \ldots, \frac{\partial z^n}{\partial z} = nz^{n-1} \quad \text{ca și} \quad \frac{\partial z^2}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \frac{\partial z^3}{\partial \bar{z}} = 0, \ldots, \frac{\partial z^n}{\partial \bar{z}} = 0.$$

5. În cazul polinomului $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$ cu coeficienții constanți a_j avem

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z} = 0 + a_1 + 2a_2 z + \ldots + na_n z^{n-1} \quad \text{și} \quad \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = 0.$$

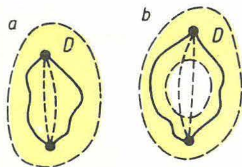
Șirul $\{s_n(z)\}$ de sume parțiale $s_n(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(z - z_0)^j$ a seriei de puteri $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(z-z_0)^j$ converge cînd $n \to \infty$ fie numai în $z = z_0$, fie în cercul $|z - z_0| < R$, fie în întreg planul. Funcția limită f satisface $\frac{\partial f(z)}{\partial z} = \sum_{j=0}^{\infty} ja_j(z - z_0)^{j-1}$ și $\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = 0$ (vezi cap 21). Un caz special este definiția funcției exponențiale complexe $\exp z = \sum_{j=0}^{n} \frac{z^j}{j!}$; cercul de convergență este întreg planul z și derivata sa parțială $\frac{\partial \exp z}{\partial z} = \exp z$.

Funcția exponențială satisface formula lui Euler $\exp(i\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Ecuația funcțională $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2$ sau $\exp z_0 = \exp(z_0 - z) \cdot \exp z$ rezultă din

$$\frac{\partial}{\partial z}[\exp(z_0 - z) \cdot \exp z] = \exp(z_0 - z) \exp z + \exp(z_0 - z) \exp z = 0,$$

deoarece aceasta arată că $\exp(z_0 - z) \exp z = \text{const} = \exp z_0$.

Funcții olomorfe. O funcție f definită pe o mulțime deschisă M se numește *olomorfă* dacă $\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = 0$ pentru orice punct $z \in M$. În cazul funcțiilor olomorfe scriem $\frac{df}{dz}$ sau f' în loc de $\frac{\partial f}{\partial z}$. După cum s-a menționat, funcția limită a unei serii de puteri este olomorfă. Un domeniu D este o mulțime deschisă de puncte în care oricare două puncte pot fi unite printr-o curbă aflată în D. Într-un domeniu simplu conex D, două astfel de curbe cu același punct inițial și același punct final pot fi deformate una în alta astfel încît domeniul D să nu fie părăsit (fig. 23.1.4).



23.1.4. *a* — domeniu simplu conex; *b* — domeniu multiplu conex D

Pentru orice funcție olomorfă f definită pe un domeniu simplu conex există o funcție primitivă F olomorfă și numai una, abstracție făcînd de o constantă aditivă, pentru care $f(z) = \frac{dF(z)}{dz}$. Pe orice curbă γ de la z_1 la z_2 în D avem $\int_\gamma f(z)\, dz = F(z_2) - F(z_1)$.

Exemplu. În cazul $f(z) = z^2$ o primitivă F este $F(z) = z^3/3$. Dacă γ leagă punctul $z_1 = 1$ cu $z_2 = 2 + \mathrm{i}$, atunci

$$\int_\gamma z^2\,\mathrm{d}z = \frac{(2+\mathrm{i})^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{1}{3} + \frac{11}{3}\mathrm{i}.$$

Fie γ conturul unei părți B a lui D. Atunci pe baza *teoremei lui Ostrogradski-Gauss*

$$\int_\gamma (u\,\mathrm{d}x + v\,\mathrm{d}y) = \iint_B \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Din această teoremă rezultă că $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma (u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) + \mathrm{i}\int_\gamma (u\,\mathrm{d}y + v\,\mathrm{d}x) =$

$$= -\iint_B \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \mathrm{i}\iint_B \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \iint_B \left[\mathrm{i}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \mathrm{i}^2\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \mathrm{i}\iint_B \left[\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

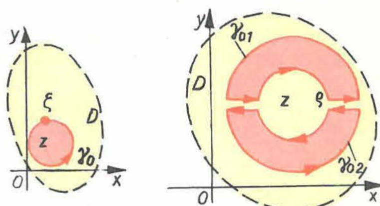
$$= 2\mathrm{i}\iint_B \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Deoarece pentru funcțiile olomorfe avem $\dfrac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = 0$, urmează ca $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Aceasta este o cale de demonstrare a teoremei integrale a lui Cauchy.

Teorema integrală a lui Cauchy: Dacă γ_0 este o curbă închisă într-un domeniu simplu conex D, atunci $\int_{\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ pentru orice funcție olomorfă f în D.

Teorema integrală a lui Cauchy reiese din teorema de existență a unei funcții primitive $F(z)$ pentru f într-un domeniu simplu conex. Dacă γ este închisă, atunci punctul inițial z_1 este același cu punctul final z_2, și de aceea

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = F(z_2) - F(z_1) = 0.$$



23.1.5. Formula integrală a lui Cauchy

Valorile unei funcții olomorfe f în interiorul cercului $|z - z_0| \leqslant R$ conținut în M sînt determinate pe baza formulei integrate a lui Cauchy prin valorile $f(\zeta)$ pe care le ia f pe conturul γ_0 al cercului parcurs în sensul pozitiv (fig. 23.1.5).

Pe baza teoremei integrale a lui Cauchy avem $\int_{\gamma_{01}} \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = 0$, $\int_{\gamma_{02}} \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = 0$ pe curbele închise γ_{01} și γ_{02}. Dacă adunăm integralele și facem să tindă raza ρ către zero, obținem formula integrală a lui Cauchy folosind exemplul integralelor curbilinii complexe.

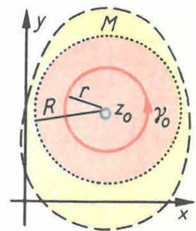
Teorema integrală a lui Cauchy	$f(z) = \dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_{\gamma_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta.$

O funcție olomorfă f în cercul $|z - z_0| < R$ poate fi reprezentată ca funcție limită printr-o serie de puteri unic determinată $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(z - z_0)^j$ cu cercul de convergență de rază R și are derivata $\dfrac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z} = \sum_{j=1}^{\infty} j a_j (z - z_0)^{j-1}$ care este de asemenea olomorfă. Prin derivare

repetată obținem derivate olomorfe de orice ordin k care pot fi obținute și din formula integrală a lui Cauchy prin derivare. Făcînd $z=z_0$, putem determina prin compararea celor două rezultate coeficienții a_j ai seriei pentru $f(z)$ începînd cu $a_0 = f(z_0)$.

O funcție f olomorfă în $|z-z_0| < R$ și reprezentată în mod unic printr-o serie de puteri $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(z - z_0)^j$ are derivate olomorfe $\frac{d^k f(z)}{dz^k} = \frac{k!}{2\pi i}\int_{\gamma_0} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta-z)^{k+1}}$ de orice ordin k și coeficienții seriei de puteri sînt $a_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{j+1}}\, d\zeta$, unde γ_0 este o curbă aflată în interiorul cercului de convergență în jurul lui z sau z_0 parcurs în sens pozitiv.

Singularități izolate ale funcțiilor olomorfe. Fie M o mulțime deschisă care conține un cerc punctat $0 < |z - z_0| < R$ (fig. 23.1.6), dar nu este necesar ca z_0 să fie centrul cercului. Fie f o funcție olomorfă în M. Atunci f poate fi reprezentată în cerc printr-o dezvoltare în *serie Laurent* unic determinată, a cărei *parte principală* constă din termenii cu puteri negative. Coeficientul termenului întîi $a_{-1} = \text{Rez}\, f$ se numește *reziduul* lui f în z_0. Punctul z_0 se numește o *singularitate izolată* a lui f.



23.1.6. Dezvoltarea Laurent într-un cerc deschis punctat

Dezvoltarea Laurent: $f(z) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j(z - z_0)^j = \ldots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots$ cu

$$a_j = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z_0)^{j+1}}, \quad a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0} f(\zeta)\, d\zeta,$$

unde γ_0 este cercul $|\zeta - z_0| = r$, $0 < r < R$, parcurs în sens pozitiv.

Dacă $a_j = 0$ pentru toți j negativi, deci dacă partea principală este zero, atunci seria Laurent se reduce la seria de puteri și f este olomorfă în întregul cerc $|z - z_0| < R$ dacă $f(z_0) = a_0$. În acest caz z_0 este *singularitate aparentă* a lui f. Se numește *pol* de ordinul n al lui f dacă $a_{-n}\neq 0$, dar $a_{-n-1} = 0$, $a_{-n-2} = 0, \ldots$, deci dacă numai un număr finit de a_j cu j negativi diferă de zero. Atunci $|f(z)|$ devine arbitrar de mare pentru z suficient de aproape de z_0. Punctul z_0 este o *singularitate esențială* a lui f, dacă $a_j \neq 0$, pentru o infinitate de valori negative ale lui j. Pe baza teoremei lui Casorati-Weierstrass f se poate apropia oricît de mult de orice valoare complexă în orice vecinătate a lui z_0.

O funcție se numește *meromorfă* într-o mulțime deschisă M dacă este olomorfă în M în afara singularităților aparente sau a polilor.

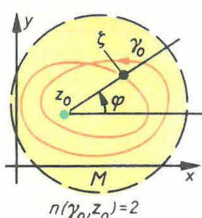
Exemplu. Funcția f reprezentată prin $f(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{z}{1+z^2} = \frac{1}{z+1} + \frac{z}{2i(z-i)} - \frac{z}{2i(z+i)}$ este meromorfă în întreg planul; are un pol de ordinul întîi în fiecare dintre punctele $z_1 = -1$; $z_2 = i$ și $z_3 = -i$.

Dacă multiplicăm o funcție meromorfă f avînt un pol de ordinul cel mult n în z_0 cu $(z - z_0)^n$, atunci ia naștere o serie de puteri în care a_{-1} este coeficientul termenului $a_{-1}(z-z_0)^{n-1}$. Prin derivare repetată obținem reziduul a_{-1} al funcției f

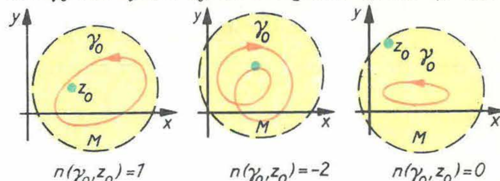
$$\underset{z_0}{\text{Rez}}\, f = a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0} \frac{d^{n-1}[(z - z_0)^n f(z)]}{dz^{n-1}}.$$

Dacă γ_0 este o curbă închisă în domeniul de definiție M a unei funcții meromorfe f și dacă z_0 este o singularitate izolată a lui f care nu se află pe γ_0, atunci pentru orice punct ζ

de pe γ_0 calculăm cu ajutorul relației $\zeta - z_0 = |\zeta - z_0| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$ unghiul φ (fig. 23.1.7) pe care îl face direcția din z_0 la ζ cu axa reală pozitivă. Acest unghi este determinat modulo $2k\pi$, dar k poate fi ales astfel încît φ să se schimbe continuu cînd ζ parcurge continuu γ_0. Dacă ζ după ce parcurge γ_0 se reîntoarce la punctul inițial, φ se modifică cu $2n\pi$. Numărul de rotații $n = n(\gamma_0, z_0)$ este un întreg și depinde de curba γ_0, de sensul de rotație și de poziția lui z_0 față de curbă (fig. 23.1.8). Dacă γ_0 înconjoară z_0, nu are punct dublu și este



23.1.7. Definirea numărului de rotații $n(\gamma_0, z_0)$.



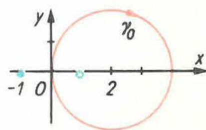
23.1.8. Exemple de numere de rotații.

parcursă în direcția pozitivă, atunci pe baza dezvoltării în serie Laurent avem $\int_{\gamma_0} f(\zeta)\,d\zeta = 2\pi i\, a_{-1}$. Generalizînd, obținem următoarea teoremă:

Teorema reziduurilor. $\int_{\gamma_0} f(\zeta)\,d\zeta = 2\pi i \sum_{z_0} n(\gamma_0, z_0) \cdot \operatorname{Rez} f$ *indică faptul că* γ_0 *este o curbă închisă în domeniul simplu conex M și f este olomorfă în M în afara unei singularități izolate* z_0. *Însumarea se face după* z_0.

Exemplu. Funcția meromorfă f reprezentată prin $f(z) = 1/(z+1) - 1/(z-1)$ are un pol atît în $z_1 = -1$ cît și în $z_2 = +1$. Într-o vecinătate a lui z_1, $-1/(z-1)$ este o funcție olomorfă și poate fi dezvoltată într-o serie de puteri P_1. În mod similar $1/(z+1)$ se poate dezvolta într-o vecinătate a lui z_2 într-o serie de puteri P_2. Din $f(z) = 1/(z+1) + P_1 = -1/(z-1) + P_2$ obținem $\operatorname{Rez}_{z_0=-1} f = +1$ și $\operatorname{Rez}_{z_0=1} f = -1$. Dacă γ_0 este un cerc cu centrul în $z = 2$ și raza 2 parcurs în direcția negativă (fig. 23.1.9), atunci $n(\gamma_0, -1) = 0$ și $n(\gamma_0, +1) = -1$; din teorema reziduurilor rezultă

$$\int_{\gamma_0}\left(\frac{1}{\zeta+1} - \frac{1}{\zeta-1}\right)d\zeta = 2\pi i\,[1\cdot 0 + (-1)(-1)] = 2\pi i.$$



23.1.9. Aplicarea teoremei reziduurilor la funcția $f(z) = \dfrac{1}{z+1} - \dfrac{1}{z-1}$

Funcții olomorfe de mai multe variabile complexe. O funcție definită pe o mulțime deschisă D în mulțimea $\mathbf{C}^n$ a tuturor n-uplurilor $(z_1, \ldots, z_n)$ de numere complexe se numește olomorfă dacă orice funcție f în care numai un z_i este variabil, celelalte fiind fixate, este olomorfă. Deci ele satisfac ecuațiile diferențiale $\dfrac{df}{d\bar{z}_1} = 0, \ldots, \dfrac{df}{d\bar{z}_n} = 0$. Mulțimea de puncte $\{(z_1, \ldots, z_n) : |z_j - z_j^0| \leqslant R_j,\ j = 1, 2, \ldots, n\}$ se numește *policilindru închis*, unde $(z_1^0, \ldots, z_n^0)$ este un punct fix ales în $\mathbf{C}^n$. Dacă aceasta se află în D, atunci în toate punctele interioare $\{(z_1, \ldots, z_n) : |z_j - z_j^0| < R_j,\ j = 1, \ldots, n\}$ funcția f poate fi reprezentată prin *formula integrală generalizată a lui Cauchy*. Suprafața determinată $\mathbf{S} : \{(z_1, \ldots, z_n) : |z_j - z_j^0| = R_j,\ j = 1, \ldots, n\}$ este o submulțime a frontierei policilindrului.

Formula integrală generalizată a lui Cauchy

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\mathbf{S}} \frac{f(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1)\ldots(\zeta_n - z_n)}\,d\zeta_1 \ldots d\zeta_n.$$

Dacă D este un domeniu, deci o mulțime deschisă conexă de puncte, atunci două funcții olomorfe în D sînt egale în orice punct al lui D dacă valorile coincid pe suprafața determinată a policilindrului situat în D.

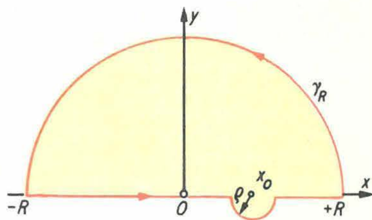
Funcţiile olomorfe pot fi reprezentate local ca funcţii limită a unei serii de puteri

$$\sum_{\nu_1, \ldots, \nu_n} c_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(z_1 - z_1^0)^{\nu_1} \ldots (z_n - z_n^0)^{\nu_n}.$$

Alte generalizări ale funcţiilor olomorfe obţinem folosind, în locul funcţiilor olomorfe de una sau mai multe variabile complexe, funcţii de variabile complexe care sînt soluţii ale unor ecuaţii cu derivate parţiale, ca de exemplu ecuaţia diferenţială a lui Vekua $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = A(z)w + B(z)\bar{w}$. Aici derivatele pot fi interpretate în sensul teoriei distribuţiilor.

23.2. Aplicaţii ale analizei complexe

Calculul integralelor reale. Anumite integrale definite $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ pot fi evaluate prin integrare pe contur. În primul rînd *valoarea principală a lui Cauchy* a unei astfel de integrale este definită ca $\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{+R} f(x)\,dx$. Ne imaginăm că partea axei reale între $-R$ şi $+R$ face parte dintr-o curbă închisă γ_R în domeniul de definiţie a unei funcţii meromorfe $f(z)$ ale cărei valori, cînd z este real, coincid cu cele ale funcţiei date $f(x)$ şi faptul că integrala curbilinie de-a lungul părţii rămase din γ_R are limita zero cînd $R \to \infty$. Dacă f are poli pe axa reală, unul fiind x_0, punctul x_0 poate fi exclus sau inclus în interiorul lui γ_R printr-un semicerc de raza ρ (mic) şi integrala de-a lungul conturului γ_R trebuie să fie calculată pentru $\rho \to 0$ (fig. 23.2.1). Pentru astfel de poli cu $\operatorname{Im} z_0 = 0$, factorul $\mp\pi i$ apare în locul lui $2\pi i$, care apare pentru polul z_0 cu partea imaginară pozitivă $\operatorname{Im} z_0 > 0$.



23.2.1. Contur de integrare

$$\int_{-\infty}^{\infty} [p_1(x)/p_2(x)]\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_0>0} \operatorname{Rez}_{z_0} [p_1(z)/p_2(z)] + \pi i \sum_{\operatorname{Im} z_0=0} \operatorname{Rez}_{z_0} [p_1(z)/p_2(z)],$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [p_3(x)/p_4(x)] \cos x\,dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} [p_3(x)/p_4(x)] \sin x\,dx =$$

$$= 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_0>0} \operatorname{Rez}_{z_0} \{[p_3(z)/p_4(z)] \exp iz\} + \pi i \sum_{\operatorname{Im} z_0=0} \operatorname{Rez}_{z_0} \{[p_3(z)/p_4(z)] \exp iz\}$$

demonstrează faptul că funcţiile definite în planul z prin $p_1(z)/p_2(z)$ şi $p_3(z)/p_4(z)$ au numai poli de ordinul întîi pe axa reală, gradul lui p_2 este mai mare decît cel al lui p_1 cel puţin cu 2, iar gradul lui p_4 este mai mare decît cel al lui p_3 cel puţin cu 1

Exemplul 1. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$. Dacă înlocuim în formula de mai sus $p_1(z) = 1$, $p_2(z) = 1 + z^2 = (z+i)(z-i)$, găsim $\operatorname{Rez}_{z_0=i} \frac{1}{1+z^2} = \lim_{z\to i} \frac{z-i}{1+z^2} = = \lim_{z\to i} \frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i} = \frac{-i}{2}$

Exemplul 2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \pi$. Teorema reziduurilor se aplică la o funcție meromorfă reprezentată prin $(1/z) \exp iz$, care are numai în $z_0 = 0$ un pol de ordinul întîi. Reziduul său în $z_0 = 0$ este

$$\operatorname{Rez}_{z_0} \left[\frac{\exp iz}{z}\right] = \lim_{z\to 0} \left[z\, \frac{\exp iz}{z}\right] = \lim_{z\to 0} \exp iz = 1.$$

Din $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\, dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \pi i \cdot 1$ obținem $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\, dx = 0$ și astfel se verifică afirmația de mai sus.

Legătura între analiza complexă și ecuațiile cu derivate parțiale. În cazul unei funcții olomorfe $f = u + iv$ avem prin definiție $\frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f(z)}{\partial x} + i\,\frac{\partial f(z)}{\partial y}\right] = 0, \frac{\partial f(z)}{\partial x} = -i\,\frac{\partial f(z)}{\partial y}$, respectiv $\frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = -i\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$. Aceste relații conduc la ecuațiile diferențiale Cauchy-Riemann.

Ecuații diferențiale Cauchy-Riemann	$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$	$-\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$

Exemplu. Funcția $f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$ este olomorfă; de aceea $u(x, y) = x^2 - y^2$ și $v(x, y) = 2xy$ este o soluție a ecuațiilor diferențiale Cauchy-Riemann.

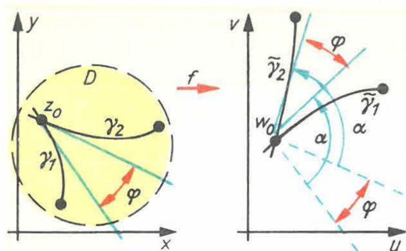
Teorema inversă. Dacă derivatele parțiale de ordinul întîi ale funcțiilor de variabile reale u și v există și satisfac ecuațiile diferențiale Cauchy-Riemann, atunci $f = u + iv$ este olomorfă.

Dacă derivăm prima ecuație diferențială Cauchy-Riemann în raport cu x și pe cea de-a doua în raport cu y, obținem *ecuația diferențială a lui Laplace* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Deoarece o funcție olomorfă f are derivate de orice ordin, există de asemenea derivatele parțiale de orice ordin ale lui u și v.

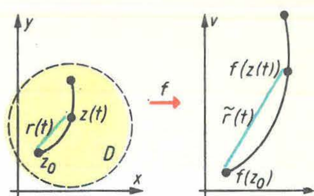
Partea reală u și partea imaginară v ale funcției olomorfe $f = u + iv$ satisfac ecuația diferențială a lui Laplace $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ și respectiv $\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$. Invers, într-un domeniu simplu conex D fiecărei funcții u care este o soluție în D a ecuației diferențiale Laplace îi corespunde o funcție v, unic determinată, abstracție făcînd de o constantă, care împreună cu u determină în D funcția olomorfă $f = u + iv$.

Exemplu. Partea reală $u(x, y) = x^2 - y^2$ a unei funcții olomorfe f definite prin $f(z) = z^2$ este o soluție a ecuației diferențiale a lui Laplace.

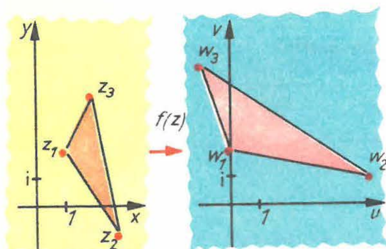
Reprezentări conforme. O funcție olomorfă f definită pe un domeniu D prin $w = f(z)$ (fig. 23.2.2) desemnează fiecărui punct z al lui D un punct w din planul W. Dacă γ se reprezintă prin $z = z(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, și dacă $\frac{dz(t)}{dt} = \rho(t) \exp(i\, \beta(t))$, atunci tangenta la curba în punctul $z(a)$ face unghiul $\beta(a)$ cu axa reală pozitivă. Dacă $\left.\frac{df(z)}{dz}\right|_{z=z_0} = \tilde{\rho} \exp(i\alpha)$, atunci, deoarece $\left.\frac{df(z(t))}{dt}\right|_{t=a} = \left.\frac{df(z)}{dz}\right|_{z=z_0} \cdot \left.\frac{dz(t)}{dt}\right|_{t=a} = \tilde{\rho}\rho(a) \exp[i\, \beta(a) + \alpha)]$, tangenta la curba imagine în punctul $f(z(a))$ face unghiul $\beta(a) + \alpha$ cu axa reală pozitivă, deci toate unghiurile sînt



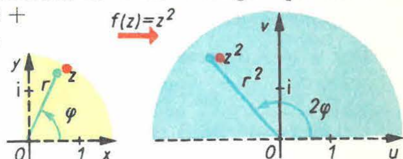
23.2.2. Transformarea conformă pe baza unei funcții olomorfe $w = f(z)$.



23.2.3. Raportul distanțelor în cazul transformărilor conforme



23.2.4. Transformarea unui triunghi pe baza lui $w = (1 + i)z + (1 - i)$.



23.2.5. Transformarea primului cadran în semiplanul superior prin $w = z^2$.

rotite cu α. În consecință unghiul φ dintre două curbe rămîne neschimbat. Din acest motiv transformarea f se numește *conformă* sau, mai precis, *direct conformă*, deoarece sensul de rotație este de asemenea păstrat. Dacă $r(t)$ este distanța dintre punctele $z(t)$ și z_0 și $\tilde{r}(t)$ este distanța între $f(z(t))$ și $f(z_0)$, atunci $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\tilde{r}(t)}{r(t)} = |f'(z_0)|$ dacă $f'(z_0) \neq 0$. Aceasta înseamnă că dacă $t \to 0$, distanțele sînt multiplicate de factorul $|f'(z_0)|$ (fig. 23.2.3).

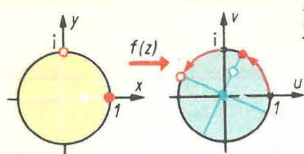
Exemplul 1. Funcția intreagă liniară $w = f(z) = az + b$ cu constantele complexe $a \neq 0$ și b transformă fiecare figură a planului z, de exemplu un triunghi într-o figură similară în în planul w (fig. 23.2.4).

Exemplul 2. Pentru $z = r \exp(i\varphi)$ avem $w=z^2=r^2 \exp(2i\varphi)$, funcția f definită prin $w=z^2$ transformă primul cadran ($\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$) a planului z în semiplanul superior ($\operatorname{Im} w > 0$) a planului w (fig. 23.2.5).

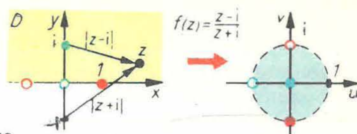
Exemplul 3. Dacă $w = f(z) = \exp(ic)\,\frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$, unde c este o constantă și z_0 este fixat cu $|z_0| < 1$, atunci

$$|w|^2 = |\exp(ic)|^2\,\frac{(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0)}{(1 - \bar{z}_0 z)(1 - z_0\bar{z})} = 1 \cdot \frac{z\bar{z} + z_0\bar{z}_0 - z_0\bar{z} - z\bar{z}_0}{1 + z_0\bar{z}_0 z\bar{z} - \bar{z}_0 z - z_0\bar{z}},$$

deoarece valoarea absolută $|\zeta|^2$ a unui număr complex ζ satisface $|\zeta|^2 = \zeta\bar{\zeta}$. Deci $|w| = 1$ dacă și numai dacă $z\bar{z}+z_0\bar{z}_0-z_0\bar{z}-z\bar{z}_0 = 1 + z_0\bar{z}_0 z\bar{z} - \bar{z}_0 z - z_0\bar{z}$, adică $|z|^2(1 - |z_0|^2) = 1 - |z_0|^2$ sau $|z| = 1$. Deoarece $|f(z_0)| = 0$, continuitatea argumentului arată că $|f(z)| < 1$ pentru toți $|z| < 1$. Invers, deoarece $z = \exp(-ic)\,\frac{w + \exp(ic)\,z_0}{1 + \exp(-ic)\,\bar{z}_0 w}$ fiecare w cu $|w| < 1$ este imaginea unui z unic determinat cu $|z| < 1$. Deci f aplică cercul deschis $|z| < 1$ în el însuși. Pe baza lui $\frac{df(z)}{dz} \neq 0$, transformarea este conformă. Dacă $z_0 = 0$, atunci $f(z) = \exp(ic)\,z$ este o rotație în jurul lui $z = 0$ cu unghiul c măsurat în radiani (fig. 23.2.6).



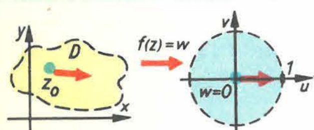
23.2.6. Rotația în jurul lui $z = 0$.



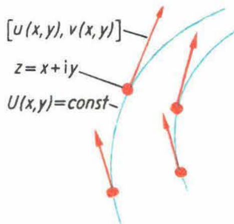
23.2.7. Transformarea semiplanului superior în cercul unitate prin $w = (z - i)/(z + i)$

Exemplul 4. Funcția olomorfă definită prin $w = f(z) = \dfrac{z - i}{z + i}$ în semiplanul superior $\operatorname{Im} z > 0$ îl aplică conform în cercul $|w| < 1$. Deoarece $|z - i| < |z + i|$ pentru toți z cu $\operatorname{Im} z > 0$, este adevărată afirmația $|w| < 1$. Imaginile tuturor z reali sînt puncte pe cercul unitate deoarece $|z - i| = |z + i|$. Imaginile punctelor 0, 1, ∞, -1 ale planului z sînt punctele -1, $-i$, 1, i ale planului w (fig. 23.2.7).

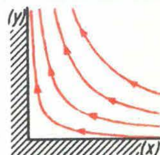
Teorema de reprezentare conformă a lui Riemann. Fie D o parte proprie simplu conexă a planului z complex. Fiind dat un punct z_0 din D și o direcție oarecare din z_0, există o transformare unică conformă a lui D în cercul unitate $|w| < 1$ printr-o funcție olomorfă $w = f(z)$ a cărei derivată nu se anulează, astfel încît z_0 trece în centrul $w = 0$ și direcția dată în z_0 trece în partea reală pozitivă a axei reale (fig. 23.2.8).



23.2.8. Teorema de reprezentare a lui Riemann



23.2.9. Liniile de curent $U(x, y) = \text{const}$



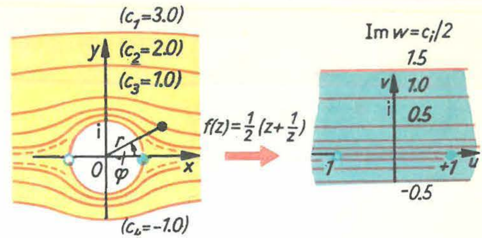
23.2.10. Flux într-un cot rectangular

Problemele fluxului de curent. Un flux staționar care este independent de timp, într-un domeniu al planului xOy poate fi caracterizat de vectorul de viteză $[u(x, y), v(x, y)]$ al unei particule care urmărește fluxul. Într-un flux fără surse și turbioane avem $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ și $-\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y}$, astfel încît componentele u și v formează o funcție olomorfă $f = u + iv$. Într-un domeniu simplu conex există întotdeauna o primitivă $F = U + iV$, care este olomorfă. Cu $U(x,y) = \text{const}$ ea descrie liniile de curent pe care se mișcă particulele. Vectorii vitezei sînt tangente la liniile de curent. Deoarece reprezentările conforme transformă funcțiile olomorfe în funcții olomorfe. ele constituie un mod convenabil de descriere a cursului liniilor.

Exemplul 1. În semiplanul superior al lui w cu $\operatorname{Im} w > 0$, liniile de curent sînt $\operatorname{Im} w = \text{const}$. Dacă $w = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, semiplanul este imaginea biunivocă a primului cadran în planul z (vezi exemplul de la transformări conforme). Aceasta înseamnă că hiperbolele $\operatorname{Im} w = 2xy = \text{const}$ sînt de asemenea linii de curent, anume cele ale fluxului într-un cot rectangular (fig. 23.2.10).

Exemplul 2. Funcția $w = (1/2)\,(z + 1/z)$ transformă cercul $|z| = 1$ în segmentul de la $+1$ la -1 în planul w, parcurs de două ori, astfel încît punctele $+1$, i, -1, $-i$ au imaginile $+1$, 0, -1, 0. Cu excepția acestui segment, planul w este imaginea exteriorului cercului unitate $|z| > 1$. Paralelele $\operatorname{Im} w = \text{const}$ sînt linii de curent. Originalele descriu curentul în jurul cercului unitate. Deoarece $z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $1/z = (1/r)\,(\cos\varphi - i\sin\varphi)$ și $w = (1/2)\,(r + 1/r)\cos\varphi + (i/2)\,(r - 1/r)\sin\varphi$, reiese că $(r - 1/r)\sin\varphi = c = \text{const}$ sînt ecuațiile liniilor de curent (fig. 23.2.11).

Fluxul de-a lungul contururilor se obține prin reprezentarea conformă a exteriorului unui cerc.

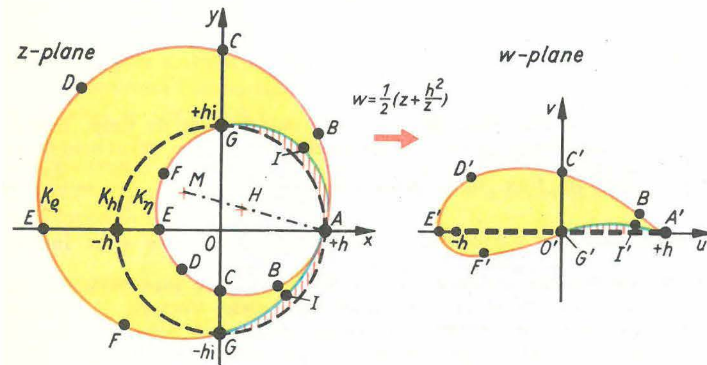


23.2.11. Transformarea conformă a liniilor de curent $(r - 1/r)\sin\varphi = \text{const}$ ale planului z în liniile de curent ale unui flux de curent paralel $\text{Im } w = \text{const}$ ale planului w

Exemplul 3. Dacă $h > 0$ (în figură $h = 2{,}75$), atunci $w = (1/2)(z + h^2/z)$ transformă cercul K_h al planului z cu raza $r = h$ și centrul $z = 0$ în segmentul cuprins între $-h$ și $+h$ pe axa reală al planului w (fig 23.2.12); din $z = h(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ urmează că $w = h\cos\varphi$. Dacă $\zeta = h^2/z$, atunci $w(\zeta) = (1/2)(h^2/z + h^2 \cdot z/h^2) = w(z)$, adică z și ζ au aceleași imagini în planul w. Cercul K_ρ cu centrul $M(-1, 1)$, trecînd prin $z = h$, trece de asemenea prin $z = -hi$ și are raza $\rho = \sqrt{(h+1)^2 + 1}$. Dacă $\zeta = h^2/z$, cercul K_ρ trece în alt cerc K_η cu centrul $H(h/(h+2), h/(h+2))$ cu raza $\eta = h\rho/(h+2)$. Cercurile K_ρ și K_η sînt transformate în așa-zisul *profil Jukovski.*

Mulțimea de puncte aflate între K_ρ și K_η trece în mulțimea de puncte mărginită de profilul lui Jukovski. În general perechi de puncte aflate între K_ρ și K_η trec într-unul și același punct. Mulțimea de puncte în formă de seceră aflată în primul cadran între K_h și K_η și cea aflată în cadranul patru între K_h și K_ρ trec în mulțimea de puncte dintre axa reală a planului w și partea G-I-A a profilului lui Jukovski. Imaginile cercurilor din jurul lui $(-1, +1)$ cu raza crescătoare $\rho_i = 5, 6, \ldots$ devin din ce în ce mai circulare pentru $|z|$ suficient de mari deoarece $|h^2/z| < \varepsilon$.

În general astfel de reprezentări sînt definite prin $a_0/z + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$

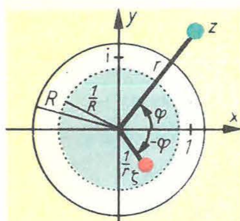


23.2.12. Transformări conforme ale cercurilor K_ρ și K_η ale profilului Jukovski prin $w = (1/2)(z + h^2/z)$

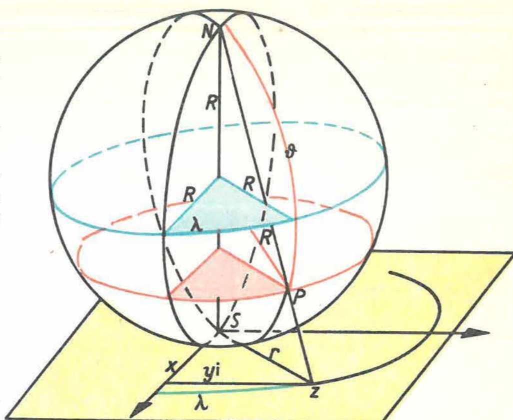
23.3. Curs complet de funcții de o variabilă complexă

Sfera numerelor a lui Riemann. Funcția olomorfă definită pentru $z \neq 0$ prin $\zeta = 1/z$ reprezintă conform exteriorul cercului $|z| > R$ pe cercul punctat $0 < |\zeta| < 1/R$, care nu conține punctul $\zeta = 0$ (fig. 23.3.1). Dar imaginile $\zeta = 1/(r\exp(-i\varphi))$ ale punctelor $z = r\exp(i\varphi)$ se apropie oricît de mult de punctul $\zeta = 0$ cînd r tinde la infinit. O idee intuitivă asupra punctului de la infinit în planul z se poate obține pe baza *sferei numerelor a lui Riemann* (fig. 23.3.2). Sfera este tangentă la planul z în $z = 0$, punctul de tangență de pe sferă fiind S. Dreapta care unește punctul N, diametral opus lui S, cu un punct z din plan, intersectează suprafața

sferei în punctul imagine P al lui z. Corespondența $z \to P$ este biunivocă iar punctul N este considerat ca fiind imaginea punctului de la infinit al planului z.

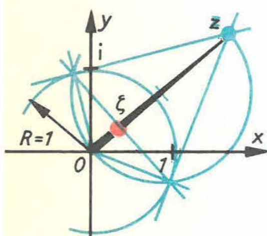


23.3.1. Transformarea exteriorului unui cerc de rază R în interiorul unui cerc de rază $1/R$ prin $\zeta = 1/z$

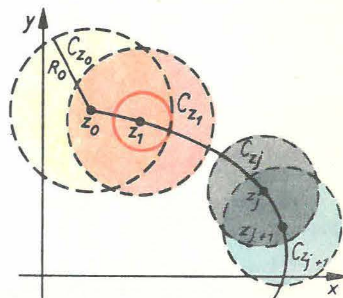


23.3.2. Sfera numerelor a lui Riemann; $r = 2/[R \sin \vartheta(1 - \cos \vartheta)]$.

Razele pe care se află punctul $z = r\exp(i\varphi)$ și imaginea $\zeta = 1/(r\exp(-i\varphi))$ trec una în alta prin simetria $Z = \bar{z}$. Aceasta este o *aplicație conformă indirectă* prin care sensul rotației de argument φ este inversat. *Transformarea prin raze reciproce* $\zeta = 1/Z = 1/\bar{z} = 1/(r\exp(i\varphi))$ este din această cauză indirect conformă. Punctul original și cel imagine se află pe aceeași rază. Cantitatea $1/r$ poate fi construită ușor (fig. 23.3.3).



23.3.3. Transformarea lui $\zeta = 1/z$ pe baza razelor reciproce; $|z| = r$ implică $|\zeta| = 1/r$ și $|\bar{z}| \cdot |\zeta| = 1$

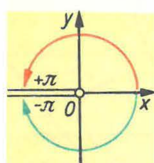


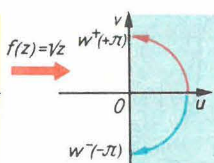
23.3.4. Prelungirea analitică

Suprafețe riemanniene. Dacă seriile de puteri $\mathbf{P}_{z_0} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(z - z_0)^j$ converg pe cercul $K_{z_0}: |z - z_0| < R_0$, atunci ele definesc o funcție olomorfă f. Dacă z_1 se află în K_{z_0}, atunci în concordanță cu $z - z_0 = (z - z_1) + (z_1 - z_0)$ seria de puteri $\mathbf{P}_{z_0}$ poate fi rearanjată într-o altă serie de puteri $\mathbf{P}_{z_1}$, care de asemenea converge și reprezintă aceeași funcție în intersecția $K_{z_0} \cap K_{z_1}$ (fig. 23.3.4). Dacă $\mathbf{P}_{z_1}$ converge nu numai în K_{z_0}, ci și în punctele z din cercul K_{z_1}, aflat parțial în exteriorul lui K_{z_0}, atunci spunem că f a fost prelungită analitic prin $\mathbf{P}_{z_1}$. Prin prelungirea analitică în toate modurie posibile obținem *funcția analitică completă* generată de seria de puteri $\mathbf{P}_{z_0}$. Se poate întîmpla ca ea să desemneze fiecărui punct al planului z exact o valoare a funcției $f(z)$, dar pot fi de asemenea puncte z pentru care obținem elemente diferite ale funcției depinzînd de drumul pe care ne apropiem. Pentru a evita această ambiguitate ne imaginăm că fiecare element al funcției este definit într-o copie individuală a planului, o față,astfel încît în astfel de puncte z funcția analitică completă este definită unic într-un număr corespunzător de fețe. Această înfășurătoare a planului sau a sferei este denumită *suprafața lui Riemann* **R**.

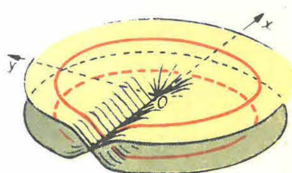
De exemplu, funcția definită de $w = \sqrt{z} = r\exp(i\varphi/2)$ poate fi prelungită analitic de la axa reală pozitivă în sensul creșterii lui φ sau în sensul negativ al descreșterii lui φ. În cazul axei reale negative obținem, ținînd seama de sensul de rotație, valorile $w^+(\pi) = r\exp(i\pi/2)$ și $w^-(-\pi) = r\exp(-i\pi/2)$ (fig. 23.3.5). După o rotație completă aceste valori se schimbă între ele deoarece $w^+(3\pi) = \exp(3i\pi/2) = r\exp(-i\pi/2)$ și $w^-(-3\pi) = r\exp(-3i\pi/2) = r\exp(i\pi/2)$.

Suprafața riemanniană a acestei funcții are prin urmare două fețe (fig. 23.3.6), care sînt tăiate de-a lungul axei reale negative și apoi încrucișate astfel încît frontiera superioară din fiecare față este legată de frontierea inferioară a celeilalte fețe. Atunci valorile funcției pe suprafața riemanniană trec continuu una în alta. În punctele de ramificație cele două fețe se unesc; din sfera z se vede că pentru $w = \sqrt{z}$ atît $z = 0$ cît și $z = \infty$ sînt puncte de ramificație.



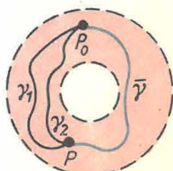


23.3.5. Valorile $w^+(\pi)$ și $w^-(\pi)$ ale funcțiilor $w = \sqrt{z}$ pe axa reală negativă



23.3.6. Suprafața riemanniană a funcției $w = \sqrt{z}$.

Uniformizare. O suprafață riemanniană **R** este o înfășurătoare a planului z sau a sferei z Pentru **R** poate fi construită o înfășurătoare universală. Dacă pornim de la un punct definit P_0 din **R**, toate punctele P ale înfășurătoarei universale sînt puncte finale ale tuturor curbelor posibile care au drept punct inițial P_0; dar două curbe γ_1 și γ_2 trebuie să ducă la același punct P numai dacă pot să treacă una în alta în **R**; altfel spus, dacă există o curbă de la P_0 la P care nu poate fi transformată continuu nici în γ_1 nici în γ_2, atunci ea definește un alt punct al înfășurătoarei universale. Exemplul unei coroane circulare ne arată că astfel de curbe $\overline{\gamma}$ pot apărea (fig. 23.3.7).



23.3.7. Două curbe γ_1 și γ_2 definesc același punct al înfășurătoarei universale dacă și numai dacă pot fi transformate continuu una în alta pe suprafața riemanniană **R**

Se poate arăta că înfășurătoarea universală este simplu conexă și că teorema de reprezentare a lui Riemann se poate generaliza în felul următor:

Generalizarea teoremei de reprezentare a lui Riemann. Înfășurătoarea universală a oricărei suprafețe riemanniene poate fi reprezentată biunivoc și conform în interiorul cercului unitate, respectiv întregul plan complex sau sfera riemanniană.

Deoarece o suprafață riemanniană este o parte a înfășurătoarei universale, fiecare suprafață riemanniană poate fi pusă într-o corespondență biunivocă cu o submulțime a sferei numerelor a lui Riemann. Aceasta se numește posibilitatea de uniformizare a suprafețelor riemanniene; un exemplu este uniformizarea suprafeței riemanniene a integrandului unei integrale eliptice (vezi integrale eliptice).

Distribuția valorilor. Pentru o funcție olomorfă f pot fi făcute afirmații despre frecvența cu care sînt atinse anumite valori. Un punct z_0 se numește ***multiplu de ordinul k*** asociat lui w_0 dacă $f(z_0) = w_0$ și $f'(z_0) = 0, \ldots, f^{(k-1)}(z_0) = 0$ dar $f^{(k)}(z_0) \neq 0$. Următoarea teoremă este valabilă:

Ținînd seama de multiplicitate, un polinom $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ cu $a_n \neq 0$ ia orice valoare complexă w_0 de exact n ori.

De exemplu polinomul $p(z) = z^2$ ia valoarea $w_0 = +1$ în $z = 1$ și $z = -1$; valoarea $w_0 = 0$ se atinge numai în $z = 0$, dar cu multiplicitate 2 deoarece $p'(z) = 2z$ și $p''(z) = 2$,

așa că $p'(0)=0$ și $p''(0)\neq 0$. O afirmație mai puternică decît teorema lui Casorati-Weierstrass este teorema lui Picard.

Teorema lui Picard. O funcție de o variabilă complexă avînd o singularitate esențială în z_0 ia în orice vecinătate a lui z_0 orice valoare complexă cu cel mult o excepție.

23.4. Integrale eliptice

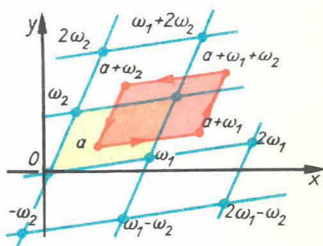
Funcția $\mathfrak{p}$ a lui Weierstrass. O funcție f definită pentru toți z este *periodică* avînd perioada ω dacă avem $f(z+\omega)=f(z)$pentru orice z. O funcție f este *dublu periodică* dacă există două numere complexe ω_1, ω_2 pentru care raportul ω_2/ω_1 nu este real, astfel încît toate numerele $\omega = k_1\omega_1 + k_2\omega_2$, cu k_1 și k_2 numere întregi arbitrare, determină mulțimea perioadelor, rețeaua perioadelor cu $f(z+\omega)=f(z)$ pentru orice z.

Fie a un număr complex oarecare. Atunci $a, a+\omega_1, a+\omega_1+\omega_2, a+\omega_2$ sînt vîrfurile *paralelogramului perioadelor*. O funcție f dublu periodică ia toate valorile în interiorul oricărui paralelogram al perioadelor. O *funcție eliptică* este o funcție meromorfă dublu-periodică. O funcție eliptică care nu este constantă trebuie să aibă poli. Dar suma reziduurilor în interiorul oricărui paralelogram al perioadelor este totdeauna zero. Deoarece integrala se ia de-a lungul frontierei unui astfel de paralelogram,

$$\oint f(z)\,dz = \int_a^{a+\omega_1} f(z)\,dz + \int_{a+\omega_1}^{a+\omega_1+\omega_2} f(z)\,dz + \int_{a+\omega_1+\omega_2}^{a+\omega_2} f(z)\,dz + \int_{a+\omega_2}^{a} f(z)\,dz = 0.$$

Prin substituirea lui z cu $z+\omega$ în a treia integrală vedem că valoarea ei este egală cu valoarea primei cu semnul schimbat și similar pentru cealaltă pereche. În acest caz se presupune că nu există poli pe frontieră, fapt care se poate obține printr-o alegere convenabilă a lui a. De aceea nu există integrale eliptice cu numai un pol de ordinul întîi în paralelogramul perioadelor (fig 23.4.1). Cea mai simplă funcție eliptică este funcția lui Weierstrass

$$\mathfrak{p}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{k_1,k_2}{}' \left[\frac{1}{(z-k_1\omega_1-k_2\omega_2)^2} - \frac{1}{(k_1\omega_1+k_2\omega_2)^2}\right];$$



23.4.1. Rețeaua perioadelor și paralelogramul perioadelor cu vîrful a

aici apostroful de la Σ indică faptul că termenul cu $k_1=0$, $k_2=0$ trebuie omis la însumare. Ea are un pol de ordinul doi cu reziduul 0 în fiecare nod al rețelei. Derivata sa $\mathfrak{p}'(z)$ este de asemenea eliptică și are zerourile de ordinul întîi în $\omega_1/2$, $\omega_2/2$ și $(\omega_1+\omega_2)/2$. Într-o vecinătate a lui $z=0$, dezvoltările în serie Laurent a funcției $\mathfrak{p}$ și ale derivatelor sale pot fi date în funcție de partea principală și o funcție olomorfă h:

$$\mathfrak{p}(z) = 1/z^2 + h(z), \quad \mathfrak{p}'(z) = -2/z^3 + h'(z), \quad \mathfrak{p}''(z) = 6/z^4 + h''(z).$$

Dezvoltarea în serie conduce la ecuațile diferențiale $\mathfrak{p}'^2 = 4\mathfrak{p}^3 - g_2\mathfrak{p} - g_3$ în care folosim următoarele relații:

$$g_2 = 60\sum_{k_1,k_2}{}' \frac{1}{(k_1\omega_1+k_2\omega_2)^4} \quad \text{și} \quad g_3 = 140\sum_{k_1,k_2}{}' \frac{1}{(k_1\omega_1+k_2\omega_2)^6}.$$

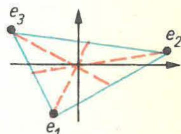
Problema inversă pentru o funcție $\mathfrak{p}$ cere în cazul unor valori date g_2 și g_3 cu $g_2^3 - 27g_3^2\neq 0$, găsirea unei rețele a perioadelor astfel încît cantitățile g_2 și g_3 asociate cu funcția $\mathfrak{p}$ să aibă valorile stabilite.

Dacă în N puncte $z_j, j = 1, \ldots, N$, în interiorul unui paralelogram al perioadelor părțile principale ale dezvoltării Laurent sînt alese astfel încît reziduurile satisfac $\sum_{j=1}^{N} a_{-1}^{(j)} = 0$, atunci există numai o singură funcție eliptică f avînd aceste părți principale, abstracție făcînd de o constantă. Ea este o combinație liniară a funcției $\mathfrak{p}$, derivatele sale și primitiva ζ a lui $-\mathfrak{p}$. Dar această funcție ζ nu este eliptică, deoarece are poli de ordinul întîi în nodurile rețelei și în rest este olomorfă.

Forma normală a lui Weierstrass în cazul unei integrale eliptice. Într-o integrală eliptică integrandul $\mathrm{rat}(z, w)$ este o funcție rațională de z și w; în acest caz w este rădăcina pătrată din polinomul $p_4(z)$ de gradul patru sau $p_3(z)$ de gradul trei în z, iar cele 4 sau 3 zerouri ale polinoamelor sînt simple, deci distincte. În planul z integrandul este determinat pînă la un factor ± 1 și este unic determinat numai pe suprafața riemanniană cu două fețe a lui $w = \sqrt{p(z)}$. Cele patru puncte de ramificare sînt cele patru zerouri e_1, e_2, e_3, e_4 ale lui $p_4(z)$, sau cele trei zerouri ale lui $p_3(z)$ împreună cu punctul $z = \infty$. Curba de integrare γ este situată pe suprafața lui Riemann. Prin substituția $z' = 1/(z-e_4)$, $p_4(z)$ se reduce la $p_3(z)$. Prin translație, putem face ca centrul de greutate al triunghiului (fig. 23.4.2), format din cele trei zerouri e_1, e_2, e_3 să se afle în $z = 0$. Atunci $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ și pe baza formulelor lui Vieta abstracție de o constantă, avem $p(z) = 4z^3 + c_1 z + c_2$. Astfel ajungem la *forma normală a lui Weierstrass* a integralei eliptice. Prin rezolvarea problemei inverse a funcției $\mathfrak{p}$ în cazul valorilor $-c_1$ și $-c_2$ pot fi găsite două perioade ω_1 și ω_2 într-un plan $\tilde{z}$ astfel încît rețeaua perioadelor să determine o funcție $\mathfrak{p}(\tilde{z})$ pentru care $g_2 = -c_1$ și $g_3 = -c_2$. Pentru $z = \mathfrak{p}(\tilde{z})$ fiecare paralelogram al perioadelor al planului $\tilde{z}$ este aplicat biunivoc pe o față iar întregul plan $\tilde{z}$ este aplicat pe înfășurătoarea universală a lui $w = \sqrt{p(z)}$.

Pe baza ecuației diferențiale pentru funcția $\mathfrak{p}$ și datorită faptului că $z = \mathfrak{p}(\tilde{z})$ avem $\mathfrak{p}'^2 = 4\mathfrak{p}^3 - g_2\mathfrak{p} - g_3 = w^2$. Deci $\mathfrak{p}'(z) = w$. Dacă $\tilde{\gamma}$ este imaginea inversă în planul $\tilde{z}$ a curbei γ din planul z, atunci integrala eliptică în planul z este

$$\int_\gamma \mathrm{rat}\,(z, w)\,\mathrm{d}z = \int_{\tilde{\gamma}} \mathrm{rat}\,(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')\,\mathfrak{p}'\,(\tilde{z})\,\mathrm{d}\tilde{z}.$$



23.4.2. Zerourile e_1, e_2, e_3 cu $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ ale lui $\mathfrak{p}(z) = 4z^3 + c_1 z + c_2$

Integrandul se numește de tipul I, II și III după cum integrandul este în planul $\tilde{z}$ o funcție eliptică fără poli, cu poli în care reziduurile sînt egale cu zero sau oarecare. În primul caz integrandul este o constantă în planul $\tilde{z}$, astfel încît $\mathrm{rat}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}') = \mathrm{const}/\mathfrak{p}'$ și $\mathrm{rat}\,(z, w) = \mathrm{const}/w$. Întrucît $w^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3$, obținem în cazul integralelor eliptice:

Integrale eliptice

$$\mathrm{const}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{w} = \mathrm{const}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}} \quad \text{(tip I)};$$

$$\int_\gamma \frac{z\,\mathrm{d}z}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}} \quad \text{(tip II)}; \qquad \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z - z_0)\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}} \quad \text{(tip III)}.$$

Forma Legendre a unei integrale eliptice apare în cazul în care avem $w^2 = (1-z^2)(1-k^2z^2)$ în loc de $w^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3$; k se numește *coeficient*.

24. Geometrie analitică în spaţiu

Obiectul geometriei analitice în spaţiu este de a asocia punctelor din spaţiu numere reale şi invers. Curbele şi suprafeţele sînt reprezentate de ecuaţii iar construcţiile geometrice pot fi exprimate prin metode algebrice şi analitice. Deoarece algebra şi analiza au pus bazele geometriei analitice, aceasta s-a dezvoltat mai tîrziu. Întemeietorul geometriei analitice este socotit filozoful René DESCARTES (1596—1650) şi juristul francez Pierre de FERMAT (1601—1665). Filozoful german Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646—1716) şi matematicianul şi fizicianul englez Isaac NEWTON (1642—1727) au trăit cam în aceeaşi perioadă şi sînt întemeietorii calculului diferenţial şi integral.

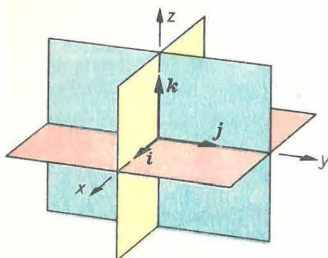
24.1. Sisteme de coordonate

Coordonate carteziene ortogonale

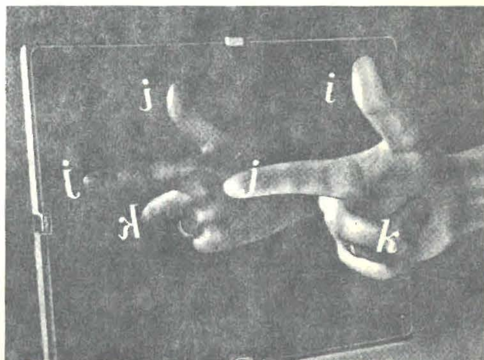
Determinarea unui sistem. Cu ajutorul sistemelor de coordonate se poate arăta legătura dintre puncte şi numere. Pentru determinarea sistemului cartezian, întîi alegem un punct în spaţiu drept *origine*. Prin acesta se construiesc trei axe perpendiculare două cîte două între ele. Ele se numesc *axe de coordonate* şi în general se notează cu Ox, Oy, Oz, denumirile lor cele mai des întîlnite fiind de axa *absciselor*, axa *ordonatelor* şi axa *cotelor*. Ele formează un triedru. Feţele triedrului sînt *planele de coordonate* xOy, yOz şi xOz. Cele trei plane de coordonate împart spaţiul în opt regiuni, *octante*.

Orientarea. Versorii axelor de coordonate sînt: **i** pe axa Ox, **j** pe axa Oy şi **k** pe axa Oz. Aceşti versori orientează fiecare axă de coordonate şi deci în general *orientează* sistemul de coordonate (fig. 24.1.1).

Partea axei de coordonate care începe în origine şi care are direcţia versorului se numeşte *axa pozitivă*; cealaltă *negativă*. Două axe pozitive determină un cadran principal, iar cele trei cadrane principale determină octantul principal.



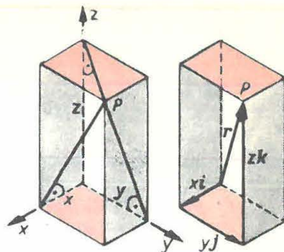
24.1.1. Sistem de coordonate carteziene, orientat drept



24.1.2. În oglindă orientarea se inversează

Pe direcțiile **i**, **j**, **k** se aranjază degetul mare, respectiv arătător și mijlociu. Dacă reușim acest lucru cu mîna dreaptă, atunci spunem că sistemul este *orientat drept*, altfel este *orientat stîng*. Prin inversarea unei axe sau prin imagine reflectată într-o oglindă, un sistem drept se transformă într-unul stîng și invers (fig. 24.1.2).

Puncte în spațiu. Fiind dat un sistem de coordonate carteziene, oricărui punct în spațiu îi putem asocia un triplet de numere și invers, oricărui triplet de numere un punct. Cele trei numere pe care le asociem punctului se numesc *coordonatele carteziene* ale punctului (24.1.3). Pentru a stabili coordonatele unui punct P, ducem perpendiculare din punct pe cele trei axe și măsurăm lungimile orientate ale proiecțiilor în unități egale cu lungimea versorului. Valorile obținute sînt coordonatele x, y, z ale lui P, pe care le folosim și în notația vectorială. Pornind din origine, vectorul $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ are vîrful în P. Lungimea lui este distanța de la origine la punct, $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, conform teoremei lui Pitagora.



24.1.3. Coordonatele carteziene rectangulare ale unui punct din spațiu. Vectorul $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ desemnează punctul P

Exemplu. Fie coordonatele punctului P, $x = 3$, $y = 4$, $z = 12$. Distanța de la origine la punctul P este

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13.$$

Coordonate oblice

Sistemul de coordonate oblice este generalizarea celui rectangular. Pentru determinarea sa sînt suficiente: originea, trei drepte care nu sînt coplanare și versorii. Coordonatele punctului P se numesc în acest caz *coordonate oblice*. Ele se determină trasînd din punctul P paralele la axele de coordonate care vor forma cu axele un paralelipiped. Mărimea laturilor orientate ale paralelipipedului aflate pe axe sînt coordonatele oblice ale punctului P. Vectorul $\overline{OP}$ va avea tot expresia $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, dar distanța de la origine la punct nu va mai fi $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ deoarece teorema lui Pitagora nu mai este valabilă pentru un triunghi oarecare.

Coordonate omogene

În *geometria proiectivă* se cere ca două drepte din plan să aibă totdeauna un punct de intersecție. Astfel punctul de intersecție a două drepte paralele este socotit punctul de la infinit sau punctul impropriu. Pînă acum am constatat că geometria analitică nu concepe această noțiune. O vom introduce cu ajutorul coordonatelor omogene. Fie x', y', z' coordonatele carteziene ale punctului P. Valorile x, y, z, t care apar în egalitățile de mai jos se numesc *coordonatele omogene*:

$$x' = \frac{x}{t}, \quad y' = \frac{y}{t}, \quad z' = \frac{z}{t}.$$

Aceste numere sînt prin definiție finite și nu toate zero în același timp. Ele nu sînt unic determinate. Dacă x, y, z, t sînt coordonatele omogene ale punctului P, atunci pentru orice $\rho \neq 0$ valorile ρx; ρy; ρz; ρt sînt tot coordonate omogene ale aceluiași punct. Reciproc, în cazul coordonatelor omogene x, y, z, t, pentru $t \neq 0$, există un singur triplet de coordonate, paralele. Transformarea inversă se face trecînd la x/t, y/t, z/t.

Exemplu. Punctul $P(2, 3, -1)$ are coordonatele omogene $x = 2s$, $y = 3s$, $z = -s$, $t = s$, pentru orice $s \neq 0$.

Transformînd coordonatele carteziene în coordonate omogene, putem rezolva anumite probleme care altfel nu au soluție. Fie $y'=ax'+b_1$ și $y'=ax'+b_2$, cu $b_1 \neq b_2$, două drepte paralele care nu au nici un punct de intersecție în coordonate carteziene. În coordonate omogene ecuațiile dreptelor vor fi următoarele: $y = ax + b_1t$ și $y = ax + b_2t$.

Acest sistem are o infinitate de soluții: $x = \rho$, $y = a\rho$ și $t = 0$. Tripletul $\rho, a\rho, 0$ $(\rho \neq 0)$ reprezintă coordonatele omogene ale unui punct al planului $x'O'y'$, punctul de la infinit, care este comun ambelor drepte.

Coordonate sferice

Un punct oarecare P poate fi determinat, în loc de coordonate carteziene, prin:

1. distanța $r \geqslant 0$ a punctului P față de originea O,
2. unghiul φ format de $\overline{OP}$ cu planul xOy $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant +\dfrac{\pi}{2}\right)$,
3. unghiul λ format de proiecția lui $\overline{OP}$ pe planul xOy cu axa pozitivă Ox $(0 \leqslant \lambda < 2\pi)$.

Valorile r, φ, λ reprezintă *coordonatele sferice* ale punctului P sau *coordonatele polare în spațiu* (fig. 24.1.4).

Fiecărui triplet de coordonate sferice îi corespunde un punct, dar nu oricărui punct îi corespunde un triplet, ca de exemplu în cazul cînd P se află pe Oz sau în origine. În primul caz, unic determinați sînt r și $\varphi\left(= \pm\dfrac{\pi}{2}\right)$, iar în al doilea caz $r = 0$, λ și respectiv φ sînt nedefiniți.

Relațiile între coordonatele carteziene și cele sferice. Din figură reies următoarele relații:

$$x = \overline{OP'}\cos\lambda, \quad y = \overline{OP'}\sin\lambda, \quad \overline{OP'} = r\cos\varphi.$$

Deci coordonatele carteziene se pot calcula din cele sferice astfel:

$$x = r\cos\varphi\cos\lambda,\quad y = r\cos\varphi\sin\lambda,\quad z = r\sin\varphi.$$

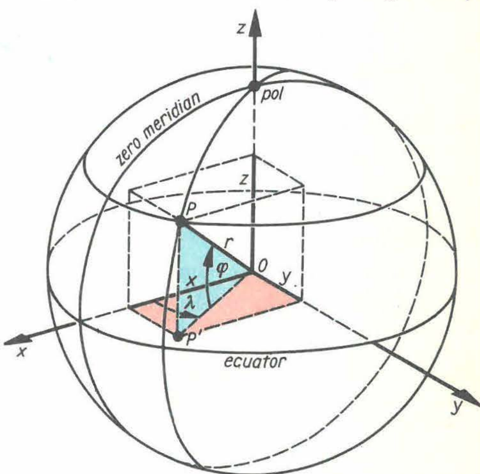
De aici rezultă

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\lambda, \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\lambda,$$

$$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \operatorname{tg}\varphi,$$

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin\lambda}{\cos\lambda} = \operatorname{tg}\lambda.$$



24.1.4. Coordonatele sferice ale unui punct din spațiu

Formulele care fac trecerea de la coordonarele carteziene rectangulare la cele sferice sînt următoarele:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (\text{pentru } x^2 + y^2 \neq 0),$$

$$\lambda = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \quad (\text{pentru } x > 0,\ y > 0),$$

$$\lambda = \pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \quad (\text{pentru } x < 0),$$

$$\lambda = 2\pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \quad (\text{pentru } x > 0,\ y < 0).$$

Avem

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ pentru $x^2 + y^2 = 0$, $z > 0$; respectiv $\lambda = \frac{\pi}{2}$ pentru $x = 0$, $y > 0$,

$\varphi = -\frac{\pi}{2}$ pentru $x^2 + y^2 = 0$, $z < 0$, $\lambda = \frac{3\pi}{2}$ pentru $x = 0$, $y < 0$.

φ nedefinit pentru $x^2 + y^2 = 0$, $z = 0$; λ nedefinit pentru $x = 0$, $y = 0$.

Peste tot arctg are valoare principală.

Exemplu. Care sînt coordonatele sferice ale punctului $P(3, -4, -12)$?

Avem $r = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = 13$,

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{-12}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \operatorname{arctg} \frac{-12}{5} = -67{,}38°,$$

$$\lambda = \operatorname{arctg} \frac{-4}{3} = -53{,}13° \quad \text{sau} \quad \lambda = 360° - 53{,}13° = 306{,}87°.$$

Deci coordonatele sferice ale punctului P sînt $r = 13$, $\varphi = -67{,}38°$ și $\lambda = 306{,}87°$.

Coordonate cilindrice

Pentru probleme cu suprafețe cilindrice se introduc *coordonate cilindrice* (fig. 24.1.5). Un punct oarecare P din spațiu poate fi definit prin:

1) distanța $r \geqslant 0$ a punctului P' față de originea O, unde $\overline{OP'}$ este proiecția lui $\overline{OP}$ pe planul xOy,

2) unghiul φ, pe care-l face $\overline{OP'}$ cu axa pozitivă Ox ($0 \leqslant \varphi < 2\pi$),

3) distanța orientată z a punctului P față de planul xOy ($-\infty < z < +\infty$).

Fiecărui triplet de coordonate cilindrice îi corespunde un punct P. Reciproca nu este adevărată, de exemplu în cazul în care P se află pe axa Oz. Pentru punctele de pe Oz avem $r = 0$ și z unic determinat, pe cînd φ poate să ia orice valoare. Coordonatele cilindrice se folosesc de exemplu în fizică la studierea corpurilor cilindrice, la calcularea momentului de inerție al unui cilindru sau la propagarea căldurii în corpuri cilindrice.

Coordonatele cilindrice r, φ, z se compun din coordonatele polare ale lui P' în planul xOy și coordonata carteziană z a lui P. Alăturat sînt date și formulele inverse; φ este definit numai în cazul în care $x^2 + y^2 \neq 0$.

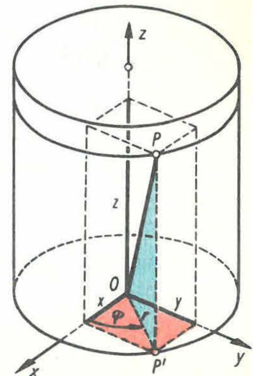
$x = r\cos\varphi$	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
$y = r\sin\varphi$	$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$
$z = z$	$z = z$

Exemplu. Fie $r = 3$, $\varphi = -30°$, $z = 1$ coordonatele cilindrice ale punctului P. Coordonatele carteziene vor fi:

$$x = 3 \cdot \cos(-30°) = 3 \cdot \cos 30° = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \approx 2{,}598,$$

$$y = 3 \cdot \sin(-30°) = -3 \cdot \sin 30° = -\frac{3}{2} = -1{,}5,$$

$$z = 1.$$



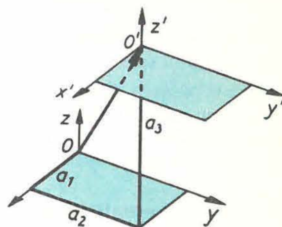
24.1.5. Coordonatele cilindrice ale unui punct din spațiu

Transformări de coordonate

Fie două sisteme de coordonate (se prezintă două sisteme de coordonate carteziene rectangulare orientate spre dreapta care au aceeași unitate de măsură) care nu se suprapun. Problema este de a găsi o relație între coordonatele x, y, z ale punctului P în primul sistem de coordonate și coordonatele x^*, y^*, z^* în celălalt sistem. O astfel de relație se numește *transformare de coordonate*. Vom deosebi trei cazuri: translația, rotația și o compunere între ele.

Translația. Cele două sisteme de coordonate se găsesc astfel așezate în plan încît prin deplasarea unui sistem în așa fel încît axele paralele să rămînă paralele cu ele însele și de același sens, cele două sisteme să se suprapună (fig. 24.1.6)

Dacă originea O^* a celui de-al doilea sistem are față de primul sistem, care are originea O, coordonatele a_1, a_2, a_3, atunci între coordonatele x, y, z ale punctului P față de primul sistem și coordonatele x^*, y^*, z^* ale aceluiași punct față de cel de-al doilea sistem au loc relațiile alăturate:



24.1.6. Translația sistemului de coordonate

$x = x^* + a_1$	$x^* = x - a_1$
$y = y^* + a_2$	$y^* = y - a_2$
$z = z^* + a_3$	$z^* = z - a_3$

Exemplu. Punctele ale căror coordonate carteziene satisfac ecuația $3x + 2y - z = 5$, se află pe un plan. Care este ecuația acestui plan față de un nou sistem de coordonate a cărui origine are față de primul sistem, coordonatele $a_1 = -5$, $a_2 = 2$, $a_3 = 7$? Avem $x = x^* - 5$; $y = y^* + 2$, $z = z^* + 7$ deci $3x + 2y - z = 5$ se va transforma după înlocuire în $3x^* + 2y^* - z^* = 5 + 15 - 4 + 7$.

Deci in funcție de noul sistem de coordonate ecuația planului va fi

$$3x^* + 2y^* - z^* = 23.$$

Rotația. Cele două sisteme de coordonate au același punct drept origine ($O^* = O$), dar direcțiile axelor sînt diferite. În acest caz fiecare axă a unui sistem, face cu fiecare axă a celui de-al doilea sistem un unghi. Valorile cosinusurilor acestor unghiuri le vom nota cu a_{ik}, unde i și k iau valorile 1, 2 și 3. Primul indice se referă la sistemul $Oxyz$ iar cel de-al doilea la sistemul $Ox^*y^*z^*$. Indicele 1 ne indică axa x sau x^*, indicele 2 pe y sau y^* iar 3 pe z sau z^*. Deci vom avea următoarele relații:

$$a_{11} = \cos(x, x^*), \quad a_{12} = \cos(x, y^*), \quad a_{13} = \cos(x, z^*),$$
$$a_{21} = \cos(y, x^*), \quad a_{22} = \cos(y, y^*), \quad a_{23} = \cos(y, z^*),$$
$$a_{31} = \cos(z, x^*), \quad a_{32} = \cos(z, y^*), \quad a_{33} = \cos(z, z^*).$$

Coordonatele unui punct oarecare se vor transforma după una din următoarele relații:

$x = a_{11}x^* + a_{12}y^* + a_{13}z^*$	$x^* = a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z$
$y = a_{21}x^* + a_{22}y^* + a_{23}z^*$	$y^* = a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z$
$z = a_{31}x^* + a_{32}y^* + a_{33}z^*$	$z^* = a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z$

a_{ik} se numesc *cosinusuri directoare*. Aceste ecuații de transformare le vom deduce și discuta mai tîrziu.

Privind aceste relații vedem că atît în relațiile din stînga cît și în relațiile din dreapta coeficienții sînt aceiași, numai într-o altă ordine. În matricea coeficienților se inversează liniile cu coloanele.

Compunerea dintre o rotație și o translație. Sistemele de coordonate în acest caz nu au o origine comună, și în acest caz ele nu coincid printr-o translație în care menținem axele

paralele cu ele însele. În acest caz între coordonate sint următoarele relații de transformare:

$x = a_1 + a_{11}x^* + a_{12}y^* + a_{13}z^*$	$x^* = a_{11}(x - a_1) + a_{21}(y - a_2) + a_{31}(z - a_3)$
$y = a_2 + a_{21}x^* + a_{22}y^* + a_{23}z^*$	$y^* = a_{12}(x - a_1) + a_{22}(y - a_2) + a_{32}(z - a_3)$
$z = a_3 + a_{31}x^* + a_{32}y^* + a_{33}z^*$	$z^* = a_{13}(x - a_1) + a_{23}(y - a_2) + a_{32}(z - a_3)$

Toate transformările care se bazează pe relații liniare care formează sisteme cu soluții unice se numesc *transformări afine*.

Toate aceste relații de transformare se interpretează ca formule de schimbare a coordonatelor unui punct într-un spațiu fixat printr-o mișcare (translație, rotație sau compunerea lor) a sistemului de coordonate. Ele mai pot fi interpretate ca reprezentări analitice ale mișcării spațiului menținînd sistemul de coordonate fixat.

Derivarea ecuațiilor de rotație. Sistemele de ecuații pentru rotație se pot deduce în felul următor. Vectorul de poziție $\mathbf{r}$ al punctului P în primul sistem este $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ iar în cel de-al doilea $\mathbf{r} = x^*\mathbf{i}^* + y^*\mathbf{j}^* + z^*\mathbf{k}^*$.

Vom scrie pe $\mathbf{r}$ în primul sistem sub forma $\mathbf{r} = |\mathbf{r}| \left(\frac{x}{|\mathbf{r}|}\mathbf{i} + \frac{y}{|\mathbf{r}|}\mathbf{j} + \frac{z}{|\mathbf{r}|}\mathbf{k}\right)$ și analizăm cazuri particulare, adică el să fie egal în al doilea sistem pe rînd cu $\mathbf{i}^*$, $\mathbf{j}^*$, $\mathbf{k}^*$. Dacă $\mathbf{r}$ este egal cu $\mathbf{i}^*$, atunci $x^* = 1$, $y^* = z^* = 0$ și vom avea conform definiției $\frac{x}{|\mathbf{r}|} = a_{11}$, $\frac{y}{|\mathbf{r}|} = a_{21}$, $\frac{z}{|\mathbf{r}|} = a_{31}$.

Procedăm în mod analog pentru $\mathbf{j}^*$ și $\mathbf{k}^*$. Deci vom obține următoarele relații:

$$\mathbf{i}^* = a_{11}\mathbf{i} + a_{21}\mathbf{j} + a_{31}\mathbf{k}$$
$$\mathbf{j}^* = a_{12}\mathbf{i} + a_{22}\mathbf{j} + a_{32}\mathbf{k}$$
$$\mathbf{z}^* = a_{13}\mathbf{i} + a_{23}\mathbf{j} + a_{33}\mathbf{k}$$

Înlocuind aceste relații în $\mathbf{r} = x^*\mathbf{i}^* + y^*\mathbf{j}^* + z^*\mathbf{k}^*$ și comparînd rezultatul cu $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, obținem pentru rotație sistemul din partea de mai sus din stînga. La fel îl putem deduce și pe cel din partea dreaptă.

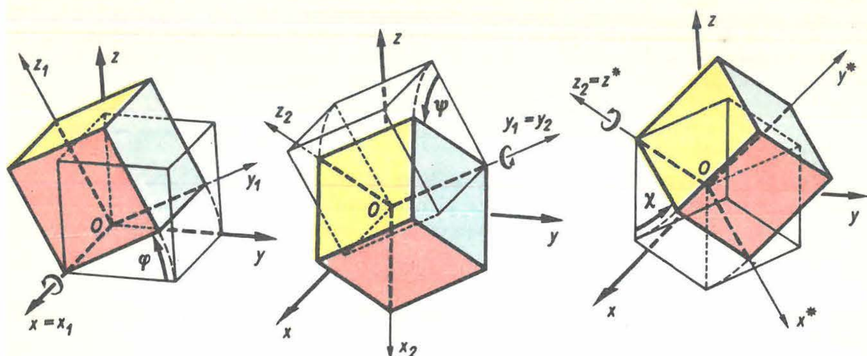
Relații între cosinusurile directoare. Aceste relații se deduc din expresiile lui $\mathbf{i}^*$, $\mathbf{j}^*$, $\mathbf{k}^*$ care sînt versorii axelor, $|\mathbf{i}^*| = |\mathbf{j}^*| = |\mathbf{k}^*| = 1$, și deoarece sînt perpendiculari unul pe altul, se obține

$$\mathbf{i}^*\mathbf{j}^* = \mathbf{j}^*\mathbf{k}^* = \mathbf{k}^*\mathbf{i}^* = 0.$$

Relații între cosinusurile directoare	$a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1$	$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} = 0$
	$a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1$	$a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} = 0$
	$a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1$	$a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = 0$

Ținînd seama de faptul că vectorii $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ sint versorii axelor, perpendiculari între ei, putem obține noi relații între aceștia; se poate arăta că există numai *șase relații distincte între cosinusurile directoare*. Deoarece între cele nouă cosinusuri directoare există șase relații distincte, urmează că *numai trei mărimi* sînt suficiente pentru a determina o rotație. Acest fapt a fost demonstrat de Arthur CAYLEY (1821–1895). Pe baza acestui fapt putem caracteriza o rotație prin trei unghiuri sau printr-un unghi și o axă.

Rotația sistemului de coordonate. Un sistem cartezian de coordonate cu axele x, y, z se suprapune peste alt sistem de coordonate cu axele x^*, y^*, z^* care are aceeași origine, printr-o rotație în jurul axei Ox cu unghiul φ, în jurul axei Oy cu unghiul ψ, iar în jurul axei Oz cu unghiul χ (fig. 24.1.7).



24.1.7. Rotația sistemului de coordonate

Relația dintre cosinusurile directoare a_{ik} și unghiurile φ, ψ, χ			
a_{ik}	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
$i = 1$	$\cos\psi\cos\chi$	$-\cos\psi\sin\chi$	$\sin\psi$
$i = 2$	$\cos\varphi\sin\chi + \sin\varphi\sin\psi\cos\chi$	$\cos\varphi\cos\chi - \sin\varphi\sin\psi\sin\chi$	$-\sin\varphi\cos\psi$
$i = 3$	$\sin\varphi\sin\chi - \cos\varphi\sin\psi\cos\chi$	$\sin\varphi\cos\chi + \cos\varphi\sin\psi\sin\chi$	$\cos\varphi\cos\psi$

Exemple de rotație. Pe suprafața unei sfere al cărei centru este originea unui sistem de coordonate se află punctul $P(-4;\ 8,\ -16)$. Sfera se rotește în jurul axei Ox cu 30°, în jurul lui Oy cu 45° iar în jurul lui Oz cu 60°. Sensul de rotație este cel al acelor de ceasornic. Ce coordonate va avea punctul P? Pentru a rezolva problema, presupunem că sfera rămîne fixă, dar se rotesc axele de coordonate în sens invers sensului de rotație al acelor de ceasornic. Deci unghiurile de rotație vor fi $\varphi = 30°$, $\psi = 45°$, $\chi = 60°$. Cosinusurile directoare vor fi:

$$a_{11} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \qquad a_{12} = -\frac{\sqrt{6}}{4}, \qquad a_{13} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$a_{21} = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8}, \qquad a_{22} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{8}, \quad a_{23} = -\frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$a_{31} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{8}, \qquad a_{32} = \frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{2}}{8}, \quad a_{33} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Noile coordonate ale punctului P vor fi:

$$x^* = \frac{\sqrt{2}}{4}(-4) + \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8}\right)\cdot 8 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{8}\right)\cdot(-16) = 6 - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{6};\ x^* \approx 3{,}97;$$

$$y^* = -\frac{\sqrt{6}}{4}\cdot(-4) + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{8}\right)\cdot 8 + \left(\frac{1}{4} + \frac{3\cdot\sqrt{2}}{8}\right)\cdot(-16) = -4 - 6\sqrt{2} + 2\sqrt{3},$$

$$y^* \approx -9{,}02;$$

$$z^* = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(-4) - \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot 8 + \frac{\sqrt{6}}{4}\cdot(-16) = -4\sqrt{2} - 4\sqrt{6}, \quad z^* \approx -15{,}5.$$

Vom da mai jos o teoremă pe care nu o vom demonstra dar care are o mare importanță în mecanică, teorema lui Euler.

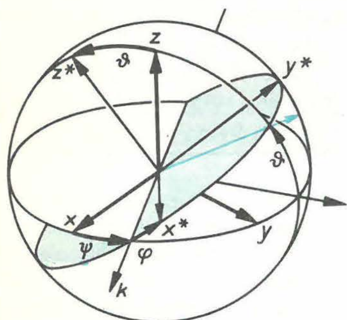
Fie două sisteme de coordonate care au aceeași origine, axele avînd alte direcții. Întotdeauna se poate determina o dreaptă care trece prin origine astfel încît prin rotație în jurul acestei drepte sistemul de coordonate să se suprapună peste celălalt.

Aplicată în cazul corpurilor rigide, această teoremă se poate formula în felul următor:

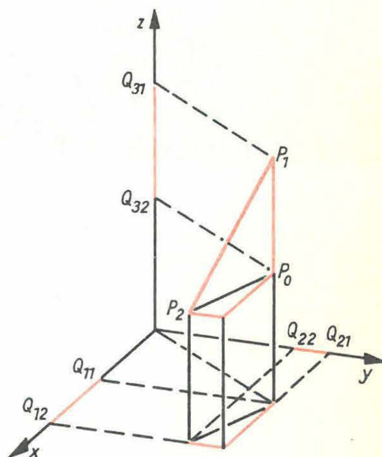
Pentru un corp rigid, avînd un punct O ce trebuie să rămînă fix față de un sistem de referință, se poate totdeauna găsi o axă care trece prin punctul O astfel încît trecerea de la o poziție inițială oarecare într-o poziție finală oarecare, în condițiile date, să se facă printr-o rotație în jurul acestei axe.

Este imposibilă mișcarea unei sfere cu centrul fix în spațiu, astfel încît la sfîrșitul mișcării poziția tuturor punctelor de pe suprafață să fie diferită de poziția lor inițială.

Orice sistem de coordonate $Oxyz$ poate fi făcut să coincidă cu un alt sistem de coordonate $Ox^*y^*z^*$, cu aceeași origine, printr-o rotație de unghiuri ψ, φ și ϑ (fig. 24.1.8), unde k este dreapta de intersecție a planelor Oxy și $O^*x^*y^*$. Aceste unghiuri se numesc *unghiurile lui Euler*.



24.1.8. Unghiurile lui Euler ψ, φ, ϑ



24.2.1. Componentele unui segment în spațiu

24.2. Elemente liniare

Segment

Generalități. Mulțimea tuturor punctelor între P_1 și P_2 de pe dreapta care unește două puncte P_1 și P_2 în spațiu se numește *segment* și se notează cu $\overline{P_1P_2}$. Planele paralele duse prin P_1 și P_2 la planele de coordonate ale sistemului cartezian vor intersecta în punctele Q_{11} și Q_{12} pe Ox, în Q_{21} și Q_{22} pe Oy și Q_{31} și Q_{32} pe Oz (fig. 24.2.1). Segmentele $\overline{Q_{11}Q_{12}}$, $\overline{Q_{21}Q_{22}}$, $\overline{Q_{31}Q_{32}}$ sînt *componentele* segmentului $\overline{P_1P_2}$. Dacă punctele P_1 și P_2 au coordonatele (x_1, y_1, z_1) și respectiv (x_2, y_2, z_2), componentele vor avea lungimile x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1 Acestea se numesc *coordonatele* segmentului $\overline{P_1P_2}$.

Lungime. În sistemul de coordonate carteziene, *lungimea* segmentului $\overline{P_1P_2}$ se determină cu ajutorul teoremei lui Pitagora în triunghiul dreptunghic:

$$P_1(x_1, y_1, z_1),\ P_2(x_2, y_2, z_2),\ P_3(x_3, y_3, z_3).$$

Lungimea segmentului $\overline{P_1P_2}$ o notăm cu $|P_1P_2|$. Lungimea segmentului $\overline{P_1P_2}$ este totodată distanța dintre punctele P_1 și P_2.

Lungimea unui segment $|P_1P_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$

Exemplu. Fie punctele $P_1(5, 2, -1)$ și $P_2(-3, -2, 0)$. Care este lungimea segmentului $\overline{P_1P_2}$?

$$|P_1P_2| = \sqrt{(-3-5)^2 + (-2-2)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{8^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{64 + 16 + 1} = \sqrt{81} = 9$$

$\overline{P_1P_2}$ are lungimea egală cu 9.

Dacă P_1, P_2, P_3 sînt trei puncte oarecare, atunci segmentele care le unesc verifică *inegalitatea care se referă la laturile unui triunghi.*

Inegalități privind laturile unui triunghi	$\lvert P_1P_3\rvert \leqslant \lvert P_1P_2\rvert + \lvert P_2P_3\rvert$

Orientarea. În anumite cazuri este necesară orientarea segmentelor. Punctul P_1 se va numi origine iar punctul P_2 extremitate sau vîrful *segmentului orientat* $\overrightarrow{P_1P_2}$. Dacă segmentul orientat $\overrightarrow{P_1P_2}$ se află pe o dreaptă, atunci spunem că și *dreapta* este *orientată*.

Dacă Q_1 și Q_2 sînt două puncte oarecare pe o dreaptă orientată prin segmentul $\overrightarrow{P_1P_2}$ vom stabili și o *distanță* $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ *orientată.*

$|\overrightarrow{Q_1Q_2}| = +|Q_1Q_2|$ dacă orientarea lui $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ este aceeași cu a lui $\overrightarrow{P_1P_2}$,

$|\overrightarrow{Q_1Q_2}| = -|Q_1Q_2|$ dacă orientarea lui $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ este aceeași cu a lui $\overrightarrow{P_2P_1}$.

Raportul simplu. Fie o dreaptă cu segmentul orientat $\overrightarrow{P_1P_2}$. Un punct oarecare P al dreptei împarte segmentul orientat $\overrightarrow{P_1P_2}$ în raportul $\lambda = |\overrightarrow{P_1P}| : |\overrightarrow{PP_2}|$.

Dacă P se află între P_1 și P_2, atunci λ este pozitiv, iar dacă P este exterior segmentului orientat $\overrightarrow{P_1P_2}$, atunci λ este negativ. În cazul în care P este mijlocul segmentului orientat $\overrightarrow{P_1P_2}$, atunci $\lambda = 1$. Cunoscînd λ, se pot determina coordonatele punctului P. Fie x_1, y_1, z_1 și x_2, y_2, z_2 coordonatele punctelor P_1, respectiv P_2. Punctul P va avea următoarele coordonate:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{\lambda + 1}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{\lambda + 1}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{\lambda + 1}.$$

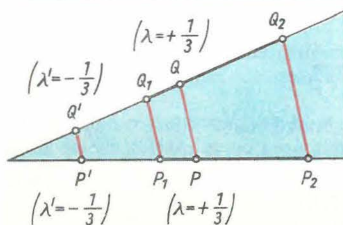
Exemplu. Segmentul orientat $\overrightarrow{P_1P_2}$ cu $P_1(5, 2, -1)$ și $P_2(-3, -2, 0)$ este împărțit de punctul P în raportul $\lambda = -5$. Coordonatele punctului P vor fi următoarele:

$$x = \frac{5 + (-5)\cdot(-3)}{-5 + 1} = \frac{20}{-4} = -5,$$

$$y = \frac{2 + (-5)\cdot(-2)}{-5 + 1} = \frac{12}{-4} = -3,$$

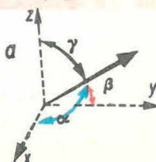
$$z = \frac{-1 + (-5)\cdot 0}{-5 + 1} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}.$$

Deoarece $\lambda = -5 < 0$, punctul P este exterior segmentului $\overrightarrow{P_1P_2}$.



Printr-o proiecție paralelă a punctelor de pe o rază, pe oricare altă rază rapoartele se păstrează (fig. 24.2.2)

24.2.2. În cazul proiecției paralele rapoartele distanțelor rămîn constante



24.2.3. Unghiurile directoare ale unei drepte

Dreaptă

Cosinusuri directoare. Cosinusurile directoare ale unei drepte orientate sînt valorile cosinusurilor unghiurilor pe care le face o dreaptă paralelă cu dreapta orientată, care trece prin origine, cu semiaxele pozitive ale sistemului de coordonate (fig. 24.2.3). Aceste trei unghiuri au în funcție de sensul în care facem măsurarea lor două valori, dar cosinusurile lor sînt egale deoarece

$$\cos\alpha = \cos(2\pi - \alpha).$$

Relații. Fie o dreaptă orientată care face cu axele de coordonate unghiurile α, β și γ și trece printr-un punct P_1 de coordonate x_1, y_1, z_1 și prin punctul P de coordonate x, y, z, un punct oarecare al dreptei. Vom avea relațiile $x = x_1 + |\overrightarrow{P_1P}|\cos\alpha$, $y = y_1 + |\overrightarrow{P_1P}|\cos\beta$ și $z = z_1 + |\overrightarrow{P_1P}|\cos\gamma$. Demonstrația este simplă. Prin P_1 ca origine construim un sistem de coordonate carteziene și facem apoi o translație. Vom avea $(x-x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = |P_1P_2|^2 (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$. Ținînd seama de expresia pentru $|P_1P_2|$, vom obține relația dintre cosinusurile directoare.

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Invers, trei numere oarecare a, b, c care se bucură de proprietatea $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, pot fi considerate cosinusuri directoare ale unghiurilor unei drepte orientate în spațiu.

Calcularea cosinusurilor directoare cunoscînd poziția a două puncte. Fie P_1 și P_2 două puncte în spațiu de coordonate x_1, y_1, z_1 și respectiv x_2, y_2, z_2. Atunci valorile cosinusurilor unghiurilor α, β și γ pe care le face dreapta orientată care trece prin punctele P_1 și P_2 cu axele de coordonate sînt următoarele:

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}},$$

Exemplu. Care sînt cosinusurile directoare ale dreptei orientate care trece prin punctele $P_1(5, 2, -1)$ și $P_2(-3, -2, 0)$? Avem

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{8^2 + 4^2 + 1^2} = 9.$$

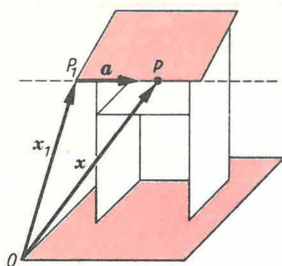
Deci

$$\cos\alpha = \frac{-3-5}{9} = \frac{-8}{9}; \quad \cos\beta = \frac{-2-2}{9} = \frac{-4}{9}; \quad \cos\gamma = \frac{0-(-1)}{9} = \frac{1}{9}.$$

Ca probă, se verifică dacă suma pătratelor consinusurilor este egală cu 1.

Ecuațiile unei drepte. Prin introducerea vectorilor $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $\mathbf{x}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$, $\mathbf{e} = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k}$ în ecuațiile $x = x_1 + |\overrightarrow{P_1P_2}|\cos\alpha$, $y = y_1 + |\overrightarrow{P_1P_2}|\cos\beta$, $z = z_1 + |\overrightarrow{P_1P_2}|\cos\gamma$, obținem o expresie mai simplă $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t\mathbf{e}$. Vectorul $\mathbf{e}$ este numit vector director și este un vector unitate. Multiplul lui $\mathbf{e}$ îl vom nota cu $\mathbf{a}$. Astfel, în loc de $\mathbf{e}$ vom scrie $\mathbf{a}$.

Din relația $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t\mathbf{a}$ rezultă că, în cazul lui $\mathbf{x}_1$ și $\mathbf{a}$ cunoscuți, pentru o valoare reală a lui t obținem un vector $\mathbf{x}$ care pornește din origine pînă la un punct al dreptei. Dacă t par-



curge toate valorile de la $-\infty$ pînă la $+\infty$, atunci obținem toate punctele dreptei. Invers, oricărui punct de pe dreaptă îi corespunde un număr t astfel încît $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t\mathbf{a}$ are extremitatea în acel punct. Astfel, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t\mathbf{a}$ se numește *ecuația vectorială parametrică a dreptei*

24.2.4. Ecuația dreptei determinată de un punct și o direcție dată

date printr-un punct P_1 și vectorul director $\mathbf{a}$, iar t se numește *parametrul* dreptei (fig. 24.2.4).

Ecuația vectorială parametrică a dreptei	$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t\mathbf{a}$

Exemplu. Să se scrie ecuația parametrică vectorială a dreptei din exemplul anterior. Sînt date coordonatele punctului P_1 și cosinusurile directoare: $\mathbf{x}_1 = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ și $\mathbf{e} = -\frac{1}{9}(8\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k})$. Deci ecuația va fi

$$\mathbf{x} = (5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) - \frac{t}{9}(8\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}).$$

Dacă introducem un nou parametru $u = -\frac{t}{9}$, vom obține ecuația

$$\mathbf{x} = (5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) + u(8\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}),$$

Vectorul ei de direcție nu mai este în acest caz versor de direcție și nu mai are orientarea inițială.

Două puncte sînt date inițial. Fiind cunoscute două puncte P_1 și P_2 ale unei drepte care au coordonatele x_1, y_1, z_1 și x_2, y_2, z_2, respectiv, atunci $\mathbf{x}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$ și $\mathbf{x}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$. Ca vector director putem considera pe $\mathbf{a} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$. Înlocuind această expresie în reprezentarea vectorială parametrică de mai sus, obținem *ecuația vectorială* a dreptei determinate de două puncte.

Ecuația vectorială a dreptei determinate de două puncte	$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$

Exemplu. Să se scrie ecuația vectorială a dreptei care trece prin punctele $P_1(5, 2, -1)$ și $P_2(-3, -2, 0)$. Din $\mathbf{x}_1 = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ și $\mathbf{x}_2 = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, obținem $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 = -8\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Ecuația vectorială a dreptei va fi $\mathbf{x} = (5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) + t(-8\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k})$ sau introducînd un parametru nou, $u = -t$, $\mathbf{x} = (5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) + u(8\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k})$.

Probleme de bază ale geometriei dreptei. Vom deduce anumite formule cu care rezolvăm problemele principale ale geometriei.

Unghiul dintre două drepte. Spunem că două drepte orientate formează un unghi φ dacă paralelele lor orientate la fel duse prin origine se intersectează sub acest unghi. Fie $\mathbf{a}$ și $\mathbf{a}^*$ vectorii directori ai celor două drepte. Conform definiției produsului scalar, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^* = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{a}^*| \cos \varphi$. Două drepte sînt perpendiculare dacă $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^* = 0$. Deoarece $\mathbf{e} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ și $\mathbf{e}^* = \mathbf{a}^*/|\mathbf{a}^*|$, obținem $\cos \varphi = \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^*$.

$\cos \varphi = \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^*$

Exemplu. Fie **x** și **x*** două drepte scrise sub forma vectorială parametrică $\mathbf{x} = (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) + t(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k})$ și $\mathbf{x}^* = (\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) + t^*(4\mathbf{i} + 3\mathbf{k})$. Orientarea dreptelor este dată de vectorii directori. Care este unghiul φ ($\varphi < \pi$) dintre ele?

Deoarece în acest exemplu vectorii directori nu sînt versori, primul lucru pe care trebuie să-l facem este:

$$\mathbf{e} = \frac{3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}}{\sqrt{9 + 16 + 144}} = \frac{1}{13}(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}) \text{ și } \mathbf{e}^* = \frac{4\mathbf{i} + 3\mathbf{k}}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{1}{5}(4\mathbf{i} + 3\mathbf{k}).$$

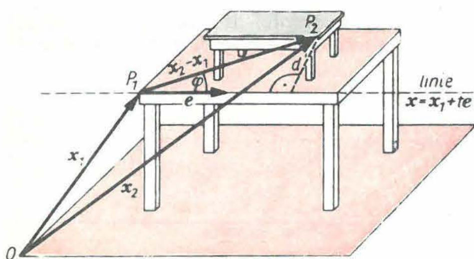
Acum putem folosi formula:

$$\cos\varphi = \frac{1}{5 \cdot 13}(3\mathbf{i} - 4\mathbf{t} + 12\mathbf{k}) \cdot (4\mathbf{i} + 3\mathbf{k}) = \frac{1}{5 \cdot 13}(3 \cdot 4 - 4 \cdot 0 + 12 \cdot 3) = \frac{48}{65} \approx 0{,}738...$$

Deci unghiul pe care-l formează cele două drepte este $\varphi \approx 42{,}4°$. Dar acest fapt nu înseamnă că dreptele se intersectează!

Distanța unui punct față de o dreaptă. Fie $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t\mathbf{e}$ ecuația unei drepte (**e** este versor) și x_2, y_2, z_2 coordonatele unui punct dat P_2. Notăm $\overrightarrow{OP_2}$ cu $\mathbf{x}_2$. Distanța de la punctul P_2 la dreapta dată va fi egală cu $d = |(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \times \mathbf{e}|$, adică *distanța perpendicularei* din P_2 pe dreapta dată (fig. 24.2.5).

Distanța punct-dreaptă	$d = \|(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \times \mathbf{e}\|$



24.2.5. Distanța unui punct față de o dreaptă

Demonstrație. Fie $\varphi \leqslant \pi$, unghiul pe care-l formează **e** și $\overrightarrow{P_1P_2}$. Deci $d = |\overrightarrow{P_1P_2}| \sin\varphi$. Pe de altă parte, conform definiției produsului vectorial. $|\overrightarrow{P_1P_2} \times \mathbf{e}| = |\overrightarrow{P_1P_2}|\,|\mathbf{e}| \sin\varphi$. Cînd $|\mathbf{e}| = 1$, avem $|\overrightarrow{P_1P_2} \times \mathbf{e}| = |\overrightarrow{P_1P_2}| \sin\varphi = d$. Vom obține relația de mai sus înlocuind $\overrightarrow{P_1P_2} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$.

Exemplu. Care este distanța dintre punctul $P_2(3, 1, 5)$ și dreapta $\mathbf{x} = (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) + \frac{t}{13}(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k})$?

Avem $\mathbf{x}_1 = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ și $\mathbf{x}_2 = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, deci $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Calculăm produsul vectorial

$$(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \times \mathbf{e} = (\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}) \times \frac{1}{13}(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}) = \frac{1}{13}(52\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 16\mathbf{k}).$$

Distanța căutată va fi

$$d = \frac{1}{13}\sqrt{52^2 + 9^2 + 16^2} = \frac{1}{13}\sqrt{2704 + 81 + 256} = \frac{1}{13}\sqrt{3041} \approx 4{,}24.$$

Punctul P_2 se află la o distanță de aproximativ 4,24 unități de dreapta dată.

Distanța dintre două drepte în spațiu. Fie l și l^* două drepte care nu au nici un punct comun și nu sînt nici paralele. Perpendiculara comună a celor două drepte este simultan perpendiculară pe aceste două drepte, Q și Q^* fiind punctele de intersecție a ei cu dreptele l și l^*. Lungimea perpendicularei comune este cea mai mică distanță dintre oricare două puncte situate pe dreptele l și l^*. Ea reprezintă *distanța* între cele două drepte.

Din ecuațiile dreptelor l și l^*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t\mathbf{a} \text{ și } \mathbf{x}^* = \mathbf{x}_1^* + \tau\mathbf{a}^*$$

obținem formula distanței dintre ele.

Distanța dintre două drepte în spațiu	$d = \|(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1^*)\,(\mathbf{a} \times \mathbf{a}^*)\| / \|\mathbf{a} \times \mathbf{a}^*\|$

Deducerea formulei o vom schița în felul următor: există un parametru t_1 astfel că $\mathbf{x}_1 + t_1\mathbf{a} = \overrightarrow{OQ}$ și alt parametru τ_1, astfel încît $\mathbf{x}_1^* + \tau_1\mathbf{a}^* = \overrightarrow{OQ^*}$. Deoarece $\overrightarrow{QQ^*}$ este perpendiculara pe $\mathbf{a}$ și $\mathbf{a}^*$, $\overrightarrow{QQ^*} = d(\mathbf{a} \times \mathbf{a}^*)\ |/|\ \mathbf{a} \times \mathbf{a}^*\ |$. Înlocuind aceasta în relația $\overrightarrow{OQ^*} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QQ^*}$ și apoi calculînd produsul scalar al ambelor părți cu $\mathbf{a} \times \mathbf{a}^*$, îl obținem pe d.

Exemplu. Care este distanța între dreptele $\mathbf{x} = (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) + \frac{t}{13}(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k})$ și $\mathbf{x}^* = (\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) + \frac{t^*}{5}(4\mathbf{i} + 3\mathbf{k})$?

Produsul vectorial $\mathbf{a} \times \mathbf{a}^*$ este

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a}^* = \frac{1}{5 \cdot 13}(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}) \times (4\mathbf{i} + 3\mathbf{k}) = \frac{1}{5 \cdot 13}(-12\mathbf{i} + 39\mathbf{j} + 16\mathbf{k}).$$

Calculăm produsul scalar dintre acest vector și vectorul $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1^* = \mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$. Rezultă

$$(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1^*)(\mathbf{a} \times \mathbf{a}^*) = \frac{1}{5 \cdot 13}(\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 7\mathbf{k})(-12\mathbf{i} + 39\mathbf{j} + 16\mathbf{k}) = -3{,}26.$$

Deoarece $|\mathbf{a} \times \mathbf{a}^*| \approx 0{,}67$, obținem $d \approx 4{,}8$.

Intersecția a două drepte în spațiu. În general în spațiu două drepte nu au nici un punct comun. Dacă l și l^* sînt două drepte cu ecuațiile $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_1 + t\mathbf{a}$ și $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(\tau) = \mathbf{x}_1^* + \tau\mathbf{a}^*$, care au (cel puțin) un punct comun, atunci trebuie să existe (cel puțin) o pereche de valori t, τ astfel încît $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*(\tau)$. Acestei ecuații vectoriale îi corespunde un sistem de ecuații liniare format din trei ecuații cu două necunoscute t și τ care în general nu are o soluție determinată. Condiția necesară și suficientă ca să existe o soluție unic determinată, deci ca cele două drepte din spațiu să se intersecteze într-un punct este dată de relațiile alăturate.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a}^* \neq 0 \quad \text{și} \quad (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1^*) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{a}^*) = 0$$

Prima relație ne arată că dreptele nu sînt paralele și nu coincid, iar cea de-a doua rezultă din formula distanței dintre două puncte în spațiu care în acest caz trebuie să fie egală cu 0. Dacă sistemul are o soluție unică pentru t și τ, atunci acestea introduse în ecuațiile dreptelor l și l^* ne indică *punctul lor de intersecție*. Dacă sistemul nu are soluție, atunci dreptele nu au nici un punct comun, iar dacă are o infinitate de soluții, dreptele coincid.

Exemplu. Calculăm ca și în exemplul de mai sus distanța dintre dreptele

$$\mathbf{x} = (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) + t(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}) \text{ și } \mathbf{x}^* = (\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) + t^*(36\mathbf{i} + 212\mathbf{j} + 27\mathbf{k}).$$

Rezultă că distanța este egală cu 0. Deoarece $\mathbf{a} \times \mathbf{a}^* \neq 0$, dreptele au un punct de intersecție finit. Trebuie să determinăm pe t și t^* astfel încît $(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) + t(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}) = (\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) + t^*(36\mathbf{i} + 212\mathbf{j} + 27\mathbf{k})$, de unde rezultă $(1 + 3t - 36t^*)\,\mathbf{i} - (8 + 4t + 212t^*)\mathbf{j} + (7 + 12t - 27t^*)\,\mathbf{k} = 0$. Deoarece un vector este nul numai în cazul în care componentele sale sînt egale cu 0, rezultă sistemul alăturat care are o soluție unică $t = -\frac{25}{39}$ și $t^* = -\frac{1}{39}$. Înlocuind aceste valori în ecuațiile dreptelor, trebuie ca $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$.

$$\begin{aligned} 3t - 36t^* &= -1, \\ 4t + 212t^* &= -8, \\ 12t - 27t^* &= -7. \end{aligned}$$

Acest vector ne indică punctul de intersecție al dreptelor. Avem $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* = \frac{1}{39}(3\mathbf{i} - 17\mathbf{j} - 144\mathbf{k})$. Coordonatele punctului de intersecție sînt: $x = 0{,}077$; $y = -0{,}436$; $z = 3{,}692$.

O mulțime de drepte care trec printr-un punct fix se numește *stea de drepte*. Dacă ele se află în același plan, dreptele formează un *fascicul de drepte* sau în cazul semidreptelor orientate, mulțimea se numește *fascicul de raze*.

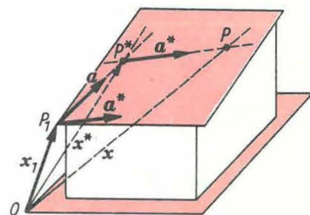
Plan

Ecuațiile planului. Un plan este determinat în spațiu prin trei puncte necoliniare sau prin două puncte și un vector director care nu este paralel cu dreapta care unește aceste două puncte sau printr-un punct și doi vectori directori neparaleli.

Reprezentarea parametrică. Fie un punct P_1 cu coordonatele (x_1, y_1, z_1) și doi vectori directori neparaleli $\mathbf{a}$ și $\mathbf{a}^*$.

Dacă notăm vectorul $\overrightarrow{OP_1}$ cu $\mathbf{x}_1$, atunci $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_1 + t\mathbf{a}$ are extremitatea în punctul P^* de pe dreapta care este determinată de $\mathbf{x}_1$ și $\mathbf{a}$.

Vectorul $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \tau\mathbf{a}^*$ ne indică un punct P care este în planul determinat de $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{a}$ și $\mathbf{a}^*$. Pentru orice pereche de parametri t și τ ecuația $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t\mathbf{a} + \tau\mathbf{a}^*$ ne indică un punct al planului. Invers, pentru orice punct al planului există două numere t și τ, astfel încît să avem o astfel de reprezentare. Aceasta este o *reprezentare parametrică a planului* (fig. 24.2.6).



24.2.6. Reprezentarea parametrică a unui plan

Reprezentarea parametrică a planului	$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + t\mathbf{a} + \tau\mathbf{a}^*$

Dacă sînt date două puncte P_1 și P_2 și un vector director $\mathbf{a}$, putem determina pe $\mathbf{a}^*$ ca vector director al dreptei duse prin punctele P_1 și P_2. Dacă sînt date trei puncte, atunci ducem prin ele două drepte și calculăm pentru ele vectorii directori $\mathbf{a}$ și $\mathbf{a}^*$. În oricare caz putem ajunge la o reprezentare parametrică de forma obținută.

Exemplu. Punctele $P_1(0, 1, 1)$, $P_2(1, 0, 1)$ și $P_3(1, 1, 0)$ determină un plan în spațiu. Care este reprezentarea parametrică? Întîi calculăm vectorii directori care nu trebuie să fie normalizați, de exemplu $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ și $\overrightarrow{P_1P_3} = \overrightarrow{OP_3} - \overrightarrow{OP_1} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$. Dacă notăm $\mathbf{x}_1 = \overrightarrow{OP_1}$ (O este originea sistemului de coordonate), obținem reprezentarea parametrică a planului

$$\mathbf{x} = (\mathbf{j} + \mathbf{k}) + (\mathbf{i} - \mathbf{j})u + (\mathbf{i} - \mathbf{k})\, v.$$

Parametrii sînt notați cu u și v. Dacă dorim să avem reprezentarea parametrică cu versori directori, atunci introducem parametrii $t = u\,|\,\mathbf{i} - \mathbf{j}\,| = u\sqrt{2}$, $\tau = v|\,\mathbf{i} - \mathbf{k}\,| = v\sqrt{2}$. Obținem

$$\mathbf{x} = (\mathbf{j} + \mathbf{k}) + (\mathbf{i} - \mathbf{j})\,\frac{t}{\sqrt{2}} + (\mathbf{i} - \mathbf{k})\,\frac{\tau}{\sqrt{2}}\,.$$

Ecuația generală a planului. Ecuația vectorială parametrică reprezintă un sistem de trei ecuații liniare care este scris în felul următor:

$$x = x_1 + \cos\alpha \cdot t + \cos\alpha^* \cdot \tau,$$
$$y = y_1 + \cos\beta \cdot t + \cos\beta^* \cdot \tau,$$
$$z = z_1 + \cos\gamma \cdot t + \cos\gamma^* \cdot \tau.$$

Înmulțind prima ecuație cu $A = \cos\beta\cos\gamma^* - \cos\beta^*\cos\gamma$, a doua cu $B = \cos\gamma\cos\alpha^* - \cos\gamma^*\cos\alpha$, a treia cu $C = \cos\alpha\cos\beta^* - \cos\alpha^*\cos\beta$ și adunînd cele trei ecuații, obținem

$$Ax + By + Cz = Ax_1 + By_1 + Cz_1, \text{ respectiv } A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0,$$

care este ecuația unui plan ce trece prin P_1. Dacă înlocuim în prima ecuație obținută partea din dreapta cu constanta $-D$, obținem *ecuația generală a planului.*

Ecuația generală a planului	$Ax + By + Cz + D = 0$

Toate punctele ale căror coordonate x, y și z verifică ecuația sub această formă, în care A, B și C nu sînt toate simultan nule, se află pe un plan și fiecărui plan îi putem atașa o astfel de ecuație. Mai precis, fiecărui plan îi putem atașa o infinitate de astfel de ecuații deoarece o astfel de ecuație se poate înmulți cu o infinitate de numere diferite de zero, fără să reprezinte alt plan. De aici rezultă că valorile pentru A, B, C și D nu au o semnificație geometrică izolat ci numai rapoartele lor.

Ecuația planului prin tăieturi. Dacă pe D din ecuația generală a planului îl trecem în partea dreaptă și împărțim prin $-D$, obținem *ecuația planului prin tăieturi* (fig. 24.2.7). Facem ipoteza că planul nu trece prin $O(D\neq 0)$ și nici nu este paralel cu vreo axă de coordonate ($A, B, C\neq 0$).

Ecuația planului prin tăieturi	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

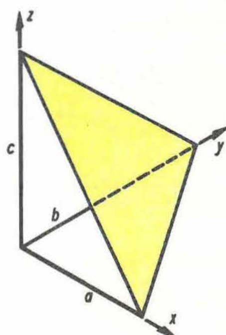
În această ecuație s-au făcut următoarele substituții: $-\frac{D}{A}=a; -\frac{D}{B}=b$ și $-\frac{D}{C}=c$. Din ecuația dreptei prin tăieturi rezultă că planul determină pe axa Ox segmentul a, pe axa Oy segmentul b și pe axa Oz segmentul c (fig 24.2.7). Planul care trece prin origine nu are ecuație prin tăieturi.

Exemplu. $\mathbf{x}=(3\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k})+(\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})\frac{t}{\sqrt{3}}+(\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})\frac{\tau}{\sqrt{3}}$ este o reprezentare parametrică a unui plan. Unde intersectează planul axele de coordonate? Din ecuația parametrică a planului reiese că:

$$\cos\alpha = 1:\sqrt{3}, \qquad \cos\alpha^* = 1:\sqrt{3},$$
$$\cos\beta = -1:\sqrt{3}, \qquad \cos\beta^* = 1:\sqrt{3},$$
$$\cos\gamma = 1:\sqrt{3}, \qquad \cos\gamma^* = -1:\sqrt{3}.$$

Astfel găsim

$$A=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=0,$$
$$B=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}-\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{2}{3},$$
$$C=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{3}.$$



24.2.7. Ecuația planului prin tăieturi

Ecuația generală a planului va fi

$$0(x-3)+\frac{2}{3}(y-1)+\frac{2}{3}(z+2)=0, \qquad 0\cdot x+\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z=-\frac{2}{3}.$$

De aici rezultă ecuația planului prin tăieturi

$$0\cdot x-y-z=1 \quad \text{sau} \quad \frac{y}{(-1)}+\frac{z}{(-1)}=1,$$

Axa Ox va fi intersectată la infinit, deci este paralelă cu planul. Axa Oy este intersectată în punctul $y=-1$ și axa Oz în punctul $z=-1$.

Ecuația normală a lui Hesse. Împărțim ecuația generală a planului prin $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ și înlocuind $A/\sqrt{A^2+B^2+C^2}=n_1$, $B/\sqrt{A^2+B^2+C^2}=n_2$, $C/\sqrt{A^2+B^2+C^2}=n_3$ și $D/\sqrt{A^2+B^2+C^2}=p$, obținem *ecuația normală a planului.*

Ecuația normală a planului	$n_1x+n_2y+n_3z+p=0.$

Lungimea perpendicularei de la origine la plan, p, este distanța de la origine la plan; n_1, n_2, n_3 sînt cosinusurile directoare ale perpendicularei. Deci vom avea $n_1^2+n_2^2+n_3^2=1$.

Prin introducerea vectorilor $\mathbf{x}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ și $\mathbf{n}=n_1\mathbf{i}+n_2\mathbf{j}+n_3\mathbf{k}$, ecuația normală a lui Hesse se scrie sub formă foarte simplă:

Ecuația normală sub forma vectorială	$\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}=-p$

Vectorul $\mathbf{n}$ este perpendicular pe plan și se numește *vector normal* al planului. Acesta este un vector unitate. Orientarea lui $\mathbf{n}$ se determină prin semnul dat radicalului $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$. De obicei

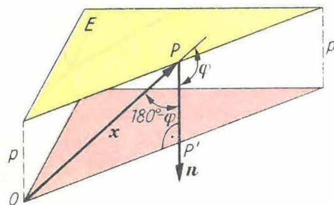
alegem semnul plus pentru $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$. Atunci partea planului care se află în direcția lui **n** este definită ca semiplan pozitiv, cealaltă parte este definită ca semiplan negativ. Vom deosebi deci semispațiul negativ și cel pozitiv. O ilustrare a ecuației normale este dată de figura 24.2.8. Suprafața galbenă reprezintă o suprafață oarecare E în spațiu, cea roșie o suprafață paralelă cu ea dusă prin originea sistemului de coordonate, O; P un punct oarecare pe E, p distanța de la planul E la O și **n** vectorul normalei lui E (vector unitate). Dacă notăm cu φ unghiul pe care-l formează $\overrightarrow{OP} = \mathbf{x}$ cu **n**, atunci conform definiției produsului scalar și ținind seama că $|\mathbf{n}| = 1$,

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = |\mathbf{x}| \cos \varphi = -|\mathbf{x}| \cos (180 - \varphi).$$

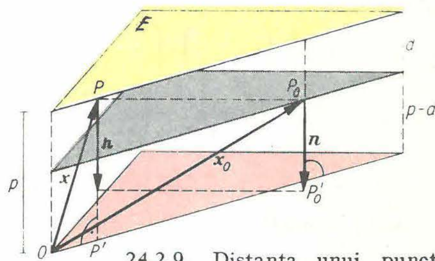
Din triunghiul dreptunghic OPP' rezultă

$$|\mathbf{x}| \cos (180° - \varphi) = p, \quad \text{deci} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = -p.$$

Exemplu. Planul de la exemplul anterior să-l scriem sub formă normală. Din $A = 0$, $B = \frac{2}{3}$ și $C = \frac{2}{3}$ rezultă $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$. Împărțind ecuația generală a planului la $\frac{2}{3}\sqrt{2}$, se obține ecuația normală a planului $0 \cdot x + \frac{\sqrt{2}}{2} y + \frac{\sqrt{2}}{2} z + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$, sau scrisă sub forma vectorială $\frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.



24.2.8. Ilustrarea ecuației normale a planului



24.2.9. Distanța unui punct față de un plan

Probleme de bază ale geometriei planului. Prin folosirea vectorilor putem rezolva anumite probleme de bază ale geometriei planului.

Distanța de la un punct la un plan. Fie $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = -p$ ecuația normală a unui plan E și $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct oarecare în spațiu; atunci $d = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_0 + p$ este distanța de la punctul P_0 la planul E. Cu ajutorul figurii 24.2.9 verificăm imediat relația. Suprafața galbenă reprezintă din nou planul dat E, cea roșie planul paralel dus prin originea O la E iar suprafața gri planul dus prin P_0 paralel la E. La fel cum din triunghiul OPP' pentru un punct oarecare P din plan obținem $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = -p$, din triunghiul OP_0P_0', unde P_0 este un punct oarecare din spațiu, avem $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_0 = -(p - d)$, deci $d = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_0 + p$. Distanța d este o mărime orientată. Ea este pozitivă sau negativă în funcție de poziția pe care o are punctul P_0 față de planul E, se află în semispațiul pozitiv, respectiv negativ.

Distanța unui punct la un plan	$d = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_0 + p$

Exemplu. Să se calculeze distanța de la punctul $P_0(3, -1, 2)$ la planul din exemplul anterior. Din formula distanței obținem

$$d = \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot (3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} (0 \cdot 3 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2) + \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \sqrt{2} \approx 1{,}414.$$

Deci distanța este egală cu 1,414 unități.

Unghiul dintre două plane. Fie $\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} = -p$ și $\mathbf{n}^*\cdot\mathbf{x} = -p^*$ ecuațiile normale a două plane. Unghiul φ pe care-l formează cele două plane este egal cu unghiul dintre vectorii normali $\mathbf{n}$ și $\mathbf{n}^*$. Deci $\cos\varphi = \mathbf{n}\cdot\mathbf{n}^*$. În caz particular, două plane sînt perpendiculare dacă $\mathbf{n}\mathbf{n}^* = 0$.

$$\cos\varphi = \mathbf{n}\cdot\mathbf{n}^*$$

Exemplu. Planele $5x + 3y - z = 10$ și $2x - y + 7z = 5$ sînt perpendiculare? Vectorii normali ai planelor sînt: $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{35}}(5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k})$ și $\mathbf{n}^* = \frac{1}{\sqrt{54}}(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 7\mathbf{k})$. Deci $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{35}\cdot\sqrt{54}}(5\cdot 2 - 3\cdot 1 - 1\cdot 7) = 0$; $\varphi = 90°$. Planele sînt perpendiculare.

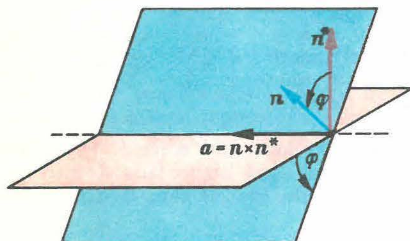
Intersecția a două plane. Două plane, în cazul în care nu sînt paralele, se intersectează după o dreaptă. Deci $|\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}^*| < 1$ sau $\mathbf{n}\times\mathbf{n}^* \neq 0$ este condiția necesară și suficientă pentru intersecția a două plane. Două plane neparalele au o dreaptă comună numită *dreapta de intersecție.* Ea este perpendiculară pe $\mathbf{n}$ și $\mathbf{n}^*$. Vectorul ei director este $\mathbf{a} = \mathbf{n}\times\mathbf{n}^*$. Dacă determinăm un punct care verifică ecuația dreptei $\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} = -p$ cît și a dreptei $\mathbf{n}^*\cdot\mathbf{x} = -p^*$, atunci cu ajutorul acestui punct și al lui $\mathbf{a}$ obținem o reprezentare parametrică a dreptei de intersecție. Scris amănunțit, coordonatele unui punct trebuie să verifice sistemul de ecuații, unde n_1, n_2, n_3 sînt componentele lui $\mathbf{n}$ iar n_1^*, n_2^*, n_3^* sînt componentele lui $\mathbf{n}^*$:

$$n_1x + n_2y + n_3z = -p,$$
$$n_1^*x + n_2^*y + n_3^*z = -p^*.$$

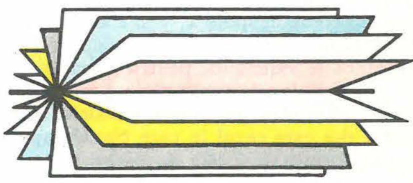
Acest punct și vectorul director $\mathbf{a} = \mathbf{n}\times\mathbf{n}^*$ determină ecuația dreptei de intersecție. Dacă de exemplu $n_1n_2^* - n_1^*n_2 \neq 0$, atunci

$$x = \frac{p^*n_2 - pn_2^*}{n_1n_2^* - n_1^*n_2}, \quad y = \frac{pn_1^* - p^*n_1}{n_1n_2^* - n_1^*n_2}, \quad z = 0$$

reprezintă o soluție a sistemului (fig. 24.2.10).



24.2.10. Două plane se intersectează după o dreaptă



24.2.11. Fascicul de plane

Mulțimea planelor care trec prin aceeași dreaptă se numește *fascicul de plane* (fig. 24.2.11). Va trebui să avem $\mathbf{n}\times\mathbf{n}^* \neq 0$.

Ecuația fasciculului de plane	$(\mathbf{n}\cdot\mathbf{x} + p) + \lambda(\mathbf{n}^*\cdot\mathbf{x} + p^*) = 0$

Pentru a arăta că ecuația de mai sus reprezintă un fascicul de plane, se aduce aceasta la forma $(\mathbf{n} + \lambda\mathbf{n}^*)\mathbf{x} + (p + \lambda p^*) = 0$. De aici se vede că ecuația definește pentru orice λ un plan, deci ea reprezintă ecuația unei infinități de plane. Trebuie arătat că aceste plane au o dreaptă comună. Fie două plane care corespund lui λ_1 și λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$). Deoarece $\mathbf{n}\times\mathbf{n}^* \neq 0$, planele nu sînt paralele și

$(\mathbf{n} + \lambda_1\mathbf{n}^*)\times(\mathbf{n} + \lambda_2\mathbf{n}^*) = (\mathbf{n}\times\mathbf{n}^*)\cdot(\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0$. Planele au deci o dreaptă de intersecție care are vectorul director $\mathbf{a} = \mathbf{n}\times\mathbf{n}^*$.

Pentru a scrie ecuația dreptei de intersecție trebuie determinat un punct care verifică atît ecuația $(\mathbf{n} + \lambda_1\mathbf{n}^*) \cdot \mathbf{x} + (p + \lambda_1 p^*) = 0$ cît și ecuația $(\mathbf{n} + \lambda_2\mathbf{n}^*) \cdot \mathbf{x} + (p + \lambda_2 p^*) = 0$. Deoarece $\lambda_1 \neq \lambda_2$, acest caz se reduce la cazul în care sistemul alăturat are soluție. Observăm că atît **a** cît și **x** sînt independenți de λ_1 și λ_2. Aceasta înseamnă că dreapta de intersecție a planelor determinate de λ_1 și λ_2 este comună tuturor planelor reprezentate prin ecuația de la început. Trebuie amintit că ecuația fasciculului de plane de tipul amintit, deci care trec printr-o dreaptă dată nu poate defini un plan și anume $\mathbf{n}^* \cdot \mathbf{x} + p^* = 0$. Acest inconvenient se rezolvă prin omogenizarea coordonatelor. Dacă $\lambda = \frac{\varkappa^*}{\varkappa}$, obținem $\varkappa(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + p) + \varkappa^*(\mathbf{n}^* \cdot \mathbf{x} + p^*) = 0$ unde înlocuind pe $\varkappa = 0$ și $\varkappa^* = 1$, obținem planul $\mathbf{n}^* \cdot \mathbf{x} + p^* = 0$.

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + p &= 0 \\ \mathbf{n}^* \mathbf{x} + p^* &= 0 \end{aligned}$$

Exemplu. Să se scrie ecuația dreptei de intersecție a fasciculului

$$\left[\frac{1}{\sqrt{14}}(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x} + 1\right] + \lambda\left[\frac{1}{\sqrt{14}}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \cdot \mathbf{x} - 1\right] = 0.$$

Vectorul normal al dreptei de intersecție

$$\mathbf{e} = \frac{(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k})}{|(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k})|} = \frac{5\mathbf{i} + 11\mathbf{j} + 7\mathbf{k}}{|5\mathbf{i} + 11\mathbf{j} + 7\mathbf{k}|} = \frac{1}{\sqrt{195}}(5\mathbf{i} + 11\mathbf{j} + 7\mathbf{k}).$$

Un punct de pe dreaptă se determină prin rezolvarea sistemului alăturat. O astfel de soluție este $x = \frac{1}{7}$, $y = \frac{5}{7}$ și $z = 0$.

$$\begin{aligned} 3x - 2y + z &= -1 \\ 2x + y - 3z &= +1 \end{aligned}$$

Ecuația vectorială a dreptei de intersecție este

$$\mathbf{x} = \frac{1}{7}(\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) + \frac{t}{\sqrt{195}}(5\mathbf{i} + 11\mathbf{j} + 7\mathbf{k}) \text{ și înlocuind } \frac{t}{\sqrt{195}} = \tau, \text{ se obține}$$

$$\mathbf{x} = \frac{1}{7}(\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) + \tau(5\mathbf{i} + 11\mathbf{j} + 7\mathbf{k}).$$

Intersecția a trei plane. Ecuațiile a trei plane $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + p = 0$, $\mathbf{n}^* \cdot \mathbf{x} + p^* = 0$ și $\mathbf{n}^{**} \cdot \mathbf{x} + p^{**} = 0$ formează un sistem de ecuații liniare pentru componentele x, y și z ale lui $\mathbf{x}$. Dacă sistemul este unic determinat, atunci cele trei plane au un punct comun. Condiția necesară și suficientă pentru aceasta este

$$\begin{vmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ n_1^* & n_2^* & n_3^* \\ n_1^{**} & n_2^{**} & n_3^{**} \end{vmatrix} \neq 0$$

Altfel planele nu au nici un punct comun sau au o dreaptă comună sau coincid. În primul caz două dintre plane sînt paralele, sau planele se intersectează după drepte paralele între ele. Cazul doi este cazul în care planele aparțin unui fascicul de plane. Planele care trec printr-un punct formează o *stea de plane*.

Ecuația planelor care trec printr-un punct (stea de plane)	$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + p) + \lambda_1(\mathbf{n}^* \cdot \mathbf{x} + p^*) + \lambda_2(\mathbf{n}^{**} \cdot \mathbf{x} + p^{**}) = 0$

Prin omogenizare $\left(\lambda_1 = \frac{\varkappa^*}{\varkappa}, \quad \lambda_2 = \frac{\varkappa^{**}}{\varkappa}\right)$ obținem

$$\varkappa(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} + p) + \varkappa^*(\mathbf{n}^* \cdot \mathbf{x} + p^*) + \varkappa^{**}(\mathbf{n}^{**} \cdot \mathbf{x} + p^{**}) = 0.$$

24.3. Suprafețe de gradul doi

Transformarea axelor principale de coordonate

Totalitatea punctelor ale căror coordonate carteziene satisfac o ecuație de forma $F(x, y, z) = 0$, verificînd anumite condiții inițiale, formează o *suprafață*. O condiție esențială poate fi de exemplu faptul că funcția $F(x, y, z)$ este continuă în toate variabilele. În funcție de condițiile impuse, suprafețele au diferite forme.

Dacă $F(x, y, z)$ este o funcție liniară în x, y, z de forma $Ax + By + Cz + D$ în care coeficienții A, B, C nu se anulează simultan, atunci ecuația $F(x, y, z) = 0$ reprezintă un plan.

Fie $F(x, y, z)$ o funcție de gradul doi. Atunci $F(x, y, z) = 0$ reprezintă o ecuație algebrică de gradul doi, adică are forma

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

O astfel de ecuație, în care primii șase coeficienți nu sînt simultan egali cu zero, reprezintă o *suprafață de gradul doi* sau *cvadrică*.

Printr-o transformare liniară a coordonatelor (translație-rotație sau compunere dintre ele) o ecuație algebrică de gradul doi în x, y, z cu coeficienții a_{11} pînă la a_{44} va trece tot într-o ecuație algebrică de gradul doi în x^*, y^*, z^* cu coeficienții a_{11}^* pînă la a_{44}^*. Foarte important este faptul că totdeauna putem găsi o *rotație* astfel încît $a_{12}^* = a_{13}^* = a_{23}^* = 0$. Această transformare se numește *transformarea axelor principale de coordonate*.

Exemplu. Ecuația $x^2 + y^2 + z^2 + xy - 1 = 0$ se va transforma prin rotația

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}x^* + \frac{\sqrt{2}}{2}y^*; \quad y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x^* + \frac{\sqrt{2}}{2}y^*; \quad z = z^*$$

în

$$\frac{x^{*2}}{a^2} + \frac{y^{*2}}{b^2} + \frac{z^{*2}}{c^2} - 1 = 0 \text{ cu } a = \sqrt{2}, \quad b = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad c = 1.$$

Datorită transformării axelor principale de coordonate, discuția ecuațiilor algebrice de gradul doi se va reduce la discuția ecuațiilor de gradul doi de forma

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

Dar și o astfel de ecuație la care primii trei coeficienți nu pot fi egali simultan cu zero se mai poate simplifica prin transformări de coordonate (translație). Ce fel de translație trebuie să facem și la ce formă de ecuație simplificată ajungem, depinde de structura coeficienților. Conform unor studii, s-a ajuns la concluzia că orice ecuație de gradul doi se poate reduce la una din cele 17 ecuații speciale formate din cel mult patru termeni.

Trei din aceste ecuații au forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} + 1 = 0$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$, $\frac{x^2}{a^2} + 1 = 0$ cu a, b și c nenuli. Aceste ecuații nu au o soluție reală și nu reprezintă figuri geometrice. Celelalte 14 ecuații reprezintă 14 figuri geometrice diferite. Vom da nouă *cvadrice singulare sau suprafețe singulare de gradul doi:*

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$, punctul $(0, 0, 0)$.
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$, o dreaptă, axa Oz.
3. $\frac{x^2}{a^2} = 0$, un plan, planul yOz.
4. $\frac{x^2}{a^2} = 1$, două plane paralele cu yOz la distanța $x = \pm a$.
5. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, cele două plane care intersectează perpendicular planul xOy după dreptele $y = \pm \frac{b}{a}x$.
6. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, suprafața cilindrică hiperbolică a cărei intersecție cu plane perpendiculare pe axa Oz reprezintă hiperbole paralele și congruente cu hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, din planul xOy.

7. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, suprafața cilindrică eliptică a cărei intersecție cu plane perpendiculare pe axa Oz reprezintă elipse, paralele și congruente cu elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ din planul xOy. Dacă $a = b$, atunci ele devin cercuri.

8. $x^2 - 2py = 0$, suprafața cilindrică parabolică a cărei intersecție cu plane perpendiculare pe axa Oz reprezintă parabole paralele și congruente cu parabola $x^2 - 2py = 0$, din planul xOy.

9. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, suprafața conică de gradul doi a cărei intersecție cu plane perpendiculare pe axa Oz reprezintă elipse sau cercuri dacă $a^2 = b^2$.

Aceste figuri nu reprezintă suprafețe în sensul obișnuit (1 și 2) sau reprezintă un plan (sau două plane) (3 pînă la 5) sau suprafețe cilindrice conice care se desfășoară în plan (6 pînă la 9).

Deci rămîn numai cinci figuri geometrice care reprezintă *suprafețe nesingulare de gradul doi (cvadrice nesingulare)*.

Cvadrice nesingulare de gradul doi

Clasificare. Prin efectuarea transformării axelelor principale, axele de coordonate vor avea aceeași direcție ca și axele principale ale suprafeței reprezentate. Denumirea unei suprafețe depinde de o intersecție paralelă cu o axă principală desemnată și de o intersecție perpendiculară pe această axă.

După cum prima intersecție este o elipsă, parabolă sau hiperbolă, suprafața se numește *elipsoid, paraboloid* sau *hiperboloid.*

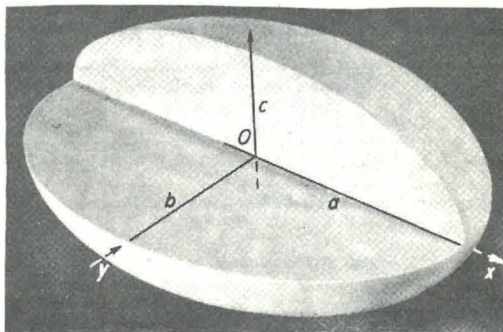
Forma celei de-a doua intersecții ne indică, în cazul în care este nevoie de o nouă precizare, adjectivele *eliptic* sau *hiperbolic*. Parabolic nu se folosește deoarece nu există o suprafață nesingulară de gradul doi care să aibă o astfel de secțiune transversală.

Nu se face nici o deosebire între secțiunile eliptice și circulare. Un elipsoid poate fi deci și o sferă iar un paraboloid eliptic poate avea o secțiune transversală circulară. În cazul hiperboloizilor deosebim *hiperboloizi cu o pînză și cu două pînze.*

Cele cinci suprafețe nesingulare de gradul doi au următoarele denumiri: elipsoid, paraboloid eliptic, paraboloid hiperbolic, hiperboloid cu o pînză, hiperboloid cu două pînze.

Elipsoid. În sistemul de coordonate carteziene ortogonale, ecuația de mai jos reprezintă un elipsoid (fig. 24.3.1).

Elipsoid	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



24.3.1. Elipsoid *triaxial*

Semiaxele elipsoidului sînt notate cu a, b, c. Dacă $a = b = c$, elipsoidul este o sferă. Dacă două semiaxe sînt egale, atunci ecuația reprezintă un *elipsoid de rotație* sau un *elipsoid biaxial*. Dacă a treia axă este mai mică decît celelalte două axe egale, elipsoidul este *alungit* iar dacă a treia axă este mai mare decît celelalte două axe egale, atunci elipsoidul se numește *turtit*. Dacă cele trei semiaxe sînt diferite, elipsoidul este denumit *triaxial*.

Suprafața geometrică definită de ecuația de mai sus este o suprafață reală. Ea este simetrică față de cele trei plane de coordonate. Fiecare secțiune a suprafeței este o elipsă. O coardă care unește două puncte ale suprafeței și trece prin origine (diametru) este împărțită de aceasta în două părți egale. Din cauza acestei proprietăți, originea este *centrul* elipsoidului iar suprafața este simetrică față de centru. Elipsoidul este o *cvadrică cu centru.*

Fiecare elipsoid poate fi transformat prin omotetia coordonatelor (dilatare sau contracţie), care reprezintă o *transformare afină*, într-un elipsoid de rotaţie sau invers, orice elipsoid poate fi generat de un elipsoid de rotaţie. Dacă considerăm omotetia după două axe, putem să obţinem dintr-un elipsoid chiar şi o sferă.

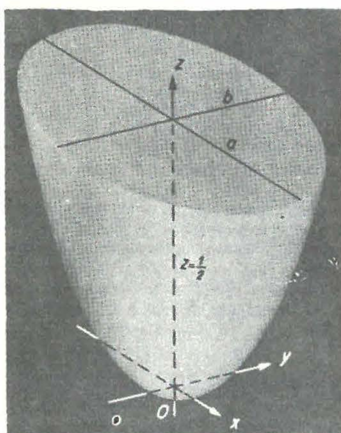
Paraboloid eliptic. Din cele trei axe principale ale paraboloidului eliptic desemnăm una anumită. Folosind un sistem de coordonate carteziene a cărui axă Oz are aceeaşi direcţie cu axa desemnată de noi, ecuaţia paraboloidului eliptic va fi următoarea:

Paraboloid eliptic	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2z=0$

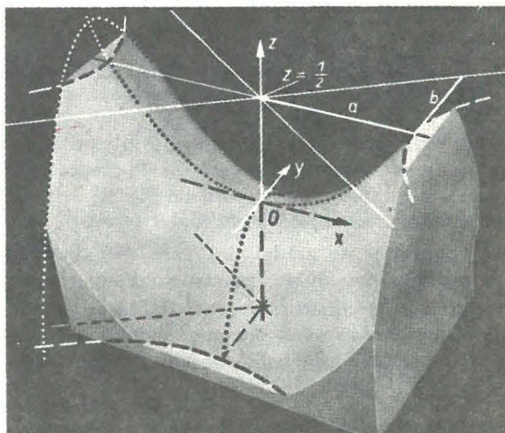
În această ecuaţie a şi b reprezintă semiaxele elipsei obţinute prin intersecţia paraboloidului eliptic cu un plan paralel cu planul xOy la înălţimea $z = 1/2$ (fig. 24.3.2); a^2 şi b^2 reprezintă semiparametrii parabolelor obţinute ca secţiuni ale paraboloidului eliptic cu planele xOz şi yOz. Dacă $a = b$, paraboloidul eliptic este un *paraboloid de rotaţie*.

Figura geometrică care are ecuaţia de mai sus reprezintă o suprafaţă care se întinde de la planul xOy pînă la infinit şi este simetrică faţă de planele xOy şi yOz. Orice secţiune plană paralelă cu axa Oz este o parabolă, iar orice secţiune perpendiculară pe axa Oz este o elipsă. Axa Oz o numim *axa* paraboloidului eliptic iar originea se numeşte *vîrful* paraboloidului eliptic. Paraboloidul eliptic nu are centru.

Printr-o transformare afină în direcţia Ox sau Oy, un paraboloid se poate transforma într-un paraboloid de rotaţie şi invers, un paraboloid eliptic de rotaţie poate genera un paraboloid eliptic oarecare.



24.3.2. Paraboloid eliptic



24.3.3. Paraboloid hiperbolic

Paraboloid hiperbolic. Din cele trei axe principale ale paraboloidului hiperbolic desemnăm una anumită. Folosind un sistem de coordonate cartezian a cărui axă Oz are aceeaşi direcţie cu axa desemnată de noi, ecuaţia paraboloidului hiperbolic va fi următoarea:

Paraboloid hiperbolic	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-2z=0$

În această ecuaţie a şi b reprezintă semiaxele hiperbolei obţinute prin intersecţia paraboloidului hiperbolic cu un plan paralel la planul xOy la înălţimea $z = 1/2$ (fig. 24.3.3). De asemenea a^2 şi b^2 sînt semiparametrii parabolelor obţinute ca secţiuni ale paraboloidului hiperbolic cu planele xOz şi yOz.

Figura geometrică care are ecuaţia de mai sus reprezintă o suprafaţă care se întinde în fiecare octant pînă la infinit. Ea este simetrică faţă de planele xOz şi yOz. Secţiunile paralele cu axa Oz sînt parabole iar cele perpendiculare pe axa Oz dar care nu trec prin origine sînt

hiperbole; vîrfurile hiperbolei se află pe o paralelă la Ox dacă secțiunea se află deasupra planului xOy și pe o paralelă la Oy în caz contrar. Planul xOy intersectează suprafața după două drepte $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ și $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$. Aceste drepte se numesc *linii de vîrf*. Planele care conțin o linie de vîrf și axa Oz se numesc *plane directoare*. Ele intersectează planele de secțiune perpendiculare pe axa Oz după asimptotele hiperbolelor obținute. Axa Oz se numește *axa paraboloidului* hiperbolic iar originea *vîrful* lui. El este un *punct șa*. Nu avem centru în cazul paraboloidului hiperbolic.

Paraboloidul hiperbolic este singura suprafață de gradul doi care nu este o suprafață de rotație și nici nu se poate transforma printr-o transformare afină într-o suprafață pe rotație sau nu poate fi generată de o astfel de suprafață. Aceasta se datorește faptului că nici o secțiune printr-un paraboloid hiperbolic nu este o elipsă. Există însă alte posibilități interesante de obținere a paraboloidului hiperbolic, de exemplu mișcînd o parabolă care are deschiderea în jos pe o parabolă cu deschiderea în sus. Din această cauză putem afirma că paraboloidul hiperbolic este o *suprafață de translație*.

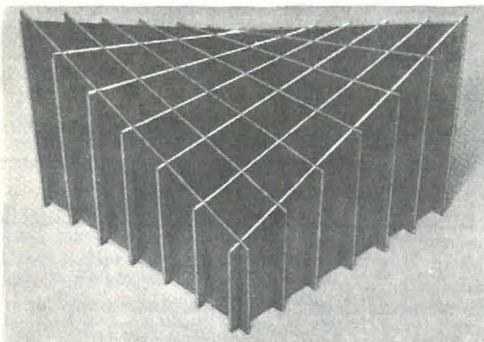
Un paraboloid hiperbolic se poate genera cu ajutorul unor familii de drepte. Dacă ecuația de mai sus o scriem sub forma $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) \cdot \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 2z$ și notăm $z \Big/ \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = u$ și $2 \Big/ \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = v$, atunci din ecuația paraboloidului hiperbolic pot fi obținute următoarele două perechi de ecuații:

$$1.\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2u, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = vz; \qquad 2.\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{z}{u}, \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{2}{v}.$$

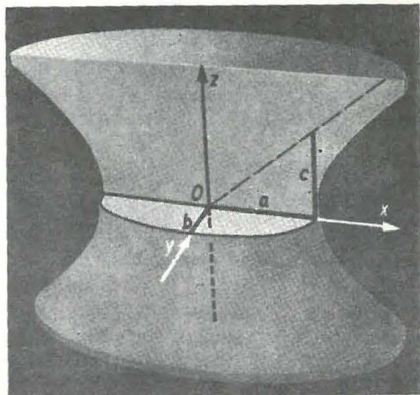
Fiecare din aceste ecuații reprezintă o familie de plane iar fiecare pereche de ecuații definește o familie de drepte. Aceste familii de drepte se află pe paraboloidul hiperbolic. Ele sînt *generatoarele* paraboloidului hiperbolic (fig. 24.3.4). Orice suprafață generată de o familie de drepte se numește *suprafață riglată*.

Suprafețe de gradul doi care sînt suprafețe riglate sînt: cilindrul eliptic, hiperbolic, parabolic, conul dublu, paraboloidul hiperbolic și hiperboloidul cu o pînză.

Deoarece cilindrul și conul dublu se pot desfășura într-un plan, ele se numesc *suprafețe desfășurabile* sau *torse*. Nu orice suprafață riglată este desfășurabilă. Hiperboloidul cu o pînză și paraboloidul hiperbolic nu sînt desfășurabile.



24.3.4. Paraboloid hiperbolic cu cele două familii de generatoare



24.3.5. Hiperboloid cu o pînză

Hiperboloid cu o pînză. Din cele trei axe principale ale hiperboloidului cu o pînză desemnăm una anumită. Folosind un sistem de coordonate cartezian a cărui axă Oz are aceeași direcție cu axa desemnată, ecuația hiperboloidului cu o pînză va fi următoarea:

Hiperboloid cu o pînză	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

În această ecuație a, b reprezintă semiaxele elipsei obținute prin intersecția planului xOy cu hiperboloidul cu o pînză (fig. 24.3.5). Totodată b și c reprezintă semiaxele hiperbolei obținute prin intersecția planului yOz cu hiperboloidul cu o pînză. Dacă $a = b$, hiperboloidul cu o pînză este un *hiperboloid de rotație cu o pînză.*

Figura geometrică reprezentată prin ecuația de mai sus este o suprafață care se află în fiecare octant și se întinde pînă la infinit. Orice secțiune plană paralelă cu axa Oz este o *hiperbolă* și orice secțiune plană perpendiculară pe axa Oz reprezintă o *elipsă*. Axa Oz se numește *axa* hiperboloidului cu o pînză. Originea este centrul hiperboloidului cu o pînză, deci hiperboloidul cu o pînză este o suprafață cu centru.

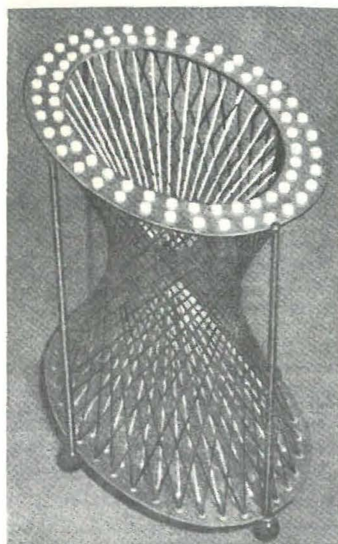
Prin transformări afine în direcția Ox sau Oy putem transforma hiperboloidul cu o pînză într-un hiperboloid de rotație cu o pînză și invers, îl putem genera dintr-un astfel de hiperboloid.

În afară de aceasta, un hiperboloid cu o pînză poate fi generat de o familie de drepte. Dacă scriem ecuația de mai sus sub forma

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\bigg/\left(\frac{y}{b}... \right)$$

notînd

$$\left(1 - \frac{y}{b}\right)\bigg/\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = u \quad \text{și} \quad \left(1 + \frac{y}{b}\right)\bigg/\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = v,$$



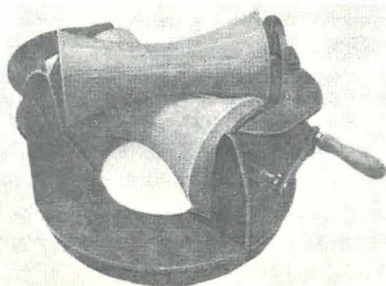
24.3.6. Hiperboloid cu o pînză cu cele două familii de generatoare și conul asimptotic

din ecuația hiperboloidului cu o pînză putem obține două perechi de ecuații:

$$1.\quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = u\left(1 + \frac{y}{b}\right), \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = v\left(1 - \frac{y}{b}\right);$$

$$2.\quad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{u}\left(1 - \frac{y}{b}\right), \quad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \frac{1}{v}\left(1 + \frac{y}{b}\right).$$

Fiecare din aceste ecuații reprezintă o familie de plane iar fiecare pereche de ecuații o familie de drepte. Acestea sînt *generatoarele* hiperboloidului cu o pînză. Hiperboloidul



24.3.7. Model pentru transmisia rotațiilor cu ajutorul a doi hiperboloizi cu o pînză

cu o pînză este deci o *suprafață riglată* (fig. 24.3.6). Datorită acestei proprietăți, în tehnică pot fi folosiți doi hiperboloizi cu o pînză ca și două conuri pentru transmiterea mișcării de rotație între doi arbori (axe) necoliniari *(roți dințate hiperbolice, roți dințate conice*, fig. 24.3.7).

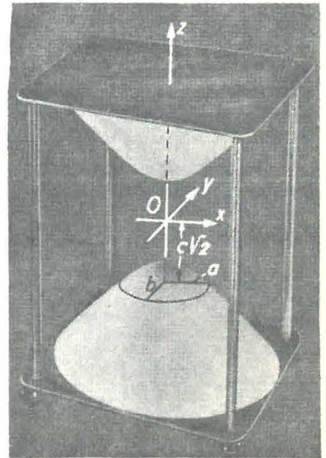
Dacă generatoarele sînt translate paralel în origine, ele formează *conul asimptotic* al hiperboloidului cu o pînză. Ecuația sa va fi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Hiperboloid cu două pînze. Din cele trei axe principale ale hiperboloidului cu două pînze desemnăm una anumită. Folosind un sistem de coordonate cartezian a cărui axă Oz are aceeași direcție cu axa desemnată, ecuația hiperboloidului cu două pînze va fi următoarea:

Hiperboloid cu două pînze	$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

În această ecuație a și b sînt semiaxele elipselor obținute prin intersecția hiperboloidului cu două pînze cu plane paralele cu planul xOy duse la înălțimea $z = \pm c\sqrt{2}$. În afară de aceasta, c și a reprezintă semiaxele hiperbolei obținute prin intersecția hiperboloidului cu două pînze cu planul xOz iar c și b semiaxele hiperbolei obținute prin intersecția hiperboloidului cu două pînze cu planul yOz (fig. 24.3.8). Dacă $a = b$, hiperboloidul cu două pînze reprezintă un *hiperboloid de rotație cu două pînze.* Figura geometrică reprezentată prin ecuația de mai sus este o suprafață formată din două părți care se întinde în toate octantele pînă la infinit. Suprafețele parțiale sînt simetrice față de planele de coordonate. Orice secțiune paralelă cu axa Oz este o *hiperbolă*, iar orice secțiune perpendiculară pe axa Oz cu $|z| > c$ este *o elipsă*. Axa Oz se numește *axa hiperboloidului cu două pînze*, originea este centrul hiperboloidului cu două pînze, deci hiperboloidul cu două pînze este o suprafață cu centru. Prin transformări afine în direcția Ox sau Oy hiperboloidul cu două pînze devine un hiperboloid de rotație cu două pînze sau invers, poate fi generat de un astfel de hiperboloid. Ca și în cazul hiperboloidului cu o pînză, putem forma și în cazul hiperboloidului cu două pînze un con asimptotic.



24.3.8. Hiperboloid cu două pînze

25. Geometrie proiectivă

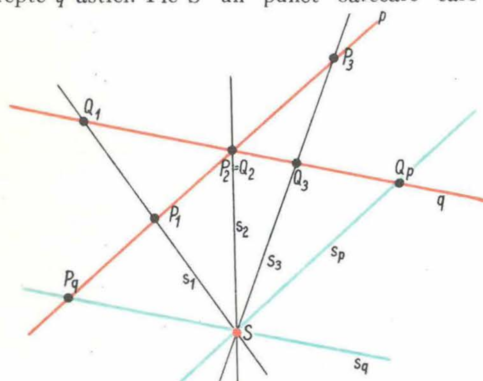
Generalități. Geometria proiectivă se ocupă cu studierea proprietăților figurilor geometrice care sînt invariante față de proiecții. Studiul perspectivei în pictură și arhitectură a dat un impuls cercetărilor în domeniul geometriei proiective (Leonardo da VINCI (1452–1519),

Albrecht DÜRER (1471—1528)). Geometria proiectivă s-a dezvoltat în strînsă legătură cu geometria analitică mai ales ca urmare a rezultatelor obținute de Gaspard MONGE (1746—1818). Principiile de bază ale geometriei analitice au fost puse de Victor PONCELET (1788—1867) în „Disertație asupra proprietăților proiective ale figurilor" *(„Traité des propriétés projectives des figures")*. Partea analitică auxiliară a geometriei proiective a fost creată de August Ferdinand MÖBIUS (1790—1868) și de Julius PLÜCKER (1801—1868), în timp ce Jakob STEINER (1796—1863) și Christian von STAUDT (1798—1867) au reușit să construiască o geometrie proiectivă fără aceste elemente auxiliare (sintetică). Legăturile dintre geometria proiectivă și cea euclidiană au fost explicate de Felix KLEIN (1849—1925). El a definit geometria ca teoria invarianților unor anumite grupuri de transformări.

25.1. Forme fundamentale ale geometriei proiective

În figurile desenate în perspectivă, două drepte ale căror originale sînt paralele se pot intersecta. Centrul acestei proiecții este ochiul. Deosebirea atît de mare socotită în planimetrie între drepte paralele și secante nu mai există; *noțiunea de paralelism* nu mai are importanță. Acest lucru a dus în cadrul studierii sistematice a principiilor geometriei proiective la introducerea *elementelor improprii*, de exemplu punctele, dreptele sau planele de la infinit.

Elemente improprii. În plan se pot proiecta punctele unei drepte p în punctele altei drepte q astfel. Fie S un punct oarecare care nu se află pe nici una dintre drepte. Punctul imagine Q împreună cu punctul original P trebuie să se afle pe o dreaptă s care trece prin S. Dreptele s formează un fascicul de raze, iar punctul S se numește *suportul* sau *centrul* fasciculului (fig. 25.1.1). Această corespondență dintre punctele P și Q este bijectivă: fiecărui punct P îi corespund unul și numai un punct Q și invers. În figură avem $P_1 \leftrightarrow Q_1$, $P_2 \leftrightarrow Q_2$, $P_3 \leftrightarrow Q_3$. În cazul a două puncte P_q și Q_p această afirmație nu este adevărată. Dreptele s_q și s_p corespunzătoare punctelor respective sînt paralele cu una din cele două drepte date. Pentru a păstra univocitatea acestei corespondențe și în cazul acestor puncte, se stabilesc următoarele: și punctul P_q are un punct imagine și numai unul U_q (și Q_∞) și originalul punctului Q_p este unic U_p(și P_∞). Aceste puncte se numesc *punctele improprii* sau *punctele de la infinit* ale dreptelor p și q. Aceasta înseamnă că fiecare dreaptă are numai un singur punct impropriu U de care un punct oarecare P se poate apropia oricît de mult sau parcurgînd dreapta în sensul $P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3$ sau în sens invers $P_3 \rightarrow P_2 \rightarrow P_1$. Ne putem închipui dreapta ca o dreaptă închisă în acest punct. Deci nu mai are importanță deosebirea dintre punctele P_2 și P_q ca punct interior sau respectiv exterior față de segmentul P_1P_3, deoarece fiecare dintre ele poate fi acum socotit punct exterior sau interior față de acest segment. În geometria proiectivă despre aceste puncte se afirmă numai următoarele:



25.1.1. Introducerea punctelor improprii

Perechile de puncte P_1, P_3 *și* P_2, P_q *se separă* iar perechile de puncte P_1, P_2 și P_q, P_3 nu se separă.

Deoarece în cazul unei proiecții centrale a unui plan pe alt plan imaginea a două drepte paralele este în general formată din două drepte care se intersectează într-un punct care corespunde punctului la infinit al celor două drepte originale, putem afirma că cele două drepte paralele au un punct impropriu comun. Deci prin punct înțelegem: 1) orice punct în sensul obișnuit; 2) orice punct impropriu. Teorema „Două drepte oarecare au sau aceeași direcție sau un punct comun" se poate formula acum astfel:

Două drepte oarecare aflate într-un plan proiectiv se intersectează fără excepție într-un punct. Pe de altă parte, două puncte definesc întotdeauna o dreaptă.

Și punctele improprii U_p și U_q definesc o dreaptă — *dreapta improprie* sau dreapta de la infinit a planului proiectiv. Ea este formată din totalitatea punctelor improprii ale dreptelor din plan pe care se vor intersecta toate dreptele paralele în sensul de mai înainte. Acest rezultat se poate dezvolta. Și două plane paralele E_1 și E_2 se intersectează în spațiul proiectiv. Ele au comună aceeași dreaptă improprie $u_1 = u_2$. Deci în spațiu intersecția a două plane va fi fără excepție o dreaptă. Dacă mai avem încă un plan E_3 în afară de cele două plane paralele E_1 și E_2, care nu este paralel cu ele, vom avea trei drepte de intersecție: dreapta improprie $u_1=u_2$ dintre planele E_1 și E_2 și două drepte paralele s_1 și s_2 care reprezintă intersecția planelor E_1 și E_3 și respectiv E_2 și E_3. Aceste trei drepte pot avea comun numai un singur punct impropriu U prin care va trece, în afară de dreapta improprie $u_1=u_2$, și dreapta improprie u_3 a planului E_3. Planul definit de $u_1=u_2$ și u_3 este planul impropriu al spațiului proiectiv; el conține dreptele improprii ale fiecărui plan din spațiu, deci este totalitatea punctelor improprii ale spațiului proiectiv. În acest plan se intersectează toate planele paralele în sens euclidian ale spațiului.

Forme fundamentale ale geometriei proiective. Toate figurile geometrice fundamentale pentru care proiectarea și secționarea sînt aplicații bijective au aceeași dimensiune (sînt de aceeași speță).

Forme fundamentale unidimensionale (de speța I)

Dreapta punctată (punctuală):	toate punctele P ale unei drepte p, *suportul* punctualei, inclusiv punctul impropriu U_p.
Fascicul de drepte:	toate dreptele s care se află într-un plan și trec printr-un punct S, *suportul* fasciculelor de drepte.
Fascicul de plane:	toate planele E, care trec prin dreapta e, suportul fasciculului de plane (fig. în cap. 24).

Forme fundamentale bidimensionale (de speța a II-a)

Planul punctat:	toate punctele unui plan E, inclusiv punctele improprii ale planului.
Stea de drepte:	toate dreptele care trec printr-un punct Z; orice plan care nu trece prin Z este intersectat după un plan punctat.
Planul riglat:	toate dreptele unui plan, inclusiv și dreapta improprie a acestui plan.
Stea de plane:	toate planele care trec printr-un punct Z.

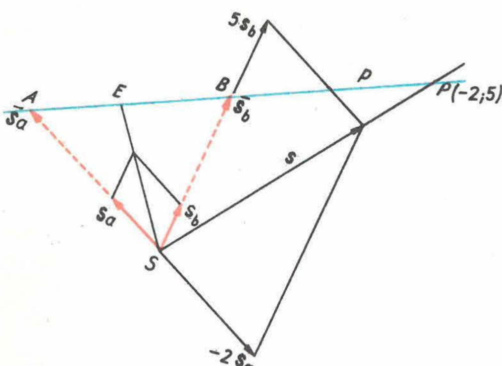
25.2. Biraportul în coordonate proiective

Pe o dreaptă în sens euclidian, un punct este determinat de un număr, coordonata sa x; aceasta înseamnă că poziția sa este raportată la *originea* O și punctul E al *versorului* $e = \overline{OE}$. În cazul unei transformări (aplicații) a unei astfel de drepte în altă dreaptă, de exemplu în

cazul unei translații sau rotații, punctelor depărtate unele față de altele le corespund tot astfel de puncte. În geometria proiectivă punctul impropriu al unei punctuale este un punct la fel ca celelalte și deci nu vom mai putea stabili poziția punctului în acest fel.

Coordonate proiective pe o dreaptă. Pentru determinarea coordonatelor proiective vom stabili poziția unui punct S într-o formă de dimensiune (speță) mai mare, deci în cazul acesta un plan proiectiv E care conține dreapta punctată.

Punctul S nu aparține dreptei punctate și va fi originea unui *sistem de bază de vectori*, de exemplu, doi *vectori liniar independenți* $\mathbf{s}_a$ și $\mathbf{s}_b$. În planul ales, facem să corespundă fiecărui punct P al dreptei p date dreapta fasciculului cu suportul S care trece prin punctul P. Această corespondență este biunivocă. Deci putem caracteriza fiecare punct P al lui p prin coordonatele (a, b) ale unui vector director $\mathbf{s} = a\mathbf{s}_a + b\mathbf{s}_b$ al dreptei din fasciculul care trece prin punctul P (fig. 25.2.1). Perechea de numere (a, b) se numesc *coordonate proiective omogene* ale punctului P. Se numesc omogene deoarece vectorul $\mathbf{s}$ și astfel coordonatele lui P sînt determinate pînă la un factor scalar diferit de zero. Punctele A și B ale lui p de coordonate $(1, 0)$, respectiv $(0, 1)$ care aparțin dreptelor fasciculului cu vectorii directori $\mathbf{s}_a$ și $\mathbf{s}_b$ se numesc *puncte fundamentale* ale sistemului de coordonate. Punctul E de coordonate $(1, 1)$ se numește *punct unitar* al sistemului de coordonate.



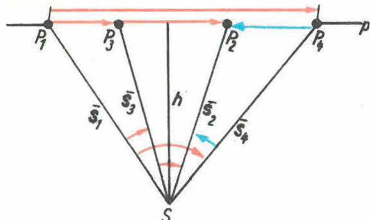
25.2.1. Introducerea coordonatelor proiective

Biraport. Vom nota cu $F(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j)$ **aria orientată** a paralelogramului format de vectorii $\mathbf{s}_i$ și $\mathbf{s}_j$. Semnul ei depinde de sensul unghiului cu care trebuie să rotim pe $\mathbf{s}_i$ ca să coincidă cu $\mathbf{s}_j$. Pentru patru puncte P_1, P_2, P_3, P_4 ale dreptei punctate p definim biraportul $(P_1P_2P_3P_4)$ astfel:

$$(P_1P_2P_3P_4) = (\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2\mathbf{s}_3\mathbf{s}_4) = \frac{F(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_3) \cdot F(\mathbf{s}_4, \mathbf{s}_2)}{F(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_4) \cdot F(\mathbf{s}_3, \mathbf{s}_2)}.$$

Biraportul nu depinde de alegerea planului E și a punctului S din E.

Dacă pentru determinarea biraportului alegem un alt plan E' și un alt punct S' al acestui plan, există o transformare afină a lui E' pe E care face să corespundă lui S' punctul S, iar dreapta p rămîne fixă. Dacă proiectăm central dreapta p pe o altă dreaptă astfel încît P'_1, P'_2, P'_3, P'_4 sînt imaginile punctelor P_1, P_2, P_3, P_4, atunci prin definiție $(P_1P_2P_3P_4) = (\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2\mathbf{s}_3\mathbf{s}_4)$ și $(P'_1P'_2P'_3P'_4) = (\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2\mathbf{s}_3\mathbf{s}_4)$.



25.2.2. Biraport și raport simplu

Biraportul este proiectiv invariant.

Legătura dintre biraport și raportul simplu în cazul a patru puncte ale unei drepte. În geometria analitică în plan s-a arătat că poziția unui punct P_3 pe o dreaptă, indiferent de orientarea sa, este exprimată prin raportul λ_3 în care împarte punctul P_3, un segment $\overline{P_1P_2}$. Un punct diferit de P_3, de exemplu P_4 împarte același segment $\overline{P_1P_2}$ în raportul λ_4. Dacă socotim dreapta drept o punctuală, biraportul celor patru puncte se află într-o strînsă relație cu raporturile λ_3 și λ_4.

Printr-o alegere convenabilă a unor factori scalari r_{ip} se pot determina vectorii $\bar{\mathbf{s}}_i$ ai fasciculului de drepte S care se termină în punctele de intersecție P_i (fig. 25.2.2). Ariile $F(\bar{\mathbf{s}}_1, \bar{\mathbf{s}}_3)$, $F(\bar{\mathbf{s}}_4, \bar{\mathbf{s}}_2)$, $F(\bar{\mathbf{s}}_1, \bar{\mathbf{s}}_4)$ și $F(\bar{\mathbf{s}}_3, \bar{\mathbf{s}}_2)$ care apar în definiția biraportului au diferite semne după cum reiese din figură. Dacă $F(\bar{\mathbf{s}}_4, \bar{\mathbf{s}}_2)$ este pozitivă, celelalte trei sînt negative. Dacă conturul

suprafeței de arie pozitivă este parcurs astfel încît ea se află mereu la stînga, notînd distanța punctului S față de dreapta p cu h, ariile suprafețelor vor fi următoarele:

$$F(\bar{s}_1, \bar{s}_3) = 2\Delta P_1P_3S = \overline{P_1P_3}\cdot h,\quad F(\bar{s}_4, \bar{s}_2) = 2\Delta P_4P_2S = \overline{P_4P_2}\cdot h,$$

$$F(\bar{s}_1, \bar{s}_4) = 2\Delta P_1P_4S = \overline{P_1P_4}\cdot h,\quad F(\bar{s}_3, \bar{s}_2) = 2\Delta P_3P_2S = \overline{P_3P_2}\cdot h.$$

$$(\bar{s}_1\bar{s}_2\bar{s}_3\bar{s}_4) = \frac{\overline{P_1P_3}\cdot\overline{P_4P_2}}{\overline{P_1P_4}\cdot\overline{P_3P_2}} = \frac{\overline{P_1P_3}}{\overline{P_3P_2}} : \frac{\overline{P_1P_4}}{\overline{P_4P_2}} = (P_1P_2P_3P_4)$$

Biraportul este deci cîtul celor două rapoarte $\lambda_3 = \frac{\overline{P_1P_3}}{\overline{P_3P_2}}$ și $\lambda_4 = \frac{\overline{P_1P_4}}{\overline{P_4P_2}}$ în care punctele P_3, respectiv P_4 împart segmentul $\overline{P_1P_2}$ al dreptei euclidiene g. Deoarece

$$(P_1P_2P_3P_4) = \frac{\overline{P_1P_3}\cdot\overline{P_4P_2}}{\overline{P_1P_4}\cdot\overline{P_3P_2}} = \frac{\overline{P_3P_1}}{\overline{P_1P_4}} : \frac{\overline{P_3P_2}}{\overline{P_2P_4}} = (P_3P_4P_1P_2),$$

putem inversa în biraport perechile de puncte între ele.

Dacă perechile de puncte P_1, P_2 și P_3, P_4 se separă și rapoartele λ_3 și λ_4 sînt egale, biraportul are valoarea -1 și se numește *biraport armonic*. Punctele se numesc *puncte armonice*. În cap. 7 a fost prezentată o construcție geometrică foarte simplă pentru împărțirea unui segment în raportul $\lambda = +\frac{m}{n}$ sau respectiv $\lambda = -\frac{m}{n}$. O metodă proiectivă de construire a punctelor armonice va fi arătată cu ocazia prezentării proprietăților patrulaterului complet.

Poziții particulare ale celor patru puncte. Dacă punctul P_4 coincide cu unul din celelalte puncte P_1, P_2 sau P_3, obținem următoarele rezultate:

$$(P_1P_2P_3P_1) = \infty,\quad (P_1P_2P_3P_2) = 0,\quad (P_1P_2P_3P_3) = 1$$

În cazul în care $P_4 \to P_1$, trecem la limită deoarece numitorul este egal cu 0. Dacă unul din cele patru puncte este punctul impropriu U al dreptei punctate, atunci datorită faptului că $(P_1P_2P_3P_4) = (P_3P_4P_1P_2)$ putem afirma că punctul impropriu este unul din cele două puncte care împart segmentul finit. Fie $P_4 = U$. După cum s-a arătat în geometria analitică, raportul $\lambda_4 = \frac{\overline{P_1P_4}}{\overline{P_4P_2}}$ are valoarea $\lambda_4 = -1$ iar biraportul punctelor P_1, P_2, P_3, P_4 va fi egal cu negativul raportului λ_3 în care punctul P_3 împarte segmentul $\overline{P_1P_2}$, $(P_1P_2P_3U) = -\lambda_3 = -\frac{\overline{P_1P_3}}{\overline{P_3P_2}}$. Dacă punctele P_3 și U împart armonic segmentul $\overline{P_1P_2}$, deci $-1 = (P_1P_2P_3U) = -\frac{\overline{P_1P_3}}{\overline{P_3P_2}}$, rezultă că $\overline{P_1P_3} = \overline{P_3P_2}$, deci punctul P_3 împarte segmentul P_1P_2 în două părți egale.

Biraport în coordonate proiective. Dacă raportăm vectorii $\mathbf{s}_a$, $\mathbf{s}_b$, $\mathbf{s}_i$ și $\mathbf{s}_j$ la un sistem de coordonate carteziene, obținem în cazul în care α este unghiul orientat format de vectorii $\mathbf{s}_a$ și $\mathbf{s}_b$

$$F(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j) = \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix} |\mathbf{s}_a|\,|\mathbf{s}_b| \sin\alpha = \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix} F(\mathbf{s}_a, \mathbf{s}_b),$$

unde (a_i, b_i), respectiv (a_j, b_j) sînt coordonatele vectorilor $\mathbf{s}_i$ și $\mathbf{s}_j$, respectiv. Biraportul va putea fi exprimat prin determinanți ai coordonatelor proiective. Dacă schimbăm lungimea unui vector $\mathbf{s}_i$, de exemplu $r_i\mathbf{s}_i$, valoarea biraportului rămîne aceeași prin introducerea coordonatelor proiective (r_ia_i, r_ib_i) pentru fiecare din cele patru puncte $(i = 1, 2, 3, 4)$. Dacă înlocuim punctul P_1 cu punctul $B(0, 1)$ și punctul P_2 cu $A(1, 0)$, valoarea biraportului va fi egală cu

$$(P_1P_2P_3P_4) = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_4 & b_4 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

$$(BAP_3P_4) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_4 & b_4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{a_3 \cdot b_4}{a_4 \cdot b_3}.$$

De aici rezultă că raportul este negativ dacă perechile de puncte B, A și P_3, P_4 se separă deoarece a_3 și b_3 au același semn pe cînd a_4 și b_4 sînt de semne contrare.

Determinarea unei aplicații proiective prin biraport. Dacă punctelor unei drepte punctate le asociem prin biraport coordonate proiective prin direcțiile a doi vectori de bază $\mathbf{s}_a$ și $\mathbf{s}_b$, atunci poziția punctului unitar determinat de vectorul $\mathbf{s}_e = 1 \cdot \mathbf{s}_a + 1 \cdot \mathbf{s}_b$ depinde de mărimea vectorilor $\mathbf{s}_a$ și $\mathbf{s}_b$. Cît timp se menține raportul $|\mathbf{s}_a| : |\mathbf{s}_b|$ al modulelor vectorilor constant, obținem același punct E; pentru diferite valori ale raportului, E ia și el poziții diferite pentru care raportul $\overline{BE} : \overline{EA}$ este pozitiv și finit. Invers, prin alegerea poziției lui E lungimea vectorilor de bază $\mathbf{s}_a$ și $\mathbf{s}_b$ este unic determinată pînă la un factor constant.

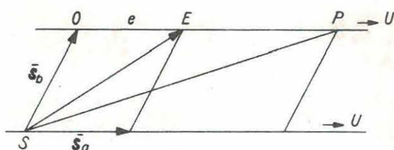
Fie pe o dreaptă punctată trei puncte B, A și E; atunci putem determina un sistem de bază $\mathbf{s}_a$, $\mathbf{s}_b$ cu centrul S, pentru care A și B sînt puncte fundamentale iar punctul E un punct unitar. Centrul S poate fi orice punct de pe un plan care trece prin dreapta punctată p. Poziția fiecărui al patrulea punct P al dreptei punctate este determinată de biraportul $(PEBA)$.

Dacă punctele B', A', E' ale unei drepte punctate p' sînt imaginile punctelor B, A, E ale dreptei punctate p, atunci pentru cel de-al patrulea punct P oarecare biraportul $(PEBA)$ are o valoare stabilită μ. Însă prin biraportul $\mu = (P'E'B'A')$ orice punct P' este definit univoc.

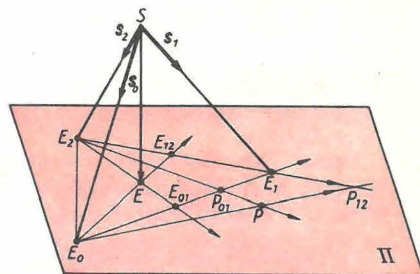
Aplicația proiectivă a două drepte punctate este univoc definită prin două puncte fundamentale și un punct unitar.

Relații între coordonatele proiective și coordonatele euclidiene pe drepte (abscise). Aplicația proiectivă este astfel aleasă încît punctul A este punctul impropriu U iar punctul B originea sistemului de coordonate de pe dreaptă.

În expresia $(PEOU) = \dfrac{\overline{PO}}{\overline{OE}} \cdot \dfrac{\overline{UE}}{\overline{PU}}$ raportul $\dfrac{\overline{UE}}{\overline{PU}}$ are valoarea -1 (vezi cap. 13), deoarece $\overline{PO} = -\overline{OP}$ și obținem pe dreapta euclidiană pentru



25.2.3. Relațiile dintre coordonatele proiective și cele euclidiene

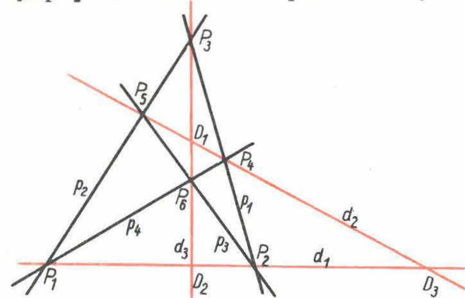


25.2.4. Caracterizarea raporturilor de coordonate într-un plan proiectiv

determinarea poziției punctului P raportul $\overline{OP} : \overline{OE}$ sau $x : e$, unde e este lungimea vectorului unitate OE.

Extinderea la două sau mai multe dimensiuni. Constatările făcute pînă acum se pot generaliza pe figuri proiective n-dimensionale. Imaginea lor proiectivă este unic determinată de $n+1$ puncte fundamentale liniar independente $E_0, E_1, \ldots, E_n$ și de punctul unitar E.

În cazul în care $n=2$, centrul S se află în afara planului proiectiv Π în spațiul tridimensional (fig. 25.2.4). Într-un sistem de bază există în punctul S trei vectori liniar independenți s_0, s_1, s_2 care intersectează planul π în punctele fundamentale E_0, E_1, E_2. Lungimea acestor vectori este perfect determinată de punctul unitar E. Se arată că un punct oarecare P al planului π este unic determinat numai prin biraporturi. Dreapta E_0E_1 va fi intersectată de dreptele E_2E și E_2P în punctele E_{01}, respectiv P_{01}. Poziția lui P_{01} este unic determinată de biraportul $(P_{01}E_{01}E_0E_1)$. Analog poziția punctului P_{12} de pe dreapta E_1E_2 este determinată de $(P_{12}E_{12}E_1E_2)$. Deci vom afla poziția punctului P ca punct de intersecție a lui E_2P_{01} și E_0P_{12}. Într-un spațiu ($n = 3$) sistemul de referință este format din patru puncte fundamentale liniar independente E_0, E_1, E_2, E_3 și punctul unitar E. Dreptele duse prin cîte două puncte fundamentale vor fi intersectate de plane, de exemplu dreapta E_0E_1 va fi intersectată de planele duse prin punctele E_2, E_3, E și respectiv E_2, E_3, P în punctele E_{01} și P_{01} respectiv. Punctul P este punctul de intersecție a trei plane: cel care trece prin punctele E_2, E_3, P_{01}, cel care trece prin E_3, E_4, P_{12} și cel care trece prin E_4, E_0, P_{23}.



25.2.5. Patrulater complet

În spații de dimensiuni mai mari ($n > 3$) dreptele E_0E_1, E_1E_2 vor fi intersectate de hiperplane în n puncte.

Patrulater complet. Un patrulater se numește complet deoarece spre deosebire de geometrie plană se va ține seama de toate punctele de intersecție ale celor patru laturi și diagonalelor sale. El este determinat de patru drepte punctate p_1, p_2, p_3, p_4 care se intersectează într-un punct al planului cel mult cîte două deodată. Deci vom avea $C_4^2 = 6$ puncte de intersecție care vor fi vîrfurile $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ (fig. 25.2.5). Între cele șase vîrfuri există $C_6^2 = 15$ drepte de legătură. Pe fiecare latură se găsesc trei vîrfuri, deci fiecărei laturi îi corespund trei drepte de legătură, deci celor patru laturi le vor corespunde 12 drepte. Celelalte trei sînt *diagonalele* d_1, d_2, d_3. Pe diagonale se află numai cîte două vîrfuri. Diagonalele se intersectează două cîte două în punctele D_1, D_2, D_3.

Fiecare latură a triunghiului $D_1D_2D_3$ format de diagonale, numit triunghi diagonal, este împărțită armonic de vîrfurile patrulaterului complet care se află pe ea.

Pentru demonstrare analizăm triunghiul $P_1P_2P_3$. Pe laturile sale se găsesc punctele D_2, D_3, P_4, P_5. Fiecare împarte latura respectivă într-un raport dat: $\lambda_3 = \overline{P_1D_2}:\overline{D_2P_2}$, $\lambda_3' = \overline{P_1D_3}:\overline{D_3P_2}$, $\lambda_1 = \overline{P_2P_4}:\overline{P_4P_3}$ și $\lambda_2 = \overline{P_3P_5}:\overline{P_5P_1}$. Conform *teoremei lui Ceva* avem $\lambda_3\lambda_1\lambda_2 = +1$ deoarece secantele prin vîrfurile triunghiului se intersectează în punctul P_6. Conform *teoremei lui Menelaos* $\lambda_3'\lambda_1\lambda_2 = -1$ deoarece dreapta d_2 intersectează laturile triunghiului $P_1P_2P_3$ în punctele D_3, P_4, P_5. Prin împărțirea lui λ_3 la λ_3' obținem $\lambda_3:\lambda_3' = (P_1P_2D_2D_3) = -1$.

Dacă privim punctul P_3 ca suportul unui fascicul de raze care este intersectat de dreptele d_1 și d_2, obținem $(P_1P_2D_2D_3) = (P_5P_4D_1D_3) = -1$; același lucru este valabil pentru punctul P_1 și dreptele d_2 și d_3 care dau $(P_5P_4D_1D_3) = (P_3P_6D_1D_2) = -1$.

Cu ajutorul unui patrulater complet putem construi un punct conjugat armonic numai cu ajutorul unei rigle fără ajutorul compasului sau al paralelelor.

Într-adevăr, fie P_1P_2 segmentul dat și D_3 un punct care-l împarte într-un raport dat. Două drepte p_1 și p_2 duse prin punctele P_2 și P_1 se intersectează în punctul P_3. O dreaptă d_2 dusă prin D_3 intersectează dreptele p_1 și p_2 în punctele P_4, respectiv P_5. Dreptele duse prin P_1, P_4 (p_4) și P_2, P_5 (p_5) se intersectează în P_6. Dreapta care unește P_3 cu P_6 intersectează segmentul dat în punctul căutat D_2.

Biraportul dreptelor și planelor. Invarianța biraportului a patru puncte ale unei punctuale față de proiecția dintr-un centru S ne indică faptul că biraportul este unic determinat de dreptele SP_1, SP_2, SP_3, SP_4 ale fasciculului de raze ce trece prin S.

În mod asemănător se poate arăta că patru plane ale unui fascicul de plane intersectează o dreaptă, care nu trece prin dreapta suport, în patru puncte al căror raport armonic (biraport) este independent de poziția dreptei. Cu ajutorul unui sistem de coordonate bine ales se poate obține ca și în cazul unei punctuale o expresie analitică *pentru biraportul a patru plane ale unui fascicul de plane.*

25.3. Aplicații proiective (proiectivitate)

În geometria descriptivă a fost prezentată *proiecția centrală.* Punctele unui plan original sînt proiectate pe un plan imagine astfel încît raportul anarmonic se menține. În cazul proiecției centrale corespondența bijectivă nu se poate realiza întotdeauna, în special în cazul în care corpurile sînt reprezentate pe planșe de desen. Este bine cunoscută încercarea nereușită de a construi corpul reprezentat în tabloul „Melancolie“ a lui Dürer în mărime naturală. Toate punctele situate pe aceeași rază de proiecție au aceeași imagine. Cu ajutorul poziției unui punct de pe planșa de desen și al centrului de proiecție din spațiu nu poate fi stabilită poziția punctului original din spațiu. Și în cazul proiecției unei drepte punctate care se află în poziție oblică avem în cazul proiecției centrale greutăți pe care reușim să le îndepărtăm în geometria proiectivă care interpretează *aplicațiile proiective* (proiectivitate) ca un lanț de *perspectivități* cu diferite *centre de proiecție.* De exemplu, fie g_1 și g_2 două drepte, iar s dreapta de intersecție a două plane E_1 și E_2 care conțin unul pe g_1, celălalt pe g_2, astfel încît proiecția lui g_1 pe s și a lui s pe g_2 sînt proiectivități care mențin constant *biraportul* iar corespondența de la originalul g_1 la proiecția g_2 este *biunivocă.* Dacă printr-o proiectivitate U o formă fundamentală g trece într-o formă fundamentală g_1 și aceasta printr-o altă proiectivitate B trece în g_2, atunci există o aplicație bijectivă dintre formele fundamentale g și g_2 iar *valoarea biraportului* (raportului anarmonic) pentru elementele care se suprapun prin proiectivitățile U și B este *același.* Această proiectivitate se notează prin produsul BU. Din aceleași motive și aplicațiile reciproce U^{-1} și respectiv B^{-1} care transformă pe g_1 în g și respectiv pe g_2 în g_1 sînt proiective. Același lucru este valabil și pentru aplicația identică a unei forme fundamentale *pe ea însăși.* Pentru a nu îngreuna cercetările în geometria proiectivă prin astfel de lanțuri, vom analiza de multe ori aplicațiile identice.

Obiectul geometriei proiective este studiul figurilor și proprietăților care rămîn invariante față de o aplicație proiectivă.

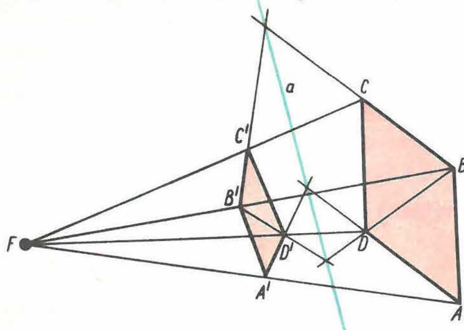
Coliniații. Aplicațiile proiective ale unui plan punctat sau ale unui spațiu proiectiv pe el însuși se numesc coliniații deoarece *punctele coliniare,* adică punctele care se află pe o dreaptă trec tot în puncte coliniare. Cea mai *importantă teoremă* despre aplicațiile proiective este:

O coliniație într-un plan este unic determinată dacă la patru puncte, dintre care trei nu sînt coliniare deodată, corespund patru puncte imagine care se bucură de aceeași proprietate.

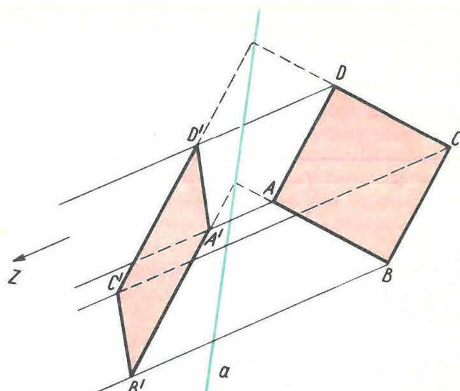
Coliniațiile planului proiectiv formează *un grup* deoarece produsul a două coliniații, aplicația identică și cea inversă sînt tot coliniații. Subgrupuri ale coliniațiilor (omografiilor) sînt omologiile, corespondentele afine sau afinitățile, similitudinile și congruențele. Coliniațiile (omografiile) determină o proiectivitate între formele de primă speță corespondente. De aceea, grupul omografiilor se numește și grupul proiectiv al spațiului.

Omologiile sînt omografiile avînd proprietatea de a avea o dreaptă de puncte unite, numită *axa omologiei* a și un fascicul de drepte unite cu centrul numit *centrul omologiei* F. Punctele unite sînt punctele care corespund propriilor lor omoloage. Omologia este separată dacă centrul aparține axei (fig. 25.3.1). Dacă axa de omologie coincide cu dreapta de la infinit și omologia nu este specială, corespondența se numește *omotetie* (fig. 25.3.2). Omografia în

care dreptele de la infinit se corespund se numește *corespondență afină* sau *afinitate*. Dacă introducem și noțiunea de *ortogonalitate*, atunci



25.3.1. Proiecția unui paralelogram prin coliniație centrală

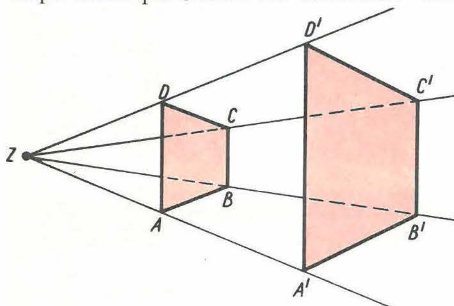


25.3.2. Coliniația centrală cu axa reală a și centru impropriu Z este o transformare afină (afinitate)

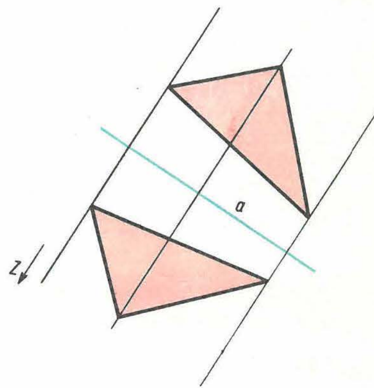
subgrupul afinităților care conservă unghiurile (transformă două drepte perpendiculare tot în drepte perpendiculare) sînt *similitudinile* (fig. 25.3.3).

Din grupul similitudinilor putem extrage un subgrup pentru care lungimile se conservă. Acestea sînt *congruențele* (fig. 25.3.4).

Teoreme referitoare la proiectivitate. Multe teoreme ale planimetriei pot fi privite drept cazuri particulare ale teoremelor din



25.3.3. Coliniația centrală cu axa improprie și centru real este o similitudine



25.3.4. Imaginea în oglindă — coliniație cu axa reală și centru Z impropriu

geometria proiectivă. Două perechi de drepte paralele q_1, q_2 și q_3, q_4 (fig. 25.3.5) formează un paralelogram $Q_3Q_4Q_6Q_5$ iar diagonalele sale e_3 și e_2 se taie în părți egale. Punctul E_1 împarte segmentele $\overline{Q_3Q_6}$ și $\overline{Q_4Q_5}$ în raporturile egale cu $\lambda = +1$. Punctele improprii ale diagonalelor le împart în raportul $\lambda' = -1$. Deci

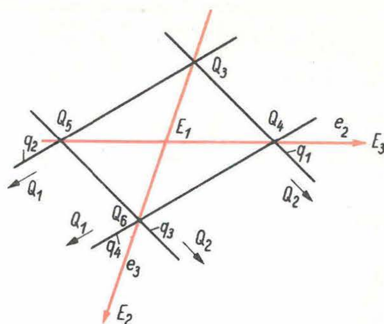
$$(Q_3Q_6E_1E_2) = (Q_5Q_4E_1E_3) = -1.$$

Dacă considerăm toate dreptele ca drepte punctate (punctuale), atunci E_2 și E_3 se află pe dreapta improprie a planului și laturile q_1 și q_3 ca și q_2 și q_4 se intersectează pe această dreaptă în punctele Q_2 și respectiv Q_1. Printr-o proiectivitate ($Q_i \to P_i$, $q_i \to p_i$, $E_i \to D_i$, $e_i \to d_i$) dreptei improprii $Q_1E_2Q_2E_3$ îi corespunde dreapta $P_1D_2P_2D_3$ și paralelogramului un patrulater complet. Teorema din planimetrie că *diagonalele unui paralelogram se taie în părți egale* este astfel un caz particular al teoremei geometriei proiective, că *într-un patrulater complet*

pe fiecare diagonală două vîrfuri și punctele de intersecție ale celorlalte diagonale cu ea formează un biraport armonic.

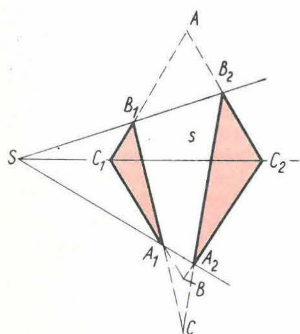
Teorema lui Desargues. Dacă într-un plan avem două triunghiuri astfel încît dreptele care unesc vîrfurile omoaloge se întîlnesc în același punct, atunci laturile corespunzătoare se întîlnesc în puncte situate pe o dreaptă.

Această teoremă se numește teorema triunghiurilor omoloage. În figura 25.3.6 dreptele A_1A_2, B_1B_2 și C_1C_2 se întîlnesc în același punct S iar punctele de intersecție A (a lui C_1B_1 cu C_2B_2), B (a lui A_1C_1 cu A_2C_2) și C (a lui B_1A_1 cu B_2A_2) se află pe dreapta s. Deoarece ne ocupăm numai de puncte de intersecție și de poziția unor puncte pe o dreaptă, deci numai de incidențe, putem spune că este vorba de o teoremă a geometriei proiective.



25.3.5. Paralelogramul cu diagonalele sale—caz special de patrulater complet

1. *Demonstrația în cazul unei poziții particulare.* Prin cele două puncte de intersecție A și B se poate duce întotdeauna o dreaptă AB. Dacă alegem o proiectivitate U astfel încît această dreaptă are ca imagine dreapta improprie, atunci proiecțiile laturilor $C_1'B_1'$ și $C_2'B_2'$ ale



25.3.6. Teorema lui Desargues

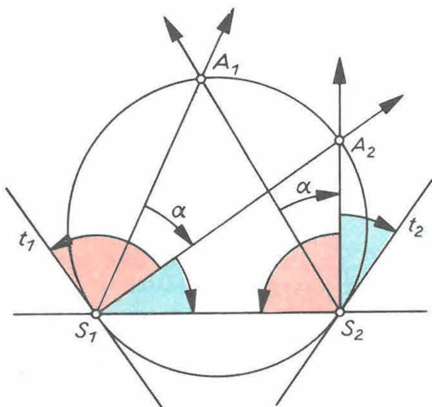
triunghiurilor sînt paralele. La fel avem și $C_1'A_1' || C_2'A_2'$. Deci și $A_1'B_1'$ și $A_2'B_2'$ trebuie să fie paralele și se vor intersecta pe dreapta improprie $A'B'$ în punctul C'. Din aplicația proiectivă inversă U^{-1} reiese că și punctul de intersecție C al dreptelor A_1B_1 și A_2B_2 se află pe dreapta AB.

2. *Proiecția unei figuri din spațiu.* Presupunem că S este vîrful unui triedru ale cărui muchii sînt SA_1A_2, SB_1B_2 și SC_1C_2. *Intersecțiile acestui triedru cu două plane* care trec prin AB sînt triunghiurile $A_1B_1C_1$ și $A_2B_2C_2$. Este clar că și A_1B_1 și A_2B_2 se intersectează pe AB. Dacă proiectăm această figură în plan, relațiile de incidență nu se modifică. Pe de altă parte recunoaștem că orice figură plană din teorema lui Desargues apare ca o proiecție a unei figuri din spațiu descrisă mai sus (fig. 25.3.6).

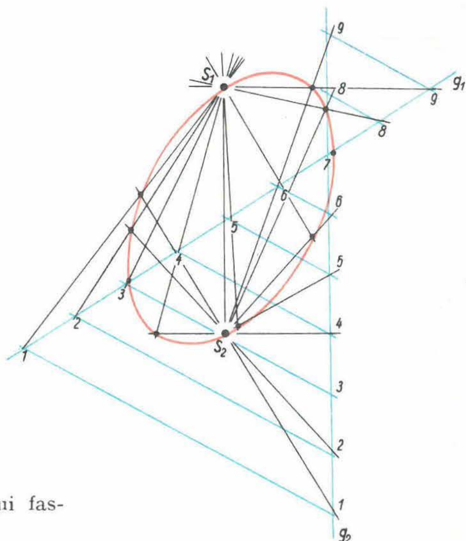
Construcții proiective ale conicelor. Două puncte S_1 și S_2 de pe un cerc sînt suporturi ale cîte unui fascicul de raze ale cărui raze au fost puse în corespondență astfel încît raza originală și raza imagine se intersectează în același punct al cercului, de exemplu $S_1A_1 \leftrightarrow S_2A_1$, $S_1A_2 \leftrightarrow S_2A_2$. Conform proprietăților unghiurilor de pe cerc, unghiurile care corespund la arce egale sînt egale; de ex. $(S_1A_1, S_1A_2) = (S_2A_1, S_2A_2) = \alpha$, deoarece le corespunde același arc de cerc $\overset{\frown}{A_1A_2}$. Datorită faptului că unghiul format de tangenta într-un punct și o coardă (fig. 25.3.7) care trece prin acel punct este egal cu jumătatea arcului subîntins de coardă, rămîne valabilă egalitatea unghiurilor și în cazul cînd razei $S_1 \rightarrow S_2$ îi corespunde ca imagine tangenta în S_2 la cerc și cînd razei $S_2 \rightarrow S_1$ îi corespunde ca imagine tangenta în S_1 la

cerc. Razele $S_1 \to S_2$ și $S_2 \to S_1$ nu sînt în corespondență, fasciculele de raze *nu sînt în perspectivă.*

Datorită egalității unghiurilor, aplicația celor două fascicule nu este numai o *proiectivitate* ci chiar o *congruență*, Printr-o transformare proiectivă a întregii figuri, congruențele fasci-



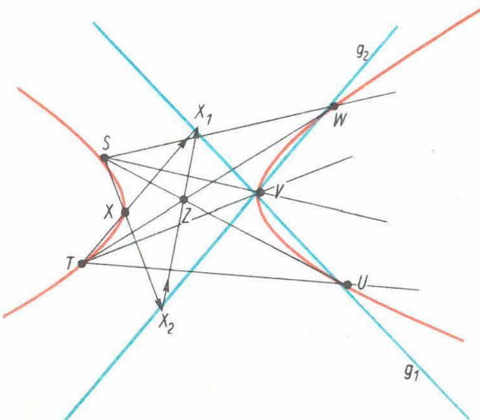
25.3.7. Construcția unui cerc cu ajutorul unui fascicul de raze congruent



25.3.8. Construcția unei elipse cu ajutorul unui fascicul de drepte proiectiv

culelor nu mai rămîn valabile ci numai legătura lor proiectivă. Dacă proiectăm cercul și cele două fascicule de raze dintr-un punct exterior planului cercului Z pe un alt plan, cercul se va transforma într-o elipsă pe ale cărei frontiere se vor intersecta razele corespondente. Fiecare conică se poate construi punctiform ca totalitatea punctelor de intersecție a razelor corespondente din cele două fascicule de raze care sînt legate printr-o proiectivitate, nu printr-o perspectivitate.

În figura 25.3.8 are loc corespondența proiectivă dintre fasciculele S_1 și S_2 peste punctualele g_1 și g_2 și anume fasciculul din S_1 este perspectiv pe punctuala g_1 iar fasciculul din S_2 este perspectiv pe punctuala g_2. Punctuala g_1 este reprezentată pe g_2 printr-un fascicul paralel. Compunerea acestor aplicații ne dă o aplicație proiectivă a fasciculului S_1 pe S_2. Punctele de intersecție ale dreptelor corespondente sînt punctele *elipsei*.

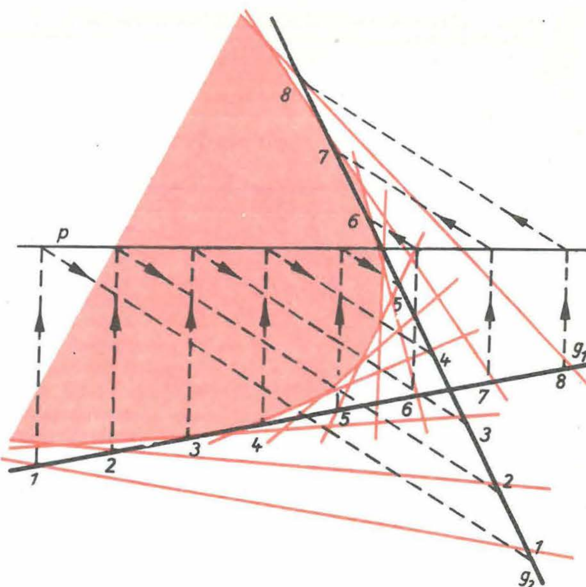


25.3.9. Conică determinată de cinci puncte

Dacă vrem să construim o *conică din cinci puncte* date S, T, U, V, W procedăm în felul următor: alegem două puncte S și T drept suporturi ale celor două fascicule de raze cărora aparțin razele SU, SV, SW, respectiv TU, TV, TW. Cîte două puncte din cele trei puncte U, V, W determină una din punctualele g_1 și g_2 care sînt proiectate una pe alta cu ajutorul centrului de perspectivitate Z. Fie punctualele $(UV) = g_1$ și $(VW) = g_2$. Atunci SU și TW se intersectează în punctul Z. Razei SX_2 îi corespunde raza TX_1 deoarece dreapta care trece prin X_2 și Z intersectează punctuala g_1 în X_1. Ambele drepte se intersectează în punctul X al conicei; în cazul reprezentării grafice a hiperbolei vezi fig. 25.3.9.

Și cu ajutorul dreptelor punctate proiective se pot construi conice. *Fiind dată o omografie între două punctuale, dreptele comune perechilor de puncte corespunzătoare în omografie formează o conică, dacă punctualele nu sînt perspective.*

Dreapta punctată g_1 se proiectează perspectiv cu ajutorul unui fascicul paralel de raze pe punctuala p iar p prin alt fascicul paralel de raze va trece în g_2. Cele două perspectivități formează o proiectivitate din g_1 pe g_2. Dreptele comune perechilor de puncte corespunzătoare în omografie formează înfășurătoarele (tangentele) unei *parabole* (fig.25.3.10). În spațiu, dreptele de legătură a două punctuale care se află în *poziție oblică* și sînt în corespondență printr-o omografie și nu printr-o perspectivitate formează *generatoarele suprafeței riglate.* Punctele care se află pe ele formează o *suprafață riglată* (vezi cap. 24).



25.3.10. Construcția unei parabole cu ajutorul punctualelor proiective

Dualitate. Prin adăugarea elementelor improprii elementelor geometriei euclidiene ia naștere o simetrie între teoremele de bază asupra punctelor, dreptelor și planelor. De exemplu în planul proiectiv:

Două puncte diferite se află pe o dreaptă.

Două drepte diferite trec printr-un punct,

În spațiul proiectiv:

Două puncte diferite se află pe o dreaptă.

Două plane diferite trec printr-o dreaptă.

Un punct și o dreaptă care nu trece prin el determină un plan.

Un plan și o dreaptă care nu se află conținută în el determină un punct.

Formarea simetrică a acestor teoreme ne arată că ele derivă una din alta în cazul planului proiectiv, schimbînd noțiunea de *punct* cu noțiunea de *dreaptă* și noțiunea de *„se află pe"* cu *„trece prin"*.

Figuri duale

	În plan		În spațiu			
	punctuală	fascicul de drepte	punctuală	fascicul de plane	plan punctat	stea de plane
suport	dreaptă	punct	dreaptă	dreaptă	plan	punct

În spațiul proiectiv noțiunea de *punct* se înlocuiește cu cea de *plan*, *„se află în"* cu *„a trece prin"* iar noțiunea de *dreaptă* se menține. Pentru *„a se afla în"* și *„trece prin"* se poate folosi și termenul de *incidență*. Multe teoreme ale geometriei și mai ales cele ale geometriei proiective sînt teoreme referitoare la relațiile de incidență. Figurile geometrice care corespund prin această simetrie se numesc *duale*.

Conform principiului dualității în plan și în spațiu teoremele referitoare la incidență rămîn valabile cînd înlocuim noțiunile care intervin în ele prin dualele lor.

Un exemplu de două teoreme duale sînt teorema lui Pascal și teorema lui Brianchon (fig. 25.3.11).

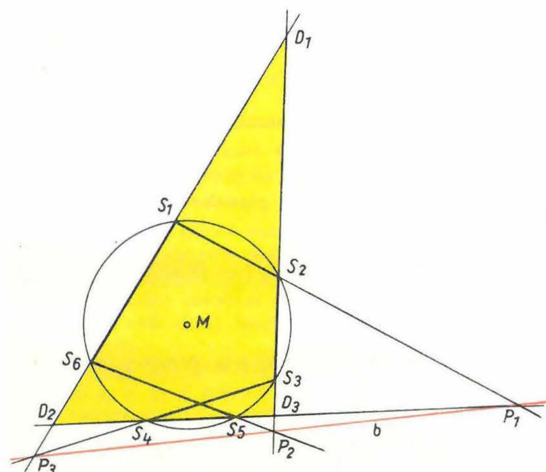
Teorema lui Pascal. Într-un hexagon simplu, înscris într-o conică, punctele diagonale sînt coliniare. Punctele diagonale ale unui hexagon simplu sînt intersecțiile celor trei perechi de laturi opuse.

Teorema lui Brianchon. Într-un hexagon simplu, circumscris unei conice, diagonalele sînt concurente. Printr-o proiectivitate putem obține dintr-o conică un cerc.

25.3.11. Teorema lui Pascal și teorema lui Brianchon

Cu ajutorul teoremelor referitoare la cerc și al teoremelor de la sfîrșitul acestui paragraf despre polară putem demonstra aceste teoreme.

În triunghiul $D_1D_2D_3$ dreptele S_1S_2, S_3S_4 și S_5S_6 sînt secante. Există astfel următoarele rapoarte (fig. 25.3.12):



25.3.12. Teorema lui Pascal

$$\frac{\overline{D_2P_1}}{\overline{P_1D_3}} = \lambda_1', \quad \frac{\overline{D_3S_2}}{\overline{S_2D_1}} = \lambda_2', \quad \frac{\overline{D_1S_1}}{\overline{S_1D_2}} = \lambda_3',$$

$$\frac{\overline{D_2S_5}}{\overline{S_5D_3}} = \lambda_1'' \quad \frac{\overline{D_3P_2}}{\overline{P_2D_1}} = \lambda_2'', \quad \frac{\overline{D_1S_6}}{\overline{S_6D_2}} = \lambda_3'',$$

$$\frac{\overline{D_2S_4}}{\overline{S_4D_3}} = \lambda_1''', \quad \frac{\overline{D_3S_3}}{\overline{S_3D_1}} = \lambda_2''', \quad \frac{\overline{D_1P_3}}{\overline{P_3D_2}} = \lambda_3'''.$$

Conform teoremei lui Menelaos:

$$\lambda_1'\lambda_2'\lambda_3' = \lambda_1''\lambda_2''\lambda_3'' = \lambda_1'''\lambda_2'''\lambda_3''' = -1,$$

deci și

$$\lambda_1'\lambda_2'\lambda_3'\lambda_1''\lambda_2''\lambda_3''\lambda_1'''\lambda_2'''\lambda_3''' = -1,$$

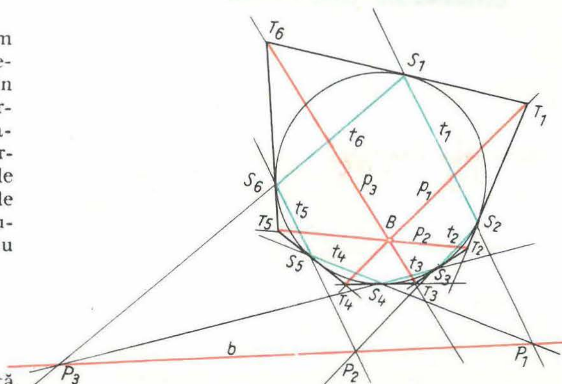
Conform expresiei puterii punctului față de un cerc

$$\overline{D_1S_1} \cdot \overline{D_1S_6} = \overline{D_1S_2} \cdot \overline{D_1S_3},$$

$$\overline{D_2S_6} \cdot \overline{D_2S_1} = \overline{D_2S_4} \cdot \overline{D_2S_5},$$

$$\overline{D_3S_5} \cdot \overline{D_3S_4} = \overline{D_3S_3} \cdot \overline{D_3S_2},$$

produsul acesta se simplifică și avem $\lambda_1'\lambda_2''\lambda_3''' = -1$. Folosind reciproca teoremei lui Menelaos, dreapta care trece prin punctele P_1, P_2 și P_3 este o transversală a triunghiului $D_1D_2D_3$. Dacă hexagonul $T_1T_2T_3T_4T_5T_6$ circumscris cercului este tangent la cerc în punctele S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6 care sînt vîrfurile unui hexagon înscris în cerc, atunci vîrfurile T_i sînt polii laturilor t_i, de exemplu

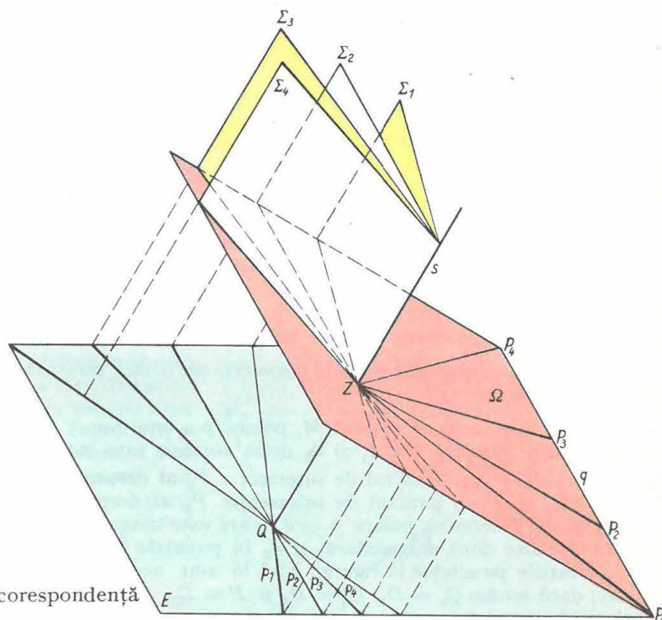


25.3.13. Teorema lui Brianchon aplicată unui cerc

t_1 este polara corespunzătoare lui T_1 și t_4 este polara corespunzătoare lui T_4 (fig. 25.3.13). Punctul de intersecție P_1 al polarelor t_1 și t_4 este polul dreptei $T_1T_4 = p_1$. La fel P_2 este polul lui $p_2 = T_2T_5$ și P_3 polul lui $p_3 = T_3T_6$. Deoarece conform *teoremei lui Pascal* polii P_1, P_2 și P_3 se află pe o dreaptă, polarele p_1, p_2 și p_3 se intersectează într-un punct B. Acest punct B este polul dreptei b.

În teorema lui Pascal conica este privită ca o mulțime de puncte. Ea reprezintă totalitatea punctelor de intersecție a razelor corespunzătoare a două fascicule de drepte între care există o proiectivitate dar nu o perspectivitate. În teorema duală a lui Brianchon conica reprezintă totalitatea dreptelor comune perechilor de puncte corespunzătoare în omografia între două punctuale, deci nu în perspectivitate. Celor șase vîrfuri ale *hexagonului lui Pascal* le corespund șase laturi tangente în *hexagonul lui Brianchon*, celor trei *puncte de intersecție* P_1, P_2, P_3, care sînt *diagonale*, le corespund diagonalele p_1, p_2, p_3 care unesc *vîrfurile opuse* iar *dreptei lui Pascal* $(P_1P_2P_3) = b$ îi corespunde *punctul lui Brianchon* $(p_1p_2p_3) = B$.

Corelații. Prin coliniații în plan proiecțiile unor puncte, respectiv drepte sînt puncte și respectiv drepte. Cu ajutorul dualității domeniul proiectivităților se extinde astfel: în planul proiectiv punctele trec în drepte și invers, iar în spațiul proiectiv punctele trec în plane și invers. În cazul unei aplicații bijective și în cazul cînd biraportul rămîne constant, elementele originale armonice se transformă în elemente imagine duale armonice. Această transformare este o *corelație*.

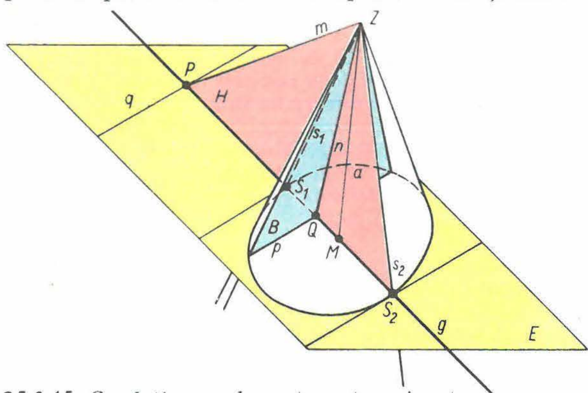


25.3.14. Polaritate printr-o corespondență în unghi drept

Corelația polară. Un caz particular de corelație este *corelația polară* (fig. 25.3.14) prin care într-un plan E fiecărui punct P_i socotit drept *pol* îi corespunde în mod univoc o dreaptă p_i, *polară* și numai una. Unim de exemplu punctul P_i cu un punct Z exterior planului E și construim în Z un plan $\sum_i$ perpendicular pe dreapta P_iZ care intersectează pe E în p_i. Dacă mai multe puncte P_i $(i = 1, 2, 3)$ se află pe o dreaptă q, atunci toate dreptele p_iZ aparțin planului Ω care este perpendicular pe planele $\sum_i$. Dreapta perpendiculară s ridicată în punctul Z pe planul Ω aparține tuturor planelor $\sum_i$, iar punctul Q în care s intersectează pe E aparține tuturor polarelor p_i. Punctuala P_i care are suportul q se proiectează în fasciculul de drepte p_i cu suportul Q. După cum reiese, corespondența este o proiectivitate, deci $(P_1P_2P_3P_4) = (p_1p_2p_3p_4)$. Conform acestei construcții este posibil ca polul să se afle pe polară.

Corelația polară cu elemente autoconjugate. Unele corelații polare plane sînt caracterizate prin faptul că *există poli care se află pe polarele lor*. Aceste elemente se numesc *autoconjugate*. Și aceste corelații polare se pot explica intuitiv cu ajutorul unui suport Z al unei stele de

plane care este exterior planului. Suportul Z este vîrful unui con circular a cărui intersecție cu planul E este o conică. În figura 25.3.15, această conică este o elipsă. Dacă P este un punct al planului E, atunci dreapta $m = PZ$ și axa a a conului determină un plan H care intersectează conul după generatoarele s_1 și s_2 și planul E după dreapta g. Generatoarele s_1 și s_2 au punctele S_1 și S_2 comune cu conica. Un plan B, perpendicular pe H și care trece prin suportul Z, intersectează pe H după dreapta n și pe E după polara p a punctului P în cazul cînd razele m, n, s_1 și s_2 sînt armonice, deci cînd avem $(mns_1s_2) = -1 = (PQS_1S_2)$, unde Q este punctul de intersecție a polarei p cu dreapta g. Conform construcției corespunzătoare, putem determina polara q a polului Q. Dacă p trece prin centrul M al elipsei, atunci M este polul dreptei improprii. Deci planul B perpendicular pe planul H este paralel cu planul E. Odată cu P se apropie de conică și punctul Q, iar planul B devine plan tangent la con, deci punctele S_1 și S_2 au drept polare tangentele care trec prin ele.



25.3.15. Corelație cu elemente autoconjugate

Locul punctelor din plan sau din spațiu, autoconjugate în raport cu o corelație polară plană sau din spațiu, este o conică sau o suprafață de ordinul doi. Totalitatea acestor puncte se numește curbă fundamentală sau respectiv suprafață fundamentală.

Corelația polară care are drept curbă fundamentală o conică. Deoarece fiecare conică poate fi socotită o aplicație proiectivă a unui cerc, este suficient să analizăm polaritatea pe cerc și apoi să dăm exemple pe conice, referindu-ne la rezultate obținute anterior.

Fie pe un plan o conică și un punct P. Desemnăm punctul P drept pol și-l socotim mai întîi exterior conicei; atunci secanta dusă prin pol determină pe conică un punct Q, care împreună cu polul împarte coarda într-un raport armonic.

Polara p a polului P este locul geometric al tuturor punctelor Q conjugate armonic cu P în raport cu conica.

În cazul unui cerc cu centrul M, polara p a unui punct P poate fi construită cu ajutorul unui *patrulater complet*. Fie d_1 și d_2 două secante care intersectează cercul după diametrul $\overline{P_1P_2}$ și coarda $\overline{P_4P_5}$. Punctul de intersecție P_3 al dreptelor ce trec prin P_1 și P_4 și respectiv prin P_2 și P_5 și punctul de intersecție P_6 al dreptelor ce trec prin P_1 și P_4, respectiv prin P_2 și P_5 determină polara $p = d_3$, care este diagonala patrulaterului complet. Ea intersectează celelalte două diagonale d_1 și d_2 în punctele Q_2 și Q_1 conjugate armonic (fig. 25.3.16) cu P. Notațiile punctelor în figura 25.3.16 sînt aceleași și în cazul în care P este exterior cercului; dacă notăm $Q_1 = D_1$, $Q_2 = D_2$ și $P = D_3$, atunci se obține această figură pentru patrulaterul complet.

Construcția se poate folosi și în cazul în care alegem două secante oarecare d_1 și d_2. Sub această formă ea poate fi făcută în cazul unei conice oarecare.

În figura 25.3.17 este reprezentată, folosind aceleași notații, construcția polarei p a unui punct P exterior elipsei.

În cerc polara p este perpendiculară pe diametrul P_1P_2 al cercului.

Conform teoremei lui Thales într-un triunghi $P_1P_2P_3$ dreptele P_1P_2 și P_2P_5 sînt înălțimi și, deoarece dreapta P_3Q_2 se intersectează cu aceste drepte în punctul P_6, ea trebuie să fie tot înălțime.

Dacă polul P este exterior cercului (fig. 25.3.16), atunci fiecărui punct Q_i al coardei $\overline{B_1B_2}$ determinate în cerc de polara p îi putem construi polara corespunzătoare q_i. În fiecare din aceste puncte Q_i se intersectează două coarde, de exemplu în Q_1 coardele $\overline{P_4P_5}$ și $\overline{B_1B_2}$. Armonicul punctului Q_i în raport cu punctele extreme ale coardelor este în primul caz polul P iar în cel de-al doilea punctul Q_i' pentru care este valabilă relația $(B_1B_2Q_iQ_i') = -1$.

25.3.16. Polul P și polara p ale unui cerc

Polarele q_i ale punctelor Q_i sînt drepte care trec prin polul P și prin Q'_i. Dacă punctul Q_i se apropie de B_1, atunci și Q'_i se apropie de B_1. Deoarece punctele de intersecție ale secantei duse din pol prin Q_i se apropie de asemenea de B_1, în cazul limită polara punctului B_1 este tangenta t_i la cerc.

Pentru toate punctele Q_i interioare unui cerc care se află pe polară, polarele q_i formează un fascicul de raze care are drept suport polul P al polarei p, iar razele se află în spațiul limitat de tangentele t_1 și t_2 care nu conține cercul. În spațiul limitat de aceste tangente care conține cercul, se află polarele q_i care corespund polilor Q_i exteriori coardei $\overline{B_1B_2}$.

Aceste corespondențe sînt proiective și deci sînt valabile pentru orice conică și ne dau posibilitatea să construim *tangentele la un cerc duse dintr-un punct exterior*; punctele de contact B_1 și B_2 sînt punctele de intersecție a polarelor p cu conica. Vîrful S al unei parabole împarte axa dintre focarul F și directoarea (L_0) în două părți egale. Aceste trei puncte împreună cu punctul impropriu U al axei parabolei formează un raport armonic $(L_0FSU) = -1$.

Directoarea unei parabole este polara focarului F al parabolei.

25.3.17. Polul P și polara p ale unei elipse

În cazul elipsei (vezi cap. 13.5, „Excentricitate numerică"), avem $\overline{L_2S_2} : \overline{S_2F_2} = \overline{L_2S_1} : \overline{S_1F_2}$ deoarece $\frac{a}{e}(a-e):(a-e) = \frac{a}{e} : 1$ și $\left(\frac{a^2}{e}+a\right):(a+e) = \frac{a}{e}(a+e):(a+e) = \frac{a}{e} : 1$. Deci ținînd seama de semn $(\overline{S_1F_2} = -\overline{F_2S_1})$, obținem $(L_2F_2S_2S_1) = -1$, adică directoarea l_2 a elipsei este polara focarului F_2. În același mod se demonstrează și pentru hiperbolă.

Fiecare directoare a unei conice este polara focarului învecinat.

Polul fiecărei drepte care trece prin focarul unei conice se află pe directoarea învecinată, deci putem enunța următoarea teoremă:

Tangentele duse prin extremitățile fiecărei coarde care trece printr-un focar al conicei se intersectează pe directoarea vecină focarului.

26. Geometrie diferențială. Corpuri convexe. Geometrie integrală

26.1. Geometrie diferențială

În geometria diferențială, în studiul figurilor geometrice, folosim noțiunile și metodele analizei matematice, în special ale calculului diferențial și ale teoriei ecuațiilor diferențiale. Ca și în geometria analitică, *spațiille sau varietățile geometrice* care stau la baza geometriei diferențiale trebuie raportate la *coordonate*. În aceste spații sînt înglobate și alte entități geometrice, ca de exemplu curbe sau suprafețe curbe care sînt caracterizate de *ecuații diferențiale* sau *funcții derivabile* de un număr suficient de ori. Pentru a putea înțelege unele părți mai grele ale geometriei diferențiale, trebuie să avem cunoștințe temeinice de calcul tensorial, topologie etc.

Teoria curbelor în spațiul euclidian

Definiția unei curbe. Fie $\mathbf{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ trei versori normali ai unui spațiu euclidian E_3 și fie x_i $(i = 1, 2, 3)$ *coordonatele carteziene* relative la acest triedru. Prin *reprezentare parametrică a unei curbe* înțelegem indicarea coordonatelor x_i ale punctelor curbei ca funcții $x_i = f_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ de un parametru t real care variază într-un interval $[a, b]$. Aceste trei ecuații se pot scrie ca o ecuație vectorială

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{3} f_i(t)\, \mathbf{e}_i.$$

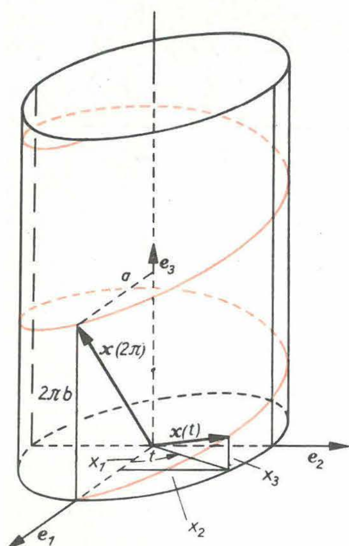
Funcțiile $f_i(t)$ sînt derivabile de un număr suficient de ori și continue; în general, este suficientă existența și continuitatea derivatelor pînă la ordinul trei. *Curba* reprezintă o mulțime dependentă de puncte $\mathbf{C}$, astfel încît fiecare punct P din $\mathbf{C}$ să aibă o vecinătate U astfel ca punctele lui $\mathbf{C}$ care se află în U să reprezinte un arc de curbă. Parametrul unui arc de curbă poate fi ales cum vrem: dacă t este un parametru, obținem printr-o *transformare parametrică* $t' = \varphi(t)$ un alt parametru t'. Funcția $\varphi(t)$ este o funcție derivabilă care are $\dfrac{d\varphi}{dt}$ nenulă. Ne vom referi numai la proprietățile geometrice care sînt independente de alegerea parametrului t. Se poate alege sistemul de coordonate în spațiul euclidian tridimensional E_3 și parametrul t pe curba $\mathbf{C}$, astfel încît funcțiile pe care le vom reprezenta să fie cît mai simple și calculele la fel.

O curbă poate fi reprezentată și *implicit* prin două ecuații independente de forma

$$g(x_1, x_2, x_3) = 0,\ h(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{0};$$

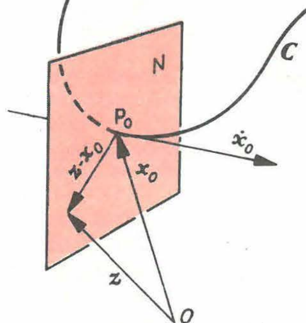
deci geometric ea reprezintă intersecția a două suprafețe $g = 0$ și $h = 0$. Una din cele mai simple curbe din spațiu, *elicea circulară*, se reprezintă sub forma $\mathbf{x}(t) = a(\mathbf{e}_1 \cos t + \mathbf{e}_2 \sin t) + bt\mathbf{e}_3$. Mișcarea unui șurub reprezintă o elice circulară, unde $2a$ este diametrul și $2\pi b$ pasul șurubului (fig. 26.1.1).

Tangente. Dacă prin două puncte P_1 și P_2 ale unei curbe $\mathbf{C}$ ducem o secantă și punctele P_1 și P_2 le facem să tindă către un punct P_0 al lui $\mathbf{C}$ care are vectorul de poziție $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$, atunci



limita către care tinde secanta va fi *tangenta în* P_0 *la* **C**. Existența tangentei în ipotezele făcute este asigurată de faptul că P_0 este un punct *regulat*, adică cel puțin una din derivatele $\frac{\mathrm{d}f_i(t_0)}{\mathrm{d}t}$ este diferită de zero. Scris vectorial, acest fapt arată în felul următor:

$$\dot{\mathbf{x}}_0 = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}(t_0)}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i \frac{\mathrm{d}f_i(t_0)}{\mathrm{d}t} \neq \mathbf{0}.$$



26.1.1. Elice circulară 26.1.2. Planul normal N în punctul P_0

Punctele care nu sînt regulate se numesc *singulare*, iar proprietățile lor trebuie discutate separat. În punctul regulat P_0, $\dot{\mathbf{x}}_0$ este vectorul director al tangentei în punctul P_0. Pentru vectorul de poziție $\mathbf{y}$ al punctelor tangentei obținem prin introducerea parametrului $\tau\,(-\infty < \tau < \infty)$ următoarea ecuație:

Ecuația tangentei	$\mathbf{y} = \mathbf{x}_0 + \dot{\mathbf{x}}_0\tau$

Planul perpendicular în P_0 pe tangente se numește *plan normal* al lui **C** în P_0 (fig. 26.1.2). Dacă $\mathbf{z}$ este vectorul de poziție al unui punct al său, notînd produsul scalar al vectorilor **a** și **b** prin $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, obținem pentru planul normal următoarea ecuație:

Ecuația planului normal	$\dot{\mathbf{x}}_0 \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{x}_0) = 0$

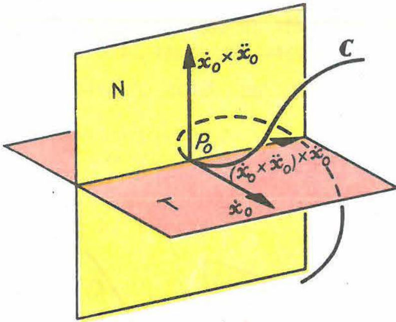
Planuri osculatoare la curbă. Presupunem că curba **C** nu este o dreaptă. Deci în general trei puncte P_1, P_2, P_3 oarecare ale curbei nu se află pe o dreaptă. Ele vor defini un plan. Dacă facem ca punctele să tindă spre același punct P_0 de pe **C**, atunci planul va tinde către o poziție limită numită *plan osculator* T, la curba **C**, în punctul P_0 (fig. 26.1.3).

Planul osculator există dacă primele două derivate ale vectorului de poziție $\mathbf{x}(t)$ pentru $t = t_0$ sînt liniar independente, deci $\dot{\mathbf{x}}_0 \cdot \ddot{\mathbf{x}}_0 \neq \mathbf{0}$ unde $\ddot{\mathbf{x}}_0 = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}(t_0)}{\mathrm{d}t^2} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i \frac{\mathrm{d}^2(t_0)}{\mathrm{d}t^2}$; prin $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ am notat *produsul vectorial* dintre **a** și **b**. Dacă notăm cu $\mathbf{z}$ vectorul de poziție al unui punct al planului osculator T iar cu $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ produsul mixt al vectorilor **a**, **b** și **c**, adică $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$, ecuația planului osculator T va fi:

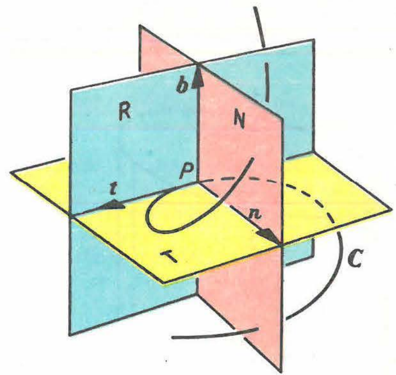
Ecuația planului osculator	$(\mathbf{x}_0 \times \ddot{\mathbf{x}}_0)\cdot(\mathbf{z} - \mathbf{x}_0) = 0$ sau $(\dot{\mathbf{x}}_0, \ddot{\mathbf{x}}_0, \mathbf{z} - \mathbf{x}_0) = 0$

Curba are un *punct de contact de ordinul întîi* cu tangentele, dacă la o alegere convenabilă a parametrului derivatele de ordinul întîi ale curbei și ale tangentei coincid în punctul de contact. Planul osculator poate fi definit ca un plan care are cu curba în punctul P_0 un *punct de contact de ordinul doi*, adică primele două derivate $\dot{\mathbf{x}}_0$, $\ddot{\mathbf{x}}_0$ trebuie să rămînă în acest plan. În cazul în care $\dot{\mathbf{x}}_0 \times \ddot{\mathbf{x}}_0 \neq \mathbf{0}$ planul osculator este unic determinat. Planul perpendicular pe planul normal și pe planul osculator se numește *plan rectificant*, **R** în P_0. Dacă notăm cu $\mathbf{z}$ vectorul de poziție al unui punct al său, obținem:

Ecuația planului rectificant	$(\dot{\mathbf{x}}_0, \dot{\mathbf{x}}_0 \times \ddot{\mathbf{x}}_0, \mathbf{z} - \mathbf{x}_0) = 0$



26.1.3. Plan osculator T în punctul P_0



26.1.4. Triedru osculator al curbei

Normale. Fiecare dreaptă care se află în planul normal și trece prin P_0 se numește *normala* lui $\mathbf{C}$ în P_0. Normala care se află în planul osculator se numește *normala principală* a lui $\mathbf{C}$ în punctul P_0 iar cea care se află în planul rectificant se numește *binormală*. Vectorul director al normalei principale este $(\dot{\mathbf{x}}_0 \times \ddot{\mathbf{x}}_0) \times \dot{\mathbf{x}}_0$ iar vectorul director al binormalei este $\dot{\mathbf{x}}_0 \times \ddot{\mathbf{x}}_0$ (cînd $\dot{\mathbf{x}}_0 \times \ddot{\mathbf{x}}_0 \neq \mathbf{0}$). Dacă prin fiecare punct al curbei $\mathbf{C}$ ducem trei vectori $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ de lungime 1 în direcția tangentei, normalei principale și binormalei, aceștia formează un triedru ortonormat care se numește *triedrul mobil osculator* al curbei (fig. 26.1.4).

Lungimea arcului de curbă. Lungimea unei linii poligonale în E_3 va fi egală cu suma lungimilor segmentelor $\Delta\mathbf{x}$. Suma acestor segmente poate fi privită ca o aproximare a curbelor studiate în geometria diferențială. Limita expresiei $\Sigma\Delta\mathbf{x}$ este denumită *lungimea curbei*. Pentru un element a curbei $\mathbf{C}$ care are reprezentarea parametrică $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $0 \leqslant t \leqslant a$, avem $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)$. În condițiile de diferențiabilitate impuse, lungimea elementului de curbă va fi dată de integrala (fig. 26.1.5)

$$l = \int_0^a |\dot{\mathbf{x}}|\, \mathrm{d}t = \int_0^a \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (\dot{f}(t))^2}\, \mathrm{d}t,$$

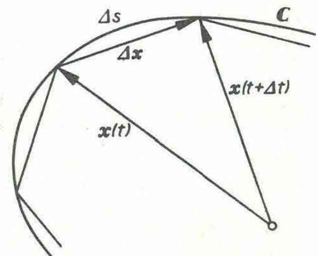
unde $|\dot{\mathbf{x}}| = \sqrt{\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}}$ este lungimea vectorului $\dot{\mathbf{x}}$. Dacă privim numai arcul de curbă $\mathbf{C}_t$ cuprins între punctul care are parametrul 0 și punctul cu parametrul t, atunci lungimea s a arcului va fi o funcție de t numită și *coordonata curbilinie*:

$$s = s(t) = \int_0^t |\dot{\mathbf{x}}(\tau)|\, \mathrm{d}\tau$$

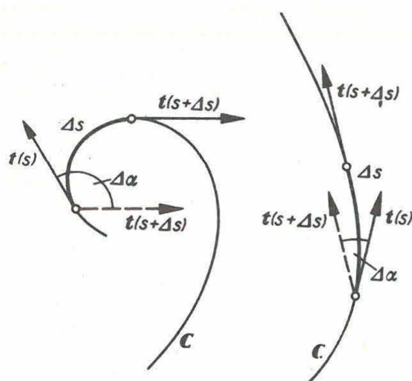
Dacă $\mathbf{C}$ este regulată, atunci $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = |\dot{\mathbf{x}}(t)| > 0$ și îl putem introduce pe s ca un parametru nou. Acest parametru s se numește *lungimea arcului curbei* $\mathbf{C}$ sau *abscisa curbilinie* sau *coordonata naturală*. Derivata vectorului în raport cu coordonata curbilinie este versorul tangentei

$$\mathbf{t} = \mathbf{x}' = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}s}, \quad |\mathbf{x}'| = 1.$$

De aici rezultă $\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}'' = 0$, deci $\mathbf{x}'' = \dfrac{\mathrm{d}^2\mathbf{x}}{\mathrm{d}s^2}$ este perpendicular pe $\mathbf{x}'$. El va fi un vector director al normalei principale cînd $\mathbf{x}'' \neq 0$.



26.1.5. Determinarea lungimii arcului de curbă



26.1.6. Determinarea curburii

Curbură. Fie $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$, $0 \leqslant s \leqslant l$, o curbă **C** reprezentată ca funcție de parametru s. Vectorii tangenți $\mathbf{t}(s)$ și $\mathbf{t}(s + \Delta s)$ în punctele $P(s)$, $P(s + \Delta s)$ respectiv, care au parametrii s și $s+\Delta s$, formează un unghi $\Delta\alpha$ numit unghiul de contingență al tangentei. Dacă Δs tinde către zero, există o valoare limită

$$\lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right| = \varkappa(s),$$

pe care o numim *curbura curbei* **C** în punctul $P(s)$. În cazul unei drepte avem $\Delta\alpha = 0$, deci $\varkappa(s)$ este egală cu zero.

Curbura este o măsură a devierii formei curbei față de o dreaptă. Dacă s este abscisa curbilinie a lui **C**, atunci $\varkappa(s) = |\mathbf{x}''(s)|$. Dacă notăm cu $\mathbf{n}$ versorul orientat în direcția normalei principale, atunci $\mathbf{x}'' = \varkappa(s)\,\mathbf{n}$ se va numi *vectorul de curbură* (fig. 26.1.6).

Torsiune. Planul osculator al unei curbe plane coincide cu planul în care se află curba. Versorul binormalei $\mathbf{b} = \dfrac{\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''}{|\mathbf{x}' \times \mathbf{x}''|}$ a unei curbe plane este constant (și invers). Variația vectorului binormalei $\mathbf{b}$ care este perpendicular pe planul osculator este o măsură a variației planului osculator sau o măsură a devierii curbei **C** de la proiecția sa pe planul osculator într-un punct al curbei **C**. Dacă notăm cu $\Delta\beta$ unghiul dintre vectorii binormalelor $\mathbf{b}(s)$ și $\mathbf{b}(s + \Delta s)$ în punctele $P(s)$ și $P(s + \Delta s)$, atunci există în general o valoarea limită

$$\lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta\beta}{\Delta s} \right| = \tau(s)$$

denumită *torsiunea în punctul* $P(s)$ *al curbei* **C**. Unghiul β se numește *unghiul de contingență* al binormalei.

Ecuațiile naturale. Curbura, torsiunea și abscisa curbilinie sînt *invariante* la orice mișcare în spațiul euclidian și la alegerea parametrilor. Cele trei mărimi s, $\varkappa$, τ sînt legate prin următoarele două ecuații:

$$\varkappa = \varkappa(s) \geqslant 0, \quad \tau = \tau(s)$$

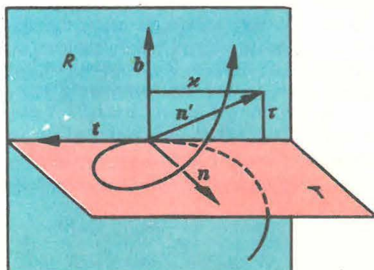
numite și *ecuații naturale ale curbei.*

Rezultatul principal al teoriei curbelor este următoarea teoremă:

Fiind date funcțiile continue $\varkappa = \varkappa(s) > 0$ și $\tau = \tau(s)$, există o curbă unic determinată C astfel încît $\varkappa(s)$ și $\tau(s)$ să reprezinte torsiunea și curbura acestei curbe.

Formulele lui Frenet. Demonstrarea acestei teoreme se face cu ajutorul triedrului osculator. Pentru derivatele vectorilor $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{b}(s)$ sînt valabile *formulele lui Frenet* (fig. 26.1.7).

Formulele lui Frenet	$\dfrac{d\mathbf{t}}{ds} = \varkappa(s)\,\mathbf{n}(s)$
	$\dfrac{d\mathbf{n}}{ds} = -\varkappa(s)\,\mathbf{t}(s) + \tau(s)\,\mathbf{b}(s)$
	$\dfrac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau(s)\,\mathbf{n}(s)$



26.1.7. Descompunerea lui $\dfrac{dn}{ds}$ în triedru osculator **t**, **n**, **b**.

Prima dintre aceste ecuații a fost deja demonstrată, deoarece $\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \mathbf{x}''$ este vectorul de curbură. Deoarece $\mathbf{n}, \mathbf{t}, \mathbf{b}$ sînt versori perpendiculari, avem următoarele relații: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1$ și $\mathbf{n} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{t} = 0$. Derivînd aceste relații, obținem $\mathbf{b}' \cdot \mathbf{b} = 0$, $\mathbf{n}' \cdot \mathbf{n} = 0$, $\mathbf{t}' \cdot \mathbf{b} = -\mathbf{t} \cdot \mathbf{b}'$, $\mathbf{n}' \cdot \mathbf{t} = -\mathbf{t}' \cdot \mathbf{n}$; $\mathbf{n}' \cdot \mathbf{b} = -\mathbf{b}' \cdot \mathbf{n}$. Prin înmulțirea scalară a vectorilor $\mathbf{b}' = \alpha_3\mathbf{t} + \beta_3\mathbf{n} + \gamma_3\mathbf{b}$ și $\mathbf{n}' = \alpha_2\mathbf{t} + \beta_2\mathbf{n} + \gamma_2\mathbf{b}$ cu vectorii $\mathbf{n}, \mathbf{t}$ și $\mathbf{b}$ putem determina componentele $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i=3, 2)$. Obținem: $\mathbf{b}' \cdot \mathbf{b} = \gamma_3 = 0$; $\mathbf{b}' \cdot \mathbf{t} = \alpha_3 = -\mathbf{t}' \cdot \mathbf{b} = -\varkappa\mathbf{n} \cdot \mathbf{b} = 0$; $\mathbf{b}' = \beta_3\mathbf{n}$. Conform definiției torsiunii avem $|\mathbf{b}'| = |\beta_3| = |\tau|$. Deoarece $\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\beta}{\Delta s} = \tau(s)$, luăm $\mathbf{b}' = -\tau(s)\mathbf{n}$. În cazul celei de-a doua ecuații $\beta_2 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}' = 0$, $\alpha_2 = \mathbf{n}' \cdot \mathbf{t} = -\mathbf{t}' \cdot \mathbf{n} = -\varkappa(s)$ și $\gamma_2 = \mathbf{n}' \cdot \mathbf{b} = -\mathbf{b}' \cdot \mathbf{n} = \tau(s)$, deci $\mathbf{n}' = \varkappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}$.

Dacă sînt date funcțiile continue $\varkappa(s) > 0$, $\tau(s)$, atunci formulele lui Frenet formează un sistem de ecuații liniare diferențiale pentru determinarea lui $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$. Dacă $\mathbf{t}(s)$ este astfel determinat, curba va fi obținută prin integrarea ecuației $\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{t}(s)$; de exemplu elicea circulară este o curbă pentru care curbura și torsiunea sînt constante.

Teoria suprafețelor în spațiul euclidian

Definiția unei suprafețe. Dacă coordonatele x_i $(i = 1, 2, 3)$ ale unui punct din E_3 sînt date ca funcții de doi parametri u și v, $x_i = f_i(u, v)$ $(i = 1, 2, 3)$ sau vectorial $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v) = \sum_{i=1}^{3} f_i(u,v)\,\mathbf{e}_i$, unde u și v variază într-un anumit domeniu D, atunci ele reprezintă *ecuațiile parametrice ale unei suprafețe.*

O mulțime conexă de puncte **S** din E_3 se numește suprafață, dacă pentru fiecare punct P din **S** există o vecinătate U astfel încît punctele din U ale lui **S** să aibă o reprezentare parametrică. Prin stabilirea parametrilor u și v (numite și *coordonate curbilinii ale suprafeței*) este unic determinată poziția punctului pe suprafață, de exemplu pe suprafața Pămîntului un punct este unic determinat prin coordonatele sale geografice, *latitudine* și *longitudine*. Și u' și v' din domeniul D' pot fi parametri dacă există o transformare injectivă de forma

$$u' = u'(u, v), \quad v' = v'(u, v) \quad \text{care are determinantul} \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u'}{\partial u} & \dfrac{\partial u'}{\partial v} \\ \dfrac{\partial v'}{\partial u} & \dfrac{\partial v'}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Aceste relații se numesc *transformare a parametrilor.* Noțiunile geometrice folosite în teoria suprafețelor trebuie să fie invariante față de mișcările în spațiul euclidian și față de transformarea parametrilor. O suprafață poate fi dată și printr-o ecuație sub forma *implicită* $g(x_1, x_2, x_3) = 0$.

Plane tangente. Pentru determinarea proprietăților unor suprafețe în vecinătatea unui punct al ei P_0 cu parametrii u_0 și v_0 considerăm curbele care se află pe suprafață și trec prin P_0. O astfel de curbă are următoarea ecuație parametrică:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(u_0 + u(t),\ v_0 + v(t)),$$

unde $u(0) = v(0) = 0$. În cazul în care $u = u_0 + t$, $v = v_0$, deci $v(t) = 0$ pentru orice t, obținem *curba (sau linia) de coordonată u* care trece prin P_0, de-a lungul căreia $v = v_0 = \text{const.}$

La fel pentru $u = u_0$, $v = v_0 + t$ obținem cealaltă curbă de coordonată v, pe care avem $u = u_0 = \text{const}$. Punctul P_0 este punctul de intersecție al curbelor de coordonate. În cazul coordonatelor geografice pe suprafața Pămîntului curbele de coordonate sînt meridianele și paralelele. Vectorul tangent la o curbă care trece prin P_0 în $t = 0$ se obține prin derivarea ecuației parametrice

$$\left.\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right|_{t=0} = \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial u} \cdot \frac{du(0)}{dt} + \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial v} \cdot \frac{dv(0)}{dt},$$

unde $\frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial u} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u_0, v_0)$ și $\frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial v} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u_0, v_0)$. Din această formulă reiese că vectorii $\frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial u}$ și $\frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial v}$ sînt vectori tangenți la curbele de coordonate. Dacă acești vectori sînt liniar independenți, atunci toți vectorii tangenți la curbele care se află pe suprafață și trec prin P_0 se află într-un plan. Acest plan se numește *plan tangent la suprafață în punctul* P_0. Dacă a și b sînt parametrii punctelor planului tangent și $\mathbf{z}$ vectorul lor de poziție, atunci *ecuația parametrică a planului tangent* este

Ecuația planului tangent	$\left(\frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial v}\right) \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{x}_0) = 0$

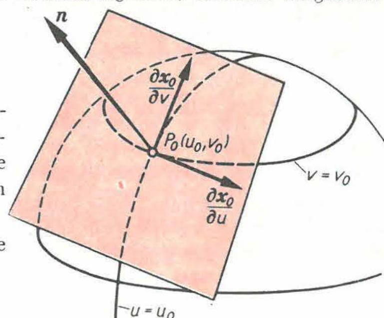
$$\mathbf{z} = \mathbf{x}_0 + a \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial u} + b \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial v}.$$

Aceste formule au sens numai în cazul cînd $\frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial u}$ și $\frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial v}$ sînt vectori liniar independenți (fig. 26.1.8); punctele care îndeplinesc această condiție se numesc *regulate*; celelalte *singulare*. Deci un punct P_0 din $\mathbf{S}$ se numește regulat dacă

$$\frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial v} \neq \mathbf{0}.$$

În cazul coordonatelor geografice polii sînt puncte singulare. Vîrful unui con circular este în cazul oricărei reprezentări parametrice singular, deoarece prin el nu se poate duce un plan tangent. În geometria diferențială vom considera numai punctele regulate.

Dreapta perpendiculară pe planul tangent in P_0 se numește *normală*.



26.1.8. Plan tangent și normala la suprafață

Versorul normalei	$\mathbf{n} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial v}\right) \Big/ \left\lvert \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial v} \right\rvert$

Geometrie intrinsecă. La începuturile geometriei diferențiale suprafețele au fost privite ca suprafețele unor corpuri rigide sau drept corpuri rigide, infinit subțiri construite într-un spațiu tridimensional. Intemeietorul acestei direcții în geometrie poate fi socotit geometrul Gaspard MONGE (1746–1818), autorul primei cărți de geometrie integrală (*Application de l'Analyse à la Géométrie*, Paris, 1809).

În legătură cu aplicațiile practice ale geodeziei Karl Friedrich GAUSS (1777–1855) și-a pus întrebarea dacă din măsurătorile făcute asupra unei suprafețe se pot trage concluzii asupra volumului corpului. Această problemă a avut mare importanță pentru stabilirea formei Pămîntului care a fost întîi privit ca o sferă, apoi ca un elipsoid de rotație și azi este socotit o suprafață elementară numită *geoid*. Răspunsurile la această întrebare au dus la formarea geometriei *intrinsece*. Principiile de bază se găsesc în cartea lui GAUSS *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1827). În această parte a teoriei suprafețelor, suprafețele nu mai sînt privite drept corpuri rigide ci ca niște învelișuri *flexibile* însă *inextensibile*. Prin încovoierea unei suprafețe se înțelege o deformare continuă a suprafeței astfel încît lungimile curbelor de pe suprafețe rămîn constante. Mai general, denumim două suprafețe $\mathbf{S}$ și $\mathbf{S}'$ *izometrice* dacă există o corespondență univocă $P' = \varphi(P)$ a punctelor P din $\mathbf{S}$ în punctele P' din $\mathbf{S}'$ astfel încît curbele care corespund să aibă aceeași lungime. Corespondența φ se numește *proiecție izometrică*. O încovoiere a unei suprafețe $\mathbf{S}$ într-o suprafață $\mathbf{S}'$ poate fi privită ca o proiecție izometrică a lui $\mathbf{S}$ în $\mathbf{S}'$. Proprietățile suprafețelor care printr-o proiecție izometrică nu se schimbă, pot fi stabilite prin măsurători ale suprafețelor; ele formează conținutul *geometriei intrinseci a suprafețelor*. În acest sens *planimetria* este geometria intrinsecă a planului și *trigonometria sferică* geometria intrinsecă a suprafeței sferice.

Metrica suprafeței. Geometria intrinsecă este dominată de metrica suprafeței. Fie $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(u(t)), v(t)), t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, o curbă $\mathbf{C}$ care se află pe suprafața $\mathbf{S}$. Prin derivare obținem vectorul tangent

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

Conform definiției lungimii $s(t)$ a arcului de curbă **C** avem $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = |\dot{\mathbf{x}}|^2 = \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}$. Prin înlocuirea expresiei de mai sus obținem

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\,\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}\,\frac{du}{dt}\,\frac{dv}{dt} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2.$$

Folosind notațiile lui GAUSS

$$E(u, v) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \quad F(u, v) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}, \quad G(u, v) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$$

și inlocuind derivatele cu diferențiale, obținem *metrica suprafeței* sau *prima formă fundamentală*.

Prima formă fundamentală a suprafeței	$ds^2 = E(u, v)\,du^2 + 2F(u, v)\,du\,dv + G(u, v)\,dv^2$

Lungimea l a curbei **C** se obține din metrica suprafeței astfel:

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\,\frac{du}{dt}\,\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt\,.$$

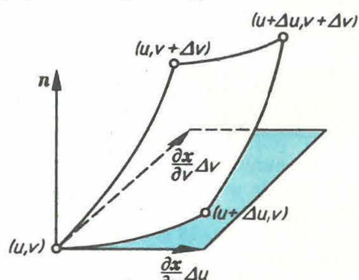
unde la integrare vom înlocui argumentele u și v ale lui E, F, G prin ecuațiile $u = u(t)$ și $v = v(t)$.

Cu ajutorul primei forme fundamentale putem calcula nu numai lungimea arcului ci toate mărimile care se definesc prin măsurători făcute pe suprafețe; de exemplu unghiul format de două curbe de pe suprafața **S**, care se intersectează in punctul P_0 din **S** sau aria unui domeniu de pe suprafață.

Aria $A(U)$ a unui domeniu U de pe suprafața **S** este egală cu $A(U) = \iint \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$.

Expresia $dA = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$ se numește *elementul de arie al lui* **S** și este aria unei suprafețe infinit mici formate de curbele de coordonate (fig. 26.1.9); $\sqrt{EF - F^2}\, \Delta u \Delta v$ este aria paralelogramului format de vectorii $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}\,\Delta u$ și $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}\,\Delta v$.

La calculul lui $A(U)$ integrarea se extinde la toți parametrii u și v pentru care $\mathbf{x}(u, v)$ se găsește în U.



26.1.9. Definirea elementului de arie

Metrica suprafeței definește complet geometria intrinsecă a suprafeței. Două suprafețe S și S′ sînt izometrice dacă putem găsi pentru ele reprezentări parametrice astfel încît metricele lor să coincidă.

Linii geodezice. Dacă între curbele de pe suprafața **S** care trec prin două puncte P_1 și P_2 ale ei există una care are cea mai mică lungime, atunci ea se numește *drumul cel mai scurt*. Desemnarea drumurilor celor mai scurte ale unei suprafețe reprezintă una din cele mai vechi probleme ale geometriei diferențiale și a calculului variațional. Într-un plan drumul cel mai scurt dintre două puncte este unic determinat și este dreapta care unește cele două puncte. Pe o suprafață pot exista puncte care nu pot fi unite printr-un drum cel mai scurt sau pot exista puncte care sînt unite printr-o infinitate de drumuri cele mai scurte, de exemplu pentru două puncte diametral opuse de pe suprafața sferică toate cercurile mari (meridiane) sînt drumurile cele mai scurte. Deci:

Dacă U este o vecinătate suficient de mică a punctului P_1 al unei suprafețe și P_2 un alt punct din U, atunci există un drum cel mai scurt între P_1 și P_2.

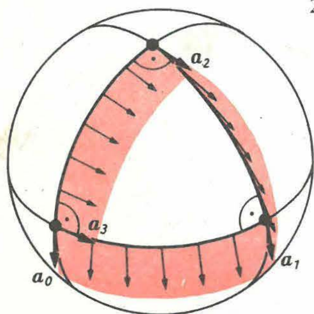
O curbă **C** care se află pe o suprafață se numește *curbă geodezică*, dacă pentru oricare două puncte care se află pe ea suficient de apropiate ea reprezintă drumul cel mai scurt. Pe o suprafață sferică *cercurile mari* sînt curbe geodezice, dar evident nu reprezintă drumurile cele

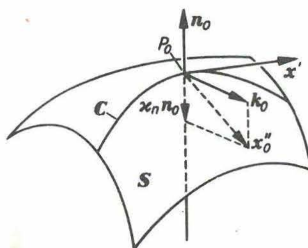
mai scurte; două puncte împart un cerc mare în două arce în general cu lungimi diferite astfel încît numai unul reprezintă drumul cel mai scurt. Un arc al unui cerc mare a cărui lungime este mai mare decît πR (R reprezintă raza cercului) nu este drumul cel mai scurt dar este o geodezică. Ecuația diferențială a unei geodezice a unei suprafețe oarecare este o ecuație de ordinul doi care depinde numai de prima formă principală.

Prin fiecare punct al unei suprafețe regulate trece în oricare direcție dată o curbă geodezică. Două puncte ale unei suprafețe complete (nemărginite) pot fi unite printr-un drum cel mai scurt, deci printr-o curbă geodezică.

Translație (deplasare paralelă). Noțiunea de deplasare paralelă se asociază foarte bine cu o suprafață curbă oarecare. Dacă într-un punct P_0 al unei curbe geodezice g un vector tangent $\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}(P_0)$ la suprafața $\mathbf{S}$ formează cu vectorul tangent $\mathbf{t}_0 = \mathbf{t}(P_0)$ al acestei geodezice unghiul α, putem construi într-un punct P al curbei geodezice un vector $\mathbf{a}(P)$ *paralel* la $\mathbf{a}(P_0)$ astfel: ducem la planul tangent în P vectorul $\mathbf{a}$ de lungime $|\mathbf{a}_0|$ care formează cu vectorul tangent $\mathbf{t} = \mathbf{t}(P)$ al lui g același unghi α. Din această definiție rezultă că vectorii tangenți de lungime constantă ai unei curbe geodezice sau ai unei drepte se obțin printr-o translație paralelă, deci $\alpha = 0$. Dacă această definiție este aplicată la poligoane curbate compuse din geodezice și aproximăm o curbă arbitrară din $\mathbf{S}$ prin astfel de poligoane geodezice, obținem o privire intuitivă asupra deplasării paralele a unui vector tangent de-a lungul unei curbe arbitrare a suprafeței. Cea mai importantă deosebire dintre o translație pe o suprafață curbă și cea în spațiile afine (euclidiene) este faptul *că în primul caz ea depinde de curbă*. Deplasînd paralel un vector de-a lungul unui drum închis pe suprafață, el nu va mai ajunge în general în poziția sa inițială. În figura 26.1.10 unghiul dintre vectorul inițial $\mathbf{a}_0$ și vectorul deplasat $\mathbf{a}_3$ obținut printr-o deplasare paralelă în jurul triunghiului sferic cu trei unghiuri drepte este de 90°.

26.1.10. Translația paralelă de-a lungul unui triunghi sferic





26.1.11. Curbura normală și curbura geodezică

Curbura unei suprafețe. Pentru a analiza curbura unei suprafețe în jurul punctului P_0 ne vom referi la curbura curbelor care se află pe suprafața $\mathbf{S}$ și trec prin P_0 (fig. 26.1.11). Fie $\mathbf{x}_0''$ vectorul curburii unei curbe $\mathbf{C}$ în punctul P_0. Proiectîndu-l pe normala la suprafață, obținem $\mathbf{x}_0'' = \varkappa_n\mathbf{n}_0 + \mathbf{k}_0$, unde $\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{n}_0 = 0$; deci $\mathbf{k}_0$ este vector tangent. Vectorul curburii curbei $\mathbf{x}_0''$ se va descompune în două componente: tangenta $\mathbf{k}_0$ și normala $\varkappa_n\mathbf{n}_0$. Lungimea $\varkappa_n$ a proiecției pe normala prevăzută cu semnul respectiv se numește *curbura normală* a curbei $\mathbf{C}$ în P_0. Lungimea $\varkappa_g = |\mathbf{k}_0|$ a lui $\mathbf{k}_0$ se numește *curbură geodezică* (tangențială). Din descompunerea vectorului de curbură $\mathbf{x}_0''$ în componenta normală $\varkappa_n\mathbf{n}_0$ și componenta tangențială $\mathbf{k}_0$ rezultă următoarea relație: $\varkappa^2 = \varkappa_n^2 + \varkappa_g^2$ între curbura $\varkappa(s) = |\mathbf{x}''(s)|$, curbura normală $\varkappa_n = \mathbf{x}''(s) \cdot \mathbf{k}_0$ și curbura geodezică $\varkappa_g = |\mathbf{k}_0|$. Curbura geodezică este *invariantă* față de încovoiere, deci o noțiune a geometriei intrinsece, pe cînd curbura normală depinde de poziția suprafeței în spațiu; de exemplu curbura normală în plan este egală cu zero. Dacă încovoiem o suprafață și formăm un cilindru de rază r, atunci curbura normală a fiecăruia dintre cercurile cilindrului este egală cu $1/r$.

Curbura normală este dată de *a doua formă fundamentală*. Fie $u = u(s)$ și $v = v(s)$ ecuația unei curbe $\mathbf{C}$ și s lungimea arcului. Atunci a doua formă fundamentală va fi:

A doua formă fundamentală a suprafeței	$\varkappa_n = D(u, v)\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2D'(u, v)\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + D''(u, s)\cdot\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$

unde

$$D = \mathbf{n} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^2}, \quad D' = \mathbf{n} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u \, \partial v}, \quad D'' = \mathbf{n} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial v^2}.$$

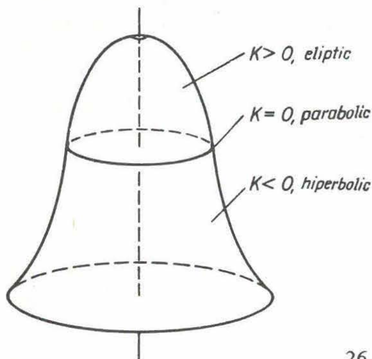
Deci rezultă că curbura normală depinde numai de direcția curbei în punctul P_0.

Toate curbele din S, care au în P_0 aceeași tangentă, au în acest punct aceeași curbură normală.

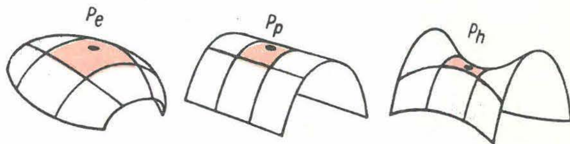
Analizarea curburii normale duce la o clasificare a punctelor de pe suprafață. Dacă pentru un punct P_0 mărimile D, D', D'' sînt egale cu zero, ca în cazul unui punct din plan, P_0 se numește *punct din plan*. Dacă nu este acest caz, vom deosebi trei tipuri de puncte.

Curbura lui Gauss	$K(P) = \dfrac{DD'' - (D')^2}{EG - F^2}$

Dacă într-un punct P al suprafeței de coordonate (u, v) valoarea *curburii totale* $K(P)$ este mai mare decît zero $K(P) > 0$, punctul P se numește *eliptic*, dacă $K(P) < 0$, punctul P se numește *hiperbolic* și dacă $K(P) = 0$, punctul P se numește *parabolic* (fig. 26.1.12). Această împărțire formală este într-o relație strînsă cu forma suprafeței. În cazul camerei unei biciclete (tor) punctele de pe jantă sînt hiperbolice, cele din exterior sînt eliptice. Aceste două mulțimi de puncte sînt despărțite de două cercuri formate din puncte parabolice. Un elipsoid are numai puncte eliptice, un paraboloid hiperbolic numai puncte hiperbolice iar un cilindru numai puncte parabolice (fig. 26.1.13).



26.1.12. Clasificarea punctelor unei suprafețe de rotație



26.1.13. Punct eliptic (P_e), parabolic (P_p) și hiperbolic (P_h)

Theorema egregium. Prima formă fundamentală și a doua formă sînt *invariante la mișcare*, adică dacă mișcăm suprafața în spațiu ca pe un corp rigid (fără a-i schimba forma), cele două forme fundamentale nu se schimbă. Dacă încovoiem suprafața, adică o deformăm *izometric*, prima formă fundamentală nu se schimbă, pe cînd cea de-a doua, care precizează curbura normală, se schimbă. Prima formă este *invariantă față de încovoiere*.

GAUSS a arătat că curbura totală a lui Gauss este invariantă nu numai la mișcare și transformare de parametru ci și la încovoieri. El a numit acest rezultat Theorema egregium.*

Theorema egregium. Curbura totală K rămîne invariantă în cazul proiecțiilor izometrice.

Pentru demonstrarea acestei teoreme găsim pentru K o formulă în care apar numai coeficienții primei forme fundamentale și derivatele lor. Deoarece acestea sînt invariante la încovoiere, K trebuie să fie la fel. Printr-o alegere favorabilă a parametrilor u, v se poate ajunge la situația ca liniile de coordonate de pe suprafață să fie perpendiculare, deci $\dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = F = 0$.

* Teoremă importantă

Facem această ipoteză, și atunci Theorema egregium are următoarea formă:

$$K = \frac{DD'' - D'^2}{EG} = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\right].$$

De aici rezultă că o sferă de rază r are curbura totală a lui Gauss egală pe toată suprafața cu $1/r^2$ și nu poate fi proiectată izometric pe un plan care are $K \equiv 0$. De aceea hărțile care cuprind părți mari ale suprafeței Pămîntului nu redau bine distanțele; hărțile care redau suprafețe mici ale Pămîntului sînt mai exacte.

Stabilirea suprafeței din formele principale. Theorema egregium se asociază cu următoarea întrebare: fie date două forme pătratice

$$\varphi_1 = E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2, \quad \varphi_2 = D\xi^2 + 2D'\xi\eta + D''\eta^2$$

ai căror coeficienți sînt funcții de variabile u și v și fie φ_1 pozitiv definită; există atunci o suprafață **S** pentru care φ_1 să fie prima formă fundamentală și φ_2 a doua formă fundamentală?

Această problemă este analoagă cu cea a determinării unei curbe în cazul unor curburi și torsiuni date. Spre deosebire de această problemă simplă, la care curbura și torsiunea pot fi independente una față de cealaltă, în cazul suprafețelor ambele forme fundamentale nu pot fi alese independente. Coeficienții lor sînt legați prin trei relații numite *condiții de compatibilitate* valabile pe orice suprafață. Una din aceste relații a fost dată în paragraful trecut, expresia Theoremei egregium în condiția $F = 0$, iar celelalte două se numesc *formulele lui Mainardi-Codazzi*. Dacă aceste trei condiții sînt îndeplinite de φ_1 și φ_2, atunci există pentru domenii suficient de mici U ale variabilelor u și v o porțiune de suprafață care are pe φ_1 și φ_2 drept forme fundamentale; două suprafețe definite astfel pe U sînt congruente.

Teorema lui Gauss-Bonnet. Dacă integrăm produsul dintre curbura totală K și elementul de suprafață $\mathrm{d}A$ pe un domeniu U al suprafeței **S**, obținem curbura integrală $K(U)$ a acestui domeniu

$$K(U) = \iint_U K\,\mathrm{d}A = \iint K \cdot \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

care este evident și ea invariantă la încovoiere.

O interpretare intuitivă a curburii integrale și astfel și a curburii totale este dată de *imaginea (proiecția) sferică* a unui domeniu U al suprafeței **S**. Această imagine sferică se obține prin translația versorilor normalei **n** din punctul P al domeniului U al suprafeței într-un punct fix, originea coordonatelor O. Vîrfurile acestor vectori descriu un domeniu V pe sfera unitate care reprezintă *imaginea sferică* a domeniului U al suprafeței **S**. Aria imaginii sferice este egală cu *curbura integrală* a domeniului U din **S**. Este clar că această arie este mai mare, dacă suprafața **S** este curbată mai tare. Dacă domeniul U este mărginit de o curbă închisă **C**, atunci se poate calcula curbura integrală $K(U)$ ca o integrală curbilinie pe curba **C**. Deci este adevărată teorema lui Gauss-Bonnet în care $\varkappa_g$ este curbura geodezică și s este elementul de arc al lui **C**.

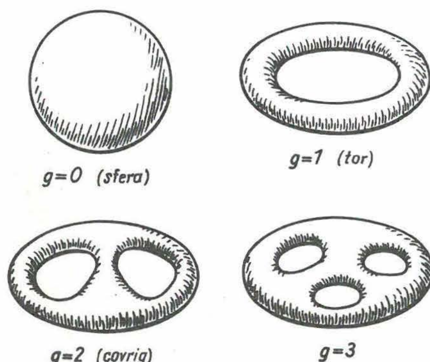
Teorema lui Gauss-Bonnet	$\iint_U K\,\mathrm{d}A + \oint_C \varkappa_g\,\mathrm{d}s = 2\pi$

Un rezultat foarte interesant se obține prin folosirea acestei teoreme pe suprafețe închise. Printr-o *suprafață închisă* intuitiv se înțelege suprafața unui corp finit neted care este găurită în g locuri. Exemple de suprafețe închise sînt: sfera $(g = 0)$, torul $(g = 1)$, „covrigul cu două găuri" $(g = 2)$ (fig. 26.1.14).

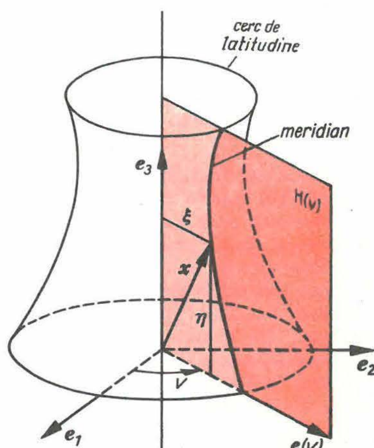
Curbura integrală a unei suprafețe închise S cu numărul de găuri g nu depinde de forma suprafeței și este egală cu

$$K(\mathbf{S}) = \iint_{\mathbf{S}} K\,\mathrm{d}A = 4\pi(1 - g).$$

Acest rezultat este de o importanță deosebită, deoarece proprietățile *topologice* ale suprafeței cu un număr g de găuri, care rămîne invariant la deformări continue, se pot exprima prin mărimi ale geometriei diferențiale (curbura integrală). Generalizarea sa și întrebări asemănătoare au dus în ultimele decenii la dezvoltarea unuia din domeniile cele mai grele și interesante ale geometriei moderne, în care legăturile dintre proprietățile geometrice și cele topologice se cercetează și în cazul dimensiunilor mai mari.



26.1.14 Suprafață închisă găurită în g locuri



26.1.15 Definirea unei suprafețe de rotație

Suprafețe de rotație. *Suprafață de rotație* se numește suprafața obținută prin rotirea unei curbe plane în jurul unei axe care se află în același plan cu curba. Astfel de suprafețe de rotație simetrice se întîlnesc foarte des în practică. Pentru a obține o reprezentare parametrică a unei suprafețe de rotație se imaginează că axa de rotație se află pe axa $\mathbf{e}_3$ a unui sistem de coordonate caterziene în spațiu (fig. 26.1.15). În planul $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ perpendicular pe $\mathbf{e}_3$ versorul $\mathbf{e}(v)$ este definit astfel: $\mathbf{e}(v) = \mathbf{e}_1 \cos v + \mathbf{e}_2 \sin v$ iar pentru derivata sa obținem

$$\mathbf{e}^*(v) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{e}}{\mathrm{d}v} = -\mathbf{e}_1 \sin v + \mathbf{e}_2 \cos v = \mathbf{e}\left(v + \frac{\pi}{2}\right).$$

Observăm că $\mathbf{e}(v)$, $\mathbf{e}^*(v)$, $\mathbf{e}_3$ formează pentru orice valoare a lui v un triedru ortonormat, orientat drept. Un plan $H(v)$ care trece prin originea coordonatelor și este determinat de $\mathbf{e}(v)$ și $\mathbf{e}_3$ se rotește în jurul axei $\mathbf{e}_3$ cînd v variază. Orice curbă din $H(v)$ care are ecuația $\mathbf{x}(u) = \xi(u)\,\mathbf{e} + \eta(u)\,\mathbf{e}_3$, unde u este lungimea arcului și pentru care $\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}u} = 1$, generează o suprafață de rotație în cazul în care $H(v)$ se rotește în jurul axei $\mathbf{e}_3$. Astfel, obținem o ecuație parametrică a suprafeței de rotație generată de $\mathbf{x}(u)$:

$$\mathbf{x}(u, v) = \xi(u)\,\mathbf{e}(v) + \eta(u)\,\mathbf{e}_3.$$

Parametrii suprafeței sînt u, v. Curbele de coordonate sînt *meridianele* care au ecuațiile $\mathbf{x}(u, v_0)$ cu $v_0 = \text{const}$ și *paralelele* $\mathbf{x}(u_0, v)$ cu $u_0 = \text{const}$ care sînt cercuri și au rezultat din intersecția suprafeței cu plane perpendiculare pe axa de rotație. Pentru a determina punctele singulare ale suprafeței, presupunînd curba care generează suprafața regulată, calculăm

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = (\xi'\mathbf{e} + \eta'\mathbf{e}_3) \times \xi\mathbf{e}^* = \xi(-\eta'\mathbf{e} + \xi'\mathbf{e}_3),$$

unde semnul   reprezintă derivata în funcție de lungimea arcului u al curbei. Vectorul $\mathbf{n} = -\eta'\mathbf{e} + \xi'\mathbf{e}_3$ este versorul normalei acestei curbe și totodată vectorul normal al supra-

feței. Un punct este singular dacă și numai dacă $\xi = 0$, deci punctul se află pe axa de rotație. Calculăm coeficienții primei forme fundamentale:

$E = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = |\mathbf{x}'|^2 = 1$, deoarece u este lungimea arcului de pe meridian, $F = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = 0$ (meridianele și paralele sînt perpendiculare) și $G = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = \xi^2(u)$. Deci ea va avea următoarea formă:

$$ds^2 = du^2 + \xi^2(u)\, dv^2.$$

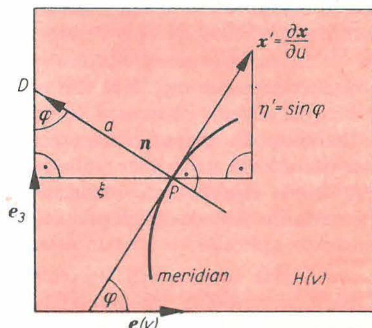
Pentru a calcula cea de-a doua formă fundamentală, trebuie derivate de două ori ecuațiile parametrice

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^2} = \mathbf{x}'' = \varkappa_r \mathbf{n}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u\, \partial v} = \xi' \mathbf{e}^*, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial v^2} = -\xi \mathbf{e}.$$

Mărimea $\varkappa_r$ se numește *curbura relativă* a meridianelor. Valoarea lui $\varkappa_r$ este egală cu curbura curbei, $|\varkappa_r| = \sqrt{\mathbf{x}''\mathbf{x}'}$ deoarece $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$; $\varkappa_r$ este pozitivă cînd curba este curbată în direcția vectorului normalei $\mathbf{n}$ iar cînd se curbează în sens contrar ca și în fig. 26.1.16, atunci $\varkappa_r < 0$. Prin multiplicare scalară cu vectorul normalei obținem $D = \varkappa_r(u)$, $D' = 0$, $D'' = \xi\eta'$ astfel că a doua formă fundamentală are următoarea formă:

$$\varkappa_n = \varkappa_r(u) \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \xi(u)\, \eta'(u) \left(\frac{dv}{ds}\right)^2.$$

Calculul curburii normale a meridianelor și a paralelelor se face foarte ușor. Pentru un meridian avem $v = v_0$, $dv = 0$ și $du = ds$ conform primei forme fundamentale. De aici rezultă $\varkappa_{n(mer)} = \varkappa_r$; curbura normală a unui meridian este egală cu curbura relativă. Pentru o paralelă avem $u = u_0$, $du = 0$, deci $ds^2 = \xi^2\, dv^2$ conform primei forme fundamentale. Deci $\varkappa_{n(par)} = \frac{\eta'}{\xi}$. Această formulă se poate explica ușor geometric. Deoarece $\mathbf{x}' = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}$ este un versor, avem $\mathbf{x}' = \xi'\mathbf{e} + \eta'\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}\cos\varphi + \mathbf{e}_3 \sin\varphi$, unde φ este unghiul pe care îl face $\mathbf{x}'$ cu vectorul $\mathbf{e}$. Din figura 26.1.16 rezultă că $\frac{\xi}{a} = \sin\varphi = \eta'$, astfel că $\frac{\eta'}{\xi} = \frac{1}{a}$, deci curbura paralelei este egală cu inversul valorii lungimii segmentului PD al normalei de la punctul P pînă la axa de rotație. Putem vorbi că valorile calculate sînt maximul și minimul curburilor normale ale unor curbe oarecare ale suprafeței duse prin punctul P. Valorile extreme ale curburii normale se numesc *curburile principale* ale suprafeței în punctul P. Liniile care au în fiecare punct curbura principală egală cu curbura normală se numesc *linii de curbură*. În general prin fiecare punct regulat al unei suprafețe trec două linii de curbură perpendiculare una pe alta; în cazul suprafețelor de rotație acestea sînt meridianele și paralelele. Pentru curbura totală obținem:



26.1.16 Curbura unei suprafețe de rotație

$$K = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2} = \frac{\varkappa_r \xi \eta'}{\xi^2} = \varkappa_r \frac{1}{a}.$$

Curbura totală (curbura lui Gauss) este egală cu produsul curburilor principale.

De aici rezultă că pentru o suprafață de rotație avem $K < 0$ în cazul în care curba se arcuiește înspre axa ($\varkappa_r < 0$) și $K > 0$ dacă se arcuiește în exterior ($\varkappa_r > 0$). Teorema de mai sus care a fost demonstrată numai pentru suprafețe de rotație este valabilă pentru orice fel de suprafețe.

Programul Erlangen al lui Felix Klein

Conform lui Felix KLEIN (1849—1925) *diferitele geometrii sînt teorii ale invarianților grupurilor de transformări*. Astfel, geometria diferențială euclidiană, ca o parte a geometriei euclidiene, este teoria invarianților suprafețelor curbe și curbelor față de grupul de mișcări euclidiene (sau *transformări*) care se pot interpreta ca mișcări de corpuri rigide. În mod asemănător geometria afină este teoria invarianților față de *transformările afine* (proiecții paralele) iar geometria proiectivă studiază proprietățile care rămîn invariante în cazul unei proiecții centrale. Atribuirea planelor osculatoare punctelor unei curbe este invariantă, nu numai din punct de vedere euclidian ci și proiectiv, pe cînd atribuirea lungimii cercului, curburii și torsiunii este invariantă numai din punct de vedere euclidian și nu și din punct de vedere afin. Cercul avînd curbura constantă poate fi transformat printr-o transformare afină într-o elipsă arbitrară care nu mai are curbura constantă.

Pentru fiecare spațiu geometric care posedă un *grup Lie de transformări*, există ca o parte a geometriei respectivului spațiu o geometrie diferențială corespunzătoare. Azi, există în afara geometriei diferențiale *euclidiene* și geometrii diferențiale *afine, proiective, eliptice, hiperbolice*. Proprietățile care rămîn invariante față de un grup G de transformări sînt în mod natural invariante și față de un subgrup conținut în G; astfel împărțirea punctelor unei suprafețe în puncte eliptice, hiperbolice și parabolice este invariantă nu numai din punct de vedere euclidian ci și afin sau proiectiv.

În cazul geometriei diferențiale se mai adaugă faptul că proprietățile care ne interesează rămîn invariante și față de transformări parametrice diferențiabile. Proprietatea de a fi o dreaptă sau un plan este invariantă față de aplicația proiectivă, dar printr-o transformare diferențiabilă planul poate trece într-o suprafață curbă. Invariante față de o aplicație diferențiabilă de un număr suficient de ori sînt *ordinele de contact* între curbe și suprafețe. Și *geometria rețelelor* este invariantă față de astfel de transformări. Problematica proprietăților invariante față de aplicațiile diferențiabile s-a dovedit a fi deosebit de rodnică, deși mulțimea acestor aplicații nu mai formează în general un grup.

Aceste considerații au condus la clasificarea proprietăților geometriei diferențiale analoage principiilor programului Erlangen al lui F. Klein. Putem de exemplu considera toate aplicațiile biunivoce inversabile (injecții), diferențiabile de două ori ale unei suprafețe din E_3 pe suprafețe din E_3. Geometria intrinsecă a fost mai sus definită ca teoria proprietăților suprafețelor care rămîn invariante față de transformări izometrice. Mulțimea aplicațiilor izometrice este în acest caz o submulțime a mulțimii aplicațiilor diferențiabile ale suprafețelor pe suprafețe.

O aplicație se numește *conformă*, dacă unghiul dintre curbele corespunzătoare rămîne constant, de exemplu *proiecția stereografică* a suprafeței unei sfere pe un plan este o aplicație conformă. Orice aplicație izometrică este conformă, dar nu și invers. Proprietățile care rămîn invariante față de reprezentările conforme formează obiectul *geometriei conforme* a suprafețelor. În mod asemănător aplicațiile care păstrează aria sau volumul constante formează obiectul unor alte tipuri de geometrii.

Geometrie riemanniană

Varietăți. Toate figurile geometrice studiate în geometria diferențială pot fi interpretate ca mulțimi de puncte la care ne referim pe baza *parametrilor* sau coordonatelor. Numim dimensiunea unei figuri numărul de coordonate necesare pentru determinarea unui punct al ei. Astfel o curbă este unidimensională deoarece punctele sale sînt caracterizate cu ajutorul unui parametru t. O suprafață plană este bidimensională iar un spațiu conform concepției noastre este

tridimensional. În aplicațiile din fizică și tehnică întîlnim și spații cu mai multe dimensiuni. Dacă de ex. vrem să descriem traseul parcurs de un avion, adică nu numai ruta acestuia ci mișcarea în funcție de timp a avionului, trebuie să precizăm la fiecare moment t longitudinea geografică u, latitudinea v și înălțimea h a avionului. Obținem atunci o curbă într-un spațiu cu patru dimensiuni al variabilelor t, u, v, h. Dacă vrem să urmărim mai precis zborul avionului, vom analiza și componentele vitezei momentane $\dot{u} = \frac{du}{dt}$, $\dot{v} = \frac{dv}{dt}$, $\dot{h} = \frac{dh}{dt}$. Deci, vom obține o curbă într-un spațiu cu șapte dimensiuni al variabilelor $t, u, v, h, \dot{u}, \dot{v}, \dot{h}$.

În cazul a N avioane pe lîngă timpul t vor trebui indicate cele șase coordonate care se referă la locul și viteza fiecărui avion $u_i, v_i, h_i, \dot{u}_i, \dot{v}_i, \dot{h}_i$ $(i = 1, ..., N)$ pentru a descrie „sistemul", totalitatea celor N avioane. Vom obține în acest caz un spațiu $(6N+1)$-dimensional. În mecanica statistică un gaz ideal este reprezentat printr-un sistem de N molecule care se mișcă independent unele față de altele (asemănător cu avioanele); pentru descrierea gazelor sînt necesare deci tot $6N + 1$ coordonate; N are o valoare foarte mare și se numește numărul lui Avogadro $N = 6{,}02 \cdot 10^{23}$. Toate aceste exemple au ceva comun: oricare din aceste spații reprezintă o mulțime ale cărei puncte sînt reprezentate în mod injectiv de sisteme cu n componente de numere reale $(x_1, x_2, ..., x_n)$ numite *coordonatele punctului*. O astfel de mulțime de puncte se numește *varietate n-dimensională diferențiabilă*.

Coordonatele pot fi ca și parametrii unei curbe sau suprafețe supuse unor transformări de coordonate bijective și diferențiabile de un număr suficient de ori. Numai proprietățile care nu depind de alegerea sistemului de coordonate au importanță geometrică. Deoarece numerele reale sînt o imagine matematică a reprezentării geometrice intuitive a *continuumului* (axa numerelor), nu este de mirare că se pot face considerații care au sens geometric în varietăți diferențiabile, de exemplu putem introduce noțiunea de *vectori tangenți* și de *spații tangente* și astfel dezvoltăm o *teorie a contactelor subvarietăților* (curbe, suprafețe, subvarietate m-dimensională a unei varietăți n-dimensionale). Pe baza acestor principii se poate construi o teorie *geometrică a ecuațiilor cu derivate parțiale*. A fost creată de asemenea și o teorie geometrică a calculului variațional, *geometria lui Finsler*.

Geometria riemanniană. Deși se poate dezvolta o geometrie a varietăților diferențiabile, ea este sărăcăcioasă în comparație cu geometria euclidiană, deoarece noțiunile de lungime, unghi, arie, translație, curbură lipsesc total. În anul 1854, Bernhard RIEMANN (1826—1866) își susține primul său curs ca docent la Universitatea din Göttingen cu subiectul „Despre ipotezele care stau la baza geometriei", expunînd ideile de bază ale unei geometrii care își va găsi mult mai tîrziu o aplicație foarte importantă în fizică, ca bază matematică a *teoriei relativității a lui Einstein*. Numim *spațiu riemannian* o varietate n-dimensională în care o formă pătratică diferențială poate fi interpretată ca *element de arc*.

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}(x_1, ..., x_n)\, dx_i\, dx_k .$$

Cel mai simplu caz nebanal de geometrie riemanniană este geometria intrinsecă a unei suprafețe care este determinată numai de elementul ei de arc (prima formă fundamentală) și nu de poziția sa în spațiul euclidian. Prima formă fundamentală se poate transforma în expresia de mai sus a elementului de arc al unui spațiu riemannian bidimensional, înlocuind $u = x_1$, $v = x_2$, $E = g_{11}$, $F = g_{12} = g_{21}$, $G = g_{22}$. Nu este voie să confundăm pe x_1, x_2 cu coordonatele x_1, x_2, x_3 din spațiul E_3.

Geometria riemanniană este generalizarea geometriei intrinseci a suprafețelor într-un spațiu n-dimensional. Toate noțiunile care lipsesc în cazul teoriei varietăților diferențiabile se pot defini cu ajutorul elementului de arc prin analogie cu geometria intrinsecă. Dacă de

exemplu $x_i = x_i(t)$, $0 < t < 1$, este reprezentarea unei curbe în spațiul riemannian, atunci avem de-a lungul ei $dx_i = \dot{x}_i\, dt$ și obținem iarăși ca parametru invariant lungimea arcului

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{\sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}(x_1(t), \ldots, x_n(t))\, \dot{x}_i(t)\, \dot{x}_k(t)}\, dt.$$

În timp ce în geometria intrinsecă forma $\sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}\dot{x}_i\dot{x}_k$ este totdeauna *pozitiv definită*, geometria riemanniană admite și forme *nedefinite* astfel încît lungimea arcului poate fi și zero sau imaginară. În teoria relativității se folosesc chiar astfel de spații riemanniene.

Și spațiul euclidian este un caz particular de spațiu riemannian; pentru elementul său de arc avem în cazul unor coordonate carteziene ortonormate $g_{ii} = 1$ și $g_{ik} = 0$ pentru $i \neq k$. Putem afirma că o parte a unui spațiu riemannian poate lua naștere prin *distorsiunea* unei părți a unui spațiu euclidian de aceeași dimensiune. Acest fapt se poate compara cu obținerea unei părți oarecare a unei caroserii de mașină dintr-o bucată de tablă pe care o tăiem și o presăm. În mod asemănător obținem prin „distorsiunea" unor spații afine *varietăți cu conexiuni afine* în care lungimile, unghiurile și ariile nu mai sînt definite și numai o translație care depinde de drum mai definește această geometrie a varietăților. Curbura unui spațiu riemannian ne indică devierea geometriei acestui spațiu față de cea a unui spațiu euclidian de aceeași dimensiune; aceasta se măsoară cu ajutorul *tensorului de curbură a lui Riemann-Christoffel.*

26.2. Corpuri convexe

Un corp **B** dintr-un spațiu euclidian se numește *convex* dacă odată cu două puncte oarecare ale sale aparține lui **B** și dreapta ce le unește. Corpurile convexe au fost studiate foarte mult. O teorie propriu-zisă a corpurilor convexe a apărut la sfîrșitul secolului al 19-lea prin lucrările lui BRUNN și Hermann MINKOWSKI (1864—1909); ea a fost generalizată pe spații euclidiene n-dimensionale ca și pe spații neeuclidiene. Exemple de corpuri convexe sînt sfera, elipsoidul, cilindrul, conul, cubul, tetraedrul și paralelipipedul drept. Ultimele trei corpuri sînt *poliedre convexe*, adică corpuri al căror contur este format din poligoane convexe. În *teoria poliedrelor convexe* se întîlnesc probleme de acest gen: prin cîte elemente (unghi, muchii, arie etc.) este unic determinat un poliedru convex? În ce caz există un poliedru convex pentru care sînt date anumite elemente?

În teoria corpurilor convexe se întîlnesc des probleme de extrem. Cea mai veche este cea *izoperimetrică* (vezi cap. 38).

Printr-o *suprafață convexă* înțelegem învelișul unui corp convex. O suprafață convexă poate avea muchii și unghiuri după cum am văzut în cazul poliedrelor convexe. Cu toate acestea cele mai importante rezultate ale geometriei diferențiale a suprafețelor regulate din spațiul euclidian se pot generaliza pe suprafețe convexe oarecare. Astfel se obțin rezultate mai cuprinzătoare decît în geometria diferențială clasică. O proprietate importantă a teoriei corpurilor convexe este că putem opera direct cu obiectele geometrice, puncte, drepte etc. și putem renunța la elementele analitice ajutătoare, ca de exemplu coordonate sau reprezentări parametrice. Pe baza acestor metode s-a dezvoltat în ultimul timp o ramură modernă a geometriei — *geometria mulțimilor.*

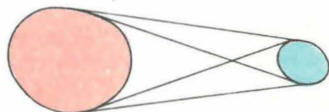
Teoria corpurilor convexe găsește aplicații și în alte domenii ale matematicii. Astfel, s-a dezvoltat împreună cu această teorie *geometria numerelor* ale cărei baze au fost puse de asemenea de Minkowski; ea folosește diferite rezultate ale teoriei corpurilor convexe la probleme teoretice numerice. Tot aici se poate aminti și *teoria stocurilor.* O problemă tipică a acestei

teorii este următoarea: cum trebuie aranjate monede pe o masă foarte mare astfel ca să încapă cît mai multe. Monedele nu trebuie să se suprapună. Rezultatul este următorul: fiecare monedă trebuie să atingă alte șase monede. Problema analoagă cu aceasta, aranjarea unor bile cît mai dens în spațiu nu este încă rezolvată. Și *geometria integrală* are legături variate cu teoria corpurilor convexe.

26.3. Geometrie integrală

Geometria integrală s-a dezvoltat pe baza unor probleme legate de *probabilități geometrice*. Prima problemă de acest fel a fost pusă în anul 1777 de George de BUFFON (1707—1788). Într-un plan se află drepte paralele la o distanță a una de alta. În acest plan se aruncă un ac de lungime $l < a$. Care este probabilitatea p ca acul să nimerească o dreaptă paralelă? Soluția problemei este $p = \frac{2l}{\pi a}$. Deoarece l și a sînt cunoscute iar p poate fi determinat prin metode statistice, există posibilitatea pentru determinarea numărului π *experimental* (aproximativ).

Cu timpul au mai fost rezolvate astfel de probleme și s-au obținut anumite rezultate parțiale importante, însă geometria integrală a devenit de fapt o disciplină aparte numai prin lucrările lui Wilhelm BLASCHKE (1885—1962) și ale elevilor săi. Bazele geometriei integrale a unui spațiu geometric îl formează întotdeauna anumite *măsuri*, care sînt atribuite invariant anumitor mulțimi de obiecte geometrice; într-un plan euclidian se atribuie fiecărei figuri plane elementare drept măsură aria suprafeței. Această măsură este invariantă, figurile congruente avînd aceeași arie. Orice figură se poate concepe ca o *mulțime de obiecte geometrice*, respectiv mulțimea de puncte care îi aparțin. Ne punem întrebarea dacă putem să asociem și mulțimii de drepte o măsură. Fie G mulțimea dreptelor g, care intersectează un cerc K de rază r. Poziția unei astfel de drepte este dată de unghiul director φ făcut de exemplu cu axa Ox și de distanța p de la dreaptă pînă la centrul cercului. Unghiul φ poate să ia toate valorile în intervalul $[0, 2\pi)$, iar p parcurge intervalul $[0, r]$. Măsura mulțimii dreptelor G va fi produsul lungimilor celor două intervale. Se poate demonstra că această măsură este invariantă și se poate defini măsura într-un mod asemănător și pentru alte mulțimi de drepte mai generale. În exemplul de mai sus $2\pi r$ este măsura atașată mulțimii G; ea este egală cu lungimea cercului. Mai general putem afirma că măsura dreptelor care intersectează o figură convexă dintr-un plan este egală cu perimetrul figurii respective (fig. 26.3.1). În cazul a două figuri convexe care nu se suprapun, măsura dreptelor care întîlnesc ambele figuri este egală cu diferența dintre frontierele încrucișate și frontierele care înconjoară cele două mulțimi (teorema lui Crofton).



26.3.1. Teorema lui Crofton

În afară de măsuri pentru mulțimi de drepte se poate calcula și o *măsură cinematică* în cazul figurilor congruente, de exemplu măsura tuturor triunghiurilor echilaterale cu latura egală cu 1, care intersectează o figură dată. Măsura cinematică a fost introdusă de Henri POINCARÉ (1854—1912).

Asemănător ca în plan, se pot dezvolta în cadrul diferitelor geometrii, *definite printr-un grup Lie de transformări* (în sensul *programului Erlangen al lui Felix Klein*), geometrii integrale, mai mult sau mai puțin substanțiale. În special geometria integrală a *spațiilor euclidiene n-dimensionale* s-a dezvoltat foarte mult. S-a încercat dezvoltarea unei geometrii integrale și pentru *suprafețe curbe* și chiar și pentru *geometria finsleriană* a calculului variațional.

Geometria integrală găsește aplicații și în alte ramuri ale geometriei, în special în teoria corpurilor convexe. Metodele geometriei integrale combinate cu statistica matematică are multe aplicații practice, ca de exemplu la determinarea statistică a suprafeței plămînilor.

27. Teoria probabilităților și statistică matematică

27.1. Analiza combinatorie

Analiza combinatorie studiază diferite posibilități de ordonare ale obiectelor, de exemplu „Cîte posibilități există în cazul ordonării a patru litere? " sau „În cîte moduri se pot extrage 5 numere diferite din 90 de numere?" Obiectele analizei pot fi numere, persoane, experimente etc.; ele se numesc elemente și se notează cu cifre sau numere. Dacă sistemele ordonate nu conțin aceleași elemente, de exemplu *ab*, *cd* sau dacă conțin aceleași elemente dar în număr inegal, de exemplu *aab*, *abb*, atunci aceste ansambluri sînt socotite diferite. Sistemele *aabb*, *abab* sînt numai atunci socotite diferite, dacă se ține seama de ordonarea lor.

Permutări

Orice sistem format dintr-un număr finit de elemente într-o ordine oarecare se numește *permutarea* elementelor date; de exemplu ansamblurile *acdbe*, *dbcae* sînt permutări ale elementelor a, b, c, d, e.

Numărul permutărilor. Numărul de permutări ale unor elemente diferite între ele se obține prin inducție astfel: din două elemente a și b se pot obține două permutări *ab* și *ba*. Din trei elemente a, b, c fiecare element poate sta în prima poziție iar celelalte două se pot aranja în două moduri:

abc acb bac bca cab cba

Deci există $3 \cdot 2 = 6$ permutări. În cazul a patru elemente vor fi $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ permutări. Mai general n elemente se pot permuta în $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n = n!$ (se citește n factorial) moduri.

Un număr de n elemente diferite pot fi permutate în $n!$ moduri.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$$

Exemplu. Din cele nouă cifre 1, 2, 3, ..., 9 se pot forma $9! = 362\ 880$ numere formate din nouă cifre astfel încît nici o cifră nu apare decît o singură dată în număr.

Tabelul factorialelor de la 1! *la* 20!

n	$n!$	n	$n!$	n	$n!$	n	$n!$
1	1	6	720	11	39 916 800	16	20 922 789 888 000
2	2	7	5 040	12	479 001 600	17	355 687 428 096 000
3	6	8	40 320	13	6 227 020 800	18	6 402 373 705 728 000
4	24	9	362 880	14	87 178 291 200	19	121 645 100 408 832 000
5	120	10	3 628 800	15	1 307 674 368 000	20	2 432 902 008 176 640 000

Dacă avem între cele n elemente grupe de elemente egale, atunci numărul de permutări este mai mic decît în cazul în care toate elementele sînt diferite: în cazul permutării a 5 elemente $e_1 = a$, $e_2 = a$, $e_3 = b$, $e_4 = b$, $e_5 = b$ ordonările diferite ale elementelor e_1 și e_2 ca și ale elementelor e_3, e_4 și e_5 sînt socotite egale. Deoarece acestea reprezintă 2 ! și respectiv 3 ! permutări, numărul total al permutărilor diferite este egal numai cu $\frac{5!}{2!\,3!} = 10$. Dacă cele n elemente se împart în m grupe formate din p_1, p_2, ..., p_n elemente egale, atunci cele p_i! permutări ale elementelor p_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ sînt socotite egale și numărul total de permutări este egal cu

$$\frac{n!}{p_1!\,p_2!\ldots p_m!}; \quad p_1 + p_2 + \ldots + p_m = n$$

Exemplu. Ar putea juca un jucător de bridge pasionat în decursul vieții sale toate tipurile de jocuri posibile? Numărul de jocuri diferite posibile este $\frac{52!}{13!\,13!\,13!\,13!}$, deoarece permutările celor 13 cărți ale fiecărui jucător nu conduc la alt tip de joc. Din cele $5{,}36 \cdot 10^{28}$ jocuri, un jucător poate să joace numai o parte infimă în decursul a 100 ani și anume 7 300 000 jocuri în cazul în care el joacă zilnic 200 jocuri.

Ordonare lexicografică. Cele n ! permutări a n elemente se pun în evidență foarte ușor prin *ordonarea lexicografică*. Vom ordona de exemplu numerele după mărimea lor sau literele după alfabet. Permutările sînt socotite lexicografic ordonate dacă din două permutări diferite, prima se află cea al cărei prim element este înainte conform ordonării naturale. În cazul egalității primelor elemente vom face diferențe după cel de-al doilea element, în cazul egalității elementelor din poziția a doua diferența se face după cel de-al treilea element etc. Primele două perechi de permutări sînt ordonate lexicografic ca și cele șase permutări ale celor trei elemente de mai sus, pe cînd cea de a treia pereche nu este.

1.	2.	3.
a b c f g ↓	*a b c h i* ↓	*a b d f e* ↓
a b c g f	*a c b i h*	*a b d e f*

Inversiune. Două elemente ale unei permutări formează o *inversiune* dacă ordonarea lor este inversă ordonării naturale. În permutarea *cdbea* a elementelor a, b, c, d, e elementul c este înaintea lui b, c înaintea lui a, d înaintea lui a, b înaintea lui a ca și e înaintea lui a. Acestea sînt inversiuni. Dacă numărul inversiunilor dintr-o permutare este par, atunci permutarea se numește *pară*, altfel ea este *impară*.

Aranjamente și combinări

Sistemele ordonate de k elemente distincte care pot fi formate cu elementele unei mulțimi de n elemente ținînd seama de ordinea elementelor în sistem sînt *aranjamente* de n elemente luate cîte k. În cazul în care nu interesează ordinea în care se scriu elementele, sistemele ordonate sînt *combinări* de n elemente luate cîte k.

Dacă în sisteme același element poate apărea de mai multe ori, numim aranjamentele sau combinările *cu repetiție*.

Numărul de aranjamente. Numărul de aranjamente a n elemente luate cîte k fără repetiție se notează cu A_n^k. Primul element din A_n^k poate fi ales în n moduri, al doilea în $n - 1$, al treilea în $n - 2$, al k-lea în $n - k + 1$ moduri. Deci

$$A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Numărul de aranjamente de n elemente luate cîte k	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Numărul de aranjamente de patru elemente a, b, c, d luate cîte trei este egal cu $A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Acestea sînt

$abc \to abd \to acb \to acd \to adb \to adc \to bac \to bad \to bca \to bcd$
$bda \to bdc \to cab \to cad \to cba \to cbd \to cda \to cdb \to dab \to dac$
$dba \to dbc \to dca \to dcb$

Dacă sînt permise repetițiile, atunci cel de-al doilea element poate fi ales în n moduri, la fel și al treilea etc. Deci în cazul aranjamentelor cu repetiție a trei elemente luate cîte două $A_3^2(r) = 3^2 = 9$ Ele sînt

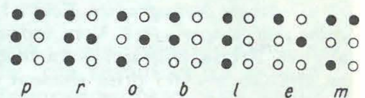
$aa \to ab \to ac \to ba \to bb \to bc \to ca \to cb \to cc.$

Deci în general $A_n^k(r) = n^k$.

Numărul de aranjamente de n elemente luate cîte k cu repetiție	$A_n^k(r) = n^k$

Exemplul 1. Din cifrele $1, 2, \ldots, 9, 0$ se poate forma $A_{10}^3(r) = 10^3 = 1000$ aranjamente de trei elemente cu repetiție. Acestea sînt 000, 001, 002, ..., 999.

Exemplul 2. Cu ajutorul scrierii Braille orbii pot percepe literele, cifrele și semnele de punctuație. Ea se bazează pe aranjamentele cu repetiție a două elemente (proeminențe și adîncituri) luate cîte șase. Ele sînt în număr de $2^6 = 64$ și sînt suficiente pentru reprezentarea alfabetului, cifrelor și semnelor de punctuație (fig. 27.1.1).



27.1.1. Cuvîntul „problem" redat prin metoda Braille

Numărul de combinări. În cazul combinărilor nu mai ținem seama de ordinea în care apar elementele. Numărul de combinări a n elemente luate cîte k se notează cu C_n^k. Putem forma următoarele combinări de patru elemente luate cîte două: $ab \to ac \to ad \to bc \to bd \to cd$. Dacă permutăm elementele fiecărei combinații, obținem A_4^2 al cărei număr este de $2!$ mai mare. În mod similar numărul de aranjamente de n elemente luate cîte k, A_n^k este de $k!$ ori mai mare decît numărul de combinări de n elemente luate cîte k, C_n^k. Astfel $k! \cdot C_n^k = A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, de unde $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$, C_n^k sau $\binom{n}{k}$ fiind coeficienți binomiali.

Numărul de combinări de n elemente luate cîte k fără repetiție	$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

Exemplu. În cazul jocului Bingo $k = 5$ numere diferite pot fi alese în $C_{90}^5 = 43\,949\,268$ moduri. Numai avînd bilete cu toate aceste posibilități putem avea sigur un bilet cîștigător cu cinci numere. Acum vrem să calculăm posibilitatea de a avea patru sau trei numere cîștigătoare. Din cele cinci numere cîștigătoare se pot forma $C_5^4 = 5$ combinări de cinci numere luate cîte patru și $C_5^3 = 10$ combinări de cinci numere luate cîte trei. Fiecare din aceste cinci combinații de cinci numere luate cîte patru apare de $C_{90-5}^1 = 85$ de ori în toate grupările de cinci numere formate, adăugînd la patru numere cîștigătoare unul necîștigător. Deci numărul de grupări care conțin patru numere cîștigătoare este egal cu $C_5^4 \cdot C_{85}^1 = 5 \times 85 = 425$. Fiecare combinație de trei numere poate fi completată cu două din cele necîștigătoare în $C_{85}^2 = 85 \cdot 42$ moduri astfel încît să nu apară o grupare care conține patru sau cinci numere din cele cîștigătoare. Deci numărul de grupări cu trei numere cîștigătoare este $C_5^2 \cdot C_{85}^2 = 35\,700$.

Dacă este permisă repetiția, atunci combinări de n elemente luate cîte k vor fi notate cu $C_n^k(r)$. În cazul a trei elemente a, b, c și în cazul a n elemente $a_1, a_2, \ldots, a_n$ combinările elementelor cu repetiție luate cîte două sînt următoarele:

$$\begin{matrix} aa & ab & ac \\ & bb & bc \\ & & cc \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a_1a_1 & a_1a_2 & a_1a_3 \ldots a_1a_n \\ & a_2a_2 & a_2a_3 \ldots a_2a_n \\ & & a_3a_3 \ldots a_3a_n \\ & & \vdots \\ & & a_na_n \end{matrix}$$

Deci $C_3^2(r) = 3 + 2 + 1 = 6$ şi $C_n^2(r) = n + (n-1) + \ldots + 1 = C_{n+1}^2$. Mai general, $C_n^k(r) = C_{n+k-1}^k$; această afirmaţie se demonstrează cu ajutorul inducţiei matematice.

Numărul de combinări de n elemente luate cîte k cu repetiţie	$C_n^k(r) = C_{n+k-1}^k$

27.2. Teoria probabilităţilor

Istoric. Începuturile teoriei probabilităţilor sînt legate de numele matematicienilor Blaise PASCAL (1623—1662) şi Pierre FERMAT (1601—1665). Ei au ajuns la probleme legate de probabilitate datorită jocurilor de noroc. Un jucător entuziast, cavalerul DE MERÉ s-a adresat lui PASCAL pentru rezolvarea unei probleme care avea o mare importanţă practică pentru el dar pe care singur nu o putea rezolva. Problema era următoarea: doi jucători vor să joace un număr de partide pînă ce cîştigătorul cîştigă m partide. Jocul însă, din anumite motive obiective, se întrerupe după ce un jucător cîştigă $n < m$ partide şi celălalt $p < m$ partide. Cum se poate stabili corect cîştigul în acest caz? PASCAL s-a ocupat de această problemă şi i-a comunicat soluţia sa şi lui FERMAT, care a găsit şi el o soluţie. Mai tîrziu a dat şi Christian HUYGENS (1629—1695) o soluţie. Aceşti învăţaţi au prevăzut rolul pe care-l va avea ştiinţa care se ocupă de stabilirea regulilor privitor la evenimentele aleatoare. Datorită dezvoltării reduse a ştiinţelor naturii, jocurile de noroc au fost multă vreme cauza şi stimulentul dezvoltării teoriei probabilităţilor. Numai în secolul al 19-lea dezvoltarea ştiinţei va cere impetuos dezvoltarea teoriei probabilităţilor şi cercetarea unor probleme nelegate de jocurile de noroc. Această dezvoltare este legată de numele lui Abraham de MOIVRE (1667— 1754), Pierre Simon de LAPLACE (1749—1827), Carl Friedrich GAUSS (1777—1855), Simon-Denis POISSON (1781—1840), Pafnuti Lvovici CEBÎŞEV (1821 — 1894), Andrei Andreevici MARKOV (1856 — 1922) şi în ultimul timp de numele lui Andrei Nikolaevici KOLMOGOROV (născut în 1903) şi al lui Alexandr Iakovlevici HINCIN (1894—1959).

În timpul dezvoltării sale, calculul probabilităţilor a apărut ca o parte a matematicii care se ocupă cu analizarea şi studierea regulilor apariţiei evenimentelor aleatoare.

Probabilitatea evenimentelor aleatoare

Evenimente aleatoare. Deosebim trei feluri de evenimente: sigur, imposibil şi aleator. Dacă în anumite condiţii un eveniment E se realizează cu certitudine, spunem că *evenimentul* este *sigur*; însă dacă evenimentul nu se produce la nici o efectuare a experimentului, îl numim *eveniment imposibil*. În cazul în care evenimentul poate sau nu să apară, acesta se numeşte *eveniment aleator*. În cazul aruncării unui zar, evenimentul apariţiei uneia din feţele 1, 2, 3, 4, 5 sau 6 este un eveniment sigur; evenimentul apariţiei lui 7 este imposibil. Apariţia feţei cu un număr dinainte stabilit din cele şase numere, de exemplu trei, este un eveniment aleator.

Frecvenţa unui eveniment. Aruncăm un zar de 100 de ori şi numărăm de cîte ori apare evenimentul E, respectiv numărul 3. Presupunem că a apărut de 18 ori. Fracţia $\frac{18}{100} = 0,18$ care este denumită *frecvenţa relativă* ne dă posibilitatea de a compara frecvenţa apariţiei lui 3 în această serie de aruncări cu altă serie de experimente în care numărul de aruncări este mai mare sau mai mic.

Frecvenţa relativă	$h(E) = \frac{m}{n}$	m numărul de apariţii ale lui E în cazul a n încercări

Probabilitatea unor evenimente aleatoare. În acest capitol vom renunţa la o definiţie riguros matematică a probabilităţii şi vom încerca intuitiv să explicăm noţiunea de probabilitate. Vom arunca cu zarul; evenimentul aleator E este apariţia unui număr stabilit precis din numerele 1, 2, 3, 4, 5, 6. La o serie mare de aruncări vom urmări frecvenţa numărului

fixat și vom calcula frecvența relativă. Apare o anumită regulă: frecvențele relative vor oscila în jurul unei valori constante fixe iar devierile în jurul acestei valori vor fi în cazul măririi numărului de aruncări tot mai mici. Acest număr fix se definește ca *probabilitatea* apariției evenimentului E care în cazul zarului a fost numărul dinainte stabilit. Deci putem vorbi de probabilitate numai în cazul unor experimente repetate pentru același eveniment și în condiții identice.

În cazul unui număr n suficient de mare de experimente în care evenimentul E apare de m ori, frecvența relativă m/n poate fi socotită ca valoarea probabilității. Această valoare se numește probabilitatea (statistică) a evenimentului E și se notează cu $P(E)$; $P(E) = m/n$.

De multe ori probabilitatea evenimentului E se exprimă și în procente $P(E) = (m/n) \cdot 100\%$. Deoarece pentru frecvența m a evenimentului E în cazul a n observații avem întotdeauna $0 \leqslant m \leqslant n$, pentru probabilitatea $P(E)$ a evenimentului E va fi valabilă următoarea relație: $0 \leqslant P(E) \leqslant 1$. Deci $P(E)$ va fi un număr cuprins între zero și unu.

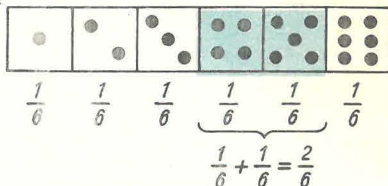
Exemplu. În cazul producției a 1000 de bucăți de roți dințate apar 16 rebuturi. Probabilitatea statistică de apariție a unui rebut (evenimentul E) va fi egală cu $P(E) = 16/1000 = 0{,}016$ sau $P(E) = (16/1000) \cdot 100\% = 1{,}6\%$.

Regula adunării probabilităților evenimentelor incompatibile. *Evenimente incompatibile.* Dacă într-o urnă există numai bile roșii și negre, putem extrage sau o bilă roșie sau una neagră. Ambele evenimente: E_1, *extragerea unei bile roșii*, respectiv E_2, *extragerea unei bile negre* nu se pot produce simultan. Nu există rezultate care favorizează atît pe E_1 cît și pe E_2. Același lucru se întîmplă și la aruncarea zarului. La aruncarea unui zar nu poate apărea decît unul din numerele 1, 2, 3, 4, 5, 6, deci se poate realiza numai unul din evenimentele E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6. Spunem că evenimentele sînt incompatibile dacă nu se pot produce simultan; în cazul unei observații poate să apară numai un singur eveniment.

Regula de adunare. În cazul aruncării zarului poate apărea unul din numerele 1, 2, 3, 4, 5, 6, deci unul din evenimentele incompatibile E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6. Dacă zarul este *ideal*, adică omogen și are aceeași lungime a laturilor, probabilitățile de apariție a evenimentelor E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 sau E_6 sînt egale: $P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = P(E_4) = P(E_5) = P(E_6) = 1/6$. Probabilitatea de apariție a cel puțin unuia din evenimentele E_4 sau E_5 este egală cu 2/6, deci în medie 1/3 din numărul de aruncări va avea ca rezultat pe 4 sau 5. Probabilitățile se vor aduna, deci:

Regula de adunare	$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

În figura 27.2.1 probabilitatea fiecărui eveniment incompatibil E_i este reprezentată printr-o suprafață, probabilitatea 1 prin suma tuturor suprafețelor. Probabilitatea evenimentului $E_4 \cup E_5$ corespunde sumei suprafețelor care reprezintă evenimentele E_4 și respectiv E_5. Această regulă poate fi extinsă la k evenimente incompatibile $E_1, E_2, \ldots, E_k$. În cazul a n observații în medie evenimentul E_1 s-a produs de m_1 ori, evenimentul E_2 s-a produs de m_2 ori etc. și evenimentul E_k de m_k ori. Probabilitățile de producere a acestor evenimente sînt următoarele:



27.2.1. Regula de adunare pentru un zar ideal

$$P(E_1) = \frac{m_1}{n}; \quad P(E_2) = \frac{m_2}{n}; \ldots; P(E_k) = \frac{m_k}{n}.$$

Probabilitatea reuniunii unui număr de evenimente incompatibile este egală cu suma probabilităților acestor evenimente:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_k) = P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_k).$$

Pentru a calcula probabilitatea evenimentului $E_c \cup E_d$ care constă în producerea a cel puțin unuia din evenimentele E_c sau E_d ($c, d \leqslant k$, $c \neq d$), aplicăm următorul raționament: în cazul a n observații apariția unuia din evenimentele E_c sau E_d va fi egală în medie cu $m_c + m_d$, deci:

$$P(E_c \cup E_d) = \frac{m_c + m_d}{n} = \frac{m_c}{n} + \frac{m_d}{n} = P(E_c) + P(E_d).$$

În cazul a patru evenimente E_a, E_b, E_c și E_d

$$P(E_a \cup E_b \cup E_c \cup E_d) = P(E_a) + P(E_b) + P(E_c) + P(E_d)$$

Evenimente contrare. În cazul a n nașteri se presupune că sînt m_1 băieți (evenimentul E_1) și m_2 fete (evenimentul E_2). Probabilitățile vor fi $P(E_1) = m_1/n$ și $P(E_2) = m_2/n$. Avem $P(E_1 \cup E_2) = m_1/n + m_2/n = (m_1 + m_2)/n = 1$, deoarece $m_1 + m_2 = n$. De aici deducem $P(E_2) = 1 - P(E_1)$. Astfel de evenimente la care producerea unuia înseamnă nerealizarea celuilalt se numesc *evenimente contrare.*

Probabilitatea întregului spațiu de selecție. La aruncarea unui zar apar evenimentele E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, unde E_1 apare de m_1 ori, E_2 de m_2 ori, ..., E_6 de m_6 ori. Vom avea

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_6) = P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_6) = m_1/n + m_2/n + \ldots + m_6/n = n/n = 1.$$

Astfel de reuniune de evenimente a cărei probabilitate este egală cu suma probabilităților evenimentelor elementare și este egală cu unu este *întreg spațiu* de selecție.

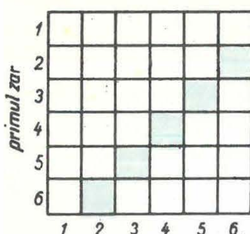
Regula de înmulțire a probabilităților evenimentelor. Probabilități necondiționate și condiționate. Afirmația că la aruncarea unui zar probabilitatea de a ieși unul din numerele 1, 2, 3, 4, 5, 6 este egală cu 1/6 se bazează pe ipoteza că zarul este *ideal* și că în toate încercările s-a folosit același zar. Dacă afirmăm că apariția unui rebut are o probabilitate egală cu 0,016, ne bazăm pe faptul că procesul de producție rămîne neschimbat. Numim astfel de probabilități condiționate de ipoteze ferme *probabilități necondiționate.* Deseori calculul probabilității apariției unui eveniment E este condiționat de realizarea anterioară a evenimentului F cu o anumită probabilitate. O astfel de probabilitate se numește *probabilitate condiționată* și se notează cu $P\left(\frac{E}{F}\right)$.

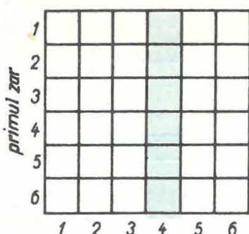
Exemplul 1. Într-o urnă se găsesc m bile negre (N) și $n-m$ bile albe (A). Dacă extragem o bilă și apoi o reintroducem în urnă, probabilitățile de extragere a unei bile albe sau negre sînt probabilități necondiționate. Dacă extragem două bile una după alta și ne interesează probabilitatea ca a doua bilă să aibă o culoare anumită în condiția ca prima bilă are și ea o culoare bine stabilită, probabilitatea este condiționată. În tabelul alăturat sînt date diferitele probabilități necondiționate $P(F)$ și condiționate $P\left(\frac{E}{F}\right)$. Evenimentul F care condiționează evenimentul E constă în extragerea unei bile negre (N) sau a uneia albe (A).

Evenimentul F	N	N	A	A
$P(F)$	$\frac{m}{n}$	$\frac{m}{n}$	$\frac{n-m}{n}$	$\frac{n-m}{n}$
Evenimentul E	N	A	N	A
$P(E/F)$	$\frac{m-1}{n-1}$	$\frac{n-m}{n-1}$	$\frac{m}{n-1}$	$\frac{n-m-1}{n-1}$

Exemplul 2. Aruncăm cu două zaruri ideale. Atunci putem să ne găsim într-unul din cele 36 de cazuri cărora le asociem o pereche de numere (a, b) cu $a = 1, 2, \ldots, 6$ și $b = 1, 2, \ldots, 6$, a fiind numărul care apare pe primul zar și b pe al doilea. Probabilitatea de apariție a unuia din cele 36 de evenimente este egală cu $\frac{1}{36}$. Probabilitatea ca la o aruncare să obținem $a + b = 8$ este $\frac{5}{36}$, deoarece din cele 36 de evenimente numai 5 au $a + b = 8$. Ele sînt: (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2). Această probabilitate se modifică dacă mai adăugăm o condiție

suplimentară ca suma $a + b$ să fie un număr par. Vor fi numai 18 evenimente și în acest caz probabilitatea ca suma $a + b$ să fie egală cu 8 va fi $\frac{5}{18}$ · Probabilitatea ca numărul care apare pe al doilea zar să fie egal cu 4 este egală cu





27.2.2. Probabilitatea la aruncarea a două zaruri
a) 5/36 de a obține în total 8
b) 6/36 de a obține 4 cu al doilea zar

$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ (fig. 27.2.2) deoarece acest eveniment nu poate apărea decît în următoarele cazuri: (1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (5, 4) și (6, 4). Probabilitățile evenimentului apariției unui 4 pe al doilea zar condiționat de faptul că numărul de pe primul zar este de 4 este de asemenea 1/6, deoarece din evenimentele (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6) numai evenimentul (4, 4) satisface condițiile impuse. Probabilitățile condiționată și necondiționată sînt în acest caz egale.

Regula de înmulțire. La producerea unei piese 95% din produse sînt utilizabile (evenimentul F). Din 1000 de produse utilizabile în medie 800 sînt de calitate I. Care este probabilitatea ca o piesă finită să fie de calitatea I (evenimentul E intersectat cu F), adică producerea simultană a evenimentelor E și F? Notăm cu n numărul total al pieselor, cu k numărul pieselor bune și cu m numărul pieselor care sînt de calitatea I. Atunci

$$P(F) = \frac{k}{n} = 0{,}95; \quad P(E/F) = \frac{m}{k} = 0{,}80 \quad \text{iar} \quad P(E \cap F) = \frac{m}{n} = \frac{k}{n} \cdot \frac{m}{k} = P(F) \cdot P(E/F) =$$
$$= 0{,}95 \cdot 0{,}80 = 0{,}76.$$ Deci probabilitatea este egală cu 0,76.

Rezultatul obținut în acest exemplu poate fi formulat mai general.

Probabilitatea de producere simultană a două evenimente E și F este egală cu produsul dintre probabilitatea evenimentului F și probabilitatea lui E condiționată de F.

Regula de înmulțire	$P(E \cap F) = P(F) \cdot P(E/F)$

Deoarece evenimentul $E \cap F$ este același cu evenimentul $F \cap E$, avem $P(E \cap F) = P(F \cap E) = P(E) \cdot P(F/E)$.

Evenimente independente. Repetăm experiența cu cele două zaruri *ideale*. Probabilitatea evenimentului E de a arunca cu primul zar un 4 este egală cu 1/6; probabilitatea evenimentului F de a arunca cu cel de-al doilea zar un 4 este egal tot cu 1/6. Probabilitatea $P(E/F)$ de a arunca un 4 cu al doilea zar în cazul în care cu primul zar am obținut tot un 4 este calculată în exemplul anterior și este egală tot cu 1/6. S-a constatat că rezultatul pe care-l obținem la al doilea zar nu depinde de rezultatul primului zar. Deci două evenimente sînt independente dacă apariția sau neapariția unui eveniment nu are nici o influență asupra apariției sau neapariției celuilalt eveniment. Dacă probabilitatea condiționată $P(E/F)$ a apariției evenimentului E condiționat de apariția anterioară a evenimentului F este egală cu probabilitatea necondiționată $P(E)$, atunci evenimentele E și F sînt independente. Probabilitatea $P(E \cap F)$ în cazul exemplului cu zarurile (să obținem 4 pe fiecare zar) se poate calcula astfel:

$$P(E \cap F) = P(F) \cdot P(E/F) = P(F) \cdot P(E) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

***Regula de înmulțire a probabilităților evenimentelor independente**: probabilitatea apariției simultane a evenimentelor independente E și F, P(E ∩ F), este egală cu produsul probabilităților P(E) care este probabilitatea apariției evenimentului E și P(F) care este probabilitatea evenimentului F. Deci P(E ∩ F) = P(E) · P(F).*

În cazul a trei evenimente independente E_1, E_2, E_3:

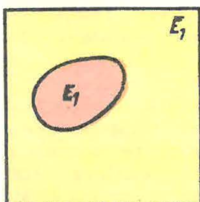
$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3).$$

Definiția axiomatică a probabilității. Dezvoltarea științelor naturii și a tehnologiei a condus la probleme, la care definiția clasică a probabilității nu a mai putut fi aplicată. Nu putem afirma întotdeauna că numărul cazurilor posibile este finit și că diferitele cazuri individuale sînt egale. De exemplu, este dificil pe baza simetriei să determinăm probabilitatea ca într-un anumit interval de timp, m din cele n conversații vor avea loc prin telefon. *Definiția statistică* a probabilității are un caracter mai mult descriptiv decît matematic. Astfel a devenit necesar a studia sistematic bazele conceptelor teoriei probabilităților și a stabili condițiile de aplicabilitate într-o structură axiomatică. Dintre toate formulele propuse, cea folosită astăzi este teoria dezvoltată de KOLMOGOROV la începutul deceniului al patrulea al secolului nostru. El a apropiat conceptul de probabilitate de teoria măsurii și analiza funcțională. KOLMOGOROV a creat un fundament axiomatic pentru conceptul de probabilitate, care se bazează pe o mulțime S de evenimente elementare și un sistem **B** de submulțimi ale lui S. Elementele sistemului **B**, adică submulțimile lui S sînt numite *evenimente aleatoare*. Dacă sistemul **B** al evenimentelor aleatoare satisface următoarele condiții, atunci el este numit un *cîmp Borel de evenimente*.

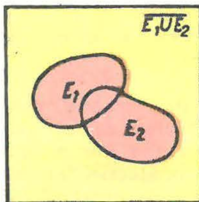
Cîmp Borel

1. **Mulțimea S este un element al lui B.**
2. **Dacă două mulțimi E_1 și E_2 sînt elemente ale lui B atunci reuniunea lor $E_1 \cup E_2$, intersecția lor $E_1 \cap E_2$ și complementele lor $\bar{E}_1$ și $\bar{E}_2$ sînt de asemenea elemente ale lui B.**
3. **Dacă mulțimile $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ sînt elemente ale lui B, atunci reuniunea lor $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n \cup \ldots$ și intersecția lor $E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n \cap \ldots$ sînt de asemenea elemente ale lui B.**

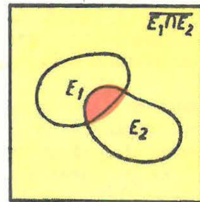
Dacă sînt îndeplinite numai condițiile 1 și 2, atunci vorbim despre *un cîmp de evenimente*.



27.2.3. Evenimentul E_1 și evenimentul $\bar{E}_1$



27.2.4. Evenimentul $E_1 \cup E_2$ și evenimentul $\overline{E_1 \cup E_2}$



27.2.5. Evenimentul $E_1 \cap E_2$ și evenimentul $\overline{E_1 \cap E_2}$

Pe baza condiției a doua $\bar{S}$ care este mulțimea vidă $\emptyset$ este și el un element al lui **B** și se numește *evenimentul imposibil*. Evenimente aleatoare E_1, $\bar{E}_1$, $E_1 \cup E_2$, $\overline{E_1 \cup E_2}$, $E_1 \cap E_2$ și $\overline{E_1 \cap E_2}$ sînt ilustrate în figură unde evenimentele aleatoare sînt reprezentate prin puncte într-un pătrat. Fiecare mulțime de puncte reprezintă un eveniment aleator.

Explicația va fi ajutată de un exemplu. Dacă aruncăm un zar, atunci mulțimea evenimentelor elementare este compusă din șase elemente e_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$, unde e_i indică faptul că numărul obținut la aruncare este i. Sistemul de elemente aleatoare **B** este compus din $2^6 = 64$ elemente; (e_1), (e_2), ..., (e_6), (e_1, e_2), ..., (e_5, e_6), ..., (e_1, e_2, e_3), ..., (e_4, e_5, e_6), ..., $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$ și mulțimea vidă $\emptyset$. În fiecare paranteză se află elemente din S din care sînt formate submulțimile corespunzătoare ale lui S.

Pe baza sistemului **B** de evenimente aleatoare, în care S reprezintă elementul sigur, $\bar{S}$ evenimentul imposibil iar E și $\bar{E}$ evenimente complementare, probabilitatea de apariție a unui eveniment este definită pe baza sistemului de axiome al lui Kolmogorov.

Sistemul de axiome al lui Kolmogorov

Axioma 1. Fiecărui eveniment aleator E din cîmpul de evenimente îi este atașat un număr real nenegativ $P(E)$ numit probabilitatea lui E.

Axioma 2. Probabilitatea evenimentului sigur S este 1, $P(S) = 1$.
Axioma 3. Dacă evenimentele $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sînt incompatibile două cîte două, atunci $P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_n)$.

Sistemul este extins pe baza următoarei axiome de adunare care face posibilă luarea în considerare a acelor evenimente (cu apariție frecventă în teoria probabilităților) care sînt compuse dintr-un număr infinit de mare de evenimente.

Axioma de adunare extinsă. Dacă apariția unui eveniment E este echivalentă cu apariția unui oarecare eveniment $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ incompatibile două cîte două, atunci $P(E) = P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_n) + \ldots$

Din aceste axiome rezultă ca o primă consecință $P(E) \leqslant 1$ pentru orice eveniment E din **B**. Sistemul de axiome nu este contradictoriu. Structura teoriei probabilităților se bazează pe el. Acest concept teoretic al probabilității în combinație cu o interpretare suficient de largă a frecvenței este baza statisticii matematice.

Variabile aleatoare și repartiții

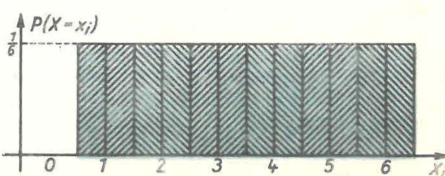
O variabilă se numește *variabilă aleatoare* dacă în cazul mai multor experiment efectuate în aceleași condiții, aceasta ia valori diferite, fiecare valoare fiind un *eveniment aleator*; se notează cu X, Y sau alte litere mari iar valorile pe care le ia se notează cu litere mici x, y etc. Într-un interval o variabilă aleatoare poate să ia sau un număr finit sau infinit nenumărabil de valori. În primul caz variabila aleatoare se numește *discretă* iar în al deilea caz se numește *continuă*. Numărul pe care-l obținem în cazul aruncării unui zar X poate lua numai valori discrete $x_i, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, deci el reprezintă o variabilă aleatoare discretă. Dimpotrivă, viteza unei molecule dintr-un gaz poate să ia orice valoare într-un interval stabilit, deci este o variabilă aleatoare continuă.

Repartiție. În cazul producției de șuruburi apariția rebuturilor pe schimb este o variabilă aleatoare, deoarece intervin factori a căror influență nu o putem aprecia (variațiile materialului). Prin cunoașterea numărului minim și maxim de rebuturi pe schimb nu putem să ne pronunțăm asupra calității producției într-un interval de timp mai lung. Acest lucru este posibil în cazul în care în afară de numărul de rebuturi indicăm și probabilitatea de apariție a acestui număr. O variabilă aleatoare este caracterizată de valorile pe care le ia ca și de probabilitățile corespunzătoare fiecărei valori.

Mulțimea ale cărei elemente sînt perechile ordonate formate din valorile pe care poate să le ia variabila aleatoare și probabilitatea corespunzătoare definește repartiția variabilei aleatoare.

Repartiția unei variabile discrete. La aruncarea cu un zar ideal numărul pe care-l obținem este o variabilă aleatoare X care poate lua numai valorile discrete $x_i, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Fiecare din aceste numere poate apărea cu probabilitatea $P(X = x_i) = 1/6$. Repartiția va fi:

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



27.2.6. Reprezentarea grafică a probabilității de apariție a unei variabile aleatoare discrete

Reprezentarea grafică a repartiției de probabilitate se face în felul următor: pe abscisă notăm valorile posibile iar pe ordonată probabilitățile corespunzătoare (fig. 27.2.6). În cazul exemplului de mai sus ele au toate aceeași valoare, deci aceeași înălțime. Suma tuturor $P(X = x_i)$ este egală cu 1. În cazul reprezentării grafice, dacă luăm lățimea dreptunghiurilor formate egală cu unitatea, atunci suma ariilor dreptunghiurilor formate

este egală cu 1. În baza acestui exemplu putem deduce foarte uşor *funcţia de repartiţie* care ne indică probabilitatea ca numărul pe care-l obţinem la aruncarea zarului să fie mai mic decît un număr dat, de exemplu $F(1) = P(X < 1) = 0$, deci probabilitatea apariţiei unui număr mai mic decît 1 este egală cu zero (fig. 27.2.7). Continuînd, obţinem:

$$F(2) = P(X < 2) = P(X = 1) = \frac{1}{6},$$

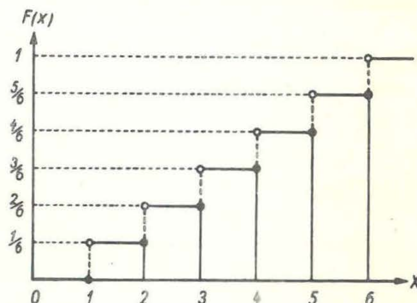
$$F(3) = P(X < 3) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{3},$$

$$F(4) = P(X < 4) = \sum_{i=1}^{3} P(X = i) = \frac{1}{2},$$

$$F(5) = P(X < 5) = \sum_{i=1}^{4} P(X = i) = \frac{2}{3},$$

$$F(6) = P(X < 6) = \sum_{i=1}^{5} P(X = i) = \frac{5}{6},$$

$$F(x > 6) = P(X < x) = \sum_{i=1}^{6} P(X = i) = 1$$

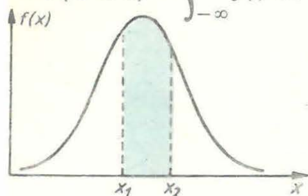


27.2.7. Reprezentarea grafică a funcţiei de repartiţie $F(x)$ a unei variabile aleatoare discrete

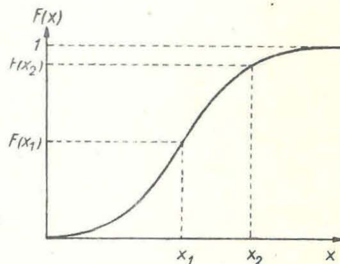
Reprezentînd pe abscisă valorile x_i şi pe ordonată valorile lui $F(x)$, obţinem reprezentarea grafică a funcţiei de repartiţie ca o funcţie în trepte care conţine puncte de salt. Avem $F(-\infty) = 0$ şi $F(+\infty) = 1$ (fig. 27.2.7).

Repartiţia unei variabile continue. O variabilă aleatoare continuă poate lua un număr oricît de mare de valori într-un interval; probabilitatea de apariţie a fiecărei valori izolate x este egală cu 0. Vom analiza în acest caz *densitatea de repartiţie* $f(x)$ care are următoarele proprietăţi: $f(x) \geqslant 0$ şi $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$ (fig. 27.2.8). Pe graficul densităţii de repartiţie aria suprafeţei dintre curba $f(x)$ şi axa absciselor este egală cu 1.

Funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare continue X va fi următoarea: $F(X) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$, unde $F(-\infty) = 0$ şi $F(+\infty) = 1$ (fig. 27.2.9).



27.2.8. Reprezentarea grafică a densităţii de repartiţie



27.2.9. Funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare continue

Probabilitatea ca X să se afle între două puncte x_1 şi x_2 ($x_1 < x_2$) este $P(x_1 \leqslant X < x_2) = P(X < x_2) - P(X < x_1) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t)\,dt$.

Pe figura 27.2.8 ea este redată cu aria colorată cu albastru. Repartiţia cea mai importantă în cazul variabilelor aleatoare continue este *repartiţia normală* pe care o vom analiza mai tîrziu.

Valoarea medie și dispersia

Repartiția în cazul unei variabile aleatoare discrete și densitatea de repartiție în cazul unei variabile aleatoare continue o descriu complet dînd informații precise asupra valorilor variabilei alearoare și probabilitățile corespunzătoare. În teoria probabilităților și în special în aplicațiile sale s-au introdus pentru caracterizarea variabilelor aleatoare anumiți parametri care se calculează din repartiția, respectiv din densitatea de repartiție. Cei mai importanți sînt *valoarea medie* și *dispersia*.

Valoarea medie. Valoarea medie $M(X)$ sau μ a unei *variabile aleatoare discrete* X este egală cu suma produselor dintre fiecare valoare care poate să o ia variabila aleatoare și probabilitatea corespunzătoare. Dacă avem pentru X următoarea repartiție:

$$X: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \dots x_n \\ p_1 & p_2 \dots p_n \end{pmatrix} \quad \text{cu} \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,$$

valoarea medie va fi $M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n$.

Valoarea medie a unei variabile aleatoare discrete	$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i$

Exemplu. În cazul aruncării zarului avem $p_i = 1/6$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$; valoarea medie va fi

$$M(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5.$$

Valoarea medie a unei *variabile aleatoare continue* $M(X)$ se obține prin integrarea de la $-\infty$ la $+\infty$ a produsului $xf(x)$.

Valoarea medie a unei variabile aleatoare continue	$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$

Exemplu. Care este valoarea medie a variabilei aleatoare X care are densitatea de *repartiție normală* (fig. 27.2.10)

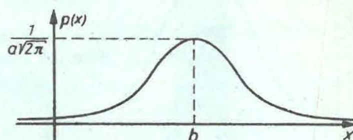
$$p(x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}}?$$

Valoarea medie va fi egală cu

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}} dx.$$

Prin substituția $\frac{x-b}{a\sqrt{2}} = z$, $\frac{dx}{a\sqrt{2}} = dz$ și prin folosirea formulelor de integrare $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ și $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx = 0$ obținem $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz =$

$$= 1 \text{ și } M(X) = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(z + \frac{b}{a\sqrt{2}}\right) e^{-z^2} dz = \frac{b}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = b.$$



27.2.10. Valoarea medie a unei repartiții normale

Valorile medii ale sumelor și produselor de variabile aleatoare. Suma a două variabile aleatoare X și Y cu valorile medii $M(X)$ și $M(Y)$ este de asemenea o variabilă aleatoare $Z = X + Y$. De exemplu suma numerelor pe care le obținem la aruncarea a două zaruri este

o variabilă aleatoare. Valoarea medie $M(Z)$ a variabilei aleatoare Z se determină cu ajutorul valorilor medii $M(X)$ și $M(Y)$ ale variabilelor aleatoare X și Y.

Valoarea medie a sumei a două variabile aleatoare este egală cu suma valorilor medii a celor două variabile aleatoare.

$$M(Z) = M(X) + M(Y)$$

Această regulă se aplică și în cazul a trei sau mai multe variabile aleatoare. Valoarea medie $M(Z)$ a variabilei aleatoare $Z = X + Y + U$ este egală cu suma valorilor medii ale lui X, Y și U: $M(Z) = M(X) + M(Y) + M(U)$.

Exemplul 1. Aruncăm cu două zaruri. Numărul care îl obținem la primul zar corespunde variabilei aleatoare X iar numărul pe care-l obținem la al doilea zar variabilei aleatoare Y. Cunoaștem valorile medii ale amîndorura: $M(X) = 3{,}5$ și $M(Y) = 3{,}5$. Suma celor două numere este o nouă variabilă aleatoare Z cu valoarea medie

$$M(Z) = 3{,}5 + 3{,}5 = 7.$$

Exemplul 2. Producția unei uzine într-un interval mic de timp, de exemplu o zi, poate fi socotită o variabilă aleatoare. Presupunem cazul a două uzine A și B a căror producție reprezintă variabile aleatoare (X pentru A și Y pentru B) cu $M(X) = 260$ și $M(Y) = 90$. Producția ambelor uzine este tot o variabilă aleatoare Z cu

$$M(Z) = 260 + 90 = 350.$$

Pentru produsul a două variabile aleatoare X și Y există de asemenea o regulă foarte simplă în cazul în care X și Y sînt independente, deci pentru x și y oarecare este valabilă egalitatea

$$P(X < x;\ \ Y < y) = P(X < x) \cdot P(Y < y),$$

unde $P(X < x;\ Y < y)$ este probabilitatea ca variabila X să fie mai mică decît x și Y să fie mai mic decît y. Dacă $M(X)$ și $M(Y)$ sînt valorile medii ale variabilelor aleatoare independente X și Y, atunci valoarea medie a variabilei aleatoare $Z = X \cdot Y$ este egală cu $M(Z) = M(X) \cdot M(Y)$.

Valoarea medie a produsului a două variabile aleatoare independente este egală cu produsul valorilor medii ale variabilelor aleatoare

$$M(Z) = M(X) \cdot M(Y)$$

Analog ca la însumarea mai multor variabile aleatoare, și aici regula se extinde la mai multe variabile aleatoare independente.

Exemplu. În cazul fabricării unei plăci dreptunghiulare lungimea (în mm) și lățimea (în mm) sînt variabile aleatoare. Deci și aria este de asemenea o variabilă aleatoare ($Z = XY$). Valorile medii sînt $M(X) = 120$ mm și $M(Y) = 80$ mm. Valoarea medie a ariei va fi egală cu $M(Z) = 120 \cdot 80 = 9600$ mm^2.

Dispersia. În multe cazuri nu este suficientă caracterizarea unei variabile aleatoare numai prin valoarea medie. În cazul producției de șuruburi o caracteristică importantă este diametrul său care poate fi interpretat în sens probabilistic ca o variabilă aleatoare X. La reglarea bună a mașinilor valoarea medie este egală cu valoarea nominală. În timpul producției se constată că diametrele multor șuruburi sînt mai mici sau mai mari decît valoarea nominală: în cazul unei medii egale, abaterea de la valoarea nominală poate să fie în cazul unei mașini pozitivă, la altele negativă. Ele însă trebuie să se afle în interiorul limitelor de toleranță.

Pentru descrierea acestor neajunsuri se folosește *dispersia* σ^2 a cărei rădăcină pătrată σ se numește *abatere medie pătratică* sau *abatere standard*. Ea este o măsură pentru devierea de la medie.

Dispersia σ^2 sau $D(X)$ a unei variabile aleatoare discrete X o obținem prin însumarea produselor dintre pătratul devierii de la medie $(x_i - \mu)$ și probabilitatea corespunzătoare. Mărimile $(x_i - \mu)^2$ urmează aceeași repartiție ca X și anume

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \cdots x_n \\ p_1 & p_2 \cdots p_n \end{pmatrix} \quad \text{cu} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Dispersia unei variabile aleatoare discrete	$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p_i$

Exemplu. La aruncarea cu un zar numărul obținut constituie o variabilă aleatoare X cu valoarea medie $\mu = 3{,}5$ și urmează repartiția

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Dispersia σ^2 va fi egală cu

$$\sigma^2 = (1 - 3{,}5)^2 \cdot 1/6 + (2 - 3{,}5)^2 \cdot 1/6 + (3 - 3{,}5)^2 \cdot 1/6 + (4 - 3{,}5)^2 \cdot 1/6 + (5 - 3{,}5)^2 \cdot 1/6 + (6 - 3{,}5)^2 \cdot 1/6 = 2{,}92 \text{ și } \sigma = \sqrt{2{,}92} = 1{,}71.$$

Dispersia σ^2 a unei variabile aleatoare continue X se obține prin integrarea de la $-\infty$ la $+\infty$ a produsului dintre pătratul abaterii de la medie $(x-\mu)$ și densitatea de repartiție $f(x)$.

Dispersia unei variabile aleatoare continue	$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$

Exemplu. Care este dispersia variabilei aleatoare X care are valoarea medie b și densitatea de repartiție

$$p(x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}} \quad (\textit{repartiția normală})?$$

Dispersia este egală cu $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-b)^2 \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}} dx = a^2$.

Dispersia sumei a două variabile aleatoare independente. Fie X și Y două variabile aleatoare cu dispersia σ_x^2 și respectiv σ_y^2; atunci și $Z = X + Y$ este o variabilă aleatoare iar dispersia sa σ_z^2 este determinată de dispersiile σ_x^2 și σ_y^2 a celor două variabile aleatoare independente.

Dispersia unei sume de două variabile aleatoare independente este egală cu suma dispersiilor celor două variabile.

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

Exemplu. La aruncarea cu două zaruri suma numerelor pe care le obținem este o variabilă aleatoare Z. Ea este suma celor două variabile aleatoare independente X și Y care reprezintă numărul obținut la primul și respectiv al doilea zar. Dispersiile variabilelor X și Y sînt $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 2{,}92$. Atunci dispersia variabilei aleatoare Z este egală cu $\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 = 2{,}92 + 2{,}92 = 5{,}84$.

Inegalitatea lui Cebîșev

În paragraful anterior am văzut că putem avea o privire de ansamblu asupra repartiției prin cunoașterea mediei și dispersiei. Dar nu vom putea răspunde la întrebarea cît de mari sînt probabilitățile corespunzătoare abaterilor de la media μ. O evaluare simplă este dată de *inegalitatea lui Cebîșev.*

Fie X o variabilă aleatoare discretă sau continuă cu valorile x, valoarea medie μ și dispersia σ^2. Inegalitatea lui Cebîșev pe care nu o vom demonstra este următoarea:

Inegalitatea lui Cebîșev	$P(\lvert x - \mu\rvert \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$

Probabilitatea ca modulul diferenței $(x-\mu)$ să fie mai mare sau egal cu un număr oarecare $\varepsilon > 0$ este mai mică sau egală cu cîtul dintre dispersia σ^2 și pătratul lui ε.

Cu ajutorul acestei inegalități pot fi calculate probabilitățile pentru diferite abateri de la valoarea medie. În cazul unor măsurători de lungimi avem valoarea medie egală cu 300 m

și dispersia egală cu 36. Probabilitatea ca abaterea de la medie să fie mai mare decît 30 m este următoarea:

$$P(|x - 300| \geqslant 30) \leqslant \frac{36}{900} = 0{,}04; \text{ deci este cel mult } 0{,}04.$$

Legea numerelor mari

În practică și în cazul cercetărilor teoretice o importanță foarte mare o au evenimentele a căror probabilitate este aproximativ egală cu unu sau cu zero; de exemplu, probabilitatea corespunzătoare siguranței transportului pasagerilor trebuie să fie aproximativ egală cu unu, iar probabilitatea prăbușirii unui pod să fie aproximativ egală cu zero. Calculul probabilităților stabilește anumite reguli privitoare la ele.

Una din cele mai importante legi este *legea numerelor mari* pe care o vom enunța în două feluri.

Prima formă este a lui Jakob BERNOULLI (1654—1705).

Să presupunem că se fac n experimente independente, în fiecare experiment probabilitatea evenimentului E este p și fie n_1 numărul de realizări ale evenimentului E în cele n experimente. Dacă ε este un număr pozitiv arbitrar, atunci

$$P\left(\left|\frac{n_1}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{1}{4\varepsilon^2 n}.$$

Legea numerelor mari a lui Bernoulli. Probabilitatea ca modulul diferenței dintre frecvența relativă a evenimentului E în cazul a n experimente (n suficient de mare) și probabilitatea p a evenimentului E să fie mai mic ca un ε pozitiv, arbitrar de mic este aproximativ egală cu unu.

Acum o să redăm legea numerelor mari conform lui Pafnuti Lvovici CEBÎȘEV (1821—1894).

Fie $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variabile aleatoare independente care au valorile medii $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ și dispersiile mai mici decît o constantă b^2. Notăm $A = \frac{1}{n}(\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n)$ media aritmetică a valorilor medii. Oricare ar fi numărul pozitiv ε, avem $P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - A\right| < \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{b^2}{n\varepsilon^2}$.

Legea numerelor mari a lui Cebîșev. Probabilitatea ca modulul diferenței dintre media aritmetică A a valorilor medii a n variabile aleatoare independente (n suficient de mare) și media aritmetică a variabilelor aleatoare să fie mai mică decît ε este aproximativ egală cu unu.

Exemplu. La aruncarea unei monede poate apărea sau *stema* sau *banul*. Vom da alături rezultatele obținute pe baza legii numerelor mari pentru serii foarte mari de aruncări în cazul lui $\varepsilon = 0{,}1$. Vedem că la creșterea numărului de experimente probabilitatea ca frecvența relativă $\frac{n_1}{n}$ să devieze de la probabilitatea $p = 0{,}5$ mai puțin de 0,1 tinde către 1.

Banul sus

	n	n_1	$\frac{n}{n_1}$	$1 - \frac{1}{4\varepsilon^2 n}$
Buffon	4 040	2 048	0,507	0,9938
K. Pearson	12 000	6 019	0,5016	0,9979
K. Pearson	24 000	12 012	0,5005	0,9990

Repartiții importante

O variabilă aleatoare X este caracterizată complet prin repartiția sa, adică prin repartiția de probabilitate sau densitatea de repartiție. Unele tipuri de repartiție au o mare importanță practică. Cele mai importante le vom reda mai jos.

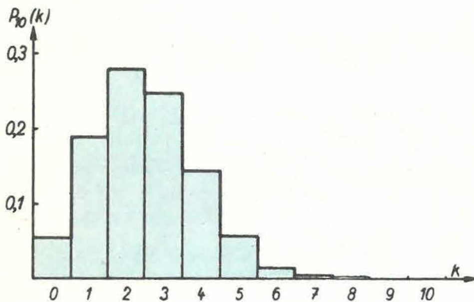
Repartiția binomială. Această repartiție mai este denumită și *repartiția lui Bernoulli* sau *newtoniană*. Ea se folosește la problemele de tipul următor. Într-o urnă se află bile albe și negre, în total N bile. Probabilitatea să extragem o bilă neagră (evenimentul E) este p. Orice bilă pe care o extragem o punem înapoi. Care este probabilitatea ca în cazul a n extrageri evenimentul E să apară de k ori și de $n-k$ ori să nu apară (variabila aleatoare X)?

Repartiția lui X este repartiția binomială. Ea se deduce în felul următor. Într-un șir de n extrageri extragerile sînt evenimente aleatoare, independente deoarece orice bilă extrasă este reintrodusă în urnă. Dacă extragerea unei bile negre se face cu probabilitatea p, atunci probabilitatea extragerii unei bile albe este $1-p$. Probabilitatea ca să extragem k bile negre și $n-k$ bile albe din n extrageri este $p^k(1-p)^{n-k}$. Extragerile celor k bile negre se poate face în $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ moduri. Deci probabilitatea căutată $P_n(k)$ va avea forma $P_n(k) = C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$. Probabilitățile care corespund diferitelor valori ale lui k ne dau repartiția iar prin însumare funcția de repartiție

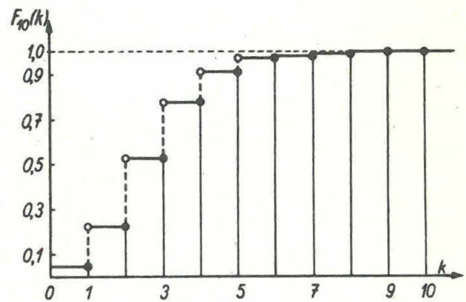
$$F_n(k) = \sum_{m=0}^{k-1} P_n(m).$$

Exemplu. Extragem o bilă din urnă și apoi o introducem la loc. Probabilitatea de a extrage o bilă neagră este $p = 1/4$. Zece extrageri formează o grupă; numărul bilelor negre din diferite grupe variază, deci el este o variabilă aleatoare. Se va calcula repartiția și funcția de repartiție a variabilei „numărul bilelor negre din 10 bile". Pe baza formulei $P_{10}(k) = C_{10}^k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{10-k}$, unde $k = 0, 1, \ldots, 10$, obținem repartiția (fig. 27.2.11):

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_{10}(k)$	0,056	0,188	0,282	0,250	0,146	0,058	0,016	0,003	0,001	0,0	0,0



27.2.11. Funcția de probabilitate $P_{10}(k)$ a repartiției



27.2.12. Reprezentarea funcției de repartiție $F_{10}(k)$

iar cu ajutorul lui $F_{10}(k) = \sum_{m=0}^{k-1} P_{10}(m)$ funcția de repartiție (fig. 27.2.12).

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	>10
$F_{10}(k)$	0,0	0,056	0,244	0,526	0,776	0,922	0,980	0,996	0,999	1,0	1,0	1,0

În prezentarea grafică, pe axa absciselor sînt valorile lui k, iar pe axa ordonatelor $P_{10}(k)$, $F_{10}(k)$ respectiv.

Cu ajutorul repartiției binomiale se poate calcula probabilitatea nașterii a 1, 2, 3, 4, 5, sau 6 băieți din 6 copii. Probabilitatea nașterii unui băiat este 0,515.

Băieți	6	5	4	3	2	1	0
Probabilitate	0,019	0,105	0,248	0,312	0,220	0,083	0,013

Pentru un calcul mai ușor al probabilității $P_n(k)$ vom deduce din raportul

$$P_n(k+1) : P_n(k) = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p}.$$

formula alăturată de recurență.

Formula de recurență:
$P_n(k+1) = \dfrac{n-k}{k+1} \cdot \dfrac{p}{1-p} P_n(k)$

Valoarea medie și dispersia repartiției binomiale. Prin introducerea lui $P_n(m)$ în formula valorii medii a unei variabile aleatoare discrete obținem

$$\mu = \sum_{m=0}^{n} mP_n(m) = \sum_{m=0}^{n} mC_n^m p^m(1-p)^{n-m} = np \sum_{m=0}^{n-1} C_{n-1}^m p^m (1-p)^{n-1-m}.$$

Ținînd seama de formula binomului lui Newton, vom avea $\mu = np[p + (1-p)]^{n-1} = np$. Cu ajutorul valorii medii np calculăm dispersia

$$\sigma^2 = \sum_{m=0}^{n} (m - np)^2 P_n(m) =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} m^2 C_n^m p^m (1-p)^{n-m} - 2np \sum_{m=0}^{n} mC_n^m p^m (1-p)^{n-m} +$$

$$+ n^2p^2 \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = \sum_{m=0}^{n} m^2 C_n^m p^m (1-p)^{n-m} - n^2p^2.$$

Aplicăm la calculul primei sume aceeași metodă ca la valoarea medie și deci dispersia va fi

$$\sigma^2 = pn[1-p) + pn] - n^2p^2 = np(1-p).$$

În exemplul anterior valoarea medie și dispersia vor avea următoarele valori:

$$\mu = 10 \cdot \frac{1}{4} = 2,5; \quad \sigma^2 = 10 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = 1,875.$$

Repartiția binomială se folosește pentru valori mici ale lui n și k. Pentru valori mari ea este anevoioasă și în funcție de problemă se folosește repartiția Poisson sau repartiția normală.

Repartiția binomială	
Legea de repartiție	$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$
Media	$\mu = np$
Dispersia	$\sigma^2 = np(1-p)$

Experiența lui Galton. Repartiția binomială a fost pusă în evidență, pe baza unei experiențe, de Galton. Pe o scîndură s-au bătut niște cuie. Cuiele se bat astfel încît distanța dintre două cuie alăturate este împărțită de unul de deasupra în raportul $p:(1-p)$ (fig. 27.2.13). Printr-o pîlnie lăsăm să cadă bile care vor trece printre cuie. Bilele lovesc cuiele și au

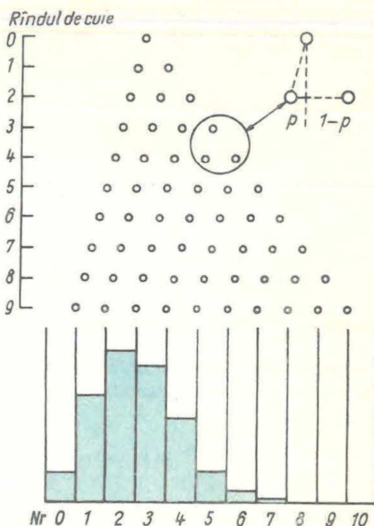
probabilitatea să se abată la stînga sau la dreapta lor. După parcurgerea a n rînduri de cuie, ele ajung în $n + 1$ recipiente. Numărul de bile din recipiente ne indică repartiția lor. Dacă sînt N bile și n rînduri de cuie, atunci în recipientul m sînt $N \cdot P_n(m)$ bile. Astfel pot fi puse în evidență diferite repartiții binomiale.

Repartiția Poisson. Această repartiție este o repartiție asemănătoare cu cea binomială. Se deosebește prin faptul că numărul n de extrageri din urnă, de exemplu, este foarte mare iar probabilitatea p de extragere a unei bile negre este foarte mică. Cu alte cuvinte: repartiția Poisson este un caz limită al repartiției binomiale pentru $n \to \infty$ și $p \to 0$, unde produsul $np = a$ este constant. Această repartiție se folosește deci în cazul apariției foarte rare a unui eveniment. Pe bază acestor ipoteze după trecerea la limită probabilitatea de a obține k bile negre din n extrageri este

$$\psi_n(k) = \lim_{n \to \infty} P_n(k) = \frac{a^k e^{-a}}{k!},$$

unde $np = a$. Repartiția Poisson este definită numai de constanta a. Probabilitățile pentru diferite valori ale lui k ne indică repartiția iar prin însumarea probabilităților obținem funcția de repartiție

$$F_n(k) = \sum_{m=0}^{k-1} \psi_n(m).$$



27.2.13. Reprezentarea schematică a experienței lui Galton

Exemplu. Dintr-o urnă extragem cîte o singură bilă pe care o reintroducem. Probabilitatea să extragem o bilă neagră este $p = 0{,}01$. Formăm grupe de 60 de extrageri. Numărul de bile negre din diferite grupe oscilează, deci este o variabilă aleatoare. Se va calcula legea de repartiție și funcția de repartiție aleatoare „numărul de bile negre din 60 de bile". Din $\psi_{60}(k) = \dfrac{0{,}6^k e^{-0{,}6}}{k!}$, uude $a = 60 \cdot 0{,}01 = 0{,}6$ iar $k = 1, 2, ..., 60$, obținem repartiția de probabilitate

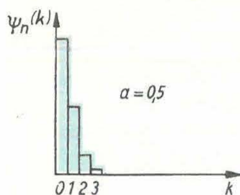
k	0	1	2	3	4	5	...	60
$\psi(k)$	0,549	0,329	0,099	0,020	0,003	0,000	...	0,000

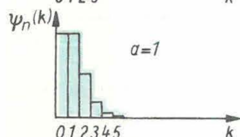
iar $F_{60}(k) = \sum_{m=0}^{k-1} \psi_{60}(m)$ ne indică funcția de repartiție

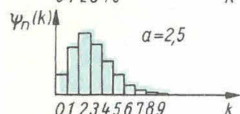
k	0	1	2	3	4	5	6	...	60	>60
$F_{60}(k)$	0,0	0,549	0,878	0,977	0,997	1,000	1,000	...	1,000	1,000

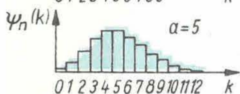
Același mod de reprezentare ca în cazul repartiției binomiale se folosește și pentru repartiția Poisson. În figura 27.2.14 sînt reprezentate repartiții Poisson cu diferite valori pentru a. Se observă că prin creșterea lui n vîrful curbei se deplasează spre dreapta și asimetria curbei scade. Pentru calcularea diferitelor probabilități vom folosi o formulă de recurență obținută din raportul

$$\psi_n(k+1) : \psi_n(k) = [k!\, a^{k-1} e^{-a}] : [(k+1)!\, a^k e^{-a}] = a : (k+1).$$









27.2.14. Repartiția Poisson pentru diferite valori ale lui a

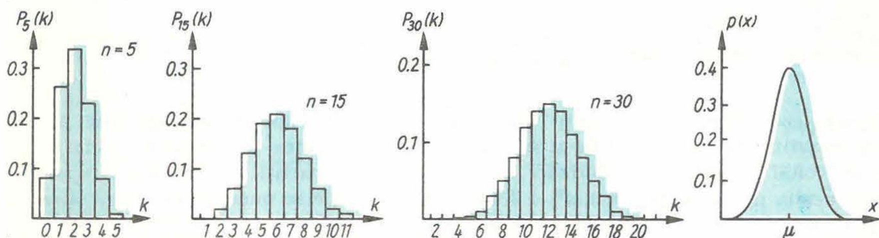
Formula de recurență	$\psi_n(k+1) = \dfrac{a}{k+1}\psi_n(k)$

Valoarea medie și dispersia repartiției Poisson. Acestea se calculează din valorile corespunzătoare ale repartiției binomiale înlocuind $np = a$ și făcînd p să tindă către 0. Deci $\mu = np = a$ și $\sigma^2 = np = a$, adică valoarea medie și dispersia sînt egale.

Repartiția	**Poisson**
Legea de repartiție	$\psi_n(k) = \dfrac{a^k e^{-a}}{k!}$
Media	$\mu = a$
Dispersia	$\sigma^2 = a$

Domeniul de aplicabilitate a repartiției Poisson a fost foarte restrîns, de exemplu era folosit în cazul sinuciderilor la copii. În ultimele decenii ea și-a găsit mai multă aplicabilitate, de exemplu: în cazul convorbirilor interurbane, în controlul statistic, în industria textilă, biologie și meteorologie. De asemenea repartiția Poisson se folosește și în multe cazuri de aproximare a repartiției binomiale. Pentru n suficient de mare și p foarte mic, ele aproape se suprapun.

Repartiția normală sau a lui Gauss. Repartiția normală este una din cele mai importante repartiții ale teoriei probabilităților și a fost descoperită de Carl Friedrich GAUSS (1777–1855).



27.2.15. Reprezentarea grafică a funcției de probabilitate pentru un număr crescător de încercări n

În cazul repartiției binomiale funcția de repartiție este $P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, unde p este probabilitatea de a extrage o bilă neagră. Ea are o valoare fixă cuprinsă între 0 și 1. Dacă numărul n crește, funcția de repartiție pierde proprietatea de asimetrie (fig. 27.2.15). În cazul lui $p = 0{,}2$ pentru $n = 5$, 15 și 30 obținem:

k	0	1	2	3	4	5
$P_5(k)$	0,08	0,26	0,34	0,23	0,08	0,01

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$P_{15}(k)$	0,02	0,06	0,13	0,19	0,21	0,18	0,12	0,06	0,02	0,01

k	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$P_{30}(k)$	0,01	0,03	0,05	0,08	0,12	0,14	0,15	0,14	0,11	0,08	0,08	0,05	0,03

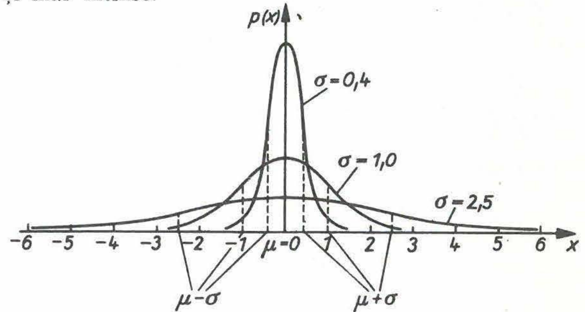
Dacă în cazul unei repartiții binomiale numărul $n \to \infty$ iar probabilitatea de apariție a evenimentului considerat rămîne constantă, se ajunge la repartiție normală. Repartiția normală este spre deosebire de repartiția binomială o repartiție continuă. Prin trecere la

limită obținem din repartiția binomială, repartiția normală $p(x) = \lim_{n \to \infty} P_n(x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}}$ unde a și b sînt constante iar $p(x)$ este densitatea de repartiție (fig. 27.2.15). Valoarea medie μ și dispersia σ^2 au următoarele expresii:

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}} dx = b; \qquad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-b)^2}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}} dx = a^2.$$

Valoarea medie și dispersia descriu complet această repartiție. Figura 27.2.16 ne arată reprezentarea grafică a densității de repartiție pentru diferite valori ale lui $a^2 = \sigma^2$. Curbele au o formă de clopot și sînt simetrice față de axa Oy. Vîrful acestor curbe are ordonata egală cu media μ. Punctele de inflexiune ale curbei se află la distanța $\pm\sigma$ de medie. Influența pe care o are dispersia asupra formei curbei reiese foarte clar din figură. Cu cît σ este mai mare, curbele devin mai plate și mai întinse.

Repartiția normală
Densitatea de repartiție $p(x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}}$
Media $\mu = b$
Dispersia $\sigma^2 = a^2$



27.2.16. Repartiția gaussiană (normală) pentru diferite valori ale lui σ

Repartiția normală redusă. Calculul diferitelor valori ale densității de repartiție $p(x)$ în cazul unei repartiții normale cu media μ și dispersia σ^2 este greu și necesită mult timp. De aceea de obicei se face o transformare a unei astfel de repartiții normale într-o repartiție normală cu media $\mu = 0$ și dispersia $\sigma^2 = 1$. Această repartiție se numește *repartiție normală redusă* iar densitatea sa de repartiție este $\varphi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-\lambda^2}{2}}$. Această funcție este tabelată; în tabel din cauza simetriei nu se găsesc de cît valorile care corespund lui $x \geqslant 0$. Trecerea de la o repartiție normală cu valoarea medie μ și dispersia σ^2 la o repartiție normală redusă se face cu ajutorul substituției $\lambda = (x - \mu)/\sigma$. Pentru un λ determinat căutăm în tabel valoarea corespunzătoare a densității de repartiție $\varphi(\lambda)$ iar prin relația $p(x) = \varphi(\lambda)/\sigma$ valoarea densității de repartiție $p(x)$ corespunzătoare lui x.

Exemplu. În cazul unei repartiții normale cunoaștem media $\mu = 20$ și dispersia $\sigma^2 = 25$. Calculăm $\lambda = \frac{x-20}{5}$ și căutăm apoi în tabel $\varphi(\lambda)$ și astfel îl determinăm pe $p(x) = \frac{\varphi(\lambda)}{5}$.

x	20	21	22	...	25	...	30
λ	0	0,2	0,4	...	1	...	2
$\varphi(\lambda)$	0,3989	0,3910	0,3683	...	0,2420	...	0,054
$p(x)$	0,0798	0,0782	0,0737	...	0,0584	...	0,0108

Valorile funcției $\varphi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$

λ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	0,3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	0,3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	0,3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	0,3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3573	3555	3538
0,5	0,3521	3503	3485	3467	3448	3429	3411	3391	3372	3352
0,6	0,3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	0,3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	0,2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	0,2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	0,2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	0,1942	1919	1895	1872	1849	1827	1804	1781	1759	1736
1,3	0,1714	1692	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1540	1518
1,4	0,1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	0,1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	0,1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0,0941	925	909	893	878	863	848	833	818	804
1,8	0,0790	775	761	748	734	721	707	694	681	669
1,9	0,0656	644	632	620	608	596	584	573	562	551
2,0	0,0540	529	519	508	498	488	478	468	459	449
2,1	0,0440	431	422	413	404	396	387	379	371	363
2,2	0,0355	347	339	332	325	317	310	303	297	290
2,3	0,0283	277	271	264	258	252	246	241	235	229
2,4	0,0224	219	213	208	203	198	194	189	184	180
2,5	0,0175	171	167	163	159	155	151	147	143	139
2,6	0,0136	132	129	126	122	119	116	113	110	107
2,7	0,0104	101	99	96	94	91	89	86	84	81
2,8	0,0079	77	75	73	71	69	67	65	63	61
2,9	0,0060	58	56	55	53	51	50	49	47	46
3,0	0,0044	43	42	41	39	38	37	36	35	34
3,1	0,0033	32	31	30	29	28	27	26	25	25
3,2	0,0024	23	22	22	21	20	20	19	18	18
3,3	0,0017	17	16	16	15	15	14	14	13	13
3,4	0,0012	12	12	11	11	10	10	10	9	9
3,5	0,0009									
4,0	0,0001									

Funcția de repartiție. Funcția de repartiție a unei variabile aleatoare repartizate normal este

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\, dt = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-b)^2}{2a^2}}\, dt.$$

Ea se mai numește și *integrala lui Gauss* sau *integrala erorilor* și reprezintă aria suprafeței de sub curba normală $p(x)$ de la $-\infty$ pînă la x (fig. 27.2.17). Funcția $F(x)$ are axa Ox și dreapta $F(x) = 1$

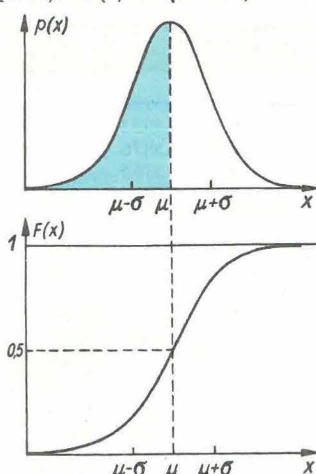
Valorile pentru

$$\Phi(\lambda) = \int_0^\lambda \varphi(t)\, dt$$

λ	$\Phi(\lambda)$
0,0	0,0000
0,1	0,0398
0,2	0,0793
0,3	0,1179
0,4	0,1554
0,5	0,1915
0,6	0,2257
0,7	0,2580
0,8	0,2881
0,9	0,3159
1,0	0,3413
1,1	0,3643
1,2	0,3849
1,3	0,4032
1,4	0,4192
1,5	0,4332
1,6	0,4452
1,7	0,4554
1,8	0,4641
1,9	0,4713
2,0	0,4772
2,1	0,4821
2,2	0,4861
2,3	0,4893
2,4	0,4918
2,5	0,4938
2,6	0,4953
2,7	0,4965
2,8	0,4974
2,9	0,4981
3,0	0,4987
3,1	0,4990
3,2	0,4993
3,3	0,4995
3,4	0,4997

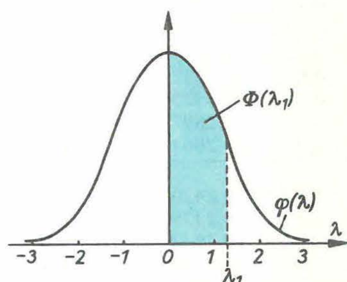
ca asimptote iar pentru $x = \mu$ are un punct de inflexiune. Datorită simetriei curbei sub formă de clopot (*clopotul lui Gauss*), funcția de repartiție $F(x)$ cu $\mu = 0$ și $\sigma^2 = 1$ este tabelată în felul următor:

$$\Phi(\lambda) = \int_0^\lambda \varphi(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\lambda e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

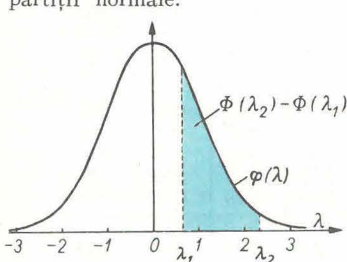


27.2.17. Reprezentarea grafică a densității de probabilitate și a funcției de repartiție a unei repartiții normale.

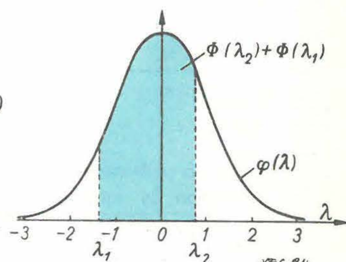
Legătura dintre repartiția lui Gauss cu media μ și dispersia σ^2 și



27.2.18. Interpretarea geometrică a funcției $\Phi(\lambda)$



27.2.19. Suprafața dată de $\Phi(\lambda_2) - \Phi(\lambda_1)$



27.2.20. Suprafața dată de $\Phi(\lambda_2) + \Phi(\lambda_1)$

$\Phi(\lambda)$ (fig. 27.2.18) tabelată se face prin $\lambda = \frac{x - \mu}{\sigma}$. Cu ajutorul acestei relații pot fi calculate suprafețele corespunzătoare lui x_1 și x_2. Există mai multe cazuri:

a) Dacă λ_1 și λ_2 se află la dreapta originii, $\lambda_2 > \lambda_1$, aria de sub curbă este egală cu $\Phi(\lambda_2) - \Phi(\lambda_1)$. La fel cînd ambele valori se află la stînga originii (fig. 27.2.19).

b) Dacă λ_1 se află la stînga iar λ_2 la dreapta originii, aria este egală cu $\Phi(\lambda_1) + \Phi(\lambda_2)$ (fig. 27.2.20).

În ambele cazuri aria reprezintă probabilitatea ca variabila să ia valori în intervalul mărginit de x_1 și x_2.

Exemplu. Fie o repartiție normală cu $\mu = 20$ și $\sigma^2 = 25$. Care este probabilitatea ca variabila aleatoare X să ia valori între a) $x_1 = 25$ și $x_2 = 35$, b) $x_1 = 5$ și $x_2 = 35$? Calculăm:

a) $\lambda_1 = \frac{25 - 20}{5} = 1$, $\lambda_2 = \frac{35 - 20}{5} = 3$; b) $\lambda_1 = \frac{5 - 20}{5} = -3$; $\lambda_2 = \frac{35 - 20}{5} = 3$.

Din tabel obținem:

a) $\Phi(\lambda_1) = 0{,}3413$, $\Phi(\lambda_2) = 0{,}4987$; b) $\Phi(\lambda_1) = 0{,}4987$, $\Phi(\lambda_2) = 0{,}4987$.

Prin scădere și adunare obținem probabilitățile căutate a) 0,1574, b) 0,9974.

Cu ajutorul integralei lui Gauss putem deci calcula pentru x_1 și x_2 oricare parte din aria suprafeței totale care se află sub curbă (clopotul lui Gauss). Prin scădere din unu obținem aria restului de suprafață. În tabelul alăturat sînt date anumite suprafețe care au mare importanță în statistică.

Limitele pe axa Ox $\mu - \lambda\sigma$ x_1	$\mu + \lambda\sigma$ x_2	Partea din aria suprafeței totale (%)	Aria suprafeței rămase (%)
$\mu - 1\sigma$	$\mu + 1\sigma$	68,26	31,74
$\mu - 2\sigma$	$\mu + 2\sigma$	95,44	4,56
$\mu - 3\sigma$	$\mu + 3\sigma$	99,73	0,27
$\mu - 1{,}96\sigma$	$\mu + 1{,}96\sigma$	95	5
$\mu - 2{,}58\sigma$	$\mu + 2{,}58\sigma$	99	1
$\mu - 3{,}29\sigma$	$\mu + 3{,}29\sigma$	99,9	0,1

Teoreme limită pentru sume de variabile aleatoare independente

Multe procese din științele naturii, tehnologie și economie sînt descrise în ipoteza că sînt influențate de un număr mare de factori aleatori independenți care fiecare în parte modifică foarte puțin procesul. În general, numai suma efectelor lor este observată în investigarea procesului; de exemplu, eroarea la o măsurare formează o variabilă aleatoare care este suma mai multor variabile aleatoare independente. Teoria probabilităților a stabilit teoreme limită ce conțin reguli care descriu comportarea acestor sume.

Teorema Moivre-Laplace. Efectuăm n experimente. Dacă p este probabilitatea de apariție a evenimentului E și $q = 1 - p$ probabilitatea ca evenimentul E să nu apară, atunci variabila aleatoare $X_k = 1$ dacă evenimentul E apare în cazul k și $X_k = 0$ dacă E nu apare. Variabila aleatoare $\sum_{k=1}^{n} X_k$ determină numărul de apariții ale lui E în n încercări consecutive. Această sumă este o variabilă aleatoare care urmează *o repartiție binominală* cu valoarea medie $\mu = np$ și dispersia $\sigma^2 = np(1-p) = npq$. Pe baza *teoremei Moivre-Laplace* se constată că *funcția de repartiție* a sumei $\sum_k X_k$ nu tinde către o *funcție de repartiție limită* cînd $n \to \infty$, dar funcția de repartiție a variabilei aleatoare $\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k - np}{\sqrt{npq}}$ tinde la limită către *funcția de repartiție Gauss normalizată*. Aceasta înseamnă că pentru oricare două numere arbitrare a, b cînd $n \to \infty$ avem următoarea relație:

Teorema Moivre-Laplace	$P\left\{a \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{m_b - \mu}{\sqrt{npq}} < b\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2}\, dx$

Teorema Moivre-Laplace ridică problema dacă relația obținută este dependentă de alegerea metodei de însumare și dacă această relație mai este valabilă cînd condițiile care se impun funcției de repartiție ale termenilor sumei se împuținează. *Teorema limită centrală* dă un răspuns parțial într-o formă simplă, care poate fi generalizat.

Teorema limită centrală. Dacă variabilele aleatoare independente două cîte două $X_1, X_2, \ldots, X_n$ au aceeași repartiție și dacă $\mu = M(X_n)$ și $\sigma^2 = D^2(X_n) > 0$ există, atunci variabila aleatoare

$$\frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - M\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}{D\left(\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}$$

urmează o repartiție normală redusă.

Pentru mult timp problema care se ridica era să se găsească condițiile cele mai generale ca repartiția unei sume de variabile aleatoare independente să tindă către o repartiție normală mărind numărul termenilor. Paralel cu concluziile acestei părți clasice a teoriei a fost dezvoltată o altă direcție în teoria teoremelor limită pentru sume de variabile aleatoare independente, foarte strîns legată de procesele stochastice. Problemele ridicate au fost de genul următor: ce repartiții în afara celei normale pot fi repartiții limită ale unor sume de variabile aleatoare independente? S-a ajuns la concluzia că nu numai repartiția normală este o repartiție limită. Această teorie a fost dezvoltată mult în ultimii treizeci de ani de către KOLMOGOROV, HINCIN, GNEDENKO și alții. Teoremele limită au importanță practică, de exemplu în statistica matematică și în teoria erorilor.

Procese stochastice

Un alt capitol al teoriei probabilităților cu o importanță deosebită pentru științele naturii și tehnică se ocupă de studiul *proceselor stochastice* sau *aleatoare*. Se cercetează variabile aleatoare care depind de cel puțin una sau mai multe caracteristici. Noțiunea de proces aleator sau stochastic se poate explica în felul următor:

Dacă se studiază o variabilă aleatoare X fără să se țină seama de timp, atunci această analiză se numește statică. Dacă se ține seama de timp, spunem că variabila aleatoare se analizează dinamic și se numește funcție aleatoare sau proces stochastic. Se notează cu $X(t, \omega)$; mărimea $\omega \in \Omega$, unde Ω este mulțimea tuturor evenimentelor posibile, exprimă caracterul aleator iar mărimea t dependența de timp. Această mărime t nu trebuie neapărat să reprezinte timpul ci poate să reprezinte și alte modificări sistematice ale variabilei aleatoare, de exemplu, ordinea în cazul unei numărări sau distanțe. Atît $X(t, \omega)$ cît și t parcurg mulțimea numerelor naturale sau întregi. Deci procesul stochastic $X(t, \omega)$ reprezintă o familie de variabile aleatoare dependente de parametrul real t. Pentru t fixat, $X(t, \omega)$ este o variabilă aleatoare, iar pentru ω fixat, $X(t, \omega)$ este o funcție de t numită realizarea (traiectoria) procesului stochastic. De exemplu $X(t, \omega)$ poate să reprezinte numărul de indivizi, de părți, vectori de temperatură sau de viteză, dependenți de timp.

Tipuri importante de procese stochastice sînt procesele staționare și procesele Markov.

Procese Markov și lanțuri Markov. Un *proces Markov* este un proces stochastic în care cunoașterea dezvoltării ulterioare este determinată de stadiul prezent. Dacă cunoaștem funcțiile de repartiție ale variabilelor aleatoare $X(t_0, \omega)$, $X(t_1, \omega)$, ..., $X(t_n, \omega)$ la diferite stadii de timp $t_0 < t_1 < ... < t_m$, atunci funcția de repartiție a variabilei aleatoare $X(t, \omega)$ la timpul $t > t_m$ poate fi calculată numai pe baza celei de la timpul t_m. Pentru exemplificare, fie un lac de acumulare care conține cantitatea de apă $X(t_m, \omega)$ la începutul t_m al intervalului de timp $(t_m, t_m + \Delta t)$; în acest interval lacul primește o cantitate $Z(t_m, \omega)$ de apă și din el se scurge o cantitate fixă M. Atunci cantitatea de apă din lacul de acumulare la timpul $t = t_m + \Delta t$ este $X(t_m + \Delta t, \omega) = X(t_m, \omega) + Z(t_m, \omega) - M$ și se poate stabili probabilitatea ca apa din lacul de acumulare să nu depășească o anumită valoare limită y. Cantitățile de apă $Z(t, \omega)$ care se varsă în lac sînt aleatoare dar independente una față de celelalte la diferite valori ale timpului t.

În cazul unui *lanț Markov* parametrul t parcurge numai o mulțime discretă de valori t_i cu $i = ..., -1, 0, +1, ...$

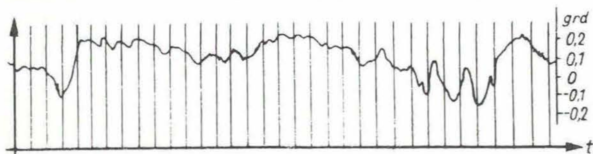
Teoremele ergodice se ocupă cu studierea proprietăților proceselor Markov în care parametrul tinde la infinit.

Procesele Poisson sînt o clasă specială a proceselor Markov, care joacă un rol important în descrierea descompunerii radioactive și în teoria așteptării.

Procese staționare. Procesele stochastice în care cauzele variațiilor sînt *independente de timp* se numesc staționare. Temperatura atmosferică locală măsurată într-un anumit punct și într-un interval foarte scurt de timp, astfel încît variația care ar depinde de ora locală poate fi neglijată, variază neregulat în jurul unei valori medii. Variația diametrului unui fir

tors de o mașină are de asemenea o valoare medie independentă de timp. Dacă aceste procese sînt descrise de mediile funcțiilor $X(t, \omega)$ în care variabila t reprezintă timpul (fig. 27.2.21), atunci pentru orice t există o valoare medie m și o dispersie σ^2.

Importante în practică sînt acele procese stochastice care sînt staționare în sensul lui HINCIN. *Valoarea medie* $m = M(X(t, \omega))$ și *dispersia* $\sigma^2 = D^2(X(t, \omega))$ sînt independente de timp și *funcția*



27.2.21. Graficul variației temperaturii atmosferice locale

de corelație $R(t - s) = M([X(t, \omega) - m][X(s, \omega) - m])$ depinde numai de diferența $t - s$, unde t și s sînt două puncte arbitrare și $t > s$. Aceste procese staționare sînt folosite de exemplu în electrotehnică, în tehnica transmisiunilor, în tratarea problemelor economice, în medicină etc.

27.3. Statistică matematică

Primele noțiuni de statistică le găsim la începutul erei noastre cu ocazia numărării diferitelor obiecte. Dar numai în secolul XVIII a început statistica să se dezvolte ca o știință de sine stătătoare, folosind la descrierea diferitelor trăsături care caracterizează statul. Mult timp statistica s-a ocupat numai de acest domeniu. În ultimii 30 de ani însă, pe baza teoriei probabilităților s-au dezvoltat metode de analiza datelor și metode de testare a ipotezelor statistice. Aceste metode ale statisticii matematice, denumite pe scurt *statistică*, au devenit un mijloc ajutător pentru descoperirea legilor ce guvernează științele naturii și tehnica.

Populație și selecție dintr-o populație. În statistică, observațiile sau experimentele desfășurate în aceleași condiții formează o *populație* iar fiecare observație sau experiment constituie un *element* al populației. Acesta poate fi studiat în funcție de diferite caracteristici, care vor fi notate prin variabilele aleatoare X, Y etc. Dacă caracteristica X are în populație o funcție de repartiție $F(x)$, afirmăm că populația are o repartiție $F(x)$ în funcție de caracteristica X. În cercetările statistice se analizează întotdeauna o submulțime finită de elemente. Ea poartă denumirea de *selecție* iar numărul n de elemente reprezintă *volumul selecției.*

Exemplu. Dacă greutatea unui băiat de 10 ani constituie variabila aleatoare X, atunci populația este formată din totalitatea băieților de aceeași vîrstă. Măsurările de greutate a unor băieți aflați în diferite locuri formează o selecție, iar fiecare băiat constituie un element al populației. Greutatea este o caracteristică a elementului. Alte caracteristici sînt de exemplu, înălțimea, lățimea umerilor etc.

Planificarea experimentelor

Pentru rezolvarea unei probleme cu metode statistice trebuie întîi făcut un plan al experimentului, care să conțină metoda de culegere a datelor, volumul selecției și drumul pe care trebuie să-l parcurgem pentru aflarea soluției. Cu cît planificarea este făcută mai bine, cu atît rezultatele pe care le obținem cu ajutorul metodelor statistice sînt mai concludente.

Planificarea trebuie să ne asigure că nu s-a omis nici o dată importantă pentru rezultate și de asemenea trebuie evitat ca folosind o cantitate mare de experimente să obținem același lucru ca în cazul folosirii unui lot de experimente mai mic și deci cu un cost mai redus. Următoarele puncte de vedere trebuie respectate.

1. *Materialul investigat* trebuie să fie *omogen*; în timpul investigaţiilor metoda de testare trebuie să fie aceeaşi. Nu trebuie făcute schimbări la aparate sau la condiţiile de producţie şi nici folosite instrumente cu precizie diferită.

2. *Erorile sistematice* sau diferite influenţe trebuie *excluse* pe cît posibil. Dacă vrem, de exemplu, să comparăm două materiale, acestea trebuie produse pe aceeaşi maşină, căci altfel diferenţele dintre maşini intervin la rezultatul investigaţiilor. În agricultură, la testarea diferitelor îngrăşăminte, pămîntul se împarte în loturi paralele, astfel încît să se neutralizeze influenţa tipului de sol şi a poziţiei.

3. *Un control* este necesar. Dacă există valori standard pentru caracteristicile pe care le analizăm, astfel încît să poată fi comparate cu rezultatele testului, atunci acestea trebuie introduse; de exemplu, influenţa îngrăşămîntului se constată analizînd diferenţa dintre plantele care cresc în aceleaşi condiţii, unele cu îngrăşăminte, altele fără.

4. Alegerea *selecţiei* trebuie făcută *aleator* sau *reprezentativ*. O *alegere aleatoare* este aceea în care fiecare element are aceeaşi probabilitate de a face sau nu parte din selecţie. Dintr-un lot de şuruburi, de exemplu, selecţia trebuie aleasă astfel încît şuruburile să fie produse de diferite maşini. La măsurarea grosimii firelor, punctele în care se fac măsurările sînt repartizate aleator pe toată lungimea firului. Alegerea aleatoare a elementelor se face cu ajutorul *tabelului cu numere aleatoare*. O *alegere reprezentativă* în cazul unei selecţii se face dacă materialul cercetat poate fi în mod unic împărţit în părţi. Este posibil să împărţim lotul de şuruburi, de exemplu, într-un astfel de mod ca fiecare parte să conţină şuruburi produse numai de o maşină. Atunci din fiecare parte un număr de piese proporţional cu mărimea părţii poate fi ales aleator. Totalitatea acestor piese formează selecţia. Astfel avem o privire de ansamblu asupra lotului la o scară redusă.

5. Referitor la *volumul eşantionului* se constată că deducţiile făcute pe baza unei populaţii mai mari sînt mai exacte. Dar ţinînd seama de timpul şi efortul afectat preferăm un eşantion mai mic, cu toate că rezultatele obţinute vor fi mai puţin exacte.

Culegerea şi prelucrarea datelor

Mulţimea de valori obţinute din experiment se numeşte *populaţia originală*. Datele pot fi culese în funcţie de mărimea selecţiei şi de numărul de caracteristici pentru fiecare element pe liste, diagrame, fişe perforate şi cartele de date. În cazul unei singure caracteristici ale unui eşantion mic sîntem mulţumiţi cu o listare; în cazul mai multor caracteristici şi o măsurare a eşantionului mai mare sînt indicate diagrame sau fişe perforate pentru a reduce munca depusă la sortare în evaluarea datelor. În cazul mai multor caracteristici şi al unui număr mare de elemente, cartelele de date sînt perforate pentru investigarea rezultatelor obţinute.

Prelucrarea datelor. Pentru a obţine o privire preliminară asupra materialului dat se ordonează valorile caracteristicii după mărime şi se determină frecvenţa cu care apare fiecare valoare. Astfel se ajunge la o *repartiţie a frecvenţelor*. Atît variabilele aleatoare continue cît şi cele discrete apar ca valori discrete rotunjind valorile pe baza unei precizii date sau cerute.

Împărţirea pe clase. În cazul unui eşantion mare, valorile caracteristicii se împart în clase de mărimea egală; în acest mod diferite valori grupate împreună formează o *clasă*. Alegerea mărimii claselor depinde de mărimea eşantionului şi de *amplitudinea* R care este diferenţa dintre cea mai mare şi cea mai mică valoare a selecţiei. Numărul de clase nu trebuie să fie prea mic, căci astfel caracterul repartiţiei poate fi voalat. Pe de altă parte, dacă numărul de clase este prea mare, valorile anormale sînt puse prea în evidenţă şi repartiţia nu mai poate fi recunoscută. O clasă este caracterizată fie prin limitele sale, fie prin media sa. Amplitudinea d a clasei este diferenţa dintre limita superioară şi cea inferioară. Media clasei X_{M_i}, în cazul unor caracteristici descrise prin *variabile aleatoare discrete*, este media aritmetică a valorilor caracteristicii din clasă, iar în cazul caracteristicilor descrise de *variabile aleatoare continue* este media aritmetică dintre limita superioară şi cea inferioară a clasei.

Exemplul 1. Repartiția frecvențelor dintr-un eșantion de mărime $n = 80$ pentru o caracteristică care este o variabilă continuă; x_i este valoarea caracteristicii, h_i este frecvența.

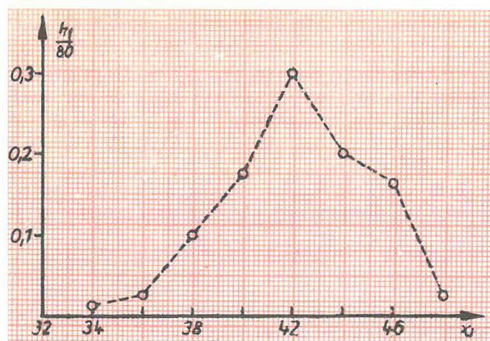
Fără împărțire pe clase

x_i	h_i		x_i	h_i		x_i	h_i	
31,1	I	1	40,9	III	3	43,8	II	2
35,2	I	1	41,1	II	2	43,9	III	3
36,6	I	1	41,3	II	2	44,2	II	2
37,2	I	1	41,4	I	1	44,3	II	2
37,6	II	2	41,7	III	3	44,7	I	1
37,9	I	1	41,9	III	3	44,9	I	1
38,2	II	2	42,1	IIII	4	45,2	II	2
38,8	II	2	42,2	II	2	45,3	I	1
39,0	I	1	42,5	II	2	45,5	II	2
39,2	I	1	42,6	II	2	45,6	II	2
39,3	II	2	42,8	II	2	45,7	III	3
39,4	I	1	42,9	II	2	45,8	II	2
39,7	I	1	43,0	I	1	45,9	I	1
40,1	II	2	43,2	I	1	47,4	I	1
40,3	I	1	43,5	II	2	47,8	I	1
40,7	I	1	43,6	I	1			

Pe baza împărțirii pe clase; x_{M_i} este media clasei

Clasă	x_{M_i}	h_i	
De la 33 la 35 exclusiv	34	I	1
De la 35 la 37 exclusiv	36	II	2
De la 37 la 39 exclusiv	38	~~IIII~~ III	8
De la 39 la 41 exclusiv	40	~~IIII~~ ~~IIII~~ III	13
De la 41 la 43 exclusiv	42	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~	25
De la 43 la 45 exclusiv	44	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ I	16
De la 45 la 47 exclusiv	46	~~IIII~~ ~~IIII~~ III	13
De la 47 la 49 exclusiv	48	II	2

Reprezentarea grafică a repartiției frecvențelor (fig. 27.3.1). După pregătirea datelor este indicată o reprezentare grafică a repartiției empirice a frecvențelor. Acest lucru se poate face în diferite moduri în funcție de scopul investigației și de felul caracteristicii considerate, după cum reiese din exemple (fig. 27.3.2).

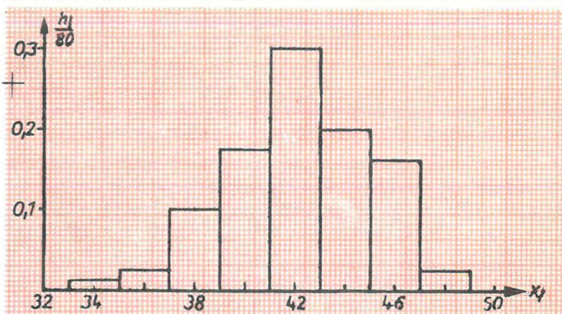


27.3.1. Reprezentarea unei repartiții printr-o diagramă liniară

Valoarea medie și dispersia unei selecții. O selecție de volum n poate fi caracterizată de valoarea medie $\bar{x}$ și dispersia s^2 care sînt socotite estimațiile valorilor μ și σ^2 ale populației.

Valoarea medie. Valoarea medie, media aritmetică $\bar{x}$, este dată de $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$, unde $x_i (i = 1, 2, ..., n)$ sînt valorile individuale ale caracteristicii măsurate.

În cazul repartițiilor de frecvențe, valoarea medie se calculează pe baza formulei $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} h_i x_i$, unde h_i sînt frecvențele, x_i valorile caracteristicii (sau x_{M_i} mediile claselor) și k numărul de valori caracteristice (sau numărul de clase). În afară de media aritmetică $\bar{x}$, mediana $\tilde{x}$ este adesea folosită în practică drept o valoare medie. Pentru valori impare ale lui n mediana este a $(n + 1)/2$-a valoare în șirul valorilor aranjate în ordinea mărimii. În cazul a n valori pare, mediana $\tilde{x}$ este media aritmetică a valorilor caracteristicii aflate, în ordinea mărimii, pe locurile $n/2$ și $n/2 + 1$.



27.3.2. Reprezentarea unei repartiții printr-o histogramă

Dispersia. Pentru n valori individuale x_i $(i = 1, 2, ..., n)$ ale unei selecții, dispersia s^2 este dată de formula

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 \right];$$

s se numește *abatere medie pătratică* sau *abatere standard*. În cazul unei repartiții de frecvențe date cu k valori caracteristice x_i (sau k clase cu mediile claselor x_{M_i}) și frecvențele h_i, dispersia s^2 se calculează în felul următor:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{k} h_i \cdot (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^{k} h_i x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{k} h_i x_i \right)^2 \right].$$

	Valoare medie	Dispersie	Amplitudine
Selecție de volum n	$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$	$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$	$R = x_{max} - x_{min}$

În afară de dispersia s^2 se mai folosește și o altă cantitate pentru descrierea împrăștierii caracteristicii, *amplitudinea*. Ea este diferența dintre cea mai mare valoare x_{max} și cea mai mică valoare x_{min} ale caracteristicii

$$R = x_{max} - x_{min}.$$

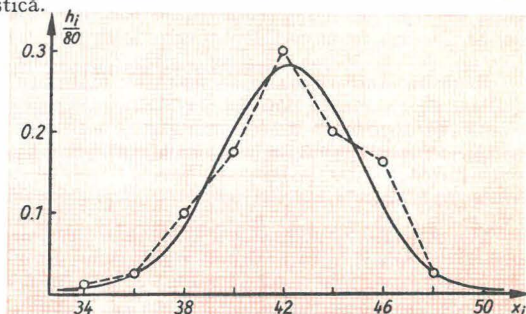
Exemplul 2. În cazul repartiției de frecvențe de dimensiune $n = 80$, din exemplul 1

Împărțirea pe clase	Valoare medie	Dispersie	Mediană	Amplitudine
fără	$\bar{x} = 42,14$	$s^2 = 6,84$	$\tilde{x} = 42,2$	$R = 16,7$
cu	$\bar{x} = 42,23$	$s^2 = 8,30$		

Discrepanțele observate la valorile medii și la dispersii se datorează împărțirii pe clase a unei selecții de volum mic. Pentru n crescător ele devin din ce în ce mai apropiate.

Repartiția normală. Măsurările antropologice ale lui Lambert QUETELET (1796–1874) au dus la formularea ipotezei că măsurările biologice urmează o *repartiție Gauss*. Din acest motiv, aceasta a fost denumită repartiție normală, iar metodele statisticii se bazează pe această ipoteză. Repartiția normală a fost prezentată în capitolul 27.2. Vom da exemple care au importanță în practică, în statistică.

Deoarece repartiția normală este determinată prin valoarea medie și prin dispersie, ea poate fi calculată cu ajutorul valorii medii $\bar{x}$ și dispersiei s^2 ale selecției. În acest mod putem decide dacă o caracteristică particulară are o astfel de repartiție.

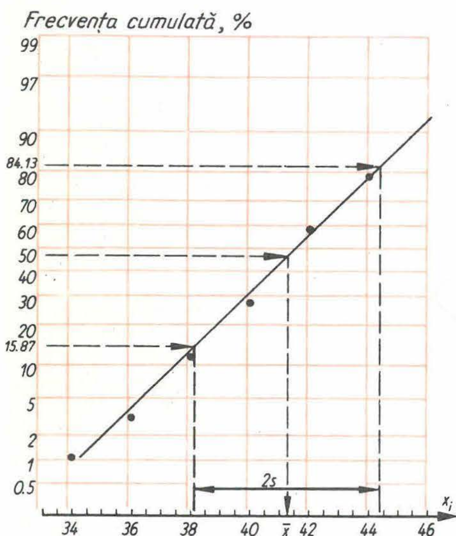


27.3.3. Compararea unei repartiții cu repartiția normală

1. Dacă selecția este de volum n iar valorile caracteristicii sînt împărțite în k clase de amplitudine d cu media clasei x_{M_i}, atunci calculăm pentru fiecare clasă numărul $\lambda_i = (x_{M_i} - \bar{x})/s$ pentru a putea folosi tabelele repartiției normale. Cu ajutorul valorilor $\varphi(\lambda_i)$ din tabele, obținem frecvențele relative $q_i = (d/s)\,\varphi(\lambda_i)$ și frecvențele absolute $k_i = nq_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

Exemplul 3. Calculul repartiției normale în cazul selecției din exemplul 1

x_{M_i}	h_i	λ_i	$\varphi(\lambda_i)$	q_i	k_i
34	1	−2,86	0,0067	0,0046	0,4
36	2	−2,16	0,0387	0,0267	2,1
38	8	−1,47	0,1354	0,0934	7,5
40	13	−0,77	0,2966	0,2047	16,4
42	25	−0,08	0,3977	0,2744	22,0
44	16	0,61	0,3312	0,2285	18,3
46	13	1,31	0,1692	0,1167	9,3
48	2	2,00	0,0540	0,0373	3,0
	80			0,9863	79,0



27.3.4. Curba frecvențelor cumulate a unei repartiții

2. Dacă sîntem mulțumiți cu reprezentarea grafică a repartiției normale, folosim următoarea metodă: cu ajutorul formulei $q = (d/s)\varphi(\lambda)$, date la punctul 1, calculăm y_{max} a repartiției normale pentru $\lambda = 0$ (fig. 27.3.3). Alte ordonate se găsesc în felul următor:

x	$\bar{x}$	$\bar{x} \pm 0{,}5\,s$	$\bar{x} \pm s$	$\bar{x} \pm 2\,s$	$\bar{x} \pm 3\,s$
y	y_{max}	$7y_{max}/8$	$5y_{max}/8$	$y_{max}/8$	$y_{max}/80$

Dacă vrem să avem o reprezentare a frecvențelor absolute, fiecare valoare este multiplicată cu n. În figură repartiția frecvențelor din exemplul de mai sus este prezentată prin repartiția normală calculată pe baza metodei prezentate.

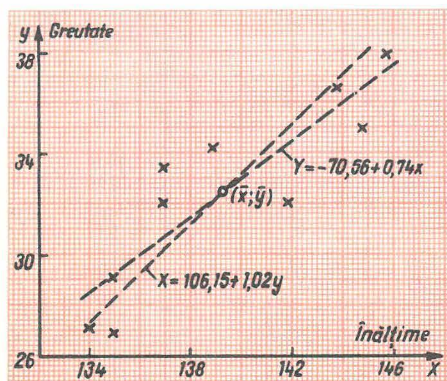
3. Se poate testa și cu ajutorul unei *hîrtii probabilistice* dacă repartiția caracteristicii este normală. Scala ordonatelor se construiește astfel încît curba frecvențelor cumulate a repartiției normale să fie o dreaptă (fig. 27.3.4).

Regresie și corelație

Un important domeniu al statisticii este analiza de regresie și corelație. Ele se ocupă cu descrierea și cercetarea dependenței a două sau mai multe variabile. În timp ce regresia se ocupă cu tipul de dependență dintre variabile, corelația cercetează gradul de dependență. Aici se va expune numai dependența liniară dintre două variabile X și Y.

Regresie. Într-o școală se măsoară înălțimea (variabila X) și greutatea (variabila Y) copiilor. Se cercetează dacă la o greutate mai mare corespunde o înălțime mai mare și dacă această corespondență dintre greutate și înălțime este liniară și care este valoarea medie a greutății ce corespunde la o anumită înălțime. Măsurătorile indică un răspuns afirmativ la prima întrebare, dar la celelalte întrebări nu se poate răspunde fără investigații ulterioare. Următoarele calcule servesc pentru a găsi răspunsul.

Perechile de valori (x, y), unde x este înălțimea și y este greutatea unui copil, sînt reprezentate ca puncte într-un sistem rectangular de coordonate. Ele formează o *mulțime de puncte* care poate să nu aibă o formă anumită sau pot să satisfacă ecuația unei curbe. Dacă mulțimea de puncte aproximează o dreaptă, atunci relația dintre cele două variabile X și Y este descrisă prin două drepte, dreptele de regresie. Dependența dintre greutatea (y) și înălțimea (x) este redată de dreapta de regresie $Y = a_x + b_x x$, unde coeficienții de regresie a_x și b_x sînt calculați cu ajutorul *metodei celor mai mici pătrate* a lui Gauss. În cazul a n perechi de valori (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \dots, n)$ se cere ca expresia



27.3.5. Mulțimea punctelor și dreptele de regresie pentru exemplul dat (intersecția axelor nu coincide cu punctul de origine al sistemului de axe de coordonate).

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - Y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a_x + b_x x_i)^2]$$

să fie minimă. Din aceasta obținem

$$b_x = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} y_i\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2},$$

$a_x = \bar{y} - b_x \bar{x}$, unde $\bar{x}$ și $\bar{y}$ sînt mediile lui x_i și y_i respectiv. Numărul b_x se numește *coeficient de regresie* și se referă la dependența dintre greutatea (y) a unui copil și înălțimea sa (x). La creșterea înălțimii cu o unitate, greutatea crește în medie cu b_x. Astfel se poate trasa dreapta de regresie care ne indică dependența dintre greutatea unui copil și înălțimea sa. Dacă vrem să dăm un răspuns la următoarea întrebare: „Ce înălțime medie corespunde la o anumită greutate?", nu mai putem folosi ecuația de mai sus, ci trebuie să aflăm cealaltă dreaptă de regresie $X = a_y + b_y y$. Necunoscutele a_y și b_y le determinăm pe baza metodei celor mai mici pătrate. Avem $a_y = \bar{x} - b_y \bar{y}$, unde

$$b_y = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \sum\limits_{i=1}^{n} y_i\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\right)^2},$$

b_y se numește de asemenea coeficient de regresie și se referă la dependența înălțimii (x) a copilului de greutatea sa (y). El exprimă creșterea în medie a înălțimii cu valoarea b_y cînd greutatea se mărește cu o unitate. Cele două drepte se intersectează în centrul de greutate $(\bar{x}, \bar{y})$ al mulțimii de puncte și au aspectul unei foarfeci. Cu cît deschiderea este mai mică, cu atît mai depen-

dente din punct de vedere stochastic sînt cele două variabile aleatoare X și Y. Cele două brațe ale foarfecei se închid complet dacă există o *dependență funcțională* între ele.

Exemplu. Înălțimea x (în cm) și greutatea y (în kg) a zece copii sînt măsurate. În figura 27.3.5 sînt reprezentate punctele și cele două drepte de regresie; toate calculele necesare sînt conținute în următorul tabel:

x	y	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$	
135	29,30	−4,4	−3,31	19,36	10,9561	14,5640	$\bar{x} = 139{,}4$
145	35,20	5,6	2,59	31,36	6,7081	14,5040	$\bar{y} = 32{,}61$
139	34,50	−0,4	1,89	0,16	3,5721	−0,7560	$b_x = 0{,}746$
142	32,10	2,6	−0,51	6,76	0,2601	1,3260	$b_y = 1{,}019$
137	33,60	−2,4	0,99	5,76	0,9801	−2,3760	$a_x = -71{,}38$
137	32,30	−2,4	−0,31	5,76	0,0961	0,7440	$a_y = 106{,}2$
134	27,20	−5,4	−5,41	29,16	29,2681	29,2140	$Y = -71{,}38 +$
144	36,70	4,6	4,09	21,16	16,7281	18,8140	$+ 0{,}746\,x$
135	26,90	−4,4	−5,71	19,36	32,6041	25,1240	$X = 106{,}2 +$
146	38,20	6,6	5,69	43,56	32,3761	37,5540	$+ 1{,}019\,y$
1394	326,10			182,40	133,5490	136,0600	

Corelație. Gradul de dependență, despre care ne formăm o impresie pe baza dreptelor de regresie, este redat cantitativ de *coeficientul de corelație* r_{xy}.

Coeficientul de corelație

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i\right]}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}}$$

Acest coeficient de corelație nu depinde de unitățile de măsură ale caracteristicilor și poate lua valori între -1 și $+1$. Dacă r_{xy} este egal cu $+1$ sau -1, relația dintre variabile este respectiv direct sau invers liniară. Dacă $r_{xy} = 0$, nu există nici o relația între variabile. În exemplul de mai sus, $r_{xy} = +0{,}87$.

Coeficientul de corelație r_{xy} și coeficienții de regresie b_x și b_y satisfac următoarea relație: $r_{xy}^2 = b_x \cdot b_y$.

Metode de estimare statistică

De multe ori putem trage concluzii despre una sau mai multe caracteristici ale unei populații din valorile pe care le obținem printr-o selecție. Dacă cunoaștem forma analitică a repartiției, atunci valorile parametrilor trebuie să fie estimate. Sînt mai multe posibilități în cazul unei astfel de estimații, de exemplu mediana sau media aritmetică estimează valoarea medie a variabilei aleatoare. În 1930 R.A. FISHER a stabilit condițiile și criteriile unui estimator corect: acesta trebuie să fie *absolut corect* (sau *nedeplasat*), *consistent* și *eficient*.

Un *estimator* $\hat{\theta}$ al unui parametru necunoscut θ este *absolut corect* sau *nedeplasat* dacă media lui $\hat{\theta}$ coincide cu θ, de exemplu media aritmetică $\bar{x}$ și dispersia s^2 ale unei selecții sînt estimatori absolut corecți ai mediei μ și, respectiv, dispersiei σ^2 ale variabilei aleatoare care caracterizează populația. Un *estimator consistent* $\hat{\theta}$ al unui parametru necunoscut θ îndeplinește

următoarea condiție: pentru un ε arbitrar foarte mic, $\varepsilon > 0$, $P(|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon) \rightarrow 1$ în cazul unei selecții de volum suficient de mare. De exemplu, media aritmetică $\bar{x}$ a unei selecții este un estimator consistent al valorii medii μ a variabilei aleatoare care caracterizează populația. În cazul unui *estimator eficient* $\hat{\theta}$ al parametrului θ dispersia variabilei aleatoare $\hat{\theta}$ trebuie să fie minimă comparativ cu dispersiile altor estimatori posibili: de exemplu, media aritmetică $\bar{x}$ este un estimator eficient în comparație cu mediana $\tilde{x}$, deoarece dispersia variabilei aleatoare $\bar{x}$ este mai mică decît cea a variabilei aleatoare $\tilde{x}$.

Estimatorul unui parametru poate fi un punct sau un interval de estimare. Într-o *estimare punctuală*, valoarea adevărată a parametrului variabilei aleatoare este considerată a fi egală cu estimația valorii obținute printr-o selecție. Întrucît probabilitatea ca ea să coincidă cu valoarea reală este mică, de fapt știm foarte puțin despre precizia estimației. De aceea, încercăm să determinăm un interval $(\hat{\theta} - \delta;\ \hat{\theta} + \delta)$ care conține estimatorul $\hat{\theta}$, astfel încît să includă parametrul necunoscut cu probabilitatea $1 - \alpha$. Numărul $1 - \alpha$ se numește *coeficient de încredere* iar α este un număr $(0 < \alpha < 1)$, cu care se poate calcula mărimea 2δ.

Cea mai des folosită metodă de estimare punctuală a unui parametru este *metoda verosimilității maxime*. În cazul repartiției normale, această metodă a fost folosită pentru prima dată de GAUSS. Denumirea și dezvoltarea ulterioară a metodei îi sînt atribuite lui FISHER. Principiul metodei constă în alegerea unui estimator $\hat{\theta}$ al parametrului θ astfel încît *funcția de verosimilitate* pentru selecția dată să aibă o valoare maximă. Funcția de verosimilitate va fi dată pentru o variabilă aleatoare continuă X ca densitate de probabilitate cunoscută $f(x, \theta)$, unde parametrul θ trebuie estimat cu ajutorul unei selecții de n valori independente $x_1, \dots, x_n$.

Considerăm funcția de verosimilitate $L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = f(x_1; \theta) f(x_2, \theta) \dots f(x_n, \theta)$ ca o funcție de parametrul necunoscut θ și alegem drept estimator $\hat{\theta}$ pentru care valoarea funcției de verosimilitate L este maximă. Astfel îl determinăm pe $\hat{\theta}$ ca o soluție a ecuației $\dfrac{dL}{d\theta} = 0$. În calculele practice ecuația aceasta este înlocuită prin $\dfrac{d(\ln L)}{d\theta} = \dfrac{1}{L}\dfrac{dL}{d\theta} = 0$. Dacă densitatea $f(x; \theta_1, \theta_2)$ a variabilei aleatoare continue X depinde de doi parametri θ_1 și θ_2, atunci estimatorii $\hat{\theta}_1$ și $\hat{\theta}_2$ sînt dați de soluția sistemului de ecuații $\dfrac{\partial(\ln L)}{\partial\theta_i} = \dfrac{1}{L}\dfrac{\partial L}{\partial\theta_i} = 0$ pentru $i = 1, 2$.

Exemplu. Parametrii $\theta_1 = \mu$ și $\theta_2 = \sigma^2$ ai unei variabile aleatoare normale X pot fi estimați printr-o selecție de valori $x_1, x_2, \dots, x_n$. Din funcția de verosimilitate

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \mu, \sigma^2) = [1/\sqrt{(2\pi\sigma^2)}]^n \exp\left[-1/(2\sigma^2)\sum_{k=1}^{n}(x_k - \mu)^2\right]$$ se obține $$\ln L = -(n/2)\ln 2\pi - (n/2)\ln\sigma^2 - 1/(2\sigma^2)\sum_{k=1}^{n}(x_k - \mu)^2$$ și din $$\frac{\partial \ln L}{\partial\theta} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \mu) = 0$$ și $$\frac{\partial \ln L}{\partial\sigma^2} = -n/(2\sigma^2) + 1/(2\sigma^4)\sum_{k=1}^{n}(x_k - \mu)^2 = 0$$

se obțin estimațiile

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \bar{x} \quad \text{și} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2.$$

Procedeul de *estimare pe bază de intervale* va fi dat pentru un caz simplu, în care X este o variabilă aleatoare repartizată normal cu parametrii μ și σ^2, din care numai dispersia σ^2 este cunoscută. Vrem să calculăm un interval de încredere pentru μ cu ajutorul selecției $x_1, \dots, x_n$. Media aritmetică $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_i$ este aleasă drept estimator. Este cunoscut că aceasta are o repartiție normală cu parametrii μ și σ^2/n. Pentru fiecare α, $\alpha \in (0, 1)$, putem

determina din tabelul repartiției normale un λ_α astfel încît $P(|\bar{x} - \mu| < \lambda_\alpha\sigma/\sqrt{n}) = 1 - \alpha$ sau $P(\bar{x} - \lambda_\alpha\sigma/\sqrt{n} < \mu < \bar{x} + \lambda_\alpha\sigma/\sqrt{n}) = 1 - \alpha$. Intervalul de încredere $(\bar{x} - \lambda_\alpha\sigma/\sqrt{n}, \bar{x} + \lambda_\alpha\sigma/\sqrt{n})$ este un estimator al lui μ, cu coeficientul de încredere $1 - \alpha$.

Exemplu. Fie X o variabilă aleatoare cu repartiție normală; din tabele aflăm pentru $\alpha = 0{,}05$ și coeficientul de încredere $1 - \alpha = 0{,}95$ valoarea $\lambda_\alpha = 1{,}96$. Pentru o selecție de volum $n = 16$ și abaterea standard $\sigma = 1{,}5$ pentru parametrul μ intervalul de încredere este $P(\bar{x} - 1{,}96 \cdot 1{,}5/4 < \mu < \bar{x} + 1{,}96 \cdot 1{,}5/4) = 0{,}95$; $\bar{x}$ este estimatorul obținut pe baza acestei selecții. Parametrul μ se află în intervalul $(\bar{x} - 0{,}74, \bar{x} + 0{,}74)$ cu probabilitatea 0,95.

Procedee de testare statistică

În multe probleme statistice nu este suficient să descriem populația numai pe baza repartiției frecvențelor sau prin valori numerice, de exemplu dacă trebuie să răspundem la următoarele întrebări:

1. Într-o anumită regiune băieții de 10 ani au o greutate mai mare decît cea obișnuită. Este această abatere aleatoare sau această diferență poate fi atribuită altor cauze?
2. Pentru testarea unei noi hrane, un număr de șobolani au fost hrăniți cu noua hrană, iar altă grupă primește în continuare hrană obișnuită. Dacă la sfîrșitul experienței constatăm o diferență în greutate între cele două grupe, va trebui să stabilim dacă noua hrană contribuie într-adevăr la creșterea în greutate. La aceste probleme, vrem să știm dacă abaterea care apare este de natură aleatoare sau este semnificativă. Acest lucru se decide cu ajutorul testelor care se bazează pe comparație: putem compara valorile a două selecții între ele sau ale unei selecții cu valorile cunoscute corespunzătoare din populație. În astfel de teste pornim, în primul caz, de la presupunerea sau *ipoteza* că ambele selecții aparțin aceleiași populații iar, în al doilea caz, că selecția aparține populației considerate, deci în ambele cazuri că diferențele sînt numai aleatoare. Această ipoteză se numește *ipoteza nulă* (H_0). Cealaltă posibilitate se numește *ipoteza alternativă* (H_1).

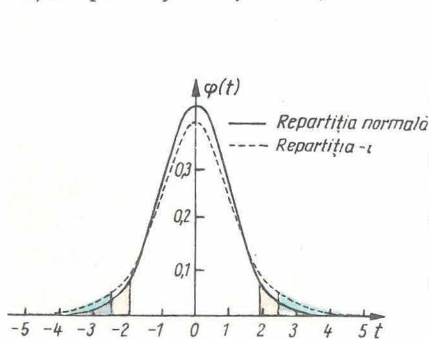
Cu ajutorul testului, decidem dacă acceptăm sau respingem ipoteza nulă. Acceptarea ipotezei nule înseamnă preferarea acesteia și nu a ipotezei alternative. Nu putem pretinde că această decizie este corectă în toate cazurile, deoarece ne bazăm numai pe o selecție de volum n și o *eroare* este posibilă. Deciziile se fac cu o probabilitate de eroare α numită *prag de semnificație*, care în general se alege a fi 0,05, 0,01 sau 0,001. Eroarea care apare în cazul în care respingem ipoteza nulă dacă ea este adevărată se numește *eroare de genul* I. Altă decizie greșită posibilă, aceea de a accepta ipoteza falsă se numește *eroare de genul* II. De exemplu, dacă rezultatul unei comparații dintre două medicamente arată că medicamentul nou este mai bun decît cel vechi cu toate că efectul lor nu diferă, atunci facem o eroare de genul I. Dacă ajungem la concluzia că acestea sînt la fel de bune cu toate că cel nou este mai bun, facem o eroare de genul II.

Repartiții utilizate pentru testări. În cazul testării ipotezei nule se folosesc variabile de testare care sînt variabile aleatoare; ele sînt fie repartizate normal, fie au o repartiție t, F sau χ^2. În exemplele care vor urma se dau tabelele repartițiilor.

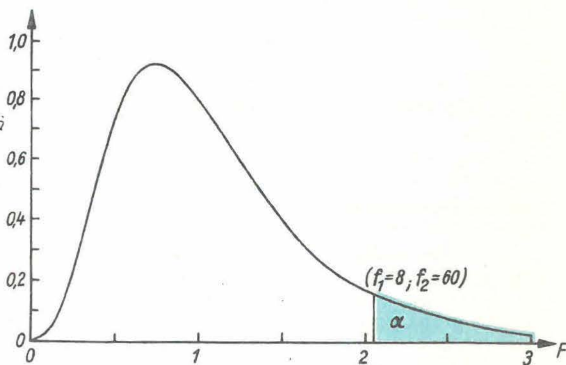
Repartiția normală. Dacă variabilele de testare au o repartiție normală, atunci α are un sens intuitiv, luînd în considerare tabelele ariilor cumulate și ale ariilor rămase, calculate cu ajutorul integralei erorii. În acestea, aria rămasă α, care corespunde probabilității erorii, este dată ca procent. La o anumită probabilitate de eroare corespunde $\lambda = |(x - \mu)/\sigma)|$; în general, μ și σ sînt presupuse cunoscute și numai pentru selecții mari sînt estimați prin $\bar{x}$ și s. Probabilitatea de eroare $\alpha = 0{,}05$ sau 5% corespunde la un $\lambda_\alpha = 1{,}96$. În acest caz, respingem ipoteza nulă dacă valoarea λ calculată din selecție îndeplinește condiția $\lambda > \lambda_\alpha = 1{,}96$ și o acceptăm în cazul în care $\lambda < \lambda_\alpha = 1{,}96$.

Repartiția t. Procedeul descris pentru repartiția normală nu mai este valabil în cazul în care μ și σ sînt necunoscuți și trebuie estimați prin $\bar{x}$ și s pe baza unei selecții de volum mic n. În acest caz, s poate să difere considerabil de σ și nu este un estimator bun. Acesta

poate fi folosit numai în cazul în care probabilitatea de eroare corespunzătoare lui λ este crescătoare, ca în cazul repartiției t a lui STUDENT care ia în considerare volumul selecției și probabilitatea de eroare α. Pentru valori din ce în ce mai mari ale lui n, ea devine din ce în ce mai apropiată de repartiția normală și coincide cu ea cînd $n \to \infty$. Repartiția t este tabelată pentru diferite praguri de semnificație α și pentru diferite *grade de libertate* f, folosite în loc de volumul selecției. Numărul de grade de libertate este egal cu diferența dintre volumul selecției n și numărul caracteristicilor; $f = n - m$. În fiecare din testele următoare, numărul de grade de libertate este dat. În fig. 27.3.6 se prezintă repartiția normală și repartiția t pentru $f = 5$ și $\alpha = 0{,}05$.



27.3.6. Repartiția normală, repartiția $t(f = 5)$ și regiunile critice pentru $\alpha = 0{,}05$.



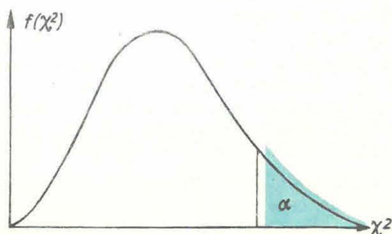
27.3.7. Repartiția F și pragul de semnificație

Repartiția F. Fie două selecții de volum n_1 și n_2 dintr-o populație normală și s_1^2 și s_2^2 cele două dispersii calculate. Formăm raportul $F = s_1^2/s_2^2$. Repartiția frecvențelor acestor valori a fost studiată de FISHER (1890—1962) și se numește repartiția F. Ea depinde de pragul de semnificație α și de gradele de libertate $f_1 = n_1 - 1$ și $f_2 = n_2 - 1$, fiind tabelată pentru diferite praguri de semnificație și grade de libertate. Fiind raportul a două pătrate el ia numai valori pozitive. În fig. 27.3.7 este redată o repartiție F; figura sugerează sensul intuitiv al noțiunii de prag de semnificație.

Repartiția χ^2. În strînsă legătură cu teoria erorilor a lui GAUSS, HELMERT a studiat suma pătratelor unor variabile repartizate normal. Fie $X_1, \ldots, X_n$, n variabile aleatoare independente care au aceeași repartiție normală cu parametrii μ și σ^2. Repartiția sumei de pătrate $\chi^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \mu)^2$, unde $(x_1, \ldots, x_n)$ sînt valori ale variabilelor aleatoare $X_1, \ldots, X_n$, a fost numită de Karl PEARSON (1857—1936) repartiția χ^2. Ea depinde de pragul de semnificație α și de gradul de libertate f și este tabelată pentru aceste valori. Figura 27.3.8 redă repartiția χ^2 și sensul pragului de semnificație.

Procedee de testare a ipotezelor. Vom prezenta unele procedee de testare, care apar în mod frecvent. Alegerea pragului de semnificație depinde de natura problemei. În industrie și în agricultură, în general, folosim pragul de semnificație $\alpha = 0{,}05$, iar în medicină 0,01 sau 0,001.

1. *Compararea valorilor medii* $\bar{x}$ și μ. Valoarea medie $\bar{x}$ a selecției de volum n va fi comparată cu valoarea medie a populației normale. Ipoteza nulă că diferența dintre cele două valori medii este doar aleatoare este acceptată cu probabilitatea de eroare α, dacă valoarea calculată t_c a variabilei $t = |\bar{x} - \mu| \sqrt{n}/s$



27.3.8. Repartiția χ^2 și α pentru $f = 3$

este mai mică decît valoarea t_T din tabelele pentru repartiția t cu α și $f = n - 1$ respective.

Exemplu. După examinarea unui număr de 49 de bucăți dintr-un material s-a calculat pentru un anumit element chimic $\bar{x} = 2,4\%$ și $s^2 = 0,4$. Valoarea lui μ este presupusă a fi 3%. Vrem să vedem dacă abaterile sînt aleatoare în cazul lui $\alpha = 0,05$.

Valoarea $t_c = \dfrac{|2,4 - 3| \cdot \sqrt{49}}{\sqrt{0,4}} = 6,7$; valoarea din tabele pentru $\alpha = 0,05$ și $f = n - 1 = 48$ grade de libertate este $t_T = 2,01$. Deoarece $t_c > t_T$ respingem ipoteza nulă. Deci afirmăm că media de selecție diferă semnificativ de valoarea medie presupusă.

Tabelul repartiției t

Grade de libertate f	Prag de semnificație		Grade de libertate f	Prag de semnificație		Grade de libertate f	Prag de semnificație	
	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$		$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$		$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$
1	12,71	63,66	17	2,11	2,90	45	2,01	2,69
2	4,30	9,92	18	2,10	2,88	50	2,01	2,68
3	3,18	5,84	19	2,09	2,86	60	2,00	2,66
4	2,78	4,60	20	2,09	2,85	70	1,99	2,65
5	2,57	4,03	21	2,08	2,83	80	1,99	2,64
6	2,45	3,71	22	2,07	2,82	90	1,99	2,63
7	2,36	3,50	23	2,07	2,81	100	1,98	2,63
8	2,31	3,36	24	2,06	2,80	120	1,98	2,62
9	2,26	3,25	25	2,06	2,79	140	1,98	2,61
10	2,23	3,17	26	2,06	2,78	160	1,97	2,61
11	2,20	3,11	27	2,05	2,77	180	1,97	2,60
12	2,18	3,05	28	2,05	2,76	200	1,97	2,60
13	2,16	3,01	29	2,05	2,76	300	1,97	2,59
14	2,14	2,98	30	2,04	2,75	400	1,97	2,59
15	2,13	2,95	35	2,03	2,72	500	1,97	2,59
16	2,12	2,92	40	2,02	2,70	1000	1,96	2,58
						∞	1,96	2,58

2. *Compararea a două medii* $\bar{x}_1$ *și* $\bar{x}_2$. Două selecții de volum n_1 și respectiv n_2 sînt presupuse independente, iar populațiile lor sînt repartizate normal. Dispersiile s_1^2 și s_2^2 sînt presupuse a fi aleatoare. Ipoteza nulă, că valorile medii $\bar{x}_1$ și $\bar{x}_2$ diferă numai aleatoriu, pragul de semnificație fiind α, este acceptată dacă valoarea calculată t_c pentru variabila

$$t = \frac{|x_1 - x_2|}{s_d} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \quad \text{cu} \quad s_d^2 = \frac{s_1^2(n_1 - 1) + s_2^2(n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2}$$

este mai mică decît valoarea din tabel t_T pentru α dat și $f = n_1 + n_2 - 2$ grade de libertate.

Exemplu. În cazul a două materiale vrem să testăm rezistența lor la rupere, pragul de semnificație fiind $\alpha = 0,05$. Fie două selecții de volum $n_1 = 20$ și $n_2 = 32$ respectiv, care au $\bar{x}_1 = 18 \cdot 10^7\ \mathrm{N/m^2}$ și $\bar{x}_2 = 24 \cdot 10^7\ \mathrm{N/m^2}$ și $s_1^2 = 4 \cdot 10^{14}$ și $s_2^2 = 6 \cdot 10^{14}$. Diferă cele două materiale sau nu?

Calculăm:

$$t_b = \frac{|18 \cdot 10^7 - 24 \cdot 10^7|}{\sqrt{(5,24)} \cdot 10^7} \cdot \sqrt{\frac{20 \cdot 32}{20 + 32}} = 9,20.$$

unde

$$s_d^2 = \frac{4 \cdot 10^{14} \cdot 19 + 6 \cdot 10^{14} \cdot 31}{20 + 32 - 2} = 5{,}24 \cdot 10^{14}.$$

Valoarea din tabel în cazul lui $\alpha = 0{,}05$ și $f = n_1 + n_2 - 2 = 50$ grade de libertate este $t_T = 2{,}01$. Deoarece $t_b > t_T$, ipoteza nulă trebuie să fie respinsă și deci mediile diferă semnificativ.

3. *Compararea a două dispersii* s_1^2 *și* s_2^2. Fie două selecții independente de volum n_1 și n_2, dintr-o populație normală. Fie α pragul de semnificație. Ipoteza nulă este că cele două dispersii s_1^2 și s_2^2 nu diferă semnificativ. Acceptăm ipoteza, dacă valoarea F_c a variabilei $F = s_1^2/s_2^2$, $s_1^2 > s_2^2$ este mai mică decît valoarea F_T din tabele pentru α dat și $f_1 = n_1 - 1$ și $f_2 = n_2 - 1$ grade de libertate.

Exemplu. Se compară două mașini din punct de vedere al toleranțelor în care se încadrează într-un proces de producție dat, pragul de semnificație fiind $\alpha = 0{,}05$. Cercetăm dacă diferența dintre toleranțe este semnificativă. În cazul lui $n_1 = 25$ și $n_2 = 31$ calculăm dispersiile $s_1^2 = 17{,}9$ și $s_2^2 = 17{,}5$. Obținem $F_c = 17{,}9/17{,}5 = 1{,}023$. Din tabel, pentru $f_1 = 24$ și $f_2 = 30$ grade de libertate obținem $F_c = 1{,}89$. Deoarece $F_c < F_T$, ipoteza nulă trebuie să fie acceptată, deci diferențele dintre cele două mașini sînt nesemnificative.

Repartiția F pentru $\alpha = 0{,}05$ (f_1 = *grade de libertate ale celei mai mari împrăștieri*)

f_2	$f_1 = 1$	$f_1 = 2$	$f_1 = 3$	$f_1 = 4$	$f_1 = 5$	$f_1 = 6$	$f_1 = 8$	$f_1 = 12$	$f_1 = 24$	$f_1 = \infty$	f_2
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	238,9	243,9	249,0	254,3	1
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45	19,50	2
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64	8,53	3
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,77	5,63	4
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53	4,36	5
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74	2,54	10
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08	1,84	20
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89	1,62	30
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79	1,51	40
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70	1,39	60
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,02	1,83	1,61	1,25	120
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,52	1,00	∞

4. *Compararea frecvențelor.* Dacă un eveniment apare de z ori într-un eșantion de volum n ale cărui elemente sînt independente iar probabilitatea de apariție a evenimentului în populație este p, atunci frecvența relativă z/n nu diferă semnificativ de p dacă valoarea calculată t_c a variabilei testate $t = \dfrac{|z - np|}{\sqrt{np(1-p)}}$ sau $t = \dfrac{|z/n - p|}{\sqrt{p(1-p)}} \cdot \sqrt{n}$ este mai mică decît t_T pentru α dat și $f = n - k$ grade de libertate.

Exemplu. Pe baza unor observații făcute de-a lungul unei perioade mari de timp, coeficientul mortalității pentru o anumită boală este $p = 0{,}4$. Testarea unui nou medicament se face pe $n = 71$ animale bolnave, din care mor $z = 20$. Se testează dacă medicamentul este bun sau nu cu un prag de semnificație $\alpha = 0{,}01$.

Calculăm $t_c = \dfrac{|20 - 71 \cdot 0{,}4|}{\sqrt{71 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6}} = 2{,}035$. Valoarea din tabele pentru $\alpha = 0{,}01$ și $f = n - 1 = 70$ grade de libertate este $t_T = 2{,}65$. Deoarece $t_c < t_T$, acceptăm ipoteza nulă.

5. *Testarea repartițiilor.* O repartiție empirică nu diferă semnificativ în cazul unui prag de semnificație α de repartiția teoretică, dacă valoarea calculată χ_c^2 a variabilei $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} [(h_i - k_i)^2/k_i]$ este mai mică decît valoarea din tabele χ_T^2 pentru α dat și $f = k - m - 1$ grade de libertate, unde m este numărul de parametri necunoscuți estimați pe baza selecției. Materialul observat se împarte în k clase, h_i este valoarea observată, k_i frecvența absolută teoretică din clasa i $(i = 1, 2, ..., k)$. Frecvența absolută teoretică în fiecare clasă o dorim mai mare decît 5. Acest lucru se poate obține combinînd diferite clase.

Exemplu. Măsurăm anumite caracteristici la 80 articole produse de o mașină. Măsurările obținute se împart pe clase iar frecvențele h_i sînt date în tabel. Vrem să testăm dacă valorile măsurate sînt repartizate normal, dacă $\alpha = 0{,}05$. Frecvențele teoretice k_i corespunzătoare diferitelor clase sînt calculate cu ajutorul repartiției Gauss. Vrem să testăm ipoteza nulă, dacă nu există diferențe semnificative între repartiția empirică și repartiția teoretică. Variabila folosită la testare se calculează cu ajutorul următorului tabel.

h_i	k_i	$h_i - k_i$	$(h_i - k_i)^2$	$(h_i - k_i)^2/k_i$
1, 2, 8 } 11	0, 2, 8 } 10	1	1	0,1
14	16	−2	4	0,25
24	21	3	9	0,429
16	18	−2	4	0,222
13	9	4	16	1,778
2	6	−4	16	2,667
80	80			5,446

Deoarece $\chi_c^2 = 2{,}09$ este mai mică decît $\chi_T^2 = 5{,}99$ din tabel, acceptăm ipoteza nulă.

Tabelul repartiției χ^2

Grade de libertate f	Pragul de semnificație	
	$\alpha = 5\%$	$\alpha = 1\%$
1	3,84	6,64
2	5,99	9,21
3	7,82	11,35
4	9,49	13,28
5	11,07	15,09
6	12,59	16,81
7	14,07	18,48
8	15,51	20,09
9	16,92	21,67
10	18,31	23,21
20	31,41	37,57
30	43,77	50,89
40	55,76	63,69
60	79,08	88,38
120	146,57	158,95

Domenii de aplicabilitate ale statisticii

Din numeroasele domenii de aplicabilitate ale *statisticii* vom discuta numai despre statistica aplicată în tehnologie și biometrie.

Statistică în tehnologie. Începuturile tratării problemelor de tehnologie prin metode statistice trebuie căutate pe la începutul secolului. Karl DAEVES (n. 1893) a constatat că producția de masă a industriei moderne poate fi asemuită cu măsurări care urmează legi bine stabilite. El a cuprins toate cercetările sale într-o *teorie a numerelor mari.* Dar numai în ultimii 25—30 de ani statistica a fost aplicată la diferite domenii din industrie, de exemplu evaluarea unor măsurări obținute din selecție sau chiar controlul produselor industriale. În cursul dezvoltării acestora s-a introdus termenul de *statistică tehnologică.* Prin ea se înțelege o colecție de metode statistice care se aplică în tehnologie.

Aceste metode pot fi împărțite în două grupe:

1. *Metode pentru examinări și estimări statistice ale observațiilor.* Acestea conțin teoria estimațiilor statistice, a regresiei și corelației. Pentru acest grup următoarele probleme sînt tipice: durata funcționării becurilor electrice, influența inexactității măsurărilor în cazul instrumentelor de precizie, rezistența la rupere a firelor de lînă, rezistența la rupere a diferitelor piese, determinarea dependenței tensiunii la rupere a oțelului față de diferiți factori, compararea proprietăților a două materiale.

2. *Metode pentru control de recepție și de fabricație al procesului de producție* numit *control statistic de calitate.* Aceste metode se bazează pe ideea controlului procesului de producție prin metode statistice astfel încît defectele se constată imediat ce se produc și cauzele lor pot fi eliminate.

În cazul acestui control există două posibilități:

1. Producția se reglează pe baza unor fișe de control astfel încît numărul de rebuturi printre produsele finite se reduce mult.

2. Produsele finite și semifinite sînt testate selectiv pentru constatarea stării lor. În acest caz producția finală nu este influențată: putem trage concluzii privind viitoarea producție.

Fișe de control. Un proces final se controlează pe baza unor fișe de control astfel încît caracteristicile produsului pot fi analizate pe baza faptului că deviațiile de la valoarea pe care vrem s-o obținem sînt aleatoare sau sistematice. Se disting două feluri de fișe de control:

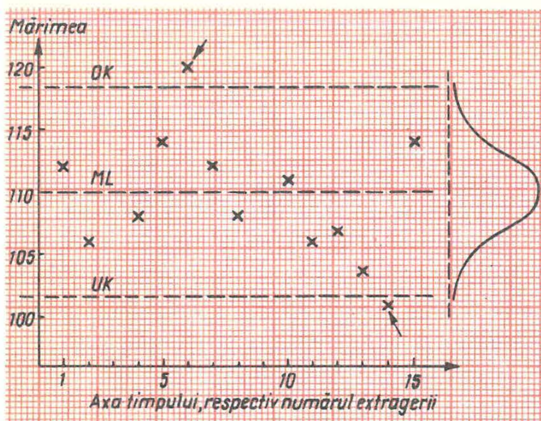
1. fișe de control pentru caracteristici măsurabile;

2. fișe de control pentru caracteristici nemăsurabile.

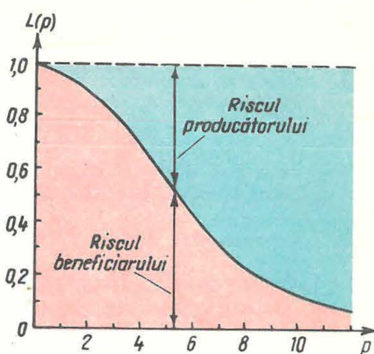
Planul și folosirea fișelor de control sînt prezentate pe baza fișei din fig. 27.3.9; un procedeu corespunzător se aplică și în cazul acestor fișe de control. Pentru controlul unei caracteristici a unui proces particular de producție, produsele pe care facem măsurările sînt alese aleator. Această valoare este trecută în fișele de control. De cele mai multe ori șirul de date are o repartiție normală. Dacă considerăm pe $\bar{x}$ ca linie medie (LM) și valorile $\bar{x} + 3s$, $\bar{x} - 3s$ ca limita superioară de control (LSC) și limita inferioară de control (LIC), atunci 99,73% din toate valorile măsurate se află în regiunea mărginită de limitele de control. Dacă cele trei linii sînt determinate, prin teste preliminare, atunci procesul de producție poate fi controlat în acest mod. Dacă o observație măsurată se află în această regiune, atunci deviațiile de la medie sînt privite ca aleatoare. Deviația este sistematică dacă date de măsurare cad în afara liniilor de control (indicate în figura 27.3.9 printr-o săgeată). În acest caz trebuie să cercetăm motivul pentru care au apărut perturbații, înainte de continuarea producției.

Reprezentarea grafică de pe fișele de control redă o mai bună privire de ansamblu asupra procesului, decît o listă. Comportamentul caracteristicii în timpul procesului arată ce fel de greșeli trebuie eliminate și ce ajustări trebuie făcute mașinii. Datorită acestor proprietăți fișele de control sînt foarte eficace în operații și în combinație cu originea greșelilor ne indică frecvența greșelilor și modificările necesare în tehnologie.

Planuri de selecție. Fișele de control sînt folosite în cazul cînd vrem să facem un control statistic de recepție. Dar aceste metode nu se folosesc în general dacă materialul este de o calitate necunoscută sau dacă se renunță la controlul final și se face o examinare a calității după aceea. În ambele cazuri, în controlul inițial și final, putem organiza un control 100%. Oricum acest lucru este foarte costisitor. Cu tot controlul făcut 100% nu este sigur că toate defecțiunile pot fi găsite. De aceea sîntem mulțumiți și de un control pe baza de selecție, acceptarea sau respingerea fiind decise pe baza calității unei selecții. Testele sînt folosite pe baza unor *planuri de selecție.* În cazul unui lot de N obiecte se va testa o selecție de volum n. Dacă aceasta conține mai mult de z componente proaste, lotul va fi respins; va fi



27.3.9. Fișa de control



27.3.10. Caracteristica operației. Valoarea medie a unei repartiții normale

acceptat în cazul în care selecția conține mai puțin de z elemente defecte. Astfel planul de selecție se caracterizează prin alegerea numerelor (z, n). Se bazează pe presupunerea că procentul de rebuturi dintr-o selecție este același cu cel din întregul lot. Această presupunere se face cu o anumită probabilitate astfel încît atît producătorul cît și consumatorul își asumă un risc în acceptarea planului de selecție după cum reiese din caracteristica operativă (fig. 27.3.10). Ea indică dependența probabilității de acceptare $L(p)$ față de coeficientul de respingere p iar forma sa depinde de planul de selecție. Ea se calculează în general pe baza repartiției binomiale sau Poisson. Din figură se poate deduce riscul producătorului sau al consumatorului, adică se poate citi probabilitatea ca un lot cu un coeficient de respingere p să fie respins sau acceptat. La încheierea unui contract se alege un plan de selecție astfel încît pe baza caracteristicii operative să se determine coeficientul de respingere posibilă p. În practică este uzual a alege un plan de selecție astfel încît lotul cu coeficientul de respingere $p_1\%$ va fi admis cu o probabilitate de 95% și altul cu $p_2\%$ $(p_1 < p_2)$ va fi respins cu o probabilitate de 90%.

Biometrie. K. Pearson a definit biometria ca *știința aplicării metodelor matematice (statistice) la studiul multiplelor aspecte ale vieții.* În studierea legilor și fenomenelor care apar în cazul ființelor vii ne lovim de incomparabil mai multe greutăți decît în cazul celor întîlnite în fizică. Condițiile în cazul testului sînt menținute constante și numai variabila care trebuie studiată variază. În *biologie*, foarte mulți factori care intervin nu pot fi influențați de cercetător (de exemplu efectul vremii asupra cultivării plantelor). În medicină metodele sînt foarte problematice, deoarece experimentul este exclus de multe ori (din motive etice) și deseori ne bazăm numai pe observații. La aceasta trebuie adăugată complexitatea măsurărilor și a valorilor biologice care este numită variabilitate biologică. Din aceste cauze este absolut necesară elaborarea unui plan de testare pentru aranjarea, execuția și evaluarea testelor. În timpul dezvoltării biometriei s-au dezvoltat metode speciale pentru planificarea testelor sau observațiilor. În evaluarea testelor sau a observațiilor au fost create metode speciale de observare care țin seama de următoarele:

1. volumul mic de selecție uzual nu satisface în general condiția de omogenitate cerută;

2. anumite repartiții ale frecvențelor nu pot fi reduse la repartiția normală.

Dificultățile și în același timp atracția biometriei constă în găsirea metodelor statistice care sînt cele mai indicate pentru problemele legate de realitate.

28. Calculul erorilor, metode de compensare și teoria aproximării

28.1. Calculul erorilor

Calculul erorilor are ca obiect precizia numerelor și a rezultatelor obținute prin calcul. Erorile datorate raționamentelor matematice false, folosirii greșite a regulilor de calcul și neatenției nu constituie obiectul calculului erorilor. Calculul erorilor nu îl absolvă pe autor de răspunderea efectuării corecte a calculelor. Cunoscînd laturile $a = 7,49$, $b = 5,32$ ale unui triunghi și unghiul $\gamma = 30°$, un elev calculează cea de-a treia latură prin formula $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$ (calculul detaliat este reprezentat alături). Profesorul găsește rezultatul inexact. El s-ar fi așteptat la soluția $c = 3,92$. Evident, elevul nu a ținut seama de suficiente zecimale pentru cos γ. Se pun întrebările: ce eroare are rezultatul ca urmare a neglijării acestor zecimale, cu cîte zecimale trebuia luată valoarea lui cos γ pentru a obține rezultatul dorit?

a^2	$= 56,1001$
b^2	$= 28,3024$
$a^2 + b^2$	$= 84,4025$
$\cos\gamma$	$= 0,87$
$2ab\cos\gamma$	$= 69,3334$
c^2	$= 15,0691$
c	$= 3,88$

Valori aproximative. În aplicațiile practice valorile numerice ale mărimilor măsurate sînt cunoscute numai aproximativ. Un șofer vrea să meargă cu mașina la oraș. Un indicator rutier îi indică distanța de 120 km. Mașina consumă în medie 9 litri la 100 km. El evaluează consumul pentru acest drum la $(120 \cdot 0,09 = 10,8)$ l. Indicatorul rutier nu indică însă lungimea adevărată a distanței ci numai o lungime *aproximativă*. Pentru calculul consumului, această valoarea este însă suficientă deoarece și consumul mediu al mașinii este tot o valoare aproximativă. Chiar ca valori ale unor numere se folosesc de multe ori valori aproximative deoarece multe numere se reprezintă în sistemul zecimal ca fracții zecimale infinite, de exemplu $\sqrt{2}, \pi$, log 3.

Pentru a exprima că a este o valoare aproximativă pentru mărimea x, se scrie $x \approx a$; x este valoarea adevărată, a este *valoarea aproximativă*, de exemplu $\sqrt{2} \approx 1,41$; $\pi \approx 3,14$; lg $3 \approx 0,4771$.

Eroare absolută, corecție și eroare relativă

Eroare absolută. Calitatea unei valori aproximative a se apreciază prin abaterea ei de la valoarea adevărată x, iar diferența $a - x$ se numește *eroare absolută* $\varepsilon = a - x$. O valoare aproximativă este cu atît mai precisă cu cît eroarea ei absolută este mai mică, de exemplu valoarea de aproximare $a_1 = 0,66667$ pentru $x = 2/3$ este de o sută de ori mai precisă decît valoarea aproximativă $a_2 = 0,667$.

Valoare aproximativă	Valoare adevărată	Eroare absolută	Eroare relativă
a	x	$\varepsilon = a - x$	$\left\lvert \frac{\varepsilon}{x} \right\rvert$

Corecție. Pentru a obține din valoarea aproximativă a, valoarea adevărată x, se adaugă la a corecția c, $c = x - a = -\varepsilon$.

Eroare relativă. În locul erorii absolute ε, a unei valori aproximative a, se dă în mod frecvent *eroarea relativă* $\left|\frac{\varepsilon}{x}\right|$ care se exprimă de regulă în procente. Astfel, valorile aproximative ale diferitelor mărimi pot fi comparate în ce privește eroarea lor.

Exemplu. Pentru valoarea adevărată $x = 2/3$ se ia valoarea aproximativă $a_1 = 0,67$ iar pentru valoarea adevărată $y = 1/15$, valoarea aproximativă $a_2 = 0,07$. Erorile absolute sînt $\varepsilon_1 = a_1 - x = 0,67 - \frac{2}{3} = \frac{1}{300}$ și $\varepsilon_2 = a_2 - y = 0,07 - \frac{1}{15} = \frac{1}{300}$ iar valorile relative $\left|\frac{\varepsilon_1}{x}\right| = \frac{\frac{1}{300}}{\frac{2}{3}} = 0,005 = 0,5\%$ și $\frac{\varepsilon_2}{y} = \frac{\frac{1}{300}}{\frac{1}{15}} = \frac{1}{20} = 0,05 = 5\%$. Deși erorile absolute sînt egale, a_1 este o valoare aproximativă pentru x de zece ori mai precisă decît a_2 pentru y.

Eroare absolută limită. Orice informație privind mărimea erorii absolute, respectiv relative, a unei valori aproximative reprezintă o informație asupra *preciziei* acestei valori aproximative. De regulă, valoarea adevărată este necunoscută, de exemplu la valori aproximative ce rezultă prin măsurări. În astfel de cazuri trebuie să ne mulțumim cu cunoașterea unor margini pentru erorile absolute, respectiv relative, ale valorilor aproximative.

Prin eroare absolută limită a unei valori aproximative a se înțelege un număr pozitiv Δa ce nu va fi depășit în valoare absolută de mărimea erorii absolute. Deci are loc inegalitatea

$$-\Delta a \leqslant \varepsilon \leqslant \Delta a \quad \text{sau} \quad a - \Delta a \leqslant x \leqslant a + \Delta a.$$

Prin stabilirea erorii absolute limită Δa se stabilesc o margine inferioară și una superioară pentru valorile lui x. Acest lucru se scrie pe scurt $x \approx a\,(\pm\,\Delta a)$ sau $x = a \pm \Delta a$.

a valoare aproximativă a lui x, Δa eroare absolută a lui a	$x \approx a(\pm\,\Delta a)$ sau $x = a \pm \Delta a$

Δa conține deci informația privind precizia lui a. Cu cît Δa este mai mic, cu atît este mai precisă valoarea aproximativă a. Dacă se cunosc pentru o mărime x două margini x_1 și x_2 astfel încît $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, atunci $a = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ este o valoare aproximativă pentru x cu $\Delta a = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$.

Eroare relativă limită, La unele date tehnice deseori eroarea se dă sub forma $x = a(\pm\delta\cdot 100\%)$ sau $x = a \pm \delta\cdot 100\%$; mărimea $\delta = \left|\frac{\Delta a}{a}\right|$ este o eroare relativă limită a lui a.

a valoare aproximativă a lui x; Δa eroare absolută limită a lui a; $\delta = \left\|\frac{\Delta a}{a}\right\|$ eroare relativă limită a lui a
$x \approx a(\pm\,\delta\cdot 100\%)$ sau $x = a \pm \delta\cdot 100\%$

Exemplu. Se dă capacitatea unui condensator: 250 pF $\pm$ 10%. Eroarea relativă a valorii aproximative $a = 250$ pF este $\delta = 0,1$. De aici se obține eroarea absolută limită $\Delta a = a\cdot\delta = 25$ pF. Valoarea adevărată a capacității se va găsi atunci între 225 pF și 275 pF.

Cînd se dau valori aproximative pentru numerele π, $\sqrt{2}$, lg 3 nu se mai fac de regulă aceleași considerații asupra preciziei. Reprezentarea acestor valori aproximative urmează anumite reguli din care se pot trage concluzii privind precizia.

Valori aproximative cu un număr finit de cifre exacte (trunchiere). Numărul π se reprezintă printr-o fracție zecimală infinită. Într-un tabel se găsește $\pi = 3,141592653589...$ Acest tabel dă deci o valoare aproximativă a lui π cu 12 zecimale exacte. Astfel, se întrerupe șirul zecimalelor într-un anumit loc. Cifrele care rămîn din acest șir coincid cu cifrele corespunzătoare ale fracției zecimale infinite. Astfel de cifre se numesc *cifre exacte.*

Numărul π trunchiat după patru zecimale va fi $\pi = 3,1415...$ După ultima cifră poate să urmeze orice cifră de la 0 la 9. Dacă se folosește o valoare aproximativă trunchiată după k zecimale exacte, atunci eroarea absolută a acestei valori aproximative este negativă și ca mărime mai mică decît ordinul ultimei cifrei reținute. Un număr cu k zecimale exacte va avea deci o eroare mai mică decît 10^{-k}, de exemplu, pentru $\pi \approx 3,1415$ eroare absolută este mai mică decît $10^{-4} = 1/10.000$.

Rotunjire. O metodă obișnuită de a aproxima valoarea fracțiilor zecimale este *rotunjirea* prin lipsă sau prin adaos. Astfel ultima cifră care se păstrează rămîne neschimbată atunci cînd după ea urmează 0, 1, 2, 3 sau 4 (rotunjire prin lipsă). Ultima cifră păstrată se va mări cu 1 atunci cînd cifra care urmează este 5, 6, 7, 8 sau 9 (rotunjire prin adaos). O valoare rotunjită cu patru cifre zecimale pentru π este $\pi \approx 3,1416$; eroarea ei absolută este mai mică decît $\frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$. Urmînd această regulă, avem siguranța că eroarea unui număr rotunjit este mai mică decît jumătate din unitatea ce ocupă locul ultimei cifre păstrate. Eroarea poate fi pozitivă dar și negativă. Numai în cazul cînd prima cifră neglijată este 5 urmat de zerouri, eroarea de rotunjire va fi egală cu jumătatea unității ce ocupă locul ultimei cifre considerate. În aceste cazuri rotunjirea se va face astfel încît ultima cifră să fie un număr par. De exemplu 0,12500 se rotunjește la 0,12 dar 0,17500 la 0,18.

Cifre sigure. Cifrele unui număr rotunjit nu pot să fie toate cifre exacte. Un număr rotunjit corect este un număr care are numai cifre sigure. Cifrele unei valori aproximative se numesc *sigure* atunci cînd eroarea absolută a acesteia este cel mult egală cu jumătate din unitatea ce ocupă locul ultimei cifre considerate.

Exemplu. Într-un tabel al valorilor rădăcinilor pătrate cu cinci zecimale exacte se găsește pentru $\sqrt{39}$ valoarea 6,24500. Această valoare are numai cifre sigure deoarece eroarea ei absolută este mai mică decît $5 \cdot 10^{-6}$. Ultimele trei cifre nu sînt însă cifre exacte deoarece $\sqrt{39} = 6,249979...$ Dacă o valoare aproximativă conține numai cifre exacte, atunci nu trebuie să mai urmeze nici o considerație privind precizia ei. Cînd pentru o valoare aproximativă nu se dă precizia, atunci se presupune că toate cifrele ei sînt cifre sigure. Acest lucru se întîmplă în cazul alcătuirii tabelelor matematice.

Cînd a este o valoare aproximativă a lui x, obținută prin rotunjire, se poate scrie $x = a$ în loc de $x \approx a$, dacă nu există confuzii.

Cifre semnificative și nesemnificative. La rotunjirea numerelor mari apare o dificultate. Dacă de exemplu se rotunjește numărul 1778 la cifra sutelor, se obține 1800. Acest număr s-a rotunjit corect însă nu conține numai cifre sigure, deoarece eroarea absolută este mai mare decît 0,5. Cifrele neglijate 7 și 8 s-au înlocuit cu zerouri care servesc numai la stabilirea ordinului de mărime al numărului rotunjit. Aceste cifre se numesc nesemnificative. Introducerea cifrelor nesemnificative (zerouri) poate să producă confuzii în considerațiile privind precizia. Cu ajutorul puterilor lui zece se introduce un alt mod de scriere. În cazul precedent se scrie $18 \cdot 10^2$ pentru numărul rotunjit. Dacă însă trebuie rotunjit numărul 1799,7, atunci pentru rezultatul 1800 cele două zerouri sînt *cifre semnificative*. Ele se vor introduce, de exemplu, sub forma $1,800 \cdot 10^3$.

Rotunjirea numerelor ce au fost deja în prealabil rotunjite. O altă dificultate apare atunci cînd numere ce au fost deja rotunjite se mai rotunjesc o dată. De exemplu, rotunjind ultimele două zecimale ale numărului 0,4747, se obține 0,47; rotunjind întîi trei cifre și apoi încă două se

31	8.87594	
32	$8.8769\bar{5}$	10
33	$8.8779\dot{5}$	10
34	$8.8789\dot{5}$	10
35	$8.8799\bar{5}$	10
36	8.88...	9

obține întîi 0,475 și apoi 0,48. Ultima cifră nu mai este în acest caz sigură. Acest lucru se obține întotdeauna cînd la rotunjirea succesivă ultima cifră se rotunjește la 5. Este util ca în acest caz, în vederea unei rotunjiri ulterioare, să se marcheze dacă aceasta a apărut dintr-o rotunjire prin adaos sau prin lipsă de exemplu 5 se marchează în mod frecvent cu o bară sau cu un punct după cum a rezultat dintr-o rotunjire prin adaos sau prin lipsă (fig. 28.1.1): $2{,}6146 \approx 2{,}61\bar{5} \approx 2{,}61$; $2{,}6153 \approx 2{,}61\dot{5} \approx 2{,}62$.



28.1.1. Marcarea ultimei cifre 5 într-o tabelă de logaritmi

Precizia rezultatului calculelor cu valori aproximative

Erori ale datelor și erori de calcul. Atunci cînd se fac calcule cu valori aproximative, rezultatul va fi de asemenea o valoare aproximativă. Eroarea rezultatului se datorește în primul rînd erorilor valorilor aproximative care intră în calcul. O astfel de eroare se numește *eroare inițială (de intrare)*. Pe lîngă aceasta mai intervine o eroare ce apare în decursul calculelor, de exemplu la rotunjirea prin adaos sau prin lipsă. O astfel de eroare se numește *eroare de calcul*. Eroarea de calcul trebuie să fie mai mică decît eroarea de intrare, altfel precizia datelor de intrare nu va fi complet folosită. Eroarea de calcul se ia de regulă 1/10 din eroarea de intrare. Acest lucru se poate obține folosind în decursul efectuării calculelor cîteva zecimale în plus și rotunjind rezultatul numai în conformitate cu precizia datelor de intrare. În general, acest lucru se realizează cu una sau două zecimale suplimentare.

Metoda marginilor. Prin *metoda marginilor* se poate face cea mai exactă determinare a preciziei rezultatului unui calcul. Cu ajutorul ei, din marginile inferioare, respectiv superioare, ale valorilor de intrare se obține o margine inferioară, respectiv superioară, a rezultatului. Pentru operațiile elementare există reguli în acest sens. Fie $L(x)$ și $U(x)$ marginea inferioară și respectiv superioară ale valorii x și $L(y)$ și $U(y)$ marginea inferioară și respectiv superioară a unei valori y. Atunci

$$L(-x) = -U(x), \quad L(x+y) = L(x) + L(y), \quad L(x-y) = L(x) - U(y),$$

$$U(-x) = -L(x), \quad U(x+y) = U(x) + U(y), \quad U(x-y) = U(x) - L(y).$$

Aceste relații se deduc din inegalitățile $L(x) \leqslant x \leqslant U(x)$, $L(y) \leqslant y \leqslant U(y)$; de exemplu din $L(x) \leqslant x \leqslant U(x)$ se deduce prin înmulțire cu -1 inegalitatea $-U(x) \leqslant -x \leqslant -L(x)$ și deci $-U(x)$ este o margine inferioară pentru $-x$ și $-L(x)$ o margine superioară pentru $-x$

Din	$x \leqslant U(x)$	$L(x) \leqslant x$	$L(x) \leqslant (x)$	$x \leqslant U(x)$
urmează	$x+y \leqslant U(x)+y$;	$L(x)+y \leqslant x+y$;	$L(x)-y \leqslant U(y)$;	$x-y \leqslant U(x)-y$;
și deci	$y \leqslant U(y)$	$L(y) \leqslant y$	$y \leqslant U(y)$	$L(y) \leqslant y$
rezultă	$x+y \leqslant U(x)+U(y)$	$L(x)+L(y) \leqslant x+y$	$L(x)-U(y) \leqslant x-y$	$x-y \leqslant U(x)-L(y)$.

La stabilirea marginilor pentru valorile lui xy și x/y, semnul marginilor joacă un rol. Dacă x și y au numai margini pozitive, atunci

$$L(xy) = L(x)\,L(y), \qquad U(xy) = U(x)\,U(y),$$

$$L\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{L(x)}{U(y)}, \qquad U\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{U(x)}{L(y)}.$$



La rotunjirile ce se fac trebuie să se țină seama că marginile inferioare nu se pot decît micșora iar cele superioare numai mări.

Exemplu. Cunoscînd raza mică $r_2 \approx 61\ (\pm 0{,}5)$ mm, raza mare $r_1 \approx 74\ (\pm 0{,}5)$ mm și generatoarea $s \approx 82\ (\pm 0{,}5)$ mm ale unui trunchi de con, să se deducă înălțimea cu ajutorul formulei

$$h = \sqrt{s^2 - (r_1 - r_2)^2}.$$

Calculele sînt efectuate alături. Marginea inferioară a rezultatului este 80,28 mm iar cea superioară 81,63 mm. Rezultatul se poate scrie $h \approx 80{,}955\ (\pm 0{,}675)$ mm sau, mai puțin precis, $h = 81{,}0\ (\pm 0{,}8)$ mm

	Marginea inferioară	Marginea superioară
s	81,5	82,5
r_1	73,5	74,5
r_2	60,5	61,5
$r_1 - r_2$	12,0	14,0
$(r_1 - r_2)^2$	144,0	196,0
s^2	6642,25	6806,25
h^2	6446,25	6662,25
h	80,28	81,63

Metoda erorii limită. Metoda marginilor pentru valori consideră atît erorile de intrare cît și erorile de calcul. Aplicarea ei ia însă mult timp, deoarece fiecare calcul se face de două ori.

Atunci cînd ne interesează numai erorile de intrare, *metoda erorii limită* este mai rapidă. Ea nu este tot atît de precisă însă prezintă avantajul că din precizia datelor de intrare, se poate găsi direct eroarea limită a rezultatului. Metoda erorii limită are la bază următorul principiu:

Fie de calculat valoarea funcției de k variabile $f(x_1, x_2, ..., x_k)$. Pentru variabilele $x_1, ..., x_k$ sînt cunoscute valorile aproximative $a_1, a_2, ..., a_k$. Trebuie evaluată eroarea rezultatului, atunci cînd calculele se fac pornind de la valorile aproximative $a_1, a_2, ..., a_k$. Aceste valori aproximative admit erorile absolute $\varepsilon_1 = a_1 - x_1$, $\varepsilon_2 = a_2 - x_2, ..., \varepsilon_k = a_k - x_k$, care se presupun foarte mici în raport cu a_i. Rezultatul exact este:

$$f(x_1, x_2, ..., x_k) = f(a_1 - \varepsilon_1, \quad a_2 - \varepsilon_2, ..., a_k - \varepsilon_k).$$

Dezvoltînd membrul al doilea al acestei egalități în serie, prin metodele cunoscute din calculul diferențial, și neglijînd termenii de grad superior lui unu în ε_i, se obține

$$f(x_1, ..., x_k) = f(a_1, ..., a_k) - \varepsilon_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} - \varepsilon_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} - ... - \varepsilon_k \frac{\partial f}{\partial x_k}.$$

În această formulă derivatele parțiale ale funcției $f(x_1, ..., x_k)$ sînt calculate în punctele $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2, ..., x_k = a_k$. Din această ecuație se obține pentru eroarea absolută a rezultatului, expresia

$$\varepsilon_f = f(a_1, ..., a_k) - f(x_1, ..., x_k) =$$
$$= \varepsilon_1 f_{x_1}(a_1, ..., a_k) + \varepsilon_2 f_{x_2}(a_1, ..., a_k) + ... + \varepsilon_k f_{x_k}(a_1, ..., a_k).$$

Valoarea absolută a erorii absolute ε_f se poate evalua atunci astfel:

$$|\varepsilon_f| \leqslant |\varepsilon_1|\,|f_{x_1}(a_1, ..., a_k)| + |\varepsilon_2|\,|f_{x_2}(a_1, ..., a_k)| + ... + |\varepsilon_k|\,|f_{x_k}(a_1, ..., a_k)|.$$

Dacă se cunosc erorile absolute limită $\Delta a_1, \Delta a_2, ..., \Delta a_k$, atunci pentru ε_f se obține inegalitatea

$$|\varepsilon_f| \leqslant \Delta a_1 |f_{x_1}(a_1, ..., a_k)| + \Delta a_2 |f_{x_2}(a_1, ..., a_k)| + ... + \Delta a_k\,|f_{x_k}(a_1, ..., a_k)| = \Delta f.$$

Valoarea Δf reprezintă o aproximare a erorii absolute limită a lui f.

Ecuația generală pentru evaluarea preciziei rezultatului calculului
$\Delta f = \Delta a_1 \lvert f_{x_1}(a_1, ..., a_k)\rvert + \Delta a_2 \lvert f_{x_2}(a_1, ..., a_k)\rvert + ... + \Delta a_k \lvert f_{x_k}(a_1, ..., a_k)\rvert$

Cu ajutorul acestei egalități se poate determina eroarea limită a rezultatului cunoscînd erorile limită ale valorilor aproximative de intrare. Neglijarea termenilor de ordin superior în erorile absolute ε_i $(i = 1, ..., k)$ nu este esențială.

Aplicarea metodei erorii limită la operațiile elementare. Dacă a și b sînt valori aproximative cu erorile limită Δa și Δb, pentru variabilele x și y, atunci formulele de mai înainte iau forma:

Adunarea: $f(x, y) = x + y$; $|f_x| = 1$; $|f_y| = 1$; $\Delta f = \Delta a + \Delta b$,

Scăderea: $f(x, y) = x - y$; $|f_x| = 1$; $|f_y| = 1$; $\Delta f = \Delta a + \Delta b$,

Suma erorilor absolute limită a două valori aproximative reprezintă eroarea absolută limită a sumei și a diferenței celor două valori aproximative.

Înmulțirea: $f(x, y) = xy$; $|f_x| = |y|$; $|f_y| = |x|$; $\Delta f = |a|\Delta b + |b|\Delta a$; Împărțind prin $|f(a, b)| = |ab|$, rezultă $\dfrac{\Delta f}{|f|} = \dfrac{\Delta a}{|a|} + \dfrac{\Delta b}{|b|}$.

Împărțirea: $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$; $|f_x| = \dfrac{1}{|y|}$; $|f_y| = \dfrac{|x|}{y^2}$; $\Delta f = \Delta a \dfrac{1}{|b|} + \Delta b \dfrac{|a|}{b^2}$;

Împărțind prin $|f(a, b)| = \left|\dfrac{a}{b}\right|$, rezultă $\dfrac{\Delta f}{|f|} = \dfrac{\Delta a}{|a|} + \dfrac{\Delta b}{|b|}$,

Suma erorilor relative limită a două valori aproximative reprezintă eroarea relativă limită a produsului și a cîtului celor două valori aproximative.

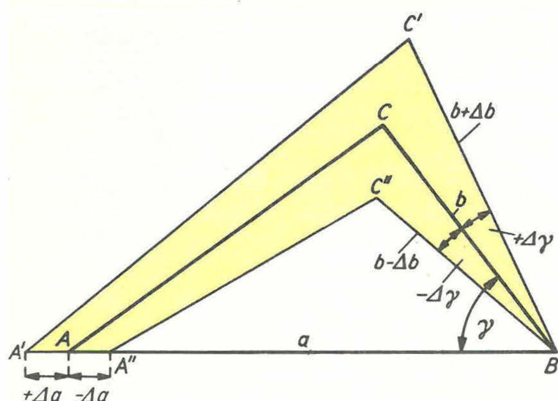
Ridicarea la putere: $f(x) = x^n$; $|f'(x)| = |nx^{n-1}|$; $\Delta f = \Delta a|na^{n-1}|$. Împărțind prin $|f(a)| = |a^n|$, rezultă $\dfrac{\Delta f}{f} = |n| \cdot \dfrac{\Delta a}{|a|}$.

Eroarea relativă a unei valori aproximative multiplicată cu n reprezintă eroarea relativă limită pentru puterea n a acestei valori aproximative.

Metoda erorii limită se poate aplica și unor calcule complicate care au la bază operațiile elementare.

Formule pentru calculul erorilor limită
x, y — valori adevărate; a, b — valori aproximative; Δa, Δb — erori limită

Operația	$f(x, y)$	Eroarea absolută limită Δf	Eroarea relativă limită $\Delta f/|f|$
Adunarea	$x + y$	$\Delta a + \Delta b$	$\dfrac{\Delta a + \Delta b}{|a + b|}$
Scăderea	$x - y$	$\Delta a + \Delta b$	$\dfrac{\Delta a + \Delta b}{a - b}$
Înmulțirea	xy	$\Delta a|b| + \Delta b|a|$	$\dfrac{\Delta a}{|a|} + \dfrac{\Delta b}{|b|}$
Împărțirea	$\dfrac{x}{y}$	$\dfrac{\Delta a|b| + \Delta b|a|}{b^2}$	$\dfrac{\Delta a}{|a|} + \dfrac{\Delta b}{|b|}$
Ridicarea la putere	x^n	$\Delta a|na^{n-1}|$	$|n|\dfrac{\Delta a}{|a|}$
În general	$f(x, y)$	$\Delta a|f_x(a, b)| + \Delta b|f_y(a, b)|$	$\dfrac{\Delta a|f_x(a, b)| + \Delta b|f_y(a, b)|}{|f(a, b)|}$



28.1.2. Triunghiul care trebuie găsit exact se găsește cuprins între triunghiurile $A''BC''$ și $A'BC'$

Exemplul 1. Să se calculeze valoarea expresiei $f = \frac{ab}{c}$ pentru $a = 2 \pm 0,1$; $b = 4 \pm 0,2$; $c = 2,5 \pm \pm 0,1$. Se obține $f = \frac{2 \cdot 4}{2,5} = 3,2$ cu eroarea relativă $\frac{\Delta f}{|f|} = \frac{\Delta a}{|a|} + \frac{\Delta b}{|b|} + \frac{\Delta c}{|c|} = \frac{0,1}{2} + \frac{0,2}{4} + \frac{0,1}{2,5} = 0,14$ și cu eroarea absolută $\Delta f = 3,2 \cdot 0,14 = 0,448$. Rezultatul va fi $f = 3,2 \pm \pm 0,448$.

Exemplul 2. Pentru calculul ariei unui triunghi cunoscînd două laturi $a \approx 5,2\ (\pm\ 0,05)$ cm, $b \approx 3,4\ (\pm \pm 0,05)$ cm, și unghiul cuprins între ele $\gamma \approx 35°\ (\pm\ 10')$ se obține (fig. 28.1.2).

$$A = \frac{1}{2}\, ab \sin \gamma \approx 5,070 \text{ cm}^2.$$

Estimarea erorii dă:

$$\Delta A = \frac{1}{2}\, \Delta a |\, b\, |\, |\sin|\, \gamma + \frac{1}{2}\, |\, a\, |\Delta b|\sin|\gamma + \frac{1}{2}\, |a|\, |\, b|\, |\cos\gamma\, |\, \Delta\gamma,$$

$$\frac{\Delta A}{|\,A\,|} = \frac{\Delta a}{|\,a\,|} + \frac{\Delta b}{|\,b|} + \left|\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\right| \Delta\gamma = \frac{0,05}{5,2} + \frac{0,05}{3,4} + 1,428 \cdot 0,0029 = 0,0096 + 0,0147 \times$$

$$\times\ 0,0042 = 0,0285 = 2,85\%.$$

Deci $\Delta A = 5,070 \cdot 0,0285 \text{ cm}^2 = 0,144 \text{ cm}^2$ sau

$$A = 5,070\ (\pm\ 0,144) \text{ cm}^2 = 5,070 \text{ cm}^2\ (\pm\ 2,85\%).$$

Ecuația de bază din metoda erorii limită leagă eroarea limită a rezultatului de erorile limită ale valorilor de intrare. Dacă calculul implică o singură valoare aproximativă, atunci din această ecuație se poate determina precizia valorii aproximative, necesară pentru a obține precizia dorită a rezultatului. Ecuația de bază va fi în acest caz $\Delta f = |f'(a)|\, \Delta a$, unde a și Δa sînt valoarea aproximativă și eroarea limită. Dacă rezultatul trebuie să aibă o eroare mai mică decît Δ_0, atunci $\Delta f < \Delta_0$, deci $\Delta a < \frac{\Delta_0}{|f'(a)|}$.

Exemplul 3. Cu cîte zecimale trebuie luată valoarea lui $\cos\gamma$ pentru ca la calculul laturii c, cunoscînd pe $a = 7,49$ cm, $b = 5,32$ cm și unghiul cuprins între ele $\gamma = 30°$, eroarea abasolută a rezultatului să rămînă mai mică decît 0,005?

$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2abc \cos\gamma}$, de unde $\frac{\partial c}{\partial(\cos\gamma)} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}} = \frac{ab}{c}$ și $\Delta c = \Delta(\cos\gamma)\, \frac{ab}{c} = \Delta(\cos\gamma) \cdot 10,2$.

Deoarece $\Delta c < 0,005$, trebuie ca $\Delta(\cos\gamma) < \frac{0,005}{10,2} = 4,9 \cdot 10^{-4}$. Valoarea lui $\cos\gamma$ trebuie luată deci cu cel puțin *trei zecimale exacte.*

Atunci cînd rezultatul unui calcul depinde de mai multe valori de intrare, din ecuația generală pentru calculul erorii limită a rezultatului rezultă că problema determinării preciziei datelor de intrare pentru a avea o precizie a rezultatului este nedeterminată. Avem la dispoziție o singură ecuație cu mai multe necunoscute. Cu ajutorul ecuației generale se poate însă evalua mărimea influenței pe care o au erorile fiecărei variabile de intrare asupra rezultatului, se poate deci aprecia ce valori de intrare trebuie alese cu o precizie mai mare.

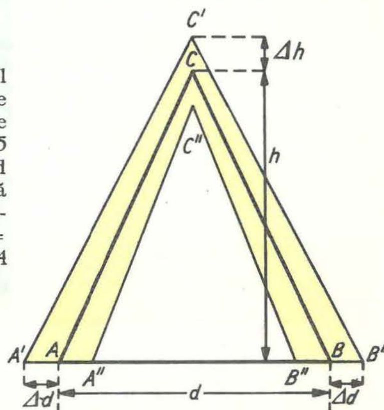
Exemplul 4. Trebuie determinat volumul unui con circular drept. Se măsoară diametrul cercului de bază $d \approx 16$ cm și înălțimea $h \approx 32$ cm. Cît de precise trebuie să fie măsurările și cu cîte zecimale trebuie luat în calcul π, pentru ca eroarea relativă a rezultatului să nu depășească 1% ? Volumul conului este dat de $V = \frac{\pi}{12} hd^2$. Dacă $\Delta\pi$, Δh și Δd sînt erorile absolute limită ale lui π, h și d respectiv, atunci eroarea relativă maximă limită a volumului va fi $\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta\pi}{\pi} + \frac{\Delta h}{h} + \frac{2\Delta d}{d}$. Din condiția $\frac{\Delta V}{V} < 0,01$ se obține inegalitatea:

$$0,31831\ \Delta\pi + 0,0325\ \Delta h + 0,125\ \Delta d < 0,01.$$

Evaluarea erorilor limită $\Delta\pi$, Δh și Δd nu se poate face în mod unic. Se poate însă observa că erorile datorate diametrului au asupra erorii rezultatului o influență de patru ori mai puternică decît eroarea înălțimii. Deci, diametrul trebuie măsurat cu mare precizie. O precizie $\Delta d = 0,1$ cm pentru diametru nu este suficientă. Numai datorită acestei erori s-ar obține în rezultat o eroare de 1,25%. Dacă se măsoară diametrul cu o precizie de 0,05 adică $\Delta d = 0,05$, celelalte erori limită pot satisface condiția:

$$0,31831\ \Delta\pi + 0,03125\ \Delta h < 0,00375.$$

Eroarea de măsurare a înălțimii ar putea fi de cel mult 1,2 mm și π trebuie să fie exact. Dacă se mărește precizia înălțimii la $\Delta h = 1$ mm, atunci se poate admite pentru π eroarea limită dată de $0,31831\ \Delta\pi < 0,000625$ sau $\Delta\pi < 0,002$. Condiția aceasta este îndeplinită luînd pe π rotunjit prin adaos cu două zecimale exacte adică 3,14. Astfel, volumul conului se poate calcula cu o precizie de cel puțin 1% dacă diametrul are precizia $\Delta d = 0,05$ cm, înălțimea precizia $\Delta h = 0,1$ și se ia $\pi = 3,14$ (fig. 28.1.3).



28.1.3. Secțiunea exactă a conului circular drept se găsește între figurile $A'B'C'$ și $A''B''C''$

Erori de măsurare și de observație

Erori de măsurare. Dacă valoarea aproximativă a, a unei mărimi x, s-a obținut printr-o măsurare, atunci eroarea absolută $\varepsilon = a - x$ se mai numește *eroare de măsurare.* Lăsînd la o parte cazul erorilor grosolane, datorate neatenției sau folosirii necorespunzătoare a instrumentelor de măsurare, erorile de măsurare sînt inevitabile. Cauzele lor se datoresc preciziei instrumentelor (erori instrumentale) cît și erorilor involuntare de potrivire a instrumentului și de citire făcute de către cel ce măsoară *(erori subiective).* Erorile instrumentale apar deseori ca *erori regulate* care sînt sau *sistematice* sau *constante.* De exemplu ora arătată de un ceas precis dar care a fost potrivit greșit admite o eroare constantă, și anume eroarea cu care s-a greșit la potrivire. Dacă însă se știe că în decursul unei zile ceasul o ia înainte cu cinci minute, atunci ora indicată de acest ceas admite o eroare sistematică. Mărimea acestei erori depinde de timpul trecut de la ultima potrivire. Erorile constante și sistematice sînt deseori inevitabile. Datorită regularității lor, ele pot fi însă detectate și eliminate.

Erori de observație. Altfel stau lucrurile cu *erorile neregulate* sau *întîmplătoare.* Ele sînt de asemenea inevitabile, însă eliminarea lor nu este totdeauna posibilă. În mare parte, ele

sînt urmarea erorilor subiective ale observatorului. În acest caz ele se numesc *erori de observație*. Erorile întîmplătoare pot însă să apară și datorită unor influențe necontrolabile, întîmplătoare ce apar în timpul procesului de măsurare.

Pentru a găsi o valoare aproximativă a pentru o mărime x este de fapt suficientă o singură măsurare. Din această măsurare nu se poate însă trage nici o concluzie asupra erorii întîmplătoare de măsurare $\varepsilon = a - x$. Această eroare poate fi mai mică sau mai mare, pozitivă sau negativă. Desigur, cunoscînd proprietățile instrumentului de măsură și îndemînarea observatorului, se poate determina o valoare limită a erorii Δa care va fi cu siguranță depășită dar care este mult prea grosolană. Din acest motiv măsurările se repetă și pe cît posibil vor fi efectuate de către observatori diferiți. Dacă se fac n măsurări, pentru mărimea x, atunci cele n rezultate $a_1, \ldots, a_n$ nu vor coincide în special atunci cînd se cere o precizie mare a citirilor pe scala instrumentului de măsură. Aceste citiri conțin un element subiectiv care depinde de observator. Precizia reglării aparatului variază de la o măsurare la alta. O altă sursă psihologică de erori rezultă din imposibilitatea de a stabili corect coincidențele cu ochiul liber. Din cele n rezultate ale măsurărilor a_i rezultă n ecuații

$$\varepsilon_1 = a_1 - x, \quad \varepsilon_2 = a_2 - x, \ldots, \varepsilon_n = a_n - x$$

pentru n erori de măsurare ε_i și valoarea adevărată necunoscută x, adică pentru $n + 1$ necunoscute. *Metodele de compensare* conțin procedee pentru obținerea unei valori aproximative acceptabile a și determinarea preciziei acesteia. Posibilitatea rezolvării acestei probleme are la bază faptul că erorile de observație ε_i, deși individual sînt incontrolabile, mai mari sau mai mici, pozitive sau negative, în totalitatea lor se supun unor legi stricte.

Legea erorilor a lui Gauss. În capitolul 27 se arată că o variabilă aleatoare x este caracterizată prin funcția ei de repartiție. *Funcția de repartiție*, introdusă de Carl Friederich GAUSS (1777—1855) ca rezultat al studiului *erorilor de observație*, este caracterizată de *funcția de densitate* $p(x) = \dfrac{1}{a\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}}$ cu valoare medie $\mu = b$ și dispersia $\sigma = a$ și poartă denumirea de *funcție de repartiție normală* sau *gaussiană*. În calculul compensărilor se notează $x - b = \varepsilon$, $a = \sigma$ și $p(x) = \varphi(\varepsilon)$ și se obține astfel legea lui Gauss privind repartiția erorilor.

Legea erorilor a lui Gauss	$\varphi(\varepsilon) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)^2}$

Graficul acestei funcții are formă de clopot, se întinde de-a lungul întregii axe a absciselor $(-\infty < \varepsilon < +\infty)$, are un maxim pentru $\varepsilon = 0$ și puncte de inflexiune pentru $\varepsilon = -\sigma$ și $\varepsilon = +\sigma$. Pentru valori mari ale lui σ, curba $\varphi(\varepsilon)$ este întinsă și plată iar pentru σ mic abruptă și îngustă. Cu ajutorul acestei funcții de repartiție se poate calcula probabilitatea ca o eroare de observație să fie cuprinsă între limitele $-\Delta$ și $+\Delta$. Această probabilitate este:

$$P(-\Delta \leqslant \varepsilon \leqslant \Delta) = \int_{-\Delta}^{+\Delta} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon.$$

Eroarea maximă $\Delta = \lambda\sigma$	Probabilitatea P
$0{,}67\sigma$	0,500
$1{,}00\sigma$	0,683
$1{,}96\sigma$	0,950
$2{,}00\sigma$	0,954
$2{,}58\sigma$	0,990
$3{,}00\tau$	0,997

De obicei Δ se exprimă sub forma unui multiplu al lui σ, $\Delta = \lambda\sigma\,(\lambda > 0, \sigma > 0)$. Din evaluarea integralei erorilor rezultă că o eroare de observație nu depășește limita $\Delta = \lambda\sigma$ cu o probabilitate P, dată în tabele.

Dacă dispersia σ a *repartiției erorilor* se cunoaște pentru un anumit procedeu de măsurare, atunci se pot calcula erori limită $\Delta = \lambda\sigma$, ce nu vor fi depășite cu o probabilitate determinată. Din păcate, în practică, de regulă σ este necunoscut.

Compensarea cuprinde metode cu ajutorul cărora din mai multe măsurări ale mărimii x se estimează valori ale lui σ și cu ajutorul legii lui Gauss se trag anumite concluzii privind erorile de observație.

28.2. Compensarea datelor

Dezvoltarea metodelor de compensare se datorește în mare parte lui K.F. GAUSS. Prima dată problema compensării rezultatelor a apărut în legătură cu calculul orbitelor planetelor și al triangulațiilor pentru care Gauss și-a făcut singur măsurările. Încă și astăzi prelucrarea măsurărilor astronomice și geodezice este de neconceput fără aceste procedee a căror aplicare s-a extins apoi în toate domeniile în care rezultatele observațiilor și măsurărilor trebuie evaluate exact. Prin compensare se pot deduce din măsurări ce conțin erori valori estimate (valori aproximative) ale mărimilor ce se măsoară și se poate aprecia precizia acestora.

Metoda celor mai mici pătrate

Funcția de verosimilitate. Dacă se fac n măsurări independente $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pentru determinarea a n mărimi $y_1, y_2, \ldots, y_n$, atunci fiecare eroare de observație $\varepsilon_1 = a_1 - y_1$, $\varepsilon_2 = a_2 - y_2, \ldots, \varepsilon_n = a_n - y_n$ satisface legea lui Gauss. Dacă $d\varepsilon_i = da_i$,

$$\varphi(a_i - y_i)\,da_i = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{a_i-y_i}{\sigma_i^2}\right)^2} da_i \quad (i = 1, .., n),$$

reprezintă probabilitatea ca valoarea observată să se găsească în intervalul $(a_i, a_i + da_i)$ sau, mai pe scurt ca la măsurarea lui y_i să se obțină valoarea a_i. Fiecare dispersie σ_i $(i = 1, \ldots, n)$ depinde de precizia măsurării. Probabilitatea ca la măsurarea lui y_1 să se obțină a_1, la măsurarea lui y_2 să se obțină a_2, la măsurarea lui y_n să se obțină a_n concomitent va fi:

$$P = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\cdot\frac{1}{\sigma_1}\cdot\frac{1}{\sigma_2}\cdots\frac{1}{\sigma_n}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{a_1-y_1}{\sigma_1}\right)^2+\left(\frac{a_2-y_2}{\sigma_2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{a_n-y_n}{\sigma_n}\right)\right]} da_1 da_2 \ldots da_n .$$

În general se folosesc, pentru *suma pătratelor erorilor* S și *funcția de verosimilitate* L, notațiile:

$$S = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i - y_i}{\sigma_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\right)^2; \quad L = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\cdot\frac{1}{\sigma_1}\cdot\frac{1}{\sigma_2}\cdots\frac{1}{\sigma_n}\,e^{-\frac{1}{2}S}.$$

Atunci $P = L da_1 da_2 \ldots da_n$.

Metoda celor mai mici pătrate a lui Gauss, principiul verosimilității maxime. Prin măsurarea variabilelor $y_1, \ldots, y_n$ se obțin valorile de observație $a_1, \ldots, a_n$. Rămîn însă necunoscute valorile adevărate $y_1, \ldots, y_n$. După GAUSS, se admit ca estimații *plauzibile* pentru $y_1, \ldots, y_n$ numai acele valori pentru care măsurările $a_1, \ldots, a_n$ au *probabilitatea maximă*. Se vor determina $y_1, \ldots, y_n$ în așa fel, încît probabilitatea P să fie maximă pentru valorile $a_1, \ldots, a_n$ obținute prin măsurări. Valorile $y_1, \ldots, y_n$ obținute astfel se mai numesc *valori de probabilitate maximă* corespunzătoare valorilor măsurate. Dacă probabilitatea P este maximă, atunci și *funcția de verosimilitate* L va fi maximă. Din acest motiv, acest principiu de estimare se mai numește *priucipiul verosimilității maxime* iar valorile $y_1, \ldots, y_n$ *estimații de verosimilitate maximă*. Funcția de verosimilitate L este maximă pentru acele valori $y_1, \ldots, y_n$ pentru care suma S a pătratelor erorilor va fi minimă. Aceasta este *metoda celor mai mici pătrate* folosită de Gauss pentru estimarea valorilor adevărate cu ajutorul valorilor observate. Mai exact, această metodă ar trebui să se numească metoda celor mai mici sume ale pătratelor erorilor. Această metodă constituie baza metodelor de compensare. Prin aplicarea ei, erorile de observație sînt mai mult sau mai puțin compensate.

$$S = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(a_i - y_i)}{\sigma_i}\right)^2 \to \text{minim}$$

Aplicarea practică a metodei celor mai mici pătrate. Dacă mărimile măsurate $y_1, \ldots, y_n$ sînt toate diferite și nu există nici o legătură între ele, atunci *metoda celor mai mici pătrate* conduce la soluția $y_i = a_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, adică mărimea respectivă se estimează prin valoarea

observației și suma S este nulă. Acest caz apare însă extrem de rar în practică. De regulă mărimile $y_1, ..., y_n$ sînt valori ale măsurărilor repetate ale aceleiași valori sau există între ele anumite dependențe. În ultimul caz, care îl include pe primul, există un număr mai mic de necunoscute $t_1, t_2, ..., t_k$ $(k<n)$ cu ajutorul cărora se pot reprezenta mărimile $y_1, ..., y_n$ sub formă $y_i = f_i(t_1, ..., t_k)$. De exemplu $y_i = c_{i1}t_i + c_{i2}t_2 + ... + c_{ik}t_k$ $(i = 1, ..., n)$. De regulă, este posibilă reprezentarea sub formă liniară în care coeficienții $c_{i\rho}$ $(\rho = 1, ..., k)$ sînt cunoscuți; dacă de exemplu o mărime se măsoară de n ori, atunci reprezentarea are numai o variabilă t și ecuațiile sînt $y_1 = t$, $y_2 = t, ..., y_n = t$.

Ecuații normale. Atunci cînd numărul necunoscutelor este mai mic decît numărul măsurărilor n, rămîn măsurări suplimentare. În suma S a pătratelor erorilor se exprimă mărimile $y_i (i = 1, ..., n)$ prin necunoscutele $t_1, ..., t_k$ și se calculează derivatele parțiale ale lui S în raport cu aceste necunoscute. Pentru determinarea minimului lui S, aceste derivate parțiale se egalează cu zero. Se obține astfel un sistem de ecuații în $t_1, ..., t_k$ care poartă denumirea de *ecuații normale*. Cu ajutorul soluțiilor acestui sistem se pot calcula valorile estimate ale mărimilor măsurate, $y_1, ..., y_n$. De obicei se folosește pentru estimațiile de verosimilitate maximă notațiile $\hat{y}_1, \hat{y}_2, ..., \hat{y}_n$ spre a le deosebi de valorile necunoscute $y_1, y_2, ..., y_n$. Tot așa valorile obținute pentru $t_1, ..., t_k$ din ecuațiile normale se vor nota cu $\hat{t}_1, ..., \hat{t}_k$. Pentru necunoscutele $t_1, ..., t_k$ se pot folosi însă și alte notații potrivite problemei studiate. Dacă funcțiile $f_i(t_1, .., t_k)$ sînt liniare, atunci și ecuațiile normale formează un sistem liniar. Dacă însă funcțiile $f_i(t_1, .., t_k)$ nu sînt liniare, rezolvarea sistemului de ecuații normale poate prezenta greutăți foarte mari. În aceste cazuri este avantajos ca problema să fie liniarizată. Se consideră valorile aproximative $N_{t_1}, ..., N_{t_k}$ pentru $t_1, ..., t_k$. Se poate astfel scrie $t_1 = N_{t_1} + \delta t_1$, $t_2 = N_{t_2} + \delta t_2, ..., t_k = N_{t_k} + \delta t_k$. Se dezvoltă apoi funcțiile $f_i(t_1, ..., t_k)$ în serie Taylor care se întrerupe după factorii liniari:

$$f_i(t_1, ..., t_k) = f_i(N_{t_1}, ..., N_{t_k}) + \frac{\partial f_i}{\partial t_1}\delta t_1 + \frac{\partial f_i}{\partial t_2}\delta t_2 + ... + \frac{\partial f_i}{\partial t_k}\delta t_k, \quad \text{pentru } i = 1, ..., n.$$

Mai rămîne de determinat corecțiile $\delta t_1, ..., \delta_{t_k}$ cu ajutorul metodei celor mai mici pătrate.

Eroare medie, legea propagării erorilor

Cazul unei singure măsurări. Precizia unei măsurări este dată de dispersia σ a repartiției erorilor. De multe ori se folosește ca măsură a preciziei în loc de σ mărimea $h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$. Din repartiția erorilor a lui Gauss rezultă că mărimea erorii adevărate de măsurare se găsește cu o probabilitate de 50% în intervalul $(-0{,}674\sigma,\ 0{,}674\sigma)$ și cu o probabilitate de 68,3% în intervalul $(-\sigma, \sigma)$. În teoria compensărilor, σ se numește *eroare medie* a măsurării și $0{,}674\sigma$ *eroare probabilă* a măsurării.

Eroare medie	σ
Eroare probabilă	$0{,}674\sigma$

Cazul mai multor măsurări. Fie $a_1, a_2, .., a_n$ valorile măsurate ale mărimilor $y_1, y_2, ..., y_n$ și $h_i = \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2}}$ preciziile măsurărilor. Atunci suma pătratelor erorilor este

$$S = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i - y_i}{\sigma_i}\right)^2 = 2\sum_{i=1}^{n} h_i^2(a_i - y_i)^2 = 2\sum_{i=1}^{n} h_i^2\varepsilon_i^2.$$

Ponderile măsurărilor. Erorile individuale ε_i nu participă în mod egal la alcătuirea sumei. Pătratul erorii unei măsurări mai precise, adică cu o precizie mai mare h_i, are o *pondere mai mare* la formarea lui S decît pătratul erorii unei măsurări mai puțin precise, adică cu o precizie mai mică. Fiecărei măsurări i se atașează o pondere p_i care indică în ce măsură eroarea ei de observație ε_i contribuie la formarea lui S. Aceste ponderi trebuie să fie proporționale cu pătratele preciziilor adică $p_1 : p_2 : ... : p_n = h_1^2 : h_2^2 : ... : h_n^2$ și se pot determina cu ajutorul valorilor h_i, abstracție făcînd de un factor arbitrar constant. Dacă acest factor se alege astfel încît măsurării cu pondere $p = 1$ să-i corespundă precizia h, atunci pentru

$i = 1, \ldots, n$ avem p_i: $1 = h_i^2 : h^2$ sau $h_i^2 = p_i h^2$. Este convenabil ca la măsurări de aceeași precizie să se atribuie fiecărei măsurări ponderea $p_i = 1$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Deoarece eroarea medie σ_i se obține cu ajutorul preciziei h_i prin formula $\sigma_i = \dfrac{1}{h_i\sqrt{2}}$, rezultă că $\sigma = \dfrac{1}{h\sqrt{2}}$ va fi eroarea medie a unei singure măsurări cu ponderea $p = 1$. Dacă se înlocuiește $h_i = h\sqrt{p_i}$, se obține $\sigma_i = \dfrac{\sigma}{\sqrt{p_i}}$, $i = 1, \ldots, n$, și astfel din eroarea medie σ a unei singure măsurări cu ponderea $p = 1$ se obține eroarea medie a unei măsurări de pondere, p_i. Suma pătratelor erorilor se exprimă în funcție de eroarea medie σ a unei măsurări individuale cu pondere $p = 1$ și de ponderile p_i sub forma

Eroarea medie	$\sigma_i = \dfrac{\sigma}{\sqrt{p_i}}$

Suma pătratelor erorilor	$S = \dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} p_i(a_i - y_i)^2$

Dispersia unei combinații liniare de erori absolute. Funcția de repartiție a erorilor a lui Gauss

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)^2}$$

satisface următoarele trei egalități:

$$(1) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = 1; \quad (2) \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = 0; \quad (3) \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = \sigma^2.$$

În cazul cînd o eroare de observație ε este o combinație liniară a două erori independente ε_1 și ε_2, $\varepsilon = c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2$, c_1 și c_2 fiind constante, cu ajutorul integralelor de mai sus se poate arăta că între dispersia σ a lui ε și dispersiile σ_1 și σ_2 ale lui ε_1 și ε_2 respectiv, există relația:

$$\sigma^2 = c_1^2\sigma_1^2 + c_2^2\sigma_2^2$$

Probabilitatea ca prima eroare de observație să se găsească în intervalul $(\varepsilon_1, \varepsilon_1 + d\varepsilon_1)$ și concomitent cea de-a doua eroare în intervalul $(\varepsilon_2, \varepsilon_2 + d\varepsilon_2)$ și ținîndu-se seama de regula de înmulțire a probabilităților independente $\varphi_1(\varepsilon_1)\, \varphi_2(\varepsilon_2) d\varepsilon_1\, d\varepsilon_2$ cît și de integralele (3) și (2), se obține pentru dispersia σ a lui ε

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2\varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2)^2\, \varphi_1(\varepsilon_1)\, \varphi_2(\varepsilon_2)\, d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 =$$

$$= c_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_1^2\varphi_1(\varepsilon_1)\, d\varepsilon_1 + c_2^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_2^2\varphi_2(\varepsilon_2)\, d\varepsilon_2 +$$

$$+ 2c_1c_2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_1\varphi_1(\varepsilon_1)\, d\varepsilon_1\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_2\varphi_2(\varepsilon_2)\, d\varepsilon_2\right) = c_1^2\sigma_1^2 + c_2^2\sigma_2^2.$$

Acest rezultat se poate generaliza.

Dacă eroarea de observație ε se exprimă ca o combinație liniară a erorilor individuale $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ cu dispersiile $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ sub forma $\varepsilon = c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2 + \ldots + c_n\varepsilon_n$ (c_i fiind constante), atunci dispersia σ a lui ε se exprimă sub forma

$$\sigma^2 = c_1^2\sigma_1^2 + c_2^2\sigma_2^2 + \ldots + c_n^2\sigma_n^2.$$

Legea propagării erorilor. Cînd trebuie calculată funcția $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ și în locul variabilelor $x_1, \ldots, x_n$ cunoaștem valorile măsurate $a_1, \ldots, a_n$ cu erorile de observație $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, atunci eroarea exactă ε a lui y se determină cu expresia:

$$\varepsilon = \frac{\partial f}{\partial x_1}\varepsilon_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\varepsilon_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\varepsilon_n.$$

Eroarea adevărată a rezultatului ε se exprimă liniar în funcție de ε_i. De aici rezultă că dispersia σ a lui ε se calculează cu ajutorul dispersiilor $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ ale erorilor $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ prin legea lui Gauss de propagare a erorilor. Deoarece erorii medii a rezultatului ε îi corespunde dispersia σ și erorilor medii ale măsurărilor $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — dispersiile $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, cu ajutorul legii lui Gauss *de propagare a erorilor* se obține eroarea medie a rezultatului din erorile medii ale datelor de intrare.

Legea lui Gauss de propagare a erorilor	$\sigma = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_2^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_n^2}$

Eroarea medie a unei valori medii. Legea propagării erorilor ia o formă particulară atunci cînd funcția y este media mărimilor $x_1, \ldots, x_n$, $y = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$. Deoarece $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{1}{n}$, se obține $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{n^2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2)$.

Dacă valorile $a_1, a_2, \ldots, a_n$ au pentru mărimile $x_1, \ldots, x_n$ aceeași precizie, atunci $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_n^2 = \sigma_x^2$ și se obține

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma_x^2}{n}, \quad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}.$$

Eroarea medie a mediei aritmetice a n măsurări cu precizii egale este egală cu eroarea medie a fiecărei măsurări, împărțită prin $\sqrt{n}$.

Estimarea erorii medii cu ajutorul observațiilor. În general, cînd se fac măsurări, nu se cunosc erorile medii σ_i, ci numai ponderile p_i corespunzătoare rezultatelor măsurărilor $a_1, \ldots, a_n$ pentru mărimile $y_1, \ldots, y_n$. Cu ajutorul acestor valori $a_1, \ldots, a_n$ trebuie estimate erorile medii ale măsurărilor. Deoarece cu ajutorul relației $\sigma_i = \frac{\sigma}{\sqrt{p_i}}$ se deduce eroarea medie σ_i a unei măsurări cu ponderea p_i, din eroarea medie σ a unei măsurări cu ponderea $p = 1$, este suficient să se estimeze σ. Această estimație se notează cu m.

Dacă mărimile $y_1, \ldots, y_n$, ce se măsoară, se pot reprezenta prin $k < n$ necunoscute $t_1, \ldots, t_k$, atunci o estimație m a lui σ se poate găsi cu ajutorul metodelor statisticii matematice. Mărimile $\hat{y}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ sînt estimațiile de verosimilitate maximă ale mărimilor $y_1, \ldots, y_n$ care se măsoară.

Eroarea medie estimată a unei observații cu ponderea $p = 1$	$m = \sqrt{\frac{1}{n-k}\left[\sum_{i=1}^{n} p_i(a_i - \hat{y}_i)^2\right]}$	p_i —ponderi ale măsurărilor a_i, $\hat{y}_i$ — valori compensate, $n - k$ numărul măsurărilor suplimentare

La compensarea datelor se obișnuiește a se considera chiar m ca *eroare medie a observației cu ponderea* $p = 1$ și 0,674 m ca eroare probabilă a acestei observații, deși m nu este decît o estimație a lui σ, supusă unor variații aleatoare. Aceste variații pot fi considerabile în special pentru un număr mic de observații n. Marginile pentru erorile adevărate de observație care rezultă din legea lui Gauss nu sînt deci decît aproximative, atunci cînd în locul lui σ se folosește estimația lui m. Tot în statistica matematică se arată cum se pot obține margini exacte cu ajutorul lui m. Precizia măsurării este caracterizată prin eroarea medie m estimată a unei observații cu pondere $p = 1$. Cunoscînd pe m, cu ajutorul formulelor alăturate, corespunzătoare formulei $\sigma_i = \frac{\sigma}{\sqrt{p_i}}$, se pot deduce erorile medii ale măsurărilor cu pondere p_i.

Folosind legea propagării erorilor a lui Gauss, se poate apoi deduce eroarea medie a oricărei mărimi alcătuite cu valorile de observație $a_1, \ldots, a_n$.

Eroarea medie a unei măsurări cu ponderea p_i	$m_i = \dfrac{m}{\sqrt{p_i}}$

Acest lucru se realizează în special pentru estimațiile de verosimilitate maximă ale mărimilor măsurate $y_1, \ldots, y_n$. La nevoie cu ajutorul acestor erori medii se pot deduce margini ale erorilor de observație, ce nu pot fi depășite cu o probabilitate dată.

Compensarea măsurărilor directe

O mărime y se măsoară direct de n ori cu aceeași precizie. Măsurările au valorile $a_1, \ldots, a_n$. Unica necunoscută în acest proces de măsurare este y $(k = 1)$. Se pot scrie ecuațiile $y_1 = y, y_2 = y, \ldots, y_n = y$. Precizia fiind aceeași, aceste măsurări au ponderi egale $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1$. Suma pătratelor erorilor și derivata ei în raport cu necunoscuta y sînt date de formulele

$$S = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(a_i - y)^2; \quad \frac{dS}{dy} = -\frac{2}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(a_i - y).$$

Egalînd cu zero derivata, se obține ecuația normală $\sum_{i=1}^{n}(a_i - y) = 0$, a cărei soluție va fi estimația $\hat{y}$.

Media aritmetică a măsurării este o estimație a mărimii măsurate.

Valoarea estimată prin măsurări directe de aceeași precizie	$\hat{y} = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \bar{a}$

Valoarea aproximativă a mărimii măsurate y este dată sub forma $y \approx y(\pm m_{\hat{y}})$ sau $y = \hat{y} + m_{\hat{y}}$; eroarea medie $m_{\hat{y}}$ a estimației se obține din eroarea medie m a măsurării prin formula $m_{\hat{y}} = m/\sqrt{n}$.

Eroarea medie a unei măsurări cînd măsurările au aceeași precizie	$m = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(a_i - \bar{a})^2}{n-1}}$	Eroarea medie a estimației	$m_{\hat{y}} = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(a_i - \bar{a})^2}{n(n-1)}}$

Exemplu. Cinci elevi trebuie să măsoare muchia unui cub. Din rezultatele măsurărilor (vezi tabelul alăturat) se obține valoarea estimată

$$\hat{y} = \frac{1}{5}(12{,}2 + 12{,}1 + 12{,}5 + 12{,}3 + 12{,}4)\ \text{cm} = 12{,}3\ \text{cm}.$$

Rezultatele măsurărilor
$a_1 = 12{,}2$ cm.
$a_2 = 12{,}1$ cm.
$a_3 = 12{,}5$ cm.
$a_4 = 12{,}3$ cm.
$a_5 = 12{,}4$cm.

Eroarea medie a măsurărilor este dată de

$$m = \sqrt{\frac{(12{,}2-12{,}3)^2+(12{,}1-12{,}3)^2+(12{,}5-12{,}3)^2+(12{,}3-12{,}3)^2+(12{,}4-12{,}3)^2}{4}} = 0{,}158\ \text{cm}.$$

Se obține astfel pentru $\hat{y}$ o eroare medie $m_{\hat{y}} = \dfrac{0{,}158}{\sqrt{5}} = 0{,}071$ cm și valoarea aproximativă lungimii medii $y \approx 12{,}3$ cm $(\pm\ 0{,}071$ cm) sau $(12{,}3 \pm 0{,}071)$cm.

Compensarea măsurărilor directe cu precizii inegale. O mărime y se măsoară de n ori. Fie $a_1, \ldots, a_n$ măsurările obținute. Ponderile acestor măsurări sînt $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Unica necunoscută în aceste măsurări este y ($k = 1$). Au loc relațiile $y_1 = y$, $y_2 = y, \ldots, y_n = y$. Se formează suma pătratelor erorilor, se scrie derivata acesteia în raport cu y și se obține ecuația normală:

$$S = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} p_i(a_i - y)^2 \rightarrow \frac{dS}{dy} = -\frac{2}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} p_i(a_i - y) = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{n} p_i(a_i - y) = 0,$$

de unde se obține estimația $\hat{y}$.

Media ponderată a măsurărilor este o estimație a mărimii măsurate.

Eroarea medie a măsurării cu pondere $p = 1$	$m = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} p_i(a_i - \hat{y})^2}{n-1}}$
Valoarea estimată pentru măsurări directe cu precizii inegale	$\hat{y} = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i\right) : \left(\sum_{i=1}^{n} \cdot p_i\right)$

Din eroarea medie m a unei măsurări cu pondere 1 se obțin erorile medii m_i ale măsurărilor a_i cu ponderea p_i, $m_i = \dfrac{m}{\sqrt{p_i}}$. Deoarece $\dfrac{\partial \hat{y}}{\partial a_i} = \dfrac{p_i}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}$, se obține pentru $\hat{y}$, prin legea propagării erorilor, eroarea

$$m_{\hat{y}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i^2 p_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)^2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{m^2 p_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)^2}}.$$

Eroarea medie a valorilor estimate prin măsurări cu precizii inegale	$m_{\hat{y}} = \dfrac{m}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i}}$.

Valorile aproximative ale mărimii măsurate se obțin sub forma $y \approx \hat{y}(\pm m_{\hat{y}})$ sau $\hat{y} = y \pm m_{\hat{y}}$.

Exemplu. O lungime l se măsoară întîi de cinci ori și apoi încă de trei ori cu o precizie mai mare. Datorită condițiilor mult mai precise în care se fac măsurările a_6, a_7, a_8 din a doua grupă (vezi tabel) se atribuie acestora o pondere de cinci ori mai mare. Deci $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 1$ și $p_6 = p_7 = p_8 = 5$. Se obține pentru l, estimația

$$l = \frac{1}{20}[1 \cdot (12{,}35 + 12{,}40 + 12{,}25 + 12{,}30 + 12{,}35) + 5 \cdot (12{,}37 + 12{,}32 + 12{,}34)\ \text{cm} = 12{,}34\ \text{cm}.$$

$a_1 =$	12,35 cm
$a_2 =$	12,40 cm
$a_3 =$	12,25 cm
$a_4 =$	12,30 cm
$a_5 =$	12,35 cm
$a_6 =$	12,37 cm
$a_7 =$	12,32 cm
$a_8 =$	12,34 cm

Eroarea medie m a măsurărilor este

$$m = \sqrt{\frac{1 \cdot (0{,}01^2 + 0{,}06^2 + 0{,}09^2 + 0{,}04^2 + 0{,}01^2) + 5 \cdot (0{,}03^2 + 0{,}02^2 + 0^2)}{7}}\ \text{cm} =$$

$$= \sqrt{\frac{0{,}0200}{7}}\ \text{cm} = 0{,}0535.$$

Deoarece $p_1 = p_2 = ... = p_5 = 1$, eroarea medie a măsurărilor din prima grupă va fi $m_1 = 0{,}535$ cm. Eroarea medie a măsurărilor din a doua grupă va fi $m_2 = \frac{m}{\sqrt{5}} = 0{,}0239$ cm.

Eroarea medie a valorii estimate va fi $m_{\hat{l}} = \frac{m}{\sqrt{20}}$ cm$=0{,}0120$ cm.

Cu ajutorul acestor măsurări se pot calcula valorile aproximative ale lungimii căutate $\approx 12{,}34$ cm ($\pm 0{,}012$ cm).

Dacă pentru măsurările $a_1, ..., a_n$, în loc de ponderile p_i, se cunosc chiar erorile medii σ_i, atunci p_i se determină abstracție făcînd de un factor constant din proporționalitatea:

$$p_1 : p_2 : ... : p_n = (1/\sigma_1^2) : (1/\sigma_2^2) : ... : (1/\sigma_n^2).$$

Notînd factorul constant prin λ^2, deci $p_i = \frac{\lambda^2}{\sigma_i^2}$, se obține eroarea medie a unei observații cu ponderea 1:

$$\sigma = \sigma_i \sqrt{p_i} = \lambda.$$

Calculînd pe m cu ponderile astfel stabilite trebuie să se obțină o valoare aproximativă egală cu λ. Deci m estimează pe σ. Dacă se obține o diferență mare între m și λ, se poate conchide că la unele măsurări se fac erori sistematice.

Compensarea observațiilor

Observații condiționate. Fie de determinat prin măsurare unghiurile α, β, γ ale unui triunghi. Fiecare unghi se măsoară de mai multe ori. Măsurările unghiului α au valorile $a_1, a_2, ..., a_{n_1}$ (n_1 măsurări). În urma măsurării unghiului β (n_2 măsurări) se obțin valorile $b_1, b_2 ..., b_{n_2}$ și în urma măsurării unghiului γ (n_3 măsurări) valorile $c_1, c_2, ..., c_{n_3}$. În total se fac $n = n_1 + n_2 + n_3$ măsurări. Toate măsurările se fac cu aceeași precizie. Dacă se notează valorile măsurărilor cu $y_1, y_2, ..., y_{n_1}$ (măsurările lui α) $y_{n_1+1}, y_{n_1+2}, ..., y_{n_1+n_2}$ (măsurările lui β) și $y_{n_1+n_2+1}, y_{n_1+n_2+2}, ..., y_{n_1+n_2+n_3}$ (măsurările lui γ), atunci aceste mărimi se reprezintă cu necunoscutele α, β, γ prin

$$\begin{aligned} y_1 &= y_2 &&= ... = y_{n_1} &&= \alpha, \\ y_{n_1+1} &= y_{n_1+2} &&= ... = y_{n_1+n_2} &&= \beta, \\ y_{n_1+n_2+1} &= y_{n_1+n_2+2} &&= ... = y_{n_1+n_2+n_3} &&= \gamma. \end{aligned}$$

Suma pătratelor erorilor este

$$S = \frac{1}{\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n_1}(a_i - \alpha)^2 + \sum_{j=1}^{n_2}(b_j - \beta)^2 + \sum_{k=1}^{n_3}(c_k - \gamma)^2\right].$$

Totuși metoda celor mai mici pătrate nu se poate aplica direct, deoarece necunoscutele α, β, γ sînt legate printr-o condiție. Suma unghiurilor într-un triunghi este 180°. Astfel, α, β, γ trebuie să satisfacă *ecuația de condiție* $\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha + \beta + \gamma - 180° = 0$. Compensarea observațiilor trebuie să se facă ținîndu-se seama de această condiție. Se spune în acest caz că este vorba de *compensarea observațiilor condiționate*. De fapt aici nu intervin trei ci numai două necunoscute. Dacă s-au determinat α și β valoarea lui γ rezultă din ecuația de condiție. Pentru rezolvarea problemei în aceste cazuri există două posibilități. Cu ajutorul ecuației de condiție $\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ se exprimă un unghi, de exemplu γ, cu ajutorul celorlalte două, se înlocuiește în S, γ cu această expresie și se aplică *metoda celor mai mici pătrate*, sau se poate calcula direct

minimul lui S cu condiția $\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$. În al doilea caz se folosește *metoda multiplicatorilor lui Lagrange* (vezi § 19.4), adică se determină α, β, γ și λ astfel încît expresia

$$T = S + \lambda\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n_1}(a_i - \alpha)^2 + \sum_{j=1}^{n_2}(b_j - \beta)^2 + \sum_{k=1}^{n_3}(c_k - \gamma)^2 + \lambda(\alpha + \beta + \gamma - 180°)\right]$$

să fie minimă. Mărimea λ este multiplicatorul lui Lagrange corespunzător condiției de legătură. Se obțin astfel ecuațiile normale:

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = -\frac{2}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n_1}(a_i - \alpha) + \lambda = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \gamma} = -\frac{2}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n_3}(c_k - \gamma) + \lambda = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \beta} = -\frac{2}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n_2}(b_j - \beta) + \lambda = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \lambda} = \alpha + \beta + \gamma - 180° = 0.$$

Ca soluție a acestui sistem se obține

$$\hat{\alpha} = \bar{a} - \frac{1}{n_1}K; \quad \hat{\beta} = \bar{b} - \frac{1}{n_2}K; \quad \hat{\gamma} = \bar{c} - \frac{1}{n_3}K; \quad \hat{\lambda} = \frac{2}{\sigma^2}K$$

cu factorul de corecție: $K = \dfrac{\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} - 180°}{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2} + \dfrac{1}{n_3}}$. Eroarea medie a fiecărei măsurări se obține din

$$m^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(a_i - \hat{\alpha})^2 + \sum_{j=1}^{n_2}(b_j - \hat{\beta})^2 + \sum_{k=1}^{n_3}(c_k - \hat{\gamma})^2}{n - 2}.$$

Erorile medii ale valorilor estimate $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$ se obțin din legea propagării erorilor

$$m_{\hat{\alpha}} = \frac{m}{n_1}\sqrt{n_1 - \frac{1}{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2} + \dfrac{1}{n_3}}}; \quad m_{\hat{\beta}} = \frac{m}{n_2}\sqrt{n_2 - \frac{1}{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2} + \dfrac{1}{n_3}}};$$

$$m_{\hat{\gamma}} = \frac{m}{n_3}\sqrt{n_3 - \frac{1}{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2} + \dfrac{1}{n_3}}}.$$

Exemplu. Se măsoară unghiurile α, β, γ de patru ori, de trei ori, respectiv de patru ori, $n_1 = 4$, $n_2 = 3$, $n_3 = 4$ (vezi tabel) și se calculează valorile medii $\bar{a}, \bar{b}$ și $\bar{c}$. Deoarece $1\Big/\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2} + \dfrac{1}{n_3}\right) = 1{,}2$ și $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} - 180° = 3''$, se obține factorul de corecție $K = 3'' \cdot 1{,}2 = 3{,}6''$ și de aici estimațiile $\hat{\alpha} = \bar{a} - \dfrac{1}{4}K$, $\hat{\beta} = \bar{b} - \dfrac{1}{3}K$ și $\hat{\gamma} = \bar{c} - \dfrac{1}{4}K$.

Unghiul α	$a_i - \hat{\alpha}$	Unghiul β	$b_j - \hat{\beta}$	Unghiul γ	$c_k - \hat{\gamma}$
$a_1 = 62°17'14''$	$+0{,}9''$	$b_1 = 73°20'25''$	$+1{,}2''$	$c_1 = 44°22'25''$	$+1{,}9''$
$a_2 = 62°17'11''$	$-2{,}1''$	$b_2 = 73°20'27''$	$+3{,}2''$	$c_2 = 44°22'26''$	$+2{,}9''$
$a_3 = 62°17'16''$	$+2{,}9''$	$b_3 = 73°20'23''$	$-0{,}8''$	$c_3 = 44°22'22''$	$-1{,}1''$
$a_4 = 62°17'15''$	$+1{,}9''$			$c_4 = 44°22'23''$	$-0{,}1''$
$\bar{a} = 62°17'14''$		$\bar{b} = 73°20'25''$		$\bar{c} = 44°22'24''$	
$\hat{\alpha} = 62°17'13{,}1''$		$\hat{\beta} = 73°20'23{,}8''$		$\hat{\gamma} = 44°22'23{,}1''$	

Eroarea medie a unei măsurări va fi:

$$m = \sqrt{\frac{(0,9^2 + 2,1^2 + 2,9^2 + 1,9^2) + (1,2^2 + 3,2^2 + 0,8^2) + (1,9^2 + 2,9^2 + 1,1^2 + 0,1^2)}{9}} = 2,181''.$$

De aici se obțin erorile medii ale estimațiilor

$$m_{\hat{\alpha}} = m \cdot 0,418 = 0,912''; \quad m_{\hat{\beta}} = m \cdot 0,447 = 0,975''; \quad m_{\hat{\gamma}} = m \cdot 0,418 = 0,912''.$$

Valorile aproximative ale celor trei unghiuri determinate din măsurări vor fi:

$$\alpha \approx 62°17'13,1'' (\pm 0,91''); \quad \beta \approx 73°20'23,8'' (\pm 0,97''); \quad \gamma \approx 44°22'23,1'' (\pm 0,91'').$$

Procedeul descris pentru măsurarea unghiurilor unui triunghi se poate aplica în cazul general al compensării observațiilor condiționate. Dacă mărimile măsurate $y_1, y_2, ..., y_n$ se reprezintă prin k necunoscute $t_1, ..., t_k$ și între aceste necunoscute există r relații independente,

$$\varphi_1(t_1, ..., t_k) = 0; \quad \varphi_2(t_1, ..., t_k) = 0; \quad ...; \quad \varphi_r(t_1, ... t_k) = 0,$$

atunci necunoscutele $t_1, ..., t_k$ și multiplicatorii lui Lagrange se determină minimizînd expresia

$$T = S + \lambda_1\varphi_1 (t_1, ..., t_k) + ... + \lambda_r\varphi_r(t_1, ..., t_k).$$

Celelalte procedee de calcul corespund în întregime metodei celor mai mici pătrate. Datorită celor r ecuații de condiție rămîn de determinat în realitate nu k necunoscute ci numai $k - r$. Acest număr efectiv de necunoscute se ia în considerație la determinarea erorii medii m a fiecărei măsurări cu ponderea $p = 1$.

Compensarea observațiilor indirecte. De multe ori nu este posibilă o măsurare directă a mărimilor ce trebuie determinate. De exemplu pentru determinarea densității unui corp se măsoară volumul V și greutatea G a acestuia; G și V sînt *observații indirecte* pentru determinarea densității. Din punctul de vedere al compensării interesul nu constă atît în determinarea valorilor adevărate ale mărimilor $y_1, y_2, ..., y_n$, care se măsoară, ci în obținerea necunoscutelor $t_1, t_2, ..., t_k$ cu ajutorul cărora $y_1 ... y_n$ pot fi reprezentate. Prin metoda celor mai mici pătrate se obțin valori estimate $\hat{t}_1, \hat{t}_2, ..., \hat{t}_k$ ale acestor necunoscute. Cu ajutorul erorii medii m a măsurărilor individuale, se determină prin legea propagării erorilor, erorile medii ale estimațiilor $\hat{t}_1, \hat{t}_2, ..., \hat{t}_k$.

Exemplu. Un inel este făcut dintr-un aliaj aur-argint. Pentru determinarea cantității de aur și de argint, inelul se cîntărește de mai multe ori cu o balanță Jolly cu arc; în aer (se obține greutatea G) și în apă (se obține greutatea W) (vezi tabel). Dacă se notează cu g_1 cantitatea de aur și cu g_2 cantitatea de argint și cu γ_1, respectiv γ_2 densitatea aurului, respectiv a argintului, se obțin: $G = g_1 + g_2$; $W = \left(1 - \frac{1}{\gamma_1}\right) g_1 + \left(1 - \frac{1}{\gamma_2}\right) g_2$. Suma pătratelor erorilor este:

Cîntăriri	
în aer, G	în apă W
$a_1 = 4,01\ g$	$b_1 = 3,72g$
$a_2 = 3,98\ g$	$b_2 = 3,72g$
$a_3 = 4,03\ g$	$b_3 = 3,69g$
$a_4 = 4,02\ g$	

$$S = \frac{1}{\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{4} (a_i - g_1 - g_2)^2 + \sum_{j=1}^{3}\left(b_j - \frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1} g_1 - \frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2} g_2\right)^2\right],$$

de unde rezultă ecuațiile normale

$$\frac{\partial S}{\partial g_1} = -\frac{2}{\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{4} (a_i - g_1 - g_2) + \sum_{j=1}^{3}\left(b_j - \frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1} g_1 - \frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2} g_2\right)\frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1}\right] = 0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial g_2} = -\frac{2}{\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{4} (a_i - g_1 - g_2) + \sum_{j=1}^{3}\left(b_j - \frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1} g_1 - \frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2} g_2\right)\frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_2}\right] = 0.$$

Din acestea se determină estimațiile

$$\hat{g}_1 = -\bar{a}\gamma_1 \cdot \frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_1 - \gamma_2} + \bar{b}\,\frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2}; \quad \bar{a} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} a_i; \quad \hat{G} = \hat{g}_1 + \hat{g}_2 = \bar{a};$$

$$\hat{g}_2 = +\bar{a}\gamma_2 \frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 - \gamma_2} - \bar{b}\,\frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2}; \quad \bar{b} = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} b_j; \quad \widehat{W} = \left(1 - \frac{1}{\gamma_1}\right)\hat{g}_1 + \left(1 - \frac{1}{\gamma_2}\right)\hat{g}_2 = \bar{b}.$$

Eroarea medie a măsurării individuale va fi

$$m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{4}(a_i - \bar{a})^2 + \sum_{j=1}^{3}(b_j - \bar{b})^2}{7 - 2}}.$$

Deoarece $\dfrac{\partial \hat{g}_1}{\partial a_i} = -\dfrac{1}{4}\cdot \gamma_1 \dfrac{\gamma_2 - 1}{\gamma_1 - \gamma_2}$ și $\dfrac{\partial \hat{g}_1}{\partial b_j} = \dfrac{1}{3}\,\dfrac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2}$, se obține din legea propagării erorilor

$$m_{\hat{g}1} = m\sqrt{\frac{1}{4}\gamma_1^2\left(\frac{\gamma_2 - 1}{\gamma_1 - \gamma_2}\right)^2 + \frac{1}{3}\cdot\frac{\gamma_1^2\gamma_2^2}{(\gamma_1 - \gamma_2)^2}}; \quad m_{\hat{g}2} = m\sqrt{\frac{1}{4}\gamma_2^2\left(\frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 - \gamma_2}\right)^2 + \frac{1}{3}\cdot\frac{\gamma_1^2\gamma_2^2}{(\gamma_1 - \gamma_2)^2}}.$$

Din calcule rezultă cu $\gamma_1 = 19{,}3\ \text{g/cm}^3$ și $\gamma_2 = 10{,}5\ \text{g/cm}^3$:

$$\bar{a} = 4{,}01\ \text{g},\ \bar{b} = 3{,}71\ \text{g};\quad \hat{g}_1 = 1{,}89\ \text{g};\quad \hat{g}_2 = 2{,}12\ \text{g};$$

$$m = 0{,}02\ \text{g};\quad m_{\hat{g}1} = 16{,}89\ m = 0{,}34\ \text{g};\quad m_{\hat{g}2} = 17{,}20\ m = 0{,}34\ \text{g}.$$

Din măsurări se obține astfel:

$$g_1 \approx 1{,}89\ \text{g}\ (\pm\,0{,}34\ \text{g})\ \text{și}\ g_2 \approx 2{,}12\ \text{g}\ (\pm\,0{,}34\ \text{g}).$$

Compensarea relațiilor

Deseori relația dintre o mărime y și mărimea care o influențează x, are *forma liniară* $y = \alpha + \beta x$. Pentru diferite valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ale mărimii x se observă valorile mărimii y. Valorile adevărate ale mărimilor determinate prin măsurări individuale vor fi deci

$$y_i = \alpha + \beta x_i \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

Fie $a_1, \ldots, a_n$ valorile măsurate. Lor li se atașează ponderile $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Cum valorile $x_1, \ldots, x_n$ sînt dinainte date, α și β vor fi în acest proces unicele necunoscute. Estimarea valorilor α și β se face prin compensare. Ca și în cazul observațiilor indirecte nu interesează atît găsirea valorilor adevărate y_i, ci determinarea necunoscutelor α și β. Cum necunoscutele apar ca niște constante într-o ecuație liniară, problema care se pune este o problemă de *estimare de constante.* β poartă denumirea de *coeficient de regresie.*

Pentru a aplica metoda celor mai mici pătrate se pornește din nou de la suma pătratelor erorilor

$$S = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} p_i(a_i - y_j)^2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} p_i(a_i - \alpha - \beta x_i)^2.$$

Prin egalarea cu zero a derivatelor parțiale ale lui S se obțin ecuațiile normale avînd ca necunoscute pe α și β.

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = -\frac{2}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} p_i(a_i - \alpha - \beta x_i) = 0; \qquad \frac{\partial S}{\partial \beta} = -\frac{2}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} p_i(a_i - \alpha - \beta x_i)\,x_i = 0.$$

Folosind notațiile lui Gauss, ecuațiile normale iau forma

$$\alpha[p] + \beta[px] = [pa]; \quad \alpha[px] + \beta[px^2] = [pax].$$

Notațiile lui Gauss	$\sum_{i=1}^{n} z_i = [z]$

Estimațiile parametrilor α și β în ecuațiile de regresie	$\hat{\alpha} = \frac{[pa]}{[p]} - \hat{\beta}\frac{[px]}{[p]}; \quad \hat{\beta} = \frac{[pax][p] - [pa][px]}{[px^2][p] - [px]^2}$

Din aceste ecuații se determină valorile estimate $\hat{\alpha}$ și $\hat{\beta}$ pentru necunoscutele α și β. Cu ajutorul acestor valori se calculează estimațiile $\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \beta x_i$ $(i = 1, ..., n)$ ale valorilor adevărate ale mărimilor $y_1, y_2, ..., y_n$. Ca eroare medie a măsurărilor individuale cu pondere $p = 1$ se obține

$$m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(p_i a_i - \hat{y}_i)^2}{n-2}}.$$

Atunci eroarea medie a unei măsurări cu pondere p_i va fi $m_i = \frac{m}{\sqrt{p_i}}$. Cu ajutorul legii propagării erorilor se calculează:

$$m_{\hat{\alpha}} = m\frac{1}{[p]}\sqrt{[p] + \frac{[p][px]^2}{[p][px^2] - [px]^2}} = m\sqrt{\frac{[px^2]}{[p][px^2] - [px]^2}},$$

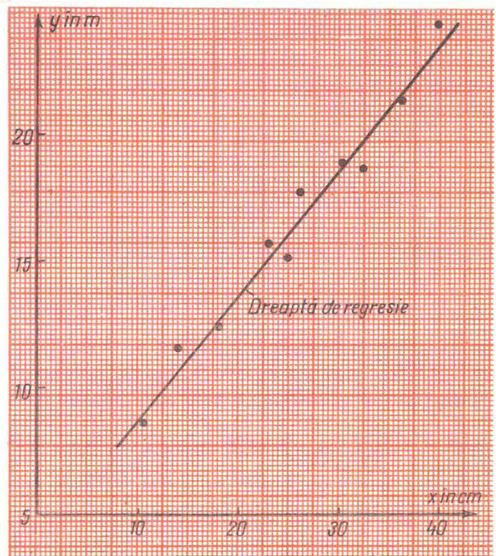
$$m_{\hat{\beta}} = m\sqrt{\frac{[p]}{[p][px]^2 - [px]^2}}.$$

Exemplu. Se măsoară diametrul mediu x și înălțimea y pentru zece trunchiuri de pin. Valorile măsurate (vezi tabel) au aceeași precizie $(p_i = 1, i = 1, 2, ..., 10)$. O imagine a relației dintre diametrul x și înălțimea y este dată în fig. 28.2.1. Această legătură este descrisă printr-o ecuație liniară $y = \alpha + \beta x$. Cu ajutorul valorilor măsurate se calculează

$[p] = 10$; $[px] = 257{,}0$; $[pa] = 164{,}0$;

$[px^2] = 7430{,}24$; $[pxa] = 4618{,}26$

Măsurări		
i	x_i [cm]	y_i[m]
1	10,6	8,6
2	14,0	11,5
3	18,1	12,4
4	23,2	15,6
5	25,0	15,1
6	26,4	17,7
7	30,5	18,9
8	32,5	18,6
9	36,6	21,3
10	40,1	24,3



28.2.1. Înălțimea medie reprezentată în raport cu diametrul pentru zece plantații de pini. Dreapta de regresie $\hat{y} = 2{,}837 + 04888x$

De aici rezultă:

$$\hat{\beta} = \frac{4618{,}26 \cdot 10 - 164{,}0 \cdot 257{,}0}{7430{,}24 \cdot 10 - 257{,}0^2} = 0{,}4888;$$

$$\hat{\alpha} = \frac{164{,}0}{10} - \hat{\beta} \cdot \frac{257{,}0}{10} = 3{,}837.$$

Dreapta de regresie este trasată pe figură: $\hat{y} = 3{,}837 + 0{,}4888x$. Se mai calculează $\sum_{i=1}^{10} p_i(a_i - \hat{y}_i)^2 = 5{,}1522$ și eroarea medie a unei măsurări $m = 0{,}8025$. De aici se obțin erorile medii pentru $\hat{\alpha}$ și $\hat{\beta}$ care sînt $m_{\hat{\alpha}} = 0{,}7614$, $m_{\hat{\beta}} = 0{,}0279$.

Compensarea legăturilor neliniare. Mărimea y poate să depindă liniar de mărimile z_0, z_1, z_2, ... z_k. Atunci y se poate reprezenta sub forma

$$y = \beta_0 z_0 + \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \ldots + \beta_k z_k.$$

Pentru determinarea *coeficienților de regresie* $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ se măsoară y pentru diferite valori ale variabilelor $z_{0i}, z_{1i}, z_{2i}, \ldots, z_{ki}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Valorile lui y pentru aceste măsurări vor fi

$$y_i = \beta_0 z_{0i} + \beta_1 z_{1i} + \beta_2 z_{2i} + \ldots + \beta_k z_{ki} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ valorile măsurate cărora le corespund ponderile $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Dacă numărul măsurărilor n este mai mare decît numărul necunoscutelor $k + 1$, atunci rămîn măsurări de prisos. Determinarea necunoscutelor $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ se poate face prin metoda celor mai mici pătrate. Pornind de la suma pătratelor erorilor

$$S = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} p_i(a_i - \beta_0 z_{0i} - \beta_1 z_{1i} - \ldots - \beta_k z_{ki})^2,$$

se obțin ecuațiile normale

$$\beta_0[pz_0^2] + \beta_1[pz_0z_1] + \beta_2[pz_0z_2] + \ldots + \beta_k[pz_0z_k] = [paz_0],$$
$$\beta_0[pz_1z_0] + \beta_1[pz_1^2] + \beta_2[pz_1z_2] + \ldots + \beta_k[pz_1z_k] = [paz_1],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\beta_0[pz_kz_0] + \beta_1[pz_kz_1] + \beta_2[pz_kz_2] + \ldots + \beta_k[pz_k^2] = [paz_k].$$

Rezolvînd aceste ecuații în raport cu necunoscutele, se obțin estimațiile $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_k$. Cu ajutorul lor se pot calcula valorile estimate $\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 z_{0i} + \ldots + \hat{\beta}_k z_{ki}$ $(i = 1, \ldots, n)$ ale valorilor adevărate pentru mărimile $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Ca eroare medie a măsurărilor individuale de pondere $p = 1$ se obține:

$$m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i(a_i - \hat{y}_i)^2}{n - k - l}}.$$

Cu ajutorul lui m se pot calcula ca de obicei erorile medii ale măsurărilor cu ponderile p_i și cu ajutorul legii propagării erorilor, erorile medii ale estimațiilor $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_k$.

Dacă mărimea y se poate reprezenta printr-un polinom în x

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \ldots + \beta_k x^k,$$

atunci între y și x există o legătură neliniară. Acest caz este un caz special al legăturii liniare cu mai multe variabile tratată mai sus. Se consideră:

$$z_0 = 1, \quad z_1 = x, \quad z_2 = x^2, \ldots, z_k = x^k$$

$$z_{0i} = 1, \quad z_{1i} = x_i, \quad z_{2i} = x_i^2, \ldots, z_{ki} = x_i^k \quad (i = 1, \ldots, n)$$

și se obțin $\hat{\beta}_0, \ldots, \hat{\beta}_k$ prin formulele date mai sus. La fel și pentru erorile medii.

Exemplu. Se observă masa lemnoasă V pentru trunchiuri de pin cu diametrul d măsurat la distanța de 1,30 m de pămînt (vezi tabel). Determinarea maselor V_i se face cu aceeași precizie. Se cere compensarea legăturii dintre V și d printr-o ecuație de gradul trei. Pentru ușurarea calculelor se introduce o nouă variabilă $x = \dfrac{d-30}{5}$. Mărimea V se reprezintă prin ecuația se gradul trei $V = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3$ ai cărei coeficienți β_0, β_1, β_2, β_3 se determină din datele observate cu ajutorul metodei celor mai mici pătrate. Suma pătratelor erorilor este

$$S = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{9}(V_i - \beta_0 - \beta_1 x_i - \beta_2 x_i^2 - \beta_3 x_i^3)^2.$$

Ecuațiile normale au forma:

$$9\cdot \beta_0 + [x]\beta_1 + [x^2]\beta_2 + [x^3]\beta_3 = [V],$$

$$[x]\beta_0 + [x^2]\beta_1 + [x^3]\beta_2 + [x^4]\beta_3 = [xV],$$

$$[x^2]\beta_0 + [x^3]\beta_1 + [x^4]\beta_2 + [x^5]\beta_3 = [x^2V],$$

$$[x^3]\beta_0 + [x^4]\beta_1 + [x^5]\beta_2 + [x^6]\beta_3 = [x^3V].$$

i	Observații		Calcule	
	d_i(cm)	V_i(m^3)	x_i	$\hat{V}_i$m^3
1	10	0,030	-4	0,031
2	15	0,094	-3	0,093
3	20	0,213	-2	0,210
4	25	0,388	-1	0,390
5	30	0,643	0	0,645
6	35	0,987	$+1$	0,986
7	40	1,426	$+2$	1,424
8	45	1,969	$+3$	1,969
9	50	2,632	$+4$	2,632

Cu ajutorul datelor de observație se calculează

$[x] = 0$, $[x^2] = 60$, $[x^3] = 0$, $[x^4] = 708$,

$[x^5] = 0$, $[x^6[= 9780$,

$[V] = 8{,}382$, $[xV] = 19{,}058$,

$[x^2V] = 69{,}090$, $[x^3V] = 227{,}456$.

Soluțiile ecuațiilor normale sînt

$$\hat{\beta}_0 = 0{,}64540,\quad \hat{\beta}_1 = 0{,}296348,\quad \hat{\beta}_2 = 0{,}042890,\quad \hat{\beta}_3 = 0{,}0018039.$$

Parabola de regresie este

$$\hat{V} = 0{,}64540 + 0{,}296348\cdot\frac{d-30}{5} + 0{,}042890\left(\frac{d-30}{5}\right)^2 + 0{,}0018039\left(\frac{d-30}{5}\right)^3.$$

Valorile $\hat{V}_i$ determinate cu ajutorul acestei parabole sînt date în tabel.

Reprezentarea unei funcții prin funcții simple

Metoda celor mai mici pătrate își găsește aplicații în matematică nu numai la compensarea datelor de observație. Dacă, de exemplu, se cere aproximarea unei funcții complicate $y = f(x)$ prin funcții mai simple $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_k(x)$ atunci coeficienții β_0, β_1, ..., β_k din expresia liniară $y = f(x) = \beta_0\varphi_0(x) + \beta_1\varphi_1(x) + \ldots + \beta_k\varphi_k(x)$ pot fi determinați, prin metoda celor mai mici pătrate.

Dacă funcția $y = f(x)$ este cunoscută numai în punctele x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$; $n > k$), $y_i = f(x_i)$, atunci se pornește de la suma

$$S = \sum_{i=1}^{n}[y_i - \beta_0\varphi_0(x_i) - \beta_1\varphi_1(x_i) - \ldots - \beta_k\varphi_k(x_i)]^2.$$

Dacă însă se cunosc toate valorile funcției $y = f(x)$ într-un interval $a \leqslant x \leqslant b$, atunci se consideră integrala

$$S = \int_a^b [f(x) - \beta_0\varphi_0(x) - \beta_1\varphi_1(x) - \ldots - \beta_k\varphi_k(x)]^2 \mathrm{d}x.$$

În ambele cazuri coeficienții $\beta_0, \ldots, \beta_k$ se determină astfel încît S să fie minimă. Notînd cu $[\varphi_j\varphi_k]$ suma $\sum_{i=1}^{n} \varphi_j(x_i)\, \varphi_k(x_i)$, respectiv integrala $\int_a^b \varphi_j(x)\, \varphi_k(x)\, dx$ și cu $[y\varphi_k]$ suma $\sum_{i=1}^{n} y(x_i)\, \varphi_k(x_i)$, respectiv integrala $\int_a^b y(x)\, \varphi_k(x)\, dx$, ecuațiile normale se scriu

$$\beta_0[\varphi_0^2] + \beta_1[\varphi_0\varphi_1] + \beta_2[\varphi_0\varphi_2] + \ldots + \beta_k[\varphi_0\varphi_k] = [y\varphi_0],$$

$$\beta_0[\varphi_1\varphi_0] + \beta_1[\varphi_1^2] + \beta_2[\varphi_1\varphi_2] + \ldots + \beta_k[\varphi_1\varphi_k] = [y\varphi_1],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta_0[\varphi_k\varphi_0] + \beta_1[\varphi_k\varphi_1] + \beta_2[\varphi_k\varphi_2] + \ldots + \beta_k[\varphi_k^2] = [y\varphi_k].$$

Din acest sistem liniar se calculează $\beta_0, \ldots, \beta_k$. Rezolvatea ecuațiilor normale este foarte simplă dacă $[\varphi_i\varphi_k] = 0$ pentru $i \neq k$ și $[\varphi_i\varphi_k] = 1$ pentru $i = k$. Soluția este atunci $\beta_i = [y\varphi_i]$. Acest caz apare cînd funcțiile $\varphi_k(x)$ formează un *sistem ortogonal normat*. Cele mai cunoscute sisteme ortogonale sînt funcțiile trigonometrice sin $n\varphi$, cos $n\varphi$ ($n=0, 1, 2, 3, \ldots$) și polinoamele Legendre.

28.3. Teoria aproximării

Orice calcul cu valori aproximative face obiectul teoriei aproximării. Într-un sens mai strict însă se consideră ca aparținînd teoriei aproximării orice metodă matematică care face posibilă înlocuirea unor operații complicate prin altele mai simple, obținîndu-se ca rezultat nu soluția exactă ci o soluție aproximativă. Aceste procedee au în general ca scop economia de calcule. Există probleme pentru care se pot găsi soluții numerice numai *cu metode de aproximare*, de exemplu valoarea numerică a unor integrale definite se poate obține numai prin metode aproximative de integrare. Au fost elaborate metode de aproximare pentru diverse probleme matematice. Orice metodă de aproximare trebuie să fie însoțită de o evaluare a erorii.

Metode de aproximare pentru calculul valorilor unor funcții

Toate metodele calculului numeric se reduc în ultimă instanță la cele patru operații fundamentale, adunare, scădere, înmulțire și împărțire. Atunci cînd se cer valori ale unei funcții mai complicate $f(x)$, trebuie să se facă astfel de transformări încît acestea să se poată găsi cu ajutorul celor patru operații. Acest lucru se realizează de regulă cu ajutorul dezvoltării în serie de puteri. Astfel de reprezentări și formule aproximative se deduc din teorema lui Taylor în cap. 21.

Reprezentări asimptotice pentru valori mari ale argumentului. Fie de calculat valorile funcției $F(x)$ pentru valori foarte mari ale argumentului. Se poate găsi o formulă aproximativă făcînd substituția $z = \frac{1}{x}$ și dezvoltînd în serie Taylor funcția $f(x) = F\left(\frac{1}{z}\right)$. Deoarece z devine foarte mic, se poate lua în considerație numai un număr mic de termeni ai dezvoltării. O altă posibilitate este cea de a găsi pentru $F(x)$ o *aproximare asimptotică* sau o *reprezentare asimptotică*. O funcție $\varphi(x)$ este o astfel de reprezentare a lui $F(x)$ dacă $\lim\limits_{x\to\infty} [F(x) - \varphi(x)] = 0$. Se scrie în acest caz $F(x) \sim \varphi(x)$. Scriind pe $F(x)$ sub forma $F(x) = \varphi(x) + R(x)$, restul $R(x)$ trebuie să satisfacă condiția $\lim\limits_{x\to\infty} R(x) = 0$. Deseori se consideră $\varphi(x)$ o reprezentare asimptotică a lui $F(x)$, $F(x) \sim \varphi(x)$, dacă $F(x) = \varphi(x)\,[1 + r(x)]$ cu $\lim\limits_{x\to\infty} r(x) = 0$, adică atunci cînd cîtul $F(x)/\varphi(x)$ tinde la 1 pentru valori mari ale lui x.

Reprezentarea asimptotică a integralei erorilor. Prin integrare prin părți repetată se obține pentru integrala erorilor reprezentarea

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt =$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{-x^2/2}}{x} - \int_x^{\infty}\frac{e^{-t^2/2}}{t^2}\,dt\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{-x^2/2}}{x} - \frac{e^{-x^2/2}}{x^3} + 3\int_x^{\infty}\frac{e^{-t^2/2}}{t^4}\,dt\right).$$

Primii trei termeni dau o reprezentare asimptotică destul de bună

$$\Phi(x) \approx 1 - \frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}} + \frac{e^{-x^2/2}}{x^3\sqrt{2\pi}},$$

Restul $R_3(x) = -\frac{3}{\sqrt{2\pi}}\int \frac{e^{-t^2/2}}{t^4}\,dt$ se evaluează prin

$$|R_3(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{3}{x^5}\int_x^{\infty} t\,e^{-t^2/2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{3}{x^5}e^{-x^2/2}.$$

Restul tinde la zero pentru $x \to \infty$; chiar pentru $x = 2$ eroarea formulei asimptotice este mai mică decît $5 \cdot 10^{-3}$.

Formula lui Euler pentru sume. Dacă funcția $F(x)$ pentru care se caută o reprezentare asimptotică se reprezintă ca o sumă $F(x) = f(1) + f(2) + \ldots + f(x-1) + f(x)$, unde $f(x)$ este o funcție cunoscută și x un număr natural, atunci o reprezentare asimptotică se obține din formula lui Euler.

Formula lui Euler pentru sume	$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt + \frac{1}{2}[f(x) + f(1)] + \sum_{k=1}^{n}\frac{B_{2k}}{(2k)!}[f^{(2k-1)}(x) - f^{(2k-1)}(1)] + R_n(x)$

În această formulă B_{2k} sînt *numerele Bernoulli*, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$, $B_8 = -\frac{1}{30}$, $B_{10} = \frac{5}{66}$, $B_{12} = -\frac{691}{2730}$ (vezi cap. 21). Restul $R_n(x)$ se evaluează prin $|R_n(x)| \leqslant$ $\leqslant \frac{4}{(2\pi)^{2n}}\int_1^x |f^{(2n)}(t)|\,dt$. Dacă restul $R_n(x)$ tinde la zero cînd $x \to \infty$, atunci prin neglijarea restului s-a obținut o reprezentare asimptotică pentru $F(x)$. Dacă însă $R_n(x)$ tinde pentru $x \to \infty$ către o limită C_n, atunci o reprezentare asimptotică se obține înlocuind în formula lui Euler restul prin C_n.

Reprezentarea asimptotică a funcției factorial x! Luînd logaritmul lui $x!$, se obține $F(x) =$ $= \ln x! = \ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln x$. Se înlocuiește $f(z) = \ln z$. Considerînd în formula lui Euler numai termenii pînă la prima derivată ($n = 1$), se obține

$$F(x) = \int_1^x \ln t\,dt + \frac{1}{2}(\ln x + \ln 1) + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - 1\right) + R_1(x) =$$

$$= x\ln x - x + \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{12x} + 1 - \frac{1}{12} + R_1(x).$$

Restul $R_1(x)$ se evaluează prin $|R_1(x)| \leqslant \frac{1}{\pi^2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$. Mai precis, $\lim_{x\to\infty} R_1(x) = C_1 = \frac{1}{12} - 1 + \ln\sqrt{2\pi}$. Înlocuind pe $R_1(x)$ cu această limită în formula lui Euler, se obţine reprezentarea asimptotică $F(x) \approx \left(x + \frac{1}{2}\right)\ln x - x + \frac{1}{12x} + \ln\sqrt{2\pi}$. De aici rezultă:

$$x! = e^{F(x)} \approx \sqrt{2\pi x}\; x^x\; e^{-x+1/12x}$$

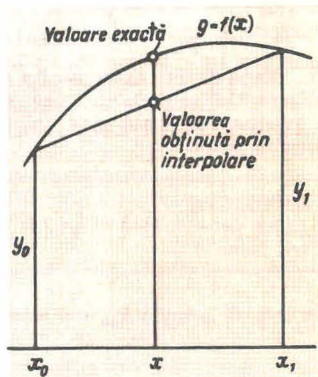
Pentru valori mari ale lui x se poate neglija la exponent termenul $\frac{1}{12x}$ şi se obţine formula lui Stirling.

Formula lui Stirling	$x! = \sqrt{2\pi x}\; x^x\; e^{-x}$

Aproximarea funcţiilor prin polinoame

Dacă pentru o funcţie $y = f(x)$ se cunosc valorile corespunzătoare argumentelor $x = x_0$, $x = x_1$, ..., $x = x_n$, aceste puncte se vor numi *puncte de sprijin* (*noduri*) iar valorile $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, ..., $y_n = f(x_n)$ *valori de sprijin* (*nodale*). Problema constă în a găsi valorile funcţiei $y = f(x)$ pentru o valoare oarecare a lui x. Dacă calculul exact pentru $y = f(x)$ este lung şi dificil, se obişnuieşte a se găsi valorile funcţiei y cunoscînd valorile y_0, y_1, ..., y_n aproximativ prin *interpolare*.

Interpolare liniară. Cea mai simplă metodă de interpolare se aplică la găsirea valorilor unghiului sau a logaritmului pentru valori intermediare valorilor trecute în tabele. Valorile date în tabele sînt valori de sprijin şi valoarea căutată se determină în general prin *interpolare liniară*. Pentru aceasta sînt necesare două puncte de sprijin x_0 şi x_1 cu valorile de sprijin $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$. Se caută valoarea $y = f(x)$ pentru $x_0 < x < x_1$. Prin interpolare liniară valoarea $y = y_0 + (x - x_0)\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ se găseşte din ecuaţia $\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$. Funcţia $y = f(x)$ se aproximează deci în intervalul (x_0, x_1) printr-o dreaptă ce trece prin punctele (x_0, y_0) şi (x_1, y_1) (fig. 28.3.1).



28.3.1. Interpolare liniară între două puncte de sprijin

Interpolare în sens larg. În general toate metodele de interpolare se reduc la înlocuirea funcţiei $y = f(x)$ în vecinătatea punctelor de sprijin x_0, x_1, ..., x_n, prin funcţii mai simple care aproximează cel mai bine funcţia în această vecinătate. O metodă prin care se obţin astfel de funcţii este *metoda celor mai mici pătrate*. Pe această metodă se bazează *netezirea datelor* şi *analiza Fourier*. Această metodă se poate aplica atunci cînd numărul parametrilor din expresia funcţiei aproximate este mai mic decît numărul punctelor de sprijin. Funcţiile de aproximare găsite astfel nu trec în general exact prin punctele de sprijin cunoscute (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n).

Interpolare în sens restrîns. În cele ce urmează se vor considera procedee de interpolare pentru care funcţia de aproximare pentru $y = f(x)$ ia în punctele x_0, x_1, ..., x_n exact valorile y_0, y_1, ..., y_n. Deoarece polinoamele sînt cele mai simple funcţii ce le avem la dispoziţie, funcţia $y = f(x)$ se va aproxima în vecinătatea punctelor x_0, x_1, ..., x_n printr-un polinom. Se ştie din algebră că prin $n+1$ puncte (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), trece exact un polinom $P_n(x)$ de grad n. Acest polinom se va alege ca funcţie de aproximare pentru $y = f(x)$. Pentru determinarea lui exactă există mai multe metode. Toate aceste metode conduc la acelaşi polinom $P_n(x)$.

Forma polinomului Acest polinom se caută sub forma $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ cu coeficienții nedeterminați $a_0, a_1, ..., a_n$ și se pune condiția ca graficul acestui polinom să treacă prin punctele $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$. Aceste puncte vor satisface egalitățile alăturate:

$$y_0 = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + ... + a_nx_0^n$$
$$y_1 = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + ... + a_nx_1^n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + ... + a_nx_n^n$$

Se obțin astfel $n + 1$ ecuații pentru determinarea necunoscutelor $a_0, a_1, ..., a_n$. Sistemul are o soluție unică atunci cînd punctele de sprijin $x_0, x_1, ..., x_n$ sînt toate diferite.

Exemplu. Funcția $y = \sqrt{x}$ se aproximează printr-un polinom de gradul doi care trece prin punctele $x_0 = 1$, $y_0 = 1$; $x_1 = 1{,}21$; $y_1 = 1{,}1$ și $x_2 = 1{,}44$; $y_2 = 1{,}2$. Fie $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Din ecuațiile alăturate se găsesc $a_0 = 0{,}4099$, $a_1 = 0{,}6842$, $a_2 = -0{,}0941$. Înlocuind în polinomul de interpolare $y = \sqrt{x} \approx 0{,}4099 + 0{,}6842\,x - 0{,}0941\,x^2$ pe $x = 1{,}3$, se obține $\sqrt{1{,}3} \approx 1{,}1403$. Valoarea exactă pentru $\sqrt{1{,}3}$ este $1{,}140175$.

$$1{,}0 = a_0 + a_1 + a_2$$
$$1{,}1 = a_0 + 1{,}21\,a_1 + 1{,}4641\,a_2$$
$$1{,}2 = a_0 + 1{,}44\,a_1 + 2{,}0736\,a_2$$

Acesta este un exemplu simplu de *interpolare inversă* într-un tabel de pătrate. Deși forma funcției este foarte simplă în cazul acestei metode, determinarea polinomului de interpolare necesită calcule foarte complicate, mai ales atunci cînd numărul punctelor de sprijin este mare.

Joseph-Louis LAGRANGE (1736–1813) și Isaac NEWTON (1643–1727) au ales astfel forma polinoamelor $P_n(x)$ încît calculele să fie mai simple.

Polinomul de interpolare al lui Lagrange. LAGRANGE pornește de la polinomul de aproximare de forma

$$P_n(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + ... + L_n(x)\,y_n,$$

unde coeficienții $L_i(x)$ sînt polinoame de gradul n în x. Polinomul de aproximare $P_n(x)$ trece în mod sigur prin nodurile $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)$ dacă polinoamele $L_i(x)$ sînt astfel determinare încît $L_i(x_j)$ să ia pentru $i = j$ valoarea 1 și pentru $i \neq j$ valoarea 0. Polinoamele lui Lagrange satisfac această condiție.

Polinoamele lui Lagrange

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)};\quad i = 0, 1, ..., n$$

Polinomul de interpolare al lui Lagrange

$$y = f(x) \approx P_n(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + ... + L_n(x)y_n.$$

Dacă se înlocuiește x cu una din valorile $x_0, x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$, atunci se anulează cîte un factor al numărătorului; pentru $x = x_i$ însă numărătorul este egal cu numitorul. Înlocuind aceste polinoame în $P_n(x)$, se obține polinomul de interpolare al lui Lagrange.

Exemplu. Se va determina parabola de aproximare pentru funcția $y = \sqrt{x}$ care trece prin punctele $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $x_1 = 1{,}21$, $y_1 = 1{,}1$, $x_2 = 1{,}44$; $y_2 = 1{,}2$, cu ajutorul metodei de interpolare a lui Lagrange. Se obține polinomul de interpolare

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 1{,}21)(x - 1{,}44)}{0{,}0924}$$
$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 1{,}0)(x - 1{,}44)}{-0{,}0483}$$
$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 1{,}0)(x - 1{,}21)}{0{,}1012}$$

$$P_2(x) = \frac{(x - 1{,}21)(x - 1{,}44)}{0{,}0924} \cdot 1{,}0 - \frac{(x - 1{,}0)(x - 1{,}44)}{0{,}0483} \cdot 1{,}1 + \frac{(x - 1{,}0)(x - 1{,}21)}{0{,}1012} \cdot 1{,}2;$$

$$P_2(x) = (x - 1{,}21)(x - 1{,}44) \cdot 10{,}8225 - (x - 1{,}0)(x - 1{,}44) \cdot 22{,}7743 + (x - 1{,}0)(x - 1{,}21) \cdot 11{,}8577.$$

Chiar sub această formă polinomul poate fi folosit în calcule numerice. Dacă se desfac parantezele, se obține polinomul

$$P_2(x) = 0{,}4099 + 0{,}6842\,x - 0{,}0941x^2 \text{ găsit anterior.}$$

Polinomul de interpolare al lui Newton. În cazul procedeului lui Lagrange, după ce s-a găsit polinomul de aproximare cu punctele de sprijin (x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), dacă se mai adaugă un punct de sprijin (x_{n+1}, y_{n+1}), pentru a obține polinomul de aproximare în vecinătatea tuturor punctelor de sprijin, procedeul trebuie reluat în întregime de la început; polinoamele $L_0(x)$, $L_1(x)$, ..., $L_n(x)$ trebuie recalculate. Prin *metoda de interpolare a lui Newton* însă în acest caz se mai adaugă un termen suplimentar. Această metodă pornește de la un polinom de aproximare de forma

$$P_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + b_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}).$$

Coeficienții $b_0, b_1, \ldots, b_n$ se determină astfel încît polinomul să treacă prin punctele (x_0, y_0), $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. Înlocuind pe x succesiv cu valorile $x_0, x_1, \ldots, x_n$, se obține sistemul

$$y_0 = b_0$$
$$y_1 = b_0 + b_1(x_1 - x_0)$$
$$y_2 = b_0 + b_1(x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n = b_0 + b_1(x_n - x_0) + b_2(x_n - x_0)(x_n - x_1) + \ldots + b_n(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1}).$$

Sistemul se rezolvă în raport cu $b_0, b_1, \ldots, b_n$, pas cu pas. Folosind *diferențele finite* (vezi § 29.2), se poate obține, începînd cu $b_0 = y_0$, pentru fiecare coeficient b_i, cîte o formulă. Se obțin astfel

$$b_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = [x_1 x_0'];$$

$$y_2 = y_0 + [x_1x_0](x_2 - x_0) + b_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

sau

$$[x_2x_0] = [x_1x_0] + b_2(x_2 - x_1)$$

și apoi

$$b_2 = [x_2x_1x_0], \ldots, b_k = [x_kx_{k-1}\ldots x_1x_0].$$

Înlocuind acești coeficienți, se obține polinomul de interpolare al lui Newton.

Polinomul de interpolare al lui Newton	$y = f(x) \approx y_0 + [x_1x_0](x - x_0) + [x_2x_1x_0](x - x_0)(x - x_1) + \ldots$ $\ldots + [x_nx_{n-1}\ldots x_2x_1x_0](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$

Dacă se mai consideră un punct de sprijin (x_{n+1}, y_{n+1}), atunci se mai adaugă la polinomul calculat înainte termenul $[x_{n+1}\,x_n\,x_{n-1}\ldots x_2x_1x_0](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$ și se obține un polinom de gradul $n + 1$ care trece prin punctele $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)\ (x_{n+1}, y_{n+1})$.

Calculul *diferențelor finite* se face cel mai ușor folosind schemele date în § 29.2. În formulele lui Newton se folosesc *diferențele finite înapoi* (subliniate în 29.2 cu o linie). La deducerea formulelor lui Newton nu este necesar să se scrie punctele de sprijin în ordinea $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ordonînd aceste puncte arbitrar $x_{i0}, x_{i1}, \ldots, x_{in}$ și folosind procedeul indicat, se obține polinomul de interpolare al lui Newton sub forma generală

$$y = f(x) \approx P_n(x) = y_{i_0} + (x - x_{i_0})[x_{i_1}x_{i_0}] + (x - x_{i_0})(x - x_{i_1})[x_{i_2}x_{i_1}x_{i_0}] + \ldots$$
$$\ldots + (x - x_{i_0})(x - x_{i_1})\ldots(x - x_{i_{n-1}})[x_{i_n}x_{i_{n-1}}\ldots x_{i_1}x_{i_0}]$$

Dacă ordinea punctelor de sprijin este $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0$, atunci se obține

$$y = f(x) \approx P_n(x) = y_n(x - x_n)\,[x_{n-1}x_n] + (x - x_n)\,(x - x_{n-1})\,[x_{n-2}x_{n-1}x_n] + \ldots$$
$$\ldots + (x - x_n)\,(x - x_{n-1}) \ldots (x - x_1)\,[x_0x_1 \ldots x_n].$$

Această formulă folosește *diferențele finite înainte* (subliniate în schemă cu două linii). Formulele se mai pot transforma astfel încît să se folosească *diferențele finite centrate* (așezate în mijlocul schemei). Indiferent de reprezentarea aleasă, se obține același polinom de gradul n, care trece prin punctele $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$.

Exemplu. Pentru a găsi *parabola de aproximare a funcției* $y = \sqrt{x}$ care trece prin punctele $x_0 = 1, y_0 = 1$; $x_1 = 1{,}21$, $y_1 = 1{,}1$; $x_2 = 1{,}44$, $y_2 = 1{,}2$ cu ajutorul metodei de interpolare a lui Newton, se calculează mai întîi diferențele finite.

$x_{i+2} - x_i$	$x_{i+1} - x_i$	x_i	y_i	Δ	$[x_{i+1}x_i]$	Δ	$[x_2x_1x_0]$
		1	1				
	0,21			0,1	0,476190		
0,44		1,21	1,1			−0,041408	−0,0941
	0,23			0,1	0,434782		
		1,44	1,2				

Folosind diferențele finite *înapoi*, se obține polinomul de interpolare

$$P_2(x) = 1 + (x - 1) \cdot 0{,}476190 - (x - 1)\,(x - 1{,}21) \cdot 0{,}0941;$$

cu diferențele finite *înainte*

$$P_2(x) = 1{,}2 + (x - 1{,}44) \cdot 0{,}434782 - (x - 1{,}44)\,(x - 1{,}21) \cdot 0{,}0941$$

și cu diferențele finite *centrate*

$$P_2(x) = 1{,}1 + (x - 1{,}21) \cdot 0{,}434782 - (x - 1{,}21)\,(x - 1{,}44) \cdot 0{,}0941.$$

Ordonînd polinoamele obținute după puterile lui x, se obține polinomul, determinat înainte

$$P_2(x) = 0{,}4099 + 0{,}6842x - 0{,}0941\,x^2.$$

Puncte de sprijin echidistante. Dacă $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sînt echidistante (cu distanța h), diferențele finite din expresia polinomului de interpolare

$$P_n(x) = y_0 + (x - x_0)\,[x_1x_0] + \ldots + (x - x_0)\,(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})\,[x_nx_{n-1} \ldots, x_1, x_0]$$

se înlocuiesc cu diferențe simple punînd $x = x_0 + th$ (vezi § 29.2). În schema cu diferențe cu noduri echidistante acestea se află pe diagonala principală.

Formula de interpolare a lui Newton cu diferențe înapoi
$P\,(x_0 + th) = y_0 + t\Delta^1 y_{1/2} + \dfrac{t(t-1)}{2!}\,\Delta^2 y_1 + \ldots + \dfrac{t(t-1)(t-2)\ldots(t-n+1)}{n!}\,\Delta^n y_{n/2}$

Considerînd ca puncte de sprijin și $x_{-1} = x_0 - h$, $x_{-2} = x_0 - 2h, \ldots, x_{-n} = x_0 - nh$ și ducînd prin aceste puncte un polinom de interpolare al lui Newton, se obține

$$P_n(x) = y_0 + (x - x_0)\,[x_0x_{-1}] + (x - x_0)\,(x - x_{-1})\,[x_0x_{-1}x_{-2}] + \ldots,$$
$$\ldots + (x - x_0)\,(x - x_{-1}) \ldots (x - x_{-n+1})\,[x_0x_{-1} \ldots x_{-n}].$$

Şi în acest polinom diferenţele finite se înlocuiesc prin diferenţe simple.

Formula de interpolare a lui Newton cu diferenţe înainte

$$P_n(x_0 + th) = y_0 + t\Delta^1 y_{-1/2} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \dots + \frac{t(t+1)(t+2)\dots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_{-n/2}$$

În sfîrşit, punctele de sprijin se pot ordona şi sub forma alternantă $x_0, x_1, x_{-1}, x_2, x_{-2}, x_3, \dots$ Polinomul corespunzător va fi

$$P_n(x) = y_0 + (x - x_0)[x_1 x_0] + (x - x_0)(x - x_1)[x_1 x_0 x_{-1}] +$$
$$+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_{-1})[x_2 x_1 x_0 x_{-1}] + \dots$$

Polinomul se termină cu unul din termenii

$$(x - x_0)(x - x_1)(x - x_{-1})\dots(x - x_{k-1})[x_k x_{k-1}\dots x_0 \dots x_{k-1}],$$
$$(x - x_0)(x - x_1)(x - x_{-1})\dots(x - x_k)[x_k x_{k-1}\dots x_0 \dots x_{-k+1} x_{-k}],$$

după cum numărul punctelor de sprijin este par ($n = 2k$) sau impar ($n = 2k + 1$). Înlocuind diferenţele finite cu diferenţe simple, se obţin formulele de interpolare ale lui Gauss.

Formulele de interpolare ale lui Gauss

$$P_n(x_0 + th) = y_0 + t\Delta^1 y_{1/2} + \frac{t(t-1)}{2!}\cdot\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t+1)}{3!}\cdot\Delta^3 y_{1/2} +$$
$$+ \frac{t(t-1)(t+1)(t-2)}{4!}\Delta^4 y_0 + \dots$$

Mai există o a doua formulă a lui Gauss pentru care punctele de sprijin se ordonează în şirul $x_0, x_{-1}, x_1, x_{-2}, \dots$ Au mai găsit formule de interpolare STIRLING, LAPLACE, BESSEL şi EVERETT, alegînd diferite puncte de sprijin şi diferite combinaţii ale formulelor lui Newton şi ale lui Gauss.

Interpolare în tabele

Dacă punctele de sprijin $x_0, x_1, \dots, x_n$ sînt ordonate în ordine crescătoare $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ şi se înlocuieşte funcţia $y = f(x)$ în intervalul (x_0, x_n) prin polinomul de interpolare $P_n(x)$ care trece prin punctele $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, atunci eroarea de aproximare este dată de restul R_{n+1}.

$$R_{n+1}(x) = f(x) - P_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)\frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Mărimea ξ este în general necunoscută din intervalul (x_0, x_n). Dacă se determină de exemplu valoarea funcţiei $y = f(x)$ pentru un argument x cuprins între x_0 şi $x_0 + h$, trecute în tabel, prin interpolare liniară, atunci eroarea de interpolare va fi $R_2(x) = (x - x_0)(x - x_0 - h)\,y''(\xi)/2$. Produsul $(x - x_0)(x - x_0 + h)$ va avea cea mai mare valoare absolută pentru $x = x_0 + h/2$. Eroarea de interpolare se va evalua deci prin $|R_2(x) \leqslant |\frac{h^2}{8} \leqslant |y''(x)|$, unde $y''(x)$ se va înlocui cu valoarea maximă în (x_0, x_1). În interpolarea în tabele cu k zecimale, eroarea de interpolare nu trebuie să depăşească jumătate din ultima zecimală. Astfel:

Într-un tabel cu k zecimale şi cu distanţa dintre punctele de sprijin h, interpolarea liniară este permisă atunci cînd $\frac{h^2}{8}|y''(x)| < 0{,}5 \cdot 10^{-k}$.

Exemplu. Într-un tabel al valorilor lui lg sin x ($0° \leqslant x \leqslant 45°$) cu cinci zecimale exacte distanța h este $h = 0{,}01°$. Deoarece $y''(x) = -\dfrac{M}{\sin^2 x}$, unde $M = \lg e$, x trebuie să satisfacă inegalitatea $\dfrac{h^2}{8} < \dfrac{M}{\sin^2 x} < 0{,}5 \cdot 10^{-5}$. unde h este măsurat în radiani. De aici rezultă condiția $\sin x > 0{,}01819$. Ea este îndeplinită pentru $x > 1{,}04°$. Deci în acest tabel se poate folosi interpolarea liniară pentru $x > 1°$.

Atunci cînd într-un tabel nu este permisă interpolarea liniară, trebuie folosite formule de interpolare de ordin superior. Cu aceste formule se poate realiza o eroare de interpolare mică, alegînd punctele de sprijin astfel încît interpolarea să aibă loc la mijlocul domeniului definit de acestea. Acest lucru se obține cu formule de interpolare ce folosesc diferențe centrate ca, de exemplu, formulele de interpolare ale lui Gauss. Numai atunci cînd se interpolează la începutul sau la sfîrșitul tabelului se vor folosi formulele lui Newton de interpolare cu diferențe înainte sau înapoi.

29. Analiză numerică

Matematica în sens strict folosește în propozițiile sale cantitative mulțimile numerelor reale sau complexe iar relațiile între numere sau obiecte ca vectori sau matrice sînt bazate tot pe aceste sisteme de numere. În *matematica numerică* toate concluziile trebuie obținute numai cu ajutorul numerelor raționale și de regulă numai cu un număr finit de astfel de numere, de exemplu atunci cînd se folosește un calculator. În analiza numerică formularea unui procedeu de rezolvare a unei probleme matematice necesită stabilirea unui model și apar astfel erori de rotunjire și erori ale procedeului.

29.1. Introducere

Erorile de rotunjire apar în aplicația mulțimii numerelor reale în domeniul permis al numerelor raționale, printr-un procedeu numeric dat. Cînd se procedează astfel, sînt falsificate nu numai datele inițiale ale problemei dar și rezultatele intermediare după fiecare pas. *Erorile procedeului* apar din cauza că fiecare operație transcendentă trebuie înlocuită printr-un număr finit de operații realizabile ca adunare, scădere, înmulțire și împărțire. Modelul proce-

deului este *numeric stabil* dacă rezultatul lui cantitativ diferă de rezultatul procedeului exact numai printr-o cantitate mică, specificată.

Estimarea preciziei unui procedeu numeric. Estimarea preciziei unui procedeu numeric este o problemă practică foarte importantă, a cărei rezolvare nu este ușoară. Rezolvarea ei depinde foarte mult de tipul problemei în chestiune. În aplicații se deosebesc două clase de probleme: aproximarea unui obiect matematic care poate fi descris cu ajutorul unei formule și aproximarea unui obiect matematic despre care se știe că există dar poate fi determinat numai aproximativ cu ajutorul măsurărilor.

Problema preciziei pentru obiecte matematice date prin formule. Numerele, vectorii, funcțiile, funcționalele și operatorii sînt obiecte matematice date prin formule. Numerele, vectorii sau funcțiile sînt privite ca puncte ale unui spațiu și aproximate prin șiruri sau, ceea ce revine la același lucru, prin serii $x = \sum_{i=0}^{\infty} c_i e_i$ cu coordonatele e_i și componentele c_i.

În analiza numerică orice *dezvoltare* de acest tip trebuie întreruptă după un număr finit de pași de aproximare, adică în loc de x se consideră satisfăcătoare aproximația $x^* = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i$. Aceasta se însoțește de două *criterii calitative* Q_1 și Q_2: $Q_1 = n$ este măsura întinderii dezvoltării și Q_2 măsura apropierii aproximației de valoarea reală, de exemplu $|x - x^*|$ pentru numere sau $\sup |x(t) - x^*(t)|$ pentru funcții. Q_1 și Q_2 trebuie păstrați cît mai mici dar Q_1 mic contrazice Q_2 mic și invers. Dacă coeficienții c_i sînt calculați printr-o regulă definită, de exemplu prin dezvoltarea în serie Taylor, atunci pentru $Q_1 = n$ criteriul Q_2 va fi fixat prin elementul x ce trebuie aproximat. Q_2 însă nu se cunoaște și în practică se consideră satisfăcătoare o estimație mai mult sau mai puțin precisă a acestuia, de exemplu estimații ale restului în dezvoltarea în serie. Mai favorabilă este situația în care c_i nu se obține printr-o regulă definită, dar se determină pentru $Q_1 = n$ dat, astfel încît Q_2 să devină minimă. O regulă pentru această determinare reprezintă un *proces optimal de dezvoltare*. În acest caz se obține, de obicei, regula prin care $Q_{2\,min}(n)$ este o funcție monoton descrescătoare.

Dacă se consideră de exemplu dezvoltări în serii ortogonale ale căror coordonate e_i cu o operație moment M, aleasă corespunzător, satisfac condiția de ortogonalitate $M(e_ie_j) = 0$, $i \neq j$, dacă se alege ca măsură a aproximării $Q_2 = M[(x - x^*)\,(x - x^*)]$, atunci se cere găsirea unor valori c_i care garantează minimul lui Q_2 pentru n dat. Se obține pentru acestea $c_i = M(xe_i)/M(e_ie_i)$ și valoarea minimă este dată de $Q_{2\,min} = M(xx) - \sum_{i=1}^{n} M(xe_i)^2/M(e_ie_i)$. Evident $Q_{2\,min}$ este o funcție monoton descrescătoare de n. Pentru serii numerice se ia operația moment $M(xy) = (x \cdot y)$, pentru serii vectoriale produsul scalar $M(xy) = (x,y)$, pentru variabile aleatoare, valoarea medie și pentru funcții produsul scalar $M(xy) = \int_a^b x(t)\,y(t)\,p(t)\,dt$ în spațiul funcțiilor. În cazul funcționalelor sau al operațiilor date prin formule, estimarea preciziei este îngreunată de faptul că o aproximare a unei operații date trebuie să producă aproape același efect ca operația respectivă pentru o mulțime suficient de cuprinzătoare de elemente inițiale y.

Dacă pentru operația dată (funcțională sau operator) are loc relația $x = Fy$, atunci se obține pentru operația de aproximare F^* relația corespunzătoare $x^* = F^*y$. Procedeul obișnuit este aproximarea lui F printr-o combinație liniară $F^* = \sum_{i=0}^{n} c_i f_i$, unde f_i sînt operații liniare de bază. Se poate proceda aici întocmai ca în cazul folosit pentru dezvoltarea elementelor x; dificultatea constă numai în faptul că trebuie eliminată în mod convenabil dependența de y. Acest lucru se poate realiza făcînd din nou media în raport cu y sau prin metoda momentelor unde se minimizează $\sup_{y \in Y} M((x - x^*)^2)$. Totuși, se ajunge la aceleași dificultăți ca în aproximarea Cebîșev, adică aproximarea funcțiilor prin serii uniform convergente.

Problema preciziei pentru obiecte matematice date, care se aproximează prin măsurări. Măsurările furnizează întotdeauna informații incomplete asupra obiectelor ce trebuie determinate. Scopul urmărit este deducerea din măsurări a celei mai bune aproximări posibile a obiectului matematic. De multe ori acesta este cazul problemelor referitoare

la căutarea valorilor extreme sau al problemei aproximării unei operații F prin măsurările x_i obținute pentru o anumită mulțime de elemente inițiale y_i. În aceste probleme trebuie distinse două faze: *faza de învățare* și *faza de execuție*. În faza de învățare se fac măsurările pentru care se introduce o măsură a efortului de măsurare. Din rezultatele acestor măsurări se va decide în cel mai bun mod posibil o aproximație a obiectului matematic, de regulă, printr-o *estimare a parametrilor*. Prin operația medie (de formare a valorii medii) se convertesc valorile măsurărilor în estimații c_i^* ale parametrilor c_i. Pe lîngă măsura efortului Q_1 și măsura aproximației Q_2 în legătură cu operația M mai intervine o măsură Q_3 care estimează caracterul aleator al parametrilor c_i^* obținuți prin alegerea testelor care au condus la valorile măsurate. În această ordine de idei se vorbește despre *planificarea experimentelor* atunci cînd se urmărește efectuarea testelor în așa fel încît erorile aleatoare introduse prin estimarea lui c_i^* să fie cît de mici posibile. Faza de execuție are caracterul unei extrapolări. Aici modelul obiectului matematic cu valorile estimate c_i^* este aplicat în condiții arbitrare admisibile. Dacă apar abateri mari față de $Q_{2\,min}$ obținut în faza de învățare, atunci se poate încerca îmbunătățirea modelului astfel găsit pas cu pas prin faze de învățare intermediare. Acest procedeu prezintă o importanță deosebită pentru metodele statistice ale analize numerice, de exemplu pentru *analiza de regresie*. În cazuri particulare procedeele secvențiale pot fi optimizate. Totuși în acest caz problema preciziei apare de regulă inversată. Se începe cu valoarea $Q_{2\,min}$ privită ca *prag de rezistență* și se organizează un proces secvențial cu mai multe faze de învățare în așa fel încît numărul total N de teste să fie cît de mic posibil. Astfel în procedeul experimental numărul N intră ca un alt criteriu Q_4 care se adaugă la cele dinainte. Criteriile Q_1, Q_2, Q_3 și Q_4 sînt dependente, ceea ce este semnificativ, în general, pentru procesul de rezolvare a problemei; de exemplu o creștere a lui Q_1 reduce Q_2 dar implică o creștere a ui Q_3 și a lui Q_4.

Reprezentarea numerelor. Într-un *sistem pozițional* cu baza $q > 0$ un număr z este reprezentat sub forma

$$z = \pm\,(a_k q^k + a_{k-1} q^{k-1} + \ldots + a_0 q^0 + a_{-1} q^{-1} + a_{-2} q^{-2} + \ldots),$$

unde fiecare dintre numerele a_i poate lua valorile întregi nenegative $0, 1, \ldots, q-1$ și în care *partea întreagă* cu exponenți $l \geqslant 0$ ai lui q este deosebită de *partea fracționară* cu $l < 0$. Pe calculatoare pot fi reprezentate numai numere cu *lungimea cuvîntului* L cu exponenți negativi pînă la ordinul maxim L. Pentru *reprezentarea cu virgulă mobilă* se folosește forma normală

$$z = \pm q^e (b_{-1} q^{-1} + b_{-2} q^{-2} + \ldots + b_{-L} q^{-L}) \quad \text{cu} \quad b_{-1} \neq 0.$$

De exemplu, pentru $q = 10$ numărul $-36,12$ se reprezintă prin

$$-10^2 (3 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-4}) = -10^{-2} \cdot 0,3612.$$

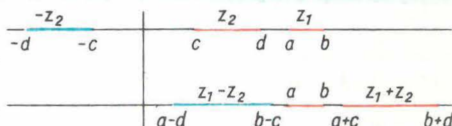
În această reprezentare, exponentul e variază de regulă între $-L$ și $+L$ și este de asemenea reprezentat în sistemul pozițional cu baza q. Cu mașinile de calcul exponenții negativl se pot evita, folosindu-se în loc de numerele externe sub formă normată, numerele interne $z' = \pm\, q^{e+L}(b_{-1} q^{-1} + \ldots + b_{-L} q^{-L})$ al căror exponent este prea mare pentru un anumit L. Pentru un e dat se poate folosi o rețea echidistantă cu $2 \cdot (q^L - 1)$ numere; pasul rețelei este dat de q^{e-L}. Totalitatea numerelor realizabile este dată de $-L \leqslant e \leqslant +L$. Operațiile aritmetice de bază pot duce la o îndepărtare de mulțimea numerelor admise. Odată ce s-a stabilit baza q, este suficient să se stabilească șirul $z = \pm\, a_k a_{k-1} \ldots a_0 a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-L}$ sau șirul de numere compus din exponentul e și părțile fracționare normate.

Pe lîngă *sistemul zecimal* cu $q = 10$ se folosesc și alte sisteme poziționale. *Sistemul binar* cu $q = 2$ prezintă avantajul că necesită pentru reprezentarea pe calculator a numai două stări fizice, notate cu 0 și 1. Este posibilă *transformarea* unui număr din reprezentarea în baza q, $z[q] = a_k q^k + a_{k-1} q^{k-1} + \ldots + a_0 q^0$ în reprezentarea în baza p, $z[p] + = b_l p^l + b_{l-1} p^{l-1} + \ldots + b_0 p^0$ împărțind pe $z[q]$ la $p[q]$. Se poate vedea din expresia lui $z[p]$ că se obține astfel un număr întreg g_1 și o parte fracționară $r_1/p[q]$, ceea ce îi corespunde lui $b_0 p^{-1}$ în reprezentarea $z[p]$ astfel încît $r_1 = b_0$. Similar din $g_1/p[q]$ se obțin coeficienții b_1 și apoi $b_2, b_3, \ldots, b_l$.

Exemplu. Numărul zecimal 132 [10] se transformă prin împărțire cu 2[10]: $132/2 = 66 + 0/2$ cu $b_0 = 0$; $66/2 = 33 + 0/2$ cu $b_1 = 0$; $33/2 = 16 + 1/2$ cu $b_2 = 1$; $16/2 = 8 + 0/2$ cu $b_3 = 0$; $8/2 = 4 + 0/2$ cu $b_4 = 0$; $4/2 = 2 + 0/2$ cu $b_5 = 0$; $2/2 = 1 + 0/2$ cu $b_6 = 0$ și $1/2 = 0 + 1/2$ cu $b_7 = 1$, astfel încît pentru 132 se obține numărul scris în baza 2, 10000100. Pentru a obține din nou numărul scris în baza 10 se împarte cu $10[2] = 1010$. Se obține

$$
\begin{array}{llll}
10000100/1010 = 1101 + 10/1010 \text{ cu } b_0 = 10[2] = 2[10]; & & & \\
\underline{-1010} & & & \\
\quad 1101 & 1101/1010 = 1 + 11/1010 \text{ cu } b_1 = 11[2] = 3[10]; & & \\
\underline{-1010} & \underline{-1010} & & \\
\quad 1100 & \quad 11 \quad 1/1010 = 0 + 1/1010 \text{ cu } b_2 = 1[2] = 1[10], & & \\
\underline{-1010} & & & \\
\quad 10 & \text{adică } b_2 \cdot 10^2 + b_1 \cdot 10 + b_0 \cdot 10^0 = 132. & &
\end{array}
$$

Calcul cu intervale. Pentru a determina eroarea rezultatelor operațiilor aritmetice de bază, atunci cînd datele inițiale sînt rotunjite, MOORE a introdus calculul cu intervale. Fiecare număr z se înlocuiește prin cel mai mic interval închis $[a, b]$ unde a și b sînt numere raționale, în care acesta trebuie să se găsească. Ca o generalizare a operațiilor cu numere, care pot fi întotdeauna vizualizate pe axa numerelor, se obțin *operațiile aritmetice cu intervale*. Dacă $z_1 = [a, b]$ și $z_2 = [c, d]$, atunci $z_1 + z_2 = [a+c, b+d]$ deoarece $-[c, d] = [-d, -c]$, $z_1 - z_2 = [a-d, b-c]$ (fig. 29.1). Pentru operațiile de ordinul al doilea se obține $z_1 \cdot z_2 = [a, b] \cdot [c, d] = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)]$ și $z_1/z_2 = [a, b]/[c, d] = [\min(a/c, a/d, b/c, b/d), \max(a/c, a/d, b/c, b/d)]$. În acest mod se pot defini *funcții de interval*, în particular, funcții raționale de interval care trebuie să înlocuiască alte funcții în modelele numerice.



29.1.1. Intervale pentru $z_1 + z_2$, pentru $-z_2$ și pentru $z_1 - z_2$

Exemplu. Funcția putere $f(x) = x^k$ cu exponent număr natural k este definită ca de k ori produsul lui x cu el însuși; astfel pentru $x = [x_1, x_2]$ se obține $x^k = [x_1\ x_2]^k = [\min(x_1^k, x_1^{k-1}x_2, x_2^{k-2}x_2^2, ..., x_2^k), \max(x_1^k, x_1^{k-1}x_2, ..., x_2^k)]$.

29.2. Interpolare și calculul cu diferențe

Ideea de bază în interpolări este înlocuirea funcției $f(x)$ pentru care se dau valorile $y_i = f(x_i)$ într-un număr finit de puncte $x_1, x_2, ..., x_n$ sau derivatele pînă la ordinul $m_i \geqslant j$ în aceste puncte, $y_i^{(j)} = f^{(j)}(x_i)$, printr-o aproximare care constă dintr-o combinație liniară $\sum_j A_j\varphi_j(x) = f^*(x) \approx f(x)$ de funcții standard $\varphi_j(x)$. Forma funcțiilor $\varphi_j(x)$ pentru o clasă dată de funcții și coeficienții combinației liniare A_j trebuie să fie unic determinați din valorile date în așa fel încît funcția $f^*(x)$ să ia valorile y_j sau $y_i^{(j)}$, $i = 1, ..., n$, în punctele date $\{x_i\}$. Pentru puncte diferite de punctele mulțimii $\{x_i\}$ *calitatea formulei de interpolare* este dată printr-o estimație a restului $R = f(x) - f^*(x)$. Dacă x se găsește în interiorul celui mai mic interval care conține mulțimea $\{x_i\}$, $i = 1, ..., n$, atunci este vorba despre o *interpolare* în sens propriu, dacă x se găsește în afara acestui interval, se vorbește despre *extrapolare*. Multe procedee numerice pot fi duse la capăt mult mai direct prin combinații liniare de funcții standard, de exemplu determinarea rădăcinilor, integrarea, derivarea sau integrarea ecuațiilor diferențiale. Ca funcții standard se folosesc în mod frecvent polinoame. Interpolările Taylor și Lagrange sînt două cazuri limită de mare importanță practică.

Interpolare Taylor. Se dau valoarea funcției $f(x_1)$ și valorile derivatelor $f^{(j)}(x_1)$ cu $m_1 \geqslant j$ într-un singur punct x_1. *Polinoamele standard* sînt $\varphi_j(x) = |(x-x_1)^j/j!$ pentru $j = 0, 1, ..., m_1$ și *coeficienții combinației liniare* sînt $A_j = f^{(j)}(x_1)$. Restul este $R = f^{(m_1+1)}(\xi) \cdot (x-x_1)^{m_1+1}/(m_1+1)!$, unde ξ este un punct cuprins între x_1 și x (vezi cap. 21).

Exemplu. Interpolarea Taylor a funcției sin x în punctul $x = 0$ se compune dintr-un număr finit de termeni ai dezvoltării în serie Taylor $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$

Interpolarea Lagrange. Se dau numai valorile funcției în punctele $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $y_i = f(x_i)$. *Polinoamele standard* sînt $\varphi_j(x) = \frac{\Phi_n(x)}{(x - x_j) \cdot \Phi_n'(x_j)}$ cu $\Phi_n(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$ și coeficienții combinației $A_j = y_j = f(x_j)$. Restul este $R = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \cdot \Phi_n(x)$, unde ξ este un punct în cel mai mic interval care conține mulțimea $\{x_i\}$, $i = 1, \ldots, n$.

Polinoamele de interpolare ale lui Newton. Interpolarea Newton poate fi dedusă din interpolarea Lagrange dacă datele se dau în același mod (vezi cap. 28). Totuși pe cînd introducerea unui punct de interpolare suplimentar x_{n+1}, necesită în cazul interpolării Lagrange noi calcule, cu formula lui Newton se pot extinde direct valorile obținute. Polinoamele standard sînt $\varphi_j(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_j)$ și coeficienții A_j sînt diferențele finite care se calculează din tabelele de diferență.

Diferențe finite. Dacă sînt cunoscute valorile funcției $y = f(x)$ în $n + 1$ *puncte de sprijin* $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $y_0 = f(x_0), \ldots, y_n = f(x_n)$, atunci se pot forma următoarele diferențe finite de ordinul 0 pînă la n:

0. $[x_0] = y_0,\ [x_1] = y_1, \ldots, [x_n] = y_n;$

1. $[x_i x_j] = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}$, de exemplu $[x_1 x_0] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, $[x_n x_{n-1}] = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$;

2. $[x_i x_j x_k] = \frac{[x_i x_j] - [x_j x_k]}{x_i - x_k}$, de exemplu $[x_2 x_1 x_0] = \frac{[x_2 x_1] - [x_1 x_0]}{x_2 - x_0}$;

$(r + 1)$. $[x_i x_j x_{k_1} x_{k_2} x_{k_3} \ldots x_{k_r}] = \frac{[x_i x_j x_{k_1} \ldots x_{k_{r-1}}] - [x_j x_{k_1} \ldots x_{k_r}]}{x_i - x_{k_r}}$;

n. $$[x_n x_{n-1} \ldots x_0] = \frac{[x_n x_{n-1} \ldots x_1] - [x_{n-1} x_{n-2} \ldots x_0]}{x_n - x_0}$$

Toate aceste diferențe finite sînt simetrice în argumentele lor; de exemplu:

$$[x_i x_j] = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} = \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i} = [x_j x_i], \qquad [x_i x_j x_k] = \frac{[x_k x_j] - [x_j x_i]}{x_k - x_i} = [x_k x_j x_i]$$

și în mod analog

$$[x_i x_j x_k] = [x_i x_k x_j] = [x_j x_i x_k] = [x_j x_k x_i] = [x_k x_i x_j].$$

Deci, într-o diferență finită se poate schimba ordinea argumentelor.

Pentru calculul diferențelor finite se folosește următoarea schemă:

Schema de calcul al diferențelor finite

			x_0	y_0					
		$x_1 - x_0$			$y_1 - y_0$	$[x_1 x_0]$			
…	$x_2 - x_0$		x_1	y_1			$[x_2 x_1] - [x_1 x_0]$	$[x_2 x_1 x_0]$	…
		$x_2 - x_1$			$y_2 - y_1$	$[x_2 x_1]$			
	$x_3 - x_1$		x_2	y_2			$[x_3 x_2] - [x_2 x_1]$	$[x_3 x_2 x_1]$	
		$x_3 - x_2$			$y_3 - y_2$	$[x_3 x_2]$			…
:	⋮		x_3	y_3			⋮	⋮	:
…		⋮			⋮	⋮			…
	$x_n - x_{n-2}$		⋮	⋮			$[x_n x_{n-1}] - [x_{n-1} x_{n-2}]$	$[x_n x_{n-1} x_{n-2}]$	
		$x_n - x_{n-1}$			$y_n - y_{n-1}$	$[x_n x_{n-1}]$			
			x_n	y_n					

Valorile subliniate cu o linie sînt *diferențele finite înapoi*, cele cu două linii *diferențele finite înainte* iar cele din mijlocul schemei, *diferențele finite centrate*.

Exemplu. $y = x^3$; $x_0 = 1$, $x_1 = 3$, $x_2 = 4$. Schema diferențelor:

$x_{i+2} - x_i$	$x_{i+1} - x_i$	x_i	y_i	Δ	$[x_{i+1}x_1]$	Δ	$[x_2x_1x_0]$
		1	$\underline{1}$				
	2			26	$\underline{13}$		
3		3	27			24	$\underline{8}$
	1			37	37		
		4	64				

Rezultat: $[x_0] = 1$, $[x_1\,x_0] = 13$, $[x_2x_1x_0] = 8$.

Proprietăți ale diferențelor finite. Dacă $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, atunci

$$[x_nx_{n-1} \dots x_0] = [x_nx_{n-1} \dots x_0]_1 + [x_nx_{n-1} \dots x_0]_2,$$

unde $[\ ]_i$ înseamnă diferența corespunzătoare funcției f_i. Dacă $f(x) = cf_1(x)$, unde c este o constantă, atunci

$$[x_nx_{n-1} \dots x_0] = c[x_nx_{n-1} \dots x_0]_1.$$

Pentru o diferență finită se poate obține o expresie independentă de diferențele de ordin inferior:

$$[x_nx_{n-1} \dots x_0] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})\,(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

Dacă funcția $f(x)$ este de n ori continuu derivabilă în intervalul în care se găsesc punctele $x_0, x_1, \dots, x_n$, atunci

$$[x_nx_{n-1} \dots x_0] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi),$$

unde ξ este un punct din intervalul respectiv. De aici rezultă că toate diferențele finite de ordinul n ale unui polinom de gradul n sînt egale.

Schema diferențelor cu puncte de sprijin echidistante. Schema pentru calculul diferențelor finite devine mult mai simplă dacă punctele $x_0, x_1, \dots, x_n$ sînt ordonate după mărime și sînt *echidistante*. Dacă distanța dintre ele este h, atunci $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h, \dots, x_n = x_0 + nh$. Diferența argumentelor din partea stîngă a schemei va fi $x_{i+k} - x_i = kh$. Atunci:

diferența de ordinul întîi $y_{i+1} - y_i = \Delta^1 y_{i+1/2}$,

diferența de ordinul doi $\Delta^1 y_{i+1} - \Delta^1 y_i = \Delta^2 y_{i+1/2}$,

. . . .

diferența de ordinul $\Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i = \Delta^n y_{i+1/2}$.

$$[x_{i+k}x_{i+k-1} \dots x_{i+1}x_i] = \frac{1}{h^k} \cdot \frac{1}{k!} \cdot \Delta^k y_{i+k/2}$$

Rezultă astfel o relație simplă între diferențe simple și diferențele finite. Au loc formulele De aici rezultă nu numai că toate diferențele fintie de ordinul n ale unui polinom de grad n sînt egale ci și diferențele obișnuite de ordinul n sînt egale.

Dacă se introduce o variabilă auxiliară t prin ecuația $x = x_0 + th$ și se consideră și puncte de forma $x_{-1} = x_0 - h$, $x_{-2} = x_0 - 2h, \dots,$ atunci se obține următoarea *schemă pentru diferențe* finite.

Schema diferențelor

t	$x = x_0 + th$	y	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5	Δ^6
.	. .	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
-2	x_{-2}	y_{-2}		$\Delta^2 y_{-2}$		.	.	.
			$\Delta^1 y_{-3/2}$		$\Delta^3 y_{-3/2}$			
-1	x_{-1}	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-1}$		$\Delta^4 y_{-1}$	.	.
			$\Delta^1 y_{-1/2}$		$\Delta^3 y_{-1/2}$		$\Delta^5 y_{-1/2}$	
0	x_0	y_0		$\Delta^2 y_0$		$\Delta^4 y_0$		$\Delta^6 y_0$
			$\Delta^1 y_{1/2}$		$\Delta^3 y_{1/2}$		$\Delta^5 y_{1/2}$	.
1	x_1	y_1		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_1$	.	.
			$\Delta^1 y_{3/2}$		$\Delta^3 y_{3/2}$	.	.	.
2	x_2	y_2		$\Delta^2 y_2$	.	.	.	.
			.	.	.	.	.	.
			.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.

Interpolarea lui Aitken. *Procesul recursiv de interpolare* datorat lui Aitken poate fi aplicat cu succes atunci cînd se dă punctul x în care funcția trebuie interpolată. Prin interpolare liniară (fig. 29.2.1) se determină mai întîi $h_{i,\,i+1}$ astfel încît

$$h_{i,\,i+1}(x_{i+1} - x_i) = y_i(x_{i+1} - x) + y_{i+1}(x - x_i),$$

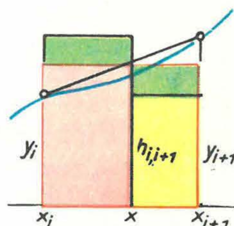
adică

$$h_{i,\,i+1} = \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \begin{vmatrix} y_i & x_i - x \\ y_{i+1} & x_{i+1} - x \end{vmatrix}.$$

Adăugînd încă un punct x_{i+2}, se ajunge la un polinom de interpolare $h_{i,\,i+1,\,i+2}$ de gradul doi și deci se obține o precizie mai bună:

$$h_{i,\,i+1,\,i+2} = \frac{1}{x_{i+2} - x_i} \begin{vmatrix} h_{i,\,i+1} & x_i - x \\ h_{i+1,\,i+2} & x_{i+2} - x \end{vmatrix}.$$

Se procedează în același mod pînă cînd valorile aproximațiilor succesive diferă numai printr-o mărime care se găsește între limitele de precizie acceptate.



29.2.1. Interpolarea lui Aitken; $h_{i,\,i+1}(x_{i+1} - x_i) = y_i(x_{i+1} - x) + y_{i+1}(x - x_i)$

29.3. Metode numerice de integrare și de derivare

Formula de cvadratură	$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i,j} A_{ij} f^{(j)}(x_{ij})$

Integrarea numerică. Printr-o formulă de cvadratură se înțelege un model cu valori ale funcției date $f(x)$ sau ale derivatelor ei în nodurile x_{ij}, pentru care trebuie determinați coeficienții combinației A_{ij} sau nodurile x_{ij} cu condiția ca modelul să fie cît mai bun. Într-o formulă de cvadratură de *tip amplitudine*, se dau nodurile și se cere determinarea coeficienților A_{ij}; într-o formulă de *tip argument*, A_{ij} sînt dați și se cere determinarea unor noduri corespunzătoare. Nodurile nu trebuie neapărat să aparțină intervalului de integrare.

Exemplu. O formulă de cvadratură de ordinul trei care furnizează valori exacte ale polinoamelor pînă la gradul trei este

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left\{f(a) + f(b) - \frac{b-a}{6}\,[f'(b) - f'(a)]\right\}.$$

Formule de cvadratură prin interpolare se obțin înlocuind funcția de integrat în intervalul de integrare $[a, b]$ printr-un polinom de interpolare Lagrange de gradul n cu punctele de sprijin $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Punînd condiția ca formula de cvadratură să fie exactă pentru orice polinom de gradul n, se obține modelul

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i f(a + ih) \quad \text{cu} \quad A_i = \frac{b-a}{n} \cdot \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \frac{t^{[n+1]}}{t-i}\,dt,$$

unde $t^{[n+1]} = t(t-1)(t-2)\ldots(t-n)$. Dacă $n = 2m - 1 - d$ cu $d = 0$ pentru valori impare ale lui n și $d = 1$ pentru valori pare ale lui n, atunci eroarea modelului se evaluează la

$$R_n = -M_n(b-a)^{2m+1} f^{(2m)}(\xi), \quad \text{unde} \quad a < \xi < b,$$

și

$$M_1 \approx 8{,}333 \cdot 10^{-2}, \quad M_2 \approx 3{,}472 \cdot 10^{-4}, \quad M_3 \approx 1{,}543 \cdot 10^{-4},$$

$$M_4 \approx 5{,}167 \cdot 10^{-7}, \quad M_5 \approx 2{,}910 \cdot 10^{-7}, \quad M_6 \approx 6{,}379 \cdot 10^{-10},$$

$$M_7 \approx 3{,}912 \cdot 10^{-10}, \quad M_8 \approx 5{,}133 \cdot 10^{-13},$$

Frecvent se utilizează regula trapezului și regula lui Simpson.

Regula trapezului

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(0)}{2} + f(h) + f(2h) + \ldots + f((n-1)h) + \frac{f(nh)}{2}\right] - \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi)$$

sau pentru $n = 1$ în cazul interpolării liniare între extremitățile intervalului

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] - \frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi).$$

Regula lui Simpson pentru n par

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{3n}\{f(0) + f(nh) + 2[f(2h) + f(4h) + \ldots + f((n-2)h)] +$$

$$+ 4[f(h) + f(3h) + \ldots + f((n-1)h)]\} - \frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi).$$

sau pentru $n = 2$ și interpolarea printr-un polinom de gradul doi între extremitățile a și b ale intervalului

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (h/3)[f(a) + 4f(a+h) + f(b)] - h^5 \cdot f^4(\xi)/90,$$

unde $h = (b-a)/2$.

Derivarea numerică. Ca și pentru integrarea numerică, funcția $f(x)$ se interpolează într-o vecinătate a punctului x_0 în care se caută $f'(x_0)$ printr-un polinom $P_n(x)$ de gradul n și se folosește modelul $f'(x_0) \approx P'_n(x_0)$. Pentru interpolarea liniară între punctele $x_0 - h$ și $x_0 + h$, de exemplu, se obține

$$f'(x_0) \approx [f(x_0 + h) - f(x_0 - h)]/(2h).$$

Prin dezvoltarea în serie Taylor a funcției $f(x)$ în vecinătatea punctului x_0

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\,h + f''(x_0)\,(h^2/2!) + \ldots + f^{(n)}(x_0)\,(h^n/n!) + \ldots = e^{(h\,d/dx)}f(x_0)$$

se obține următorul model universal aplicabil al *operatorului diferențial*:

$$\frac{d}{dx} \approx \frac{1}{h}\ln(1+h\Delta) = \frac{1}{h}\left[h\Delta - \frac{(h\Delta)^2}{2} + \frac{(h\Delta)^3}{3} - \frac{(h\Delta)^4}{4} + \ldots\right],$$

unde Δ este operatorul diferență $\Delta f(x) = [f(x+h) - f(x)]/h$. Trunchiind din seria după puterea n a operatorului Δh, rezultă un model care pentru polinoame pînă la un anumit grad n inclusiv dau valori exacte pentru derivată și care se dovedește astfel identic cu modelul obținut prin substituția $f'(x_0) \approx P'_n(x_0)$.

Exemplu. Pentru $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $(h\Delta)P(x) = P(x+h) - P(x) = a_1h + a_2(2xh + h^2)$ și $(h\Delta)^2 = a_1h + a_2\,[2(x+h)\,h + h^2] - a_1h - a_2(2xh + h^2) = 2a_2h^2$. Astfel operatorul de derivare devine

$$(1/h)\,[(h\Delta) - (h\Delta)^2/2]\,P(x) = a_1 + 2a_2x + a_2h - a_2h = a_1 + 2a_2x = P'(x).$$

Soluții numerice pentru ecuații diferențiale ordinare

Multe probleme practice necesită integrarea unei ecuații diferențiale $y' = f(x, y)$, $f(x, y)$ fiind continuă cu condițiile inițiale $y(x_0) = y_0$ în direcția crescătoare a valorilor lui x (sau a unui sistem de astfel de ecuații). Notînd cu $x_i = x_0 + ih$, se determină aproximativ valorile $y_i = y(x_i)$. În multe metode numerice se folosesc soluțiile ecuației integrale $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt$ echivalente cu ecuația diferențială.

Metoda lui Adams. Pentru șirul de soluții $\{y_i\}$ din ecuația integrală rezultă creșterile $y_{i+1} - y_i = \int_{x_1}^{x_{i+1}} f(t, y(t))\,dt$; aici funcția $f(t, y(t))$ este înlocuită cu un *polinom de interpolare Newton* de gradul n și integrarea cerută se face exact.

Formula de interpolare a lui Adams folosește punctele de sprijin $x_i, x_{i-1}, \ldots, x_{i-n}$

Formula de extrapolare a lui Adams folosește punctele de sprijin $x_{i+1}, x_i, \ldots, x_{i-n+1}$

cu $f_i = f(x_i, y_i)$ și $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$ se obține

$$y_{i+1} - y_i = h\sum_{r=0}^{n} B_r\Delta^r f_{i-r}, \text{ unde } B_0 = 1,$$

$$B_r = \frac{1}{r!}\int_0^1 u(u+1)\,(u+2)\ldots(u+r-1)\,du$$

de exemplu $B_1 = 0{,}5$; $B_2 = 0{,}41$; $B_3 = 0{,}375$; $B_4 = 0{,}3486$; $B_5 = 0{,}32986$

$$y_{i+1} - y_i = h\sum_{r=1}^{n} B'_r\Delta^r f_{i+1-r},$$

unde $B'_r = B_r - B_{r-1}$

Acest proces se începe mai întîi cu polinoame de interpolare de ordin inferior, sau

valorile inițiale $y_0, y_1, \ldots, y_n$ trebuie să fie cunoscute cu o precizie satisfăcătoare.

valorile inițiale $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ trebuie să fie cunoscute. Valoarea căutată este dată de o ecuație transcendentă care se rezolvă prin iterare.

Metoda Runge-Kutta. Pentru integrarea ecuației diferențiale $y' = f(x, y)$ teoria interpolării sau calculul cu diferențe necesită păstrarea în memorie a unei mulțimi $\{y_i\}$ de *valori posterioare*. Pe de altă parte metoda Runge-Kutta folosește numai proprietățile funcției continue $f(x, y)$; deci necesită o memorie mai mică și furnizînd soluții independente poate fi de asemenea folosită la calculul valorilor de pornire pentru alte metode. Mai mult chiar, *pasul h* poate fi schimbat în timpul calculelor și *stabilitatea numerică* se asigură mai direct decît în cazul metodelor bazate pe calculul cu diferențe. Prin metoda Runge-Kutta se calculează *o valoare aproximativă* $\tilde{y}_{i+1}$ pentru

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_i+h} f(t, y(t))\,dt, \quad \text{unde} \quad \tilde{y}'_{i+1} = y_i + k$$

și creșterea k este obținută prin pasul intermediar:

$$k_0 = 0, \quad k_j = hf(x_i + a_j h,\ y_i + \sum_{r=0}^{j-1} b_{jr} k_r) \quad \text{pentru} \quad j = 1, 2, \ldots, r$$

și $k = \sum_{r=0}^{r} g_j k_j$. Paramemtrii a_j, b_{jr} și g_j conținuți în acești pași sînt determinați în funcție de precizia cerută pentru această metodă. De regulă se cere ca $\varphi(h) = \int_{x_i}^{x_i+h} f(t, y(t))\,dt - \sum_{j=1}^{r} g_j k_j$ să admită pentru $h = 0$ derivate nule $\varphi(0) = \varphi'(0) = \cdots = \varphi^{(l)}(0)$, ordinul l numit *ordinul metodei Runge-Kutta* fiind cel mai mare posibil,

Metoda Runge-Kutta este o variantă îmbunătățită a *metodei lui Euler* $\tilde{y}'_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$ care are o propagare a erorilor nefavorabilă.

Exemple de verificare a metodelor Runge Kutta de ordinul patru.

1. $\tilde{y}'_{i+1} = y_i + (1/6)(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$, unde

$k_1 = hf(x_i, y_i)$, $k_2 = hf(x_i + h/2, y_i + k_1/2)$

$k_3 = hf(x_i + h/2, y_i + k_2/2)$, $k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$

2. $\tilde{y}'_{i+1} = y_i + (1/3)(k_1/2 + 3k_2/2 + k_3/2 + k_4/2)$, unde

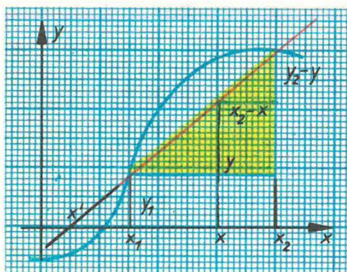
$k_1 = hf(x_i, y_i)$, $k_2 = hf(x_i + h/2, y_i + k_1/2)$

$k_3 = hf(x_i + h/2, y_i - k_1/2 + k_2)$, $k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_2/2 + k_3/2)$.

Determinarea rădăcinilor

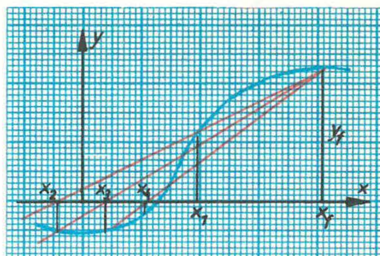
Din domeniul valorilor unei funcții $y = f(x)$ se obțin indicații privind argumentele x pentru care $f(x) = 0$. Dacă se determină un polinom de interpolare, aceste rădăcini sînt valori aproximative ale rădăcinilor cerute. Se încearcă folosirea acestor valori ca un pas în estimarea printr-un proces iterativ.

Metoda poziției false. Două puncte diferite $y_1 = f(x_1)$ și $y_2 = f(x_2)$ se unesc printr-un segment care servește ca polinom de interpolare de gradul întîi (fig. 29.3.1). Din $(x_2 - x)/(x_2 - x_1) = (y_2 - y)/(y_2 - y_1)$ se obține $P_1(x) = y = y_1(x - x_2)/(x_1 - x_2) + y_2(x - x_1)/(x_2 - x_1)$ cu rădăcina x' pentru $P_1(x) = 0$



29.3.1. Metoda poziţiei false

Metoda poziţiei false	$x' = \dfrac{y_1x_2 - y_2x_1}{y_1 - y_2}$



29.3.2. Metoda poziţiei false: metoda punctului fix

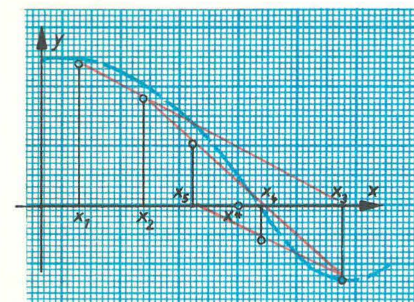


Fig.29.3.3. Metoda poziţiei false: metoda secantei

Dacă se determină $y' = f(x')$ prin substituţie, atunci se pot găsi procese iterative. În conformitate cu *metoda punctului fix* (fig. 29.3.2) se fixează o pereche de valori $x_2 = x_f$ şi $y_2 = y_f$, ca un punct fix. Scriind $x_1 = x_i$, $y_1 = y_i$ şi $x' = x_{i+1}$, $y' = y_{i+1}$, atunci $x_{i+1} = (x_fy_i - x_iy_f)/(y_i - y_f)$. Prin *metoda secantei* se scrie $x_2 \to x_{i-1}$, $y_2 \to y_{i-1}$, $x_1 \to x_i$, $y_1 \to y_i$ şi $x' \to x_{i+1}$ şi se obţine $x_{i+1} = (y_ix_i - y_{i-1}x_i)/(y_i - y_{i-1}) = [x_{i-1}f(x_i) - x_if(x_{i-1})]/[f(x_i) - f(x_{i-1})]$. Acest proces converge foarte rapid (fig. 29.3.3) către x^* unde $f(x^*) = 0$, dacă $f(x)$ satisface următoarele proprietăţi: din marginea inferioară m_1 a lui $f'(x)$ şi marginile superioare M_1 a lui $|f'(x)|$ şi M_2 a lui $|f''(x)|$ se calculează $K = M_2M_1^2/(2m_1^3)$ şi au loc inegalităţile $K|x^* - x_0| < 1$ şi $K|x^* - x_1| < 1$.

Exemplu. Pentru rădăcina $x^* = 2{,}09455148\,15423...$ a funcţiei $f(x) = x^3 - 2x - 5$ se obţine prin metoda punctului fix cu $x_f = 2$ şi $x_1 = 3$ următoarele aproximaţii:

$$x_2 = 2{,}0588235294; \quad x_3 = 2{,}0965586362; \quad x_4 = 2{,}0944405193;$$

$$x_5 = 2{,}0945576218; \quad x_6 = 2{,}0945511399; \quad x_7 = 2{,}0945515006.$$

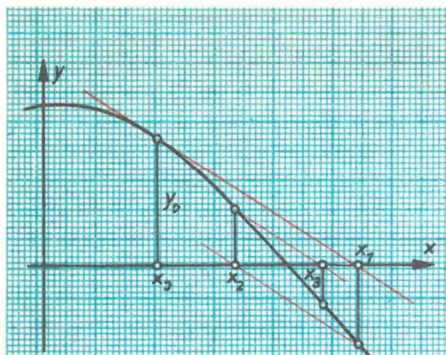
Metoda lui Newton. Pentru a obţine un polinom de interpolare Newton de gradul întîi se fixează o dreaptă printr-un punct $y_0 = f(x_0)$pe graficul funcţiei $f(x)$ şi o tangentă cu panta y'_0 în acest punct. Din ecuaţia tangentei $y = P_1(x) = y_0 + y'_0(x - x_0)$ se poate da o estimaţie x' a rădăcinii. De aici se pot deriva procese iterative. În cazul *metodei lui Newton cu panta fixă* $y'_0 = f'(x_f)$ se lasă neschimbat punctul $x' \to x_{i+1}$ cu $y_{i+1} = f'(x_{i+1})$ care se obţine din punctul $x_0 \to x_i$ cu $y_0 \to f(x_i)$; acest pas $x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_f)$ este iterativ repetat (fig. 29.3.4). În cazul *metodei lui Newton cu pantă variabilă*, derivata $f'(x_i)$ se calculează din nou la fiecare punct $(x_if(x_i))$ astfel încît $x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_i)$ (fig. 29.3.5).

Metoda lui Newton	$x' = x_0 - y_0/y'_0$

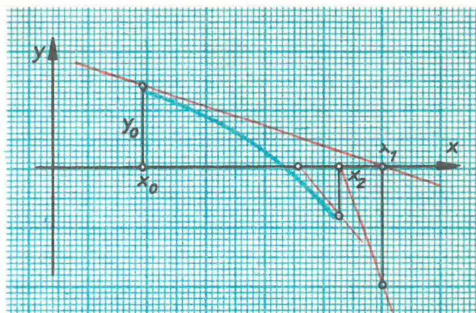
Exemplu. Rădăcina de ordinul k dintr-un număr a se obţine ca zeroul funcţiei $f(x) = x^k - a$ cu ajutorul ecuaţiei de iterare

$$x_{i+1} = x_i - (x_i^k - a)/(kx_i^{k-1}) = x_i(1 - 1/k) + a/(kx_i^{k-1})$$

Pentru *rădăcina pătrată* aceasta devine $x_{i+1} = (x_i + a/x_i)/2$.



29.3.4. Metoda lui Newton cu pantă fixă



29.3.5. Metoda lui Newton cu pantă variabilă

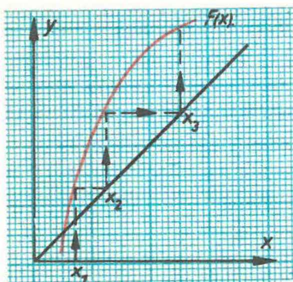
Metoda lui Newton converge rapid dacă $K \mid x^* - x_1 \mid < 1$, K fiind valoarea definită în metoda poziției false.

Metoda iterației. În general, pentru determinarea unei rădăcini ecuația $f(x) = 0$ se scrie sub forma $x_{i+1} = F(x_i)$ care se pretează la iterare (fig. 29.3.6). Dacă se alege funcția $F(x) = x - cf(x)$, unde $c > 0$, atunci se poate alege pentru c o valoare optimă în raport cu marginea inferioară m_1 și marginea superioară M_1 pentru derivata $f'(x)$, adică $m_1 < f'(x) < M_1$. Pentru derivata $F'(x) = 1 - cf'(x)$ rezultă atunci că $1 - cm_1 > 1 - cf'(x) > 1 - cM_1$, adică $F'(x)$ se găsește între margini mai strînse, cea mai mică fiind max $(|1 - cm_1|, |1 - cM_1|)$. Pentru $c = 2/(M_1 + m_1)$ se obține $|1 - cm_1| = |1 - cM_1| = (M_1 - m_1)/(M_1 + m_1) = a < 1$. Din teorema lui Lagrange din calculul diferențial rezultă că

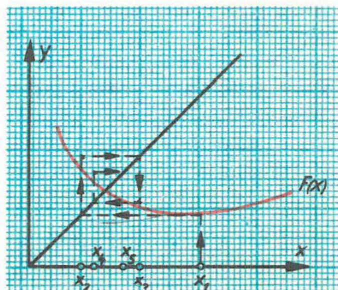
29.3.6. Începutul procesului de iterare $x_{i+1} = F(x_i)$

$$| F(x_{i+1}) - F(x_i) | \leqslant | F'(\xi) | \, | x_{i+1} - x_i | < a \cdot | x_{i+1} - x_i |.$$

Cu cît valoarea lui a este mai mică, cu atît convergența procesului iterativ este mai bună. Pentru *metoda poziției false* cu punct fix este clar că $F(x) = [x_f f(x) - x f(x_f)]/[f(x) - f(x_f)]$ și pentru *metoda lui Newton* $F(x) = x - f(x)/f'(x)$. Convergența poate fi îmbunătățită prin *δ^2-proces al lui Aitken*. În acest caz, cei doi pași normali ai iterației $x_{3i+1} = F(x_{3i})$ și $x_{3i+2} = F(x_{3i+1})$ sînt urmați de un *pas Aitken* $x_{3i+3} = x_{3i} - (x_{3i+1} - x_{3i})^2/(x_{3i+2} - 2x_{3i+1} + x_{3i})$. Reprezentarea grafică ilustrează diferența dintre divergența și convergența procedeului de iterare (fig. 29.3.7).



29.3.7. Ilustrarea grafică a unei iterații divergente



29.3.8. Ilustrarea grafică a unei iterații convergente

Exemplu. Rădăcina pătrată din numărul $a > 1$ se obține printr-un proces de iterare pentru găsirea soluției ecuației $f(x) \equiv x^2 - a = 0$ În general în vecinătatea rădăcinii $1 < \sqrt{a} = x < a$ și deci pentru $f'(x) = 2x$, $2 < f'(x) < 2a$. Deoarece $m = 2$, $M = 2a$, se obține $c = (2a - 2)/(2a+2) = (a - 1)/(a + 1)$. În consecință pentru $\sqrt{2}$, $x_{i+1} = x_i - (x_i^2 - 2)/3$ este o funcție de iterare convergentă (fig. 29.3.8). De aici rezultă $x_1 = 4/3 = 1{,}333$ $x_2 = 38/27 \approx 1{,}407$; $x_3 = 3092/2\,187 \approx 1{,}412$.

29.4. Căutarea valorilor extreme

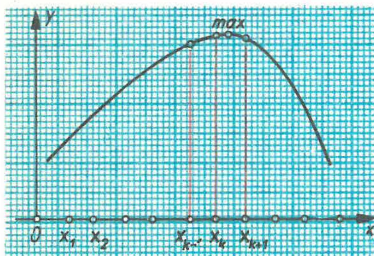
Procese unidimensionale

Dacă modul de operare al unui sistem depinde de parametrii $x_1, x_2, ..., x_n$, atunci este de dorit ca aprecierea *calității modului de operare* să se facă pe baza unui criteriu $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ care mai poartă denumirea de *funcție obiectiv* sau *funcție cost*. Totuși această funcție de mai multe variabile nu este întotdeauna cunoscută prin intermediul unei formule. Atunci valorile ei se determină prin încercări asupra sistemului.

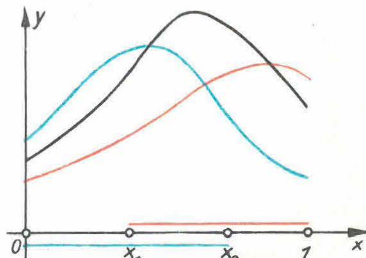
Un caz simplu de astfel de mod de operare este determinarea valorilor extreme ale unei funcții $f(x)$ de o variabilă. Parametrii $x_1, ..., x_n$ determină acum punctele x_i pentru care valorile funcției furnizează informații asupra poziției unei valori extreme a funcției $f(x)$. Pentru căutarea acestor puncte s-au dovedit practicabile cîteva strategii.

Criteriul analizei ecuației $f'(x) = 0$ este aplicabil numai funcțiilor derivabile. Totuși, în practică, se poate deseori presupune că funcția este continuă sau că valorile ei extreme nu se găsesc pe frontiera domeniului de definiție. Dimpotrivă, deseori este mai convenabilă găsirea rădăcinilor ecuației prin determinarea minimului absolut al funcției $f^2(x)$ prin mijloacele folosite pentru căutarea valorilor extreme.

Strategii universale. Dacă funcția $f(x)$ are un minim în intervalul $[a, b]$, atunci funcția $-f(x)$ va avea cu precizie un maxim; dacă ea are mai multe maxime relative, atunci oricare dintre strategiile descrise duc la o aproximație pentru una dintre aceste valori. Totuși se poate presupune că $f(x)$ are exact un maxim și că după transformarea $u = (x - a)/(b - a)$ intervalul considerat este $[0, 1]$. O strategie universală $Z_n = (x_1, x_2, ..., x_n)$ constă deci în alegerea a n puncte diferite x_i ale intervalului $[0, 1]$ cu $x_i < x_j$ pentru $i < j$. Dacă $f(x_k)$ pentru $x_i = x_k$ este cea mai mare dintre valorile calculate ale funcției, atunci argumentul maximului se găsește în intervalul $[x_{k-1}, x_{k+1}]$ (fig. 29.4.1). *Nedeterminarea intervalului* $L_n = x_{k+1} - x_{k-1}$ induce *măsura nedeterminării strategiei* $L_n = \max\limits_{1 \leq i \leq n} (x_{i+1} - x_{i-1})$, unde $x_0 = 0$ și $x_{n+1} = 1$. Cu cît intervalul maxim este mai mic, cu atît strategia este mai bună. De aceea măsura optimă a nedeterminării $L_{n\,\text{opt}} = \min\limits_{Z_n} \{ \max\limits_{1 \leq i \leq n} (x_{i+1} - x_{i-1}) \}$ este caracteristica *strategiei minimax*.



29.4.1. Măsura nedeterminării unei strategii; $f(x_k)$ este cea mai mare valoare calculată



29.4.2. Intervalul de nedeterminare pentru $n = 2$ cu pozițiile posibile ale maximului cerut

Pentru $n = 1$, $[0, 1]$ este intervalul maxim de nedeterminare. Pentru $n = 2$ (fig. 29.4.2). $[0, x_2]$ și $[x_1, 1]$ sînt intervale de nedeterminare mai înguste. Dacă în conformitate cu strategia minimax se încearcă micșorarea maximum posibilă a lungimilor intervalelor x_2 și $1 - x_1$, dar se

evită valorile nerealizabile $x_1 = x_2 = 0{,}5$ ($x_1 \neq x_2$), atunci strategia universală ε-optimală pentru $n = 2$ dă valorile $x_1 = 0{,}5 - \varepsilon/2$ și $x_2 = 0{,}5 + \varepsilon/2$ cu un $\varepsilon > 0$ suficient de mic. Aici alegerea lui ε depinde și ea de eroarea de variație a valorilor funcției $f(x)$, întrucît nu este posibilă determinarea a două valori $f(x)$ și $f(x + \varepsilon)$ care să difere cu mai puțin decît cea mai mare variație a uneia dintre ele.

Pentru $n = 3$ un nou al treilea punct poate cel mult să facă să crească nedeterminarea. O îngustare a intervalului de nedeterminare se poate realiza numai printr-o pereche de puncte noi. Optim este un aranjament de perechi echidistante care pentru n par este dat de punctele $x_k = (1 + \varepsilon)\,[(k + 1)/2]/\{(n/2) + 1\} - \{[(k + 1)/2] - [k/2]\}\varepsilon$, unde prin $[x]$ s-a notat cel mai mare întreg mai mic sau egal cu x. Lungimea intervalului optim de nedeterminare este atunci $L_{n\,\text{opt}} = (1 + \varepsilon)/\{(n/2) + 1\}$.

Exemplu. Pentru $n = 4$ se obțin punctele de diviziune $x_1 = 1/3 - 2\,\varepsilon/3$; $x_2 = 1/3 + \varepsilon/3$; $x_3 = 2/3 - \varepsilon/3$; $x_4 = 2/3 + 2\varepsilon/3$ și intervalul optim de incertitudine $L_{4\,\text{opt}} = 1/3 + \varepsilon/3$.

Strategii secvențiale. După cum rezultă din denumire, fiecare pas al unei astfel de strategii pornește de la pasul precedent astfel încît intervalul de incertitudine obținut la un pas devine noul interval ce trebuie examinat. Pe această cale se evită prea multe puncte de diviziune.

În cazul *căutării secvențiale dihotome*, strategia universală ε-optimală pentru $n = 2$ se repetă succesiv. Se generalizează $L_{2\,\text{opt}} = (1 + \varepsilon)/2$ la relația de recurență

$$L_{2k\,\text{opt}} = (L_{2(k-1)\,\text{opt}} + \varepsilon)/2$$

și se obține pentru $n = 2k$ puncte, $L_{n\,\text{opt}} = 2^{-n/2} + \varepsilon(1 - 2^{-n/2})$. Se poate vedea că pentru același n lungimea intervalului este mai mică decît aceea obținută cu strategia universală minimax optimală.

Exemplu. Calculul primelor 12 puncte de diviziune în căutarea minimului funcției $f(x) = |\,x^2 - 2\,|$ cu $\varepsilon = 10^{-4}$ arată efortul cerut: $x_1 = 1 - \varepsilon/2$; $x_2 = 1 + \varepsilon/2$; $x_3 = 1{,}5 - 3\varepsilon/4$; $x_4 = 1{,}5 + \varepsilon/4$; $x_5 = 1{,}25 - 5\varepsilon/8$; $x_6 = 1{,}25 + 3\varepsilon/8$; $x_7 = 1{,}375 - 11\varepsilon/16$; $x_8 = 1{,}375 + 5\varepsilon/16$; $x_9 = 1{,}4375 - 23\varepsilon/32$; $x_{10} = 1{,}4375 + 9\varepsilon/32$; $x_{11} = 1{,}40625 - 45\varepsilon/64$; $x_{12} = 1{,}40625 + 19\varepsilon/64$.

Procedeul de căutare Fibonacci. Numărul încercărilor ce trebuie făcute în decursul căutării este fixat. Pornind de la intervalul de căutare inițial $[a_1, b_1]$, intervalele de căutare următoare sînt fixate cu ajutorul unui șir de numere d_i care sînt determinate de numerele lui Fibonacci. *Numerele lui Fibonacci* $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_2 = 2$, $F_3 = 3$, $F_4 = 5$, $F_5 = 8$, $F_6 = 13$, $F_7 = 21$, $F_8 = 34$, $F_9 = 55$, $F_{10} = 89$, $F_{11} = 144$, $F_{12} = 233$, $F_{13} = 377$, $F_{14} = 610$ satisfac relația de recurență $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$. Se obține $1 = F_{i-1}/F_i + F_{i-2}/F_i$ și deoarece $F_{i-1} > F_{i-2}$, rezultă că $F_{i-2}/F_i < 1/2$. Se notează $L_1 = b_1 - a_1$, $d_1 = L_2 = L_1F_{n-1}/F_n$; $d_2 = L_3 = L_1F_{n-2}/F_n$, $d_3 = L_2F_{n-3}/F_{n-1} = L_1F_{n-3}/F_n$, $d_4 = L_3F_{n-4}/F_{n-2} = L_1F_{n-4}/F_n, \ldots, d_{n-1} = L_n = L_{n-2}F_1/F_3 = \ldots = L_1/F_n$. Întrucît $F_n > 2^{n/2}$ pentru $n \geqslant 3$, lungimea intervalului L_n este mai mică decît aceea obținută prin căutare dihotomă pentru același n. Cu ajutorul acestora se fixează valorile x_i. Din $x_1 = a_1 + d_2$, $x_2 = b_1 - d_2$ rezultă că $x_2 - x_1 = L_1 - 2d_2 > 0$ sau $x_2 > x_1$, întrucît $d_2 < L_1/2$. Pentru intervalul de căutare se obține $[a_1, b_1 - d_2]$ sau $[a_1 + d_2, b_1]$ de aceeași lungime $L_1 - d^2 = L_1\,[(F_n - F_{n-2})/F_n] = L_1F_{n-1}/F_n = L_2 = d_1$ Punctul x_3 și noul interval de căutare depind de valorile funcției $f(x_1)$ și $f(x_2)$:

pentru $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ se notează $a_2 = a_1$, $b_2 = x_2$ și $x_3 = a_2 + d_3$, unde $a_2 = a_1 < x_3 < x_1 < x_2 = b_2$. Din compararea valorilor funcției în punctele x_3 și x_1 rezultă două noi intervale de incertitudine $[a_1, x_1]$, $[x_3, x_2]$ de lungime $L_3 = d_2$.

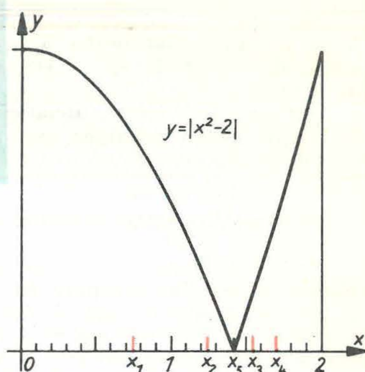
pentru $f(x_1) < f(x_2)$ se ia $a_2 = x_1$, $b_2 = b_1$ și $x_3 = b_2 - d_3$, unde $a_2 \leqslant x_1 < x_2 < x_3 < b_1 = b_2$. Din compararea valorilor funcției în punctele x_2 și x_3 rezultă două noi intervale de incertitudine posibile $[x_1, x_3]$, $[x_2, b_1]$ de lungime $L_3 = d_2$.

Pentru determinarea lui x_4 se aplică intervalului $[a_2, b_2]$ aceleași argumente care au condus la punctul x_3. Atunci d_4 ia locul lui d_3 și lungimea intervalului este $L_4 = d_3$. Punctele următoare pînă la x_n se găsesc în mod similar.

Exemplu. Dacă minimul funcției $|\,x^2 - 2\,| = f(x)$ este determinat prin procedeul de căutare al lui Fibonacci, se obține pentru lungimile intervalelor de incertitudine (cu trei zecimale):

$L_1 = 2{,}000$, $L_2 = 1{,}236$, $L_3 = 0{,}764$, $L_4 = 0{,}472$, $L_5 = 0{,}292$, $L_6 = 0{,}180$, $L_7 = 0{,}113$, $L_8 = 0{,}068$, $L_9 = 0{,}045$, $L_{10} = 0{,}023$
și punctele de subdiviziune $x_1 = 0{,}764$, $x_2 = 1{,}236$, $x_3 = 1{,}528$, $x_4 = 1{,}708$, $x_5 = 1{,}416$, $x_6 = 1{,}348$, $x_7 = 1{,}461$, $x_8 = 1{,}393$, $x_9 = 1{,}438$, $x_{10} = 1{,}415$ (fig. 29.4.3).

Procedeul secțiunii de aur. Acest procedeu de căutare este cu ceva mai puțin eficient decît procedeul Fibonacci, însă nu necesită dinainte fixarea pașilor.



29.4.3. Intervalele unui procedeu al lui Fibonacci pentru $y = |x^2 - 2|$

În intervalul de căutare $[a, b]$ se fixează două puncte x și x' cu ajutorul unui parametru care rămîne de determinat. Din $\tau = (b - a)/(b - x)$ se obține $x = a/\tau + b(1 - 1/\tau)$ și din $\tau = (b - x)/(b - x')$ valoarea $x' = a/\tau^2 + b(1 - 1/\tau^2)$; pentru $a = 0$ și $b = 1$ de exemplu se obțin $x = 2/3$, $x' = 8/9$. O configurație de puncte echivalentă cu (a, x, x', b) într-un interval de căutare redus depinde de valorile funcției în punctele x și x'; pentru $f(x') \geqslant f(x)$ se alege $a: = x$, $x: = x'$ și $x': = b(1 - 1/\tau) + a/\tau^2$ și pentru $f(x') < f(x)$ pe de altă parte $b: = x'$, $x': = x$, $x: = b(1 - 1/\tau) + a/\tau$. Lungimea L a intervalului de incertitudine se schimbă atunci pentru $f(x') \geqslant f(x)$ prin $L: = L(1 - 1/\tau^2)$ și pentru $f(x') < f(x)$ pentru $L: = L/\tau$. Orice punct într-un interval poate fi privit în aceeași măsură ca un extrem. Astfel, probabilitatea ca un interval să conțină un extrem este proporțională cu lungimea intervalului: pentru cele două intervale aceste probabilități se găsesc în raportul $(1 - 1/\tau^2) : 1/\tau$. Dar cel mai favorabil lanț de decizii este acela în care trebuie să se facă deosebire între două cazuri egal probabile. Pentru aceasta $1 - 1/\tau^2 = 1/\tau$ sau valoarea τ-optimă este $\tau = 1/2 + (1/2)\sqrt{5} = 1{,}618033989...$ (vezi cap. 7). Pentru intervalele de incertitudine are loc relația de recurență $L: = L/\tau$, astfel încît după n pași de căutare $L_n = L_1/\tau^n$. Eficiența acestui procedeu față de eficiența procedeului dihotomic se găsește în raportul $\tau/\sqrt{2}$, deci este aproximativ cu 14% mai mare. Legătura cu procedeul Fibonacci rezultă din relația $F_i = (1/\sqrt{5})[\tau^{i+1} - 1/(-\tau)^{i+1}]$. Pentru $i = 1$ și $i = 2$ se obține prin substiție $F_1 = 1$ și $F_2 = 2$. Totuși în general formula de recurență $F_{i+1} = F_i + F_{i-1}$ este valabilă și pentru membrul al doilea al relației; într-adevăr dacă se înmulțesc ambii membri ai relației $\tau^{i+1} - 1(-\tau)^{i+1} = \tau^i - 1/(-\tau)^i + \tau^{i-1} - 1/(-\tau)^{i-1}$ cu $(-\tau)^{i+1}$, atunci indiferent dacă i este par sau impar se obține relația $\tau^{2i}(\tau^2 - \tau - 1) = \tau^2 - \tau - 1$ care este identic satisfăcută, τ fiind determinat din $\tau^2 - \tau - 1 = 0$.

Același rezultat se obține cu *metoda z-transformării* pentru relații de recurență liniare. Se introduce funcția auxiliară $F(z) = \sum_{i=0}^{\infty} F_i z^i$ și se consideră că din relația $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$, rezultă $F_i = F_{i-1} + F_{i-3}$, $\sum_{i=2}^{\infty} F_i z^i = z \sum_{i=2}^{\infty} F_{i-1} z^{i-1} + z^2 \sum_{i=2}^{\infty} F_{i-2} z^{i-2}$. Se obține $F(z) = F_0 + F_1 z + \sum_{i=2}^{\infty} F_i z^i = F_0 + F_1 z - zF_0 + zF_0 + z\sum_{i=0}^{\infty} F_i z^i + z^2 \sum_{i=0}^{\infty} F_i z^i$ sau $-F_0 + z(F_0 - F_1) = z^2 F(z) + zF(z) - F(z)$, ceea ce dă $F(z) = [(F_0 - F_1)z - F_0]/(z^2 + z - 1) = \frac{-1}{z^2 + z - 1}$. Pentru $z_{1,2} = -(1/2) \pm (1/2)\sqrt{5}$ dezvoltarea în fracții simple este $F(z) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{z_1 - z} - \frac{1}{z_2 - z}\right)$; fiecare termen al sumei poate fi dezvoltat în serie geometrică de puteri ale lui z și compararea coeficienților cu seriile $F(z) = \sum_{i=0}^{\infty} F_i z^i$ dă relația stabilită.

Exemplu. Determinarea minimului funcției $f(x) = |x^2 - 2|$ prin procedeul secțiunii de aur dă pentru intervalul inițial $a_1 = 0$, $b_1 = 2$ punctele $x_1 = 0{,}764$, $x_2 = 1{,}236$, $x_3 = 1{,}528$, $x_4 = 1{,}708$, $x_5 = 1{,}415$, $x_6 = 1{,}348$, $x_7 = 1{,}459$, $x_8 = 1{,}391$, $x_9 = 1{,}373$, $x_{10} = 1{,}399$, $x_{11} = 1{,}405$ (fig. 29.4.3).

Comparativ cu metoda iterației $x_{i+1} = x_i - (x_i^2 - 2)/3$, procedeul secțiunii de aur tinde către soluția cerută vizibil mai încet. Totuși el este aplicabil unor funcții mai generale, pe cînd procesul iterării este aplicabil numai unor funcții particulare.

Procese de căutare multidimensionale și sisteme de ecuații neliniare

Printr-o generalizare a procedeului de căutare unidimensional se încearcă determinarea valorilor extreme ale funcțiilor de mai multe variabile sau a soluțiilor sistemelor de ecuații neliniare. În acest scop este necesar să se folosească calculatoare moderne suficient de mari, dar *eficiența* metodei este mai mică. Dacă în cazul $n = 1$ eliminînd 90% din variabile astfel încît intervalul de nedeterminare este numai 10% din cel inițial, pentru $n = 2$ rămîne o nedeterminare de 19% deoarece $0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}81$, în cazul $n = 3$ nedeterminarea este de 27% deoarece $(0{,}9)^3 \approx 0{,}73$, și crește la 34% pentru $n = 4$, la 41% pentru $n = 5$, la 47% pentru $n = 6$ și la 52% pentru $n = 7$.

În cazul $n = 1$ pentru ecuația neliniară $f(x) = 0$ se ajunge cu ajutorul relației echivalente $x = x - cf(x)$ la procesul iterativ $x^k = x^{k-1} = cf(x^{k-1})$, unde k și $k - 1$ sînt indici. Constanta c se determină în mod optim printr-un criteriu de concordanță. Generalizînd pentru $n = 2$, se caută soluția sistemului de ecuații

$$f_1(x_1, x_2) = 0, \quad \text{unde} \quad x_1 = x_1 - c_{11}f_1(x_1, x_2) - c_{12}f_2(x_1, x_2),$$
$$f_2(x_1, x_2) = 0, \quad \text{unde} \quad x_2 = x_2 - c_{21}f_1(x_1, x_2) - c_{22}f_2(x_1, x_2),$$

cu *matricea nesingulară* $\mathbf{C} = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$, aleasă în conformitate cu criteriul de concordanță.

Într-un *proces iterativ* nu numai x_1^k și x_2^k depind de valorile x_1^{k-1} și x_2^{k-1} ale procesului de iterare precedent, dar și constantele $c_{ij}(x_1^k, x_2^k)$ depind de $c_{ij}(x_1^{k-1}, x_2^{k-1})$. Valorile lor determină comportarea la limită, care poate fi îmbunătățită prin *algoritmi de iterare în mai mulți pași* în care aproximația în al k-lea pas al iterării depinde de un număr finit de aproximări precedente.

Pentru căutarea multidimensională a valorilor exterme, de exemplu pentru maximizarea funcției $f(x_1, x_2)$ o condiție necesară este $f_{x_1}(x_1, x_2) = \dfrac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2) = 0$ și $f_{x_2}(x_1, x_2) = \dfrac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2) = 0$ în interiorul domeniului de definiție. Prin rezolvarea acestui sistem neliniar de ecuații se obțin nu numai puncte de maxim ci și puncte de minim sau puncte șa.

La stabilirea șirului de iterații pentru determinarea rădăcinilor alegerea matricei $\mathbf{C}$ va asigura nu numai o convergență rapidă, dar și apropierea de poziția extremului căutat.

Nu se pot face recomandări satisfăcătoare în general pentru alegerea matricei de căutare $\mathbf{C}$. În *procedeele de căutare stochastice* matricea $\mathbf{C}$ depinde de hazard; se fac pași aleatori de îmbunătățire dar șirul acestor pași va converge către punctul cerut cu probabilitatea 1, adică sigur.

Metoda lui Newton. Generalizînd metoda lui Newton unidimensională în cazul $n = 2$, se înlocuiesc suprafețele $f_1(x_1, x_2) = 0$ și $f_2(x_1, x_2) = 0$ prin planele lor tangente în vecinătatea punctului determinat și se ia ca aproximare următoare punctul în care dreapta de intersecție a celor două plane taie planul $z = 0$.

Utilizînd din nou pe k drept indice, planele tangente sînt

$$z = f_1(x_1^{k-1}, x_2^{k-1}) + \frac{\partial f_1(x_1^{k-1}, x_2^{k-1})}{\partial x_1}(x_1 - x_1^{k-1}) + \frac{\partial f_1(x_1^{k-1}, x_2^{k-1})}{\partial x_2}(x_2 - x_2^{k-1}),$$

$$z = f_2(x_1^{k-1}, x_2^{k-1}) + \frac{\partial f_2(x_1^{k-1}, x_2^{k-1})}{\partial x_2}(x_1 - x_1^{k-1}) + \frac{\partial f_2(x_1^{k-1}, x_2^{k-1})}{\partial x_2}(x_2 - x_2^{k-1}).$$

Făcînd $z = 0$ și rezolvînd sistemul de ecuații liniare rezultat în raport cu $x_1 - x_1^{k-1}$ și $x_2 - x_2^{k-1}$, se obține matricea $\mathbf{C}$ ca inversa matricei jacobiene a sistemului de ecuații.

Exemplu. Dacă se cere soluția sistemului de ecuații

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 + 3\lg x_1 - x_2^2 = 0.$$
$$f_2(x_1, x_2) = 2x_1^2 - x_1x_2 - 5x_1 + 1 = 0,$$

atunci se determină intersecția curbelor f_1 = const și f_2 = const și se obțin aproximativ punctele (1,4; − 1,5) și (3,4; 2,2). Ca aproximare inițială se alege punctul (3,4; 2,2). Din matricea jacobiană

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{3 \cdot 0,43429}{x_1} & -2x_2 \\ 4x_1 - x_2 - 5 & -x_1 \end{pmatrix}$$

se obțin matricea **C** și inversa ei și deci schema de recurență. Din aceasta se obțin succesiv aproximațiile alăturate

	x_1	x_2
$k = 1$	3,4899	2,2633
$k = 2$	3,4891	2,2621
$k = 3$	3,4875	2,2626

Pentru aceste valori $f_1(x_1^3, x_2^3) = 0,0002$ și $f_2(x_1^3, x_2^3) = 0,0000$.

Metoda gradientului sau metoda celei mai rapide descreșteri. Direcția creșterii celei mai mari a funcției $f(x_1, x_2)$ este dată de direcția *gradientului* $(f_{x_1}(x_1, x_2), f_{x_2}(x_1, x_2))$.

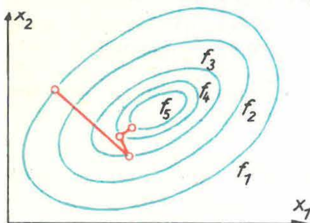
Dacă se cere găsirea minimului funcției $f(x_1, x_2)$, atunci trebuie să rezulte o îmbunătățire la o deplasare a punctului (x_1^{k-1}, x_2^{k-1}) obținut în direcția opusă gradientului. Aceasta înseamnă folosirea următorului proces de iterare:

$$x_1^k = x_1^{k-1} - lf_{x_1}(x_1^{k-1}, x_2^{k-1}) \text{ și } x_2^k = x_2^{k-1} - lf_{x_2}(x_1^{k-1}, x_2^{k-1}) \text{ cu } l > 0.$$

Astfel în acest caz matricea **C** va fi o matrice diagonală avînd pe diagonală elementele l. Dacă pentru un l fixat se face un pas de probă în care se examinează dacă a avut loc o îmbunătățire sau nu și ținîndu-se seama de succes, se alege un nou l, atunci metoda se numește *metoda gradientului*. Se poate totuși încerca alegerea optimă a lui l la fiecare pas. O cerință naturală pentru l este minimizarea funcției

$$F(l) = f[x_1^{k-1} - lf_{x_1}(x_1^{k-1}, x_2^{k-1}), x_2^{k-1} - lf_{x_2}(x_1^{k-1}, x_2^{k-1})].$$

Valoarea cerută pentru l se poate determina de exemplu printr-un proces de căutare unidimensional (fig. 29.4.4). Dacă se alege valoarea optimă a lui l la fiecare pas, atunci metoda poartă numele de *metoda celei mai rapide descreșteri*.



29.4.4. Metoda gradientului; liniile de contur $f_1 > f_2 > f_3 > f_4 > f_5$ pentru $f(x_1, x_2)$

Exemplu. Metoda va fi ilustrată pentru determinarea minimului funcției

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - x_2 = 2(x_1 - 1/2)^2 + (x_2 - 1/2)^2 - 3/4.$$

La acest caz simplu minimul $x_1 = x_2 = 0,5$ este cunoscut. Prin *metoda gradientului* se obține formula de recurență

$$x_1^k = x_1^{k-1} - 2l(2x_1^{k-1} - 1) \text{ și } x_2^k = x_2^{k-1} - l(2x_2^{k-1} - 1).$$

Prin *metoda celei mai rapide descreșteri* optimul l se obține din

$$l = [4(2x_1^{k-1} - 1)^2 + (2x_2^{k-1} - 1)^2]/[16(2x_1^{k-1} - 1)^2 + 2(2x_2^{k-1} - 1)^2].$$

Dacă se începe cu aproximarea inițială $x_1^0 = x_2^0 = 0$, atunci se obțin succesiv valorile alăturate pentru l și pentru aproximațiile îmbunătățite:

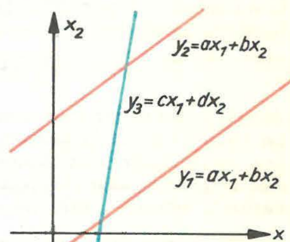
$l^0 = 0,278$	$x_1^1 = 0,556$	$x_2^1 = 0,278$
$l^1 = 0,414$	$x_1^2 = 0,457$	$x_2^2 = 0,461$
$l^2 = 0,283$	$x_1^3 = 0,504$	$x_2^3 = 0,482$
$l^3 = 0,429$	$x_1^4 = 0,497$	$x_2^4 = 0,497$

29.5. Metode numerice pentru rezolvarea ecuațiilor liniare și a inegalităților

Ecuații liniare

O soluție a unui sistem de m ecuații liniare $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ cu $i = 1, 2, ..., n$, este formată din n numere x_j, $j = 1, 2, ..., n$. În spațiul n-dimensional oricare dintre aceste ecuații cu y_i fixat poate fi interpretată ca un *hiperplan* cu vectorul normal $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$. Dacă $m = n$, acești vectori normali sînt liniar independenți, adică dacă ecuația $\sum_{i=1}^{m} l_i\mathbf{a}_i = 0$ este satisfăcută numai pentru toți l_i nuli, atunci cele $n = m$ hiperplane au un punct de intersecție comun cu coordonatele $x_j, j = 1, 2, ..., n$, unic determinate. Dacă $m < n$ și cei m vectori normali sînt liniar independenți, atunci rezultatul corespunzător are loc pentru subspațiul m-dimensional determinat de acestea. Pentru $m > n$ cei m vectori $\mathbf{a}_i$ vor fi cu siguranță liniar dependenți. Dacă vectorul $\mathbf{a}_{i_0}$ este o combinație liniară de unii dintre ceilalți vectori $\mathbf{a}_j$ și dacă în plus y_{i_0} este aceeași combinație de y_j și hiperplanul corespunzător lui $\mathbf{a}_{i_0}$ conține intersecția hiperplanelor corespunzătoare acestor $\mathbf{a}_j$, atunci hiperplanul corespunzător lui $\mathbf{a}_{i_0}$ nu prezintă condiții în plus și ecuația lui nu trebuie luată în considerație. Apare o contradicție dacă y_{i0} nu este aceeași combinație liniară de y_j ca $\mathbf{a}_{i_0}$ de $\mathbf{a}_j$. În acest caz sistemul liniar de ecuații dat este nerezolvabil.

Pentru $n = 2$ hiperplanele sînt drepte care se intersectează, sînt paralele sau coincid fig. 29.5.1).



29.5.1. Drepte ca hiperplane în planul euclidian; două drepte se intersectează, coincid sau sînt paralele

Eliminarea jordaniană. Sistemul de ecuații este aranjat sub forma unui tablou astfel încît linia r conține coeficienții (a_{rj} ai lui x_j cu $j = 1, 2, ..., n$) și coloana s conține coeficienții a_{is} ai lui x_s cu $i = 1, 2, ..., m$.

	x_1	x_2	...	x_s	...	x_n	
y_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1s}	...	a_{1n}	1
y_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2s}	...	a_{2n}	2
$\vdots$							
y_r	a_{r1}	a_{r2}	...	a_{rs}	...	a_{rn}	r
$\vdots$							
y_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{ms}	...	a_{mn}	m
	1	2		s		n	

Dacă unul din coeficienți este diferit de zero, fie $a_{rs} \neq 0$, atunci x_s poate fi eliminat folosind y_r. Din $y_r = a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rs}x_s + ... + a_{rn}x_n$ rezultă că $x_s = (1/a_{rs})(- a_{r1}x_1 - a_{r2}x_2 - ... - y_2 - ... - a_{rn}x_n)$.

Substituirea acestor valori pentru x_s duce la schimbarea tuturor coeficienților din tablou. Aceia din coloana s, adică coeficienții variabilei y_r, devin atunci $a_{1s}/a_{rs}, a_{2s}/a_{rs}, ..., a_{ms}/a_{rs}$. Pentru b_{ij} care rămîn cu $i \neq r$ și $j \neq s$, $b_{ij} = a_{ij} - (a_{is} \cdot a_{rj})/a_{rs}$. Tabloul ia forma:

	x_1	x_2	...	y_r	...	x_n	
y_1	b_{11}	b_{12}	...	$+a_{1s}/a_{rs}$	...	b_{1n}	1
y_2	b_{21}	b_{22}	...	$+a_{2s}/a_{rs}$	...	b_{2n}	2
$\vdots$							
x_2	$-a_{r1}/a_{rs}$	$-a_{r2}/a_{rs}$	...	$+1/a_{rs}$	...	$-a_{rn}/a_{rs}$	r
$\vdots$							
y_m	b_{m1}	b_{m2}	...	$+a_{ms}/a_{rs}$	...	b_{mn}	m
	1	2		s		n	

În acest mod se încearcă în măsura în care este posibil înlocuirea fiecărui x_s printr-un y_r. Acest proces se termină atunci cînd fiecare coeficient aflat la intersecția liniei unui y_j încă neschimbat cu coloana unui x_i rămas este nul. Variabilele x_s schimbate sînt atunci combinații liniare de variabilele y_r schimbate și de variabilele x_i încă neschimbate. Aceste variabile x_i nu mai satisfac alte condiții și pot fi alese în mod arbitrar ca parametri liberi. Variabilele y_j care nu au fost schimbate sînt atunci combinații liniare numai de variabilele y_r schimbate. Dacă valorile date pentru y_j nu satisfac aceste condiții, atunci sistemul de ecuații nu are soluții. Dacă procesul nu se termină astfel ca toate x_s să poată fi înlocuite prin variabilele y_r, atunci în tabloul final x_s sînt funcții unic determinate de variabilele y_r schimbate. Orice y_j neschimbată care este încă prezentă este atunci o combinație liniară de variabilele y_r. Dacă valorile date pentru y_j nu satisfac aceste condiții, pot să apară contradicții și sistemul de ecuații nu are soluții.

Dacă pentru $m = n$ variabilele x_s pot fi schimbate cu y_r, atunci tabloul final reprezintă inversa $\mathbf{A}^{-1}$ a matricei $\mathbf{A}$ a tabloului inițial.

Exemplul 1. Eliminarea jordaniană aplicată sistemului de ecuații alăturat este reprezentată în tablourile de mai jos, unde coeficienții $a_{rs} \neq 0$ care indică linia unde începe pasul următor sînt trecuți în paranteză. Ecuația de eliminare se găsește în chenarul roșu de sub tablou.

$$x_1 + x_2 - x_3 = y_1 = 2$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = y_2 = 4$$
$$x_1 - x_2 - x_3 = y_3 = 8$$

	x_1	x_2	x_3
y_1	(1)	1	−1
y_2	1	−1	1
y_3	1	−1	−1

$x_1 = y_1 - x_2 + x_3$

	y_1	x_2	x_3
x_1	1	−1	1
y_2	1	−2	(2)
y_3	1	−2	0

$x_3 = -y_1/2 + x_2 + y_2/2$

	y_1	x_2	y_2
x_1	1/2	0	1/2
x_3	−1/2	1	1/2
y_3	1	(−2)	0

$x_2 = y_1/2 - y_3/2$

	y_1	y_3	y_2
x_1	1/2	0	1/2
x_3	0	−1/2	1/2
x_2	1/2	−1/2	0

Acest sistem de ecuații are o soluție unică. Din substituții se obțin $x_1 = 3$, $x_2 = -3$, $x_3 = -2$

Exemplul 2. Pentru sistemul de ecuații

$$x_1 + x_2 + x_3 = y_1 = 2$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = y_2 = 4$$
$$3x_1 - x_2 + x_3 = y_3 = 8$$

se obține în mod similar

	x_1	x_2	x_3
y_1	1	1	−1
y_2	1	−1	1
y_3	3	−1	(1)

$x_3 = -3x_1 + x_2 + y_3$

	x_1	x_2	y_3
y_1	(4)	0	−1
y_2	−2	0	1
x_3	−3	1	1

$x_1 = y_1/4 + y_3/4$

	y_1	x_2	y_3
x_1	1/4	0	1/4
y_2	−1/2	(0)	1/2
x_3	−3/4	1	1/4

Înlocuirea variabilei x_2 nu este posibilă, deoarece coeficientul în paranteză este nul. Din linia acestui coeficient rezultă condiția $y_2 = (y_3 - y_1)/2$ pentru existența unei soluții. Această condiție nu este îndeplinită pentru valorile numerice date și sistemul de ecuații nu are soluție. Dacă valorile date ar fi $y_1 = 2$, $y_2 = 3$, $y_3 = 8$, atunci $y_2 = (y_3 - y_1)/2$ ar fi satisfăcută, ceea ce ar conduce la soluția $x_1 = 2{,}5$, $x_3 = 0{,}5 + x_2$, unde valoarea lui x_2 se poate alege în mod arbitrar.

Sistemul de ecuații liniare modificat $y_i = 0 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i$ duce la o altă formă a problemei de schimbare jordaniană. Tabloul inițial are o coloană suplimentară pentru b_i. Deoarece după fiecare eliminare a lui x_s prin y_r coeficienții coloanei s admit pe $y_r = 0$ ca factor, această coloană poate fi omisă

	x_1	x_2	...	x_n	$-b_i$	
y_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	$-b_1$	1
y_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	$-b_2$	2
⋮						r
y_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	$-b_m$	m
	1	2	s	n	$n+1$	

Exemplu. Pentru sistemul

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - 2 &= y_1 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 4 &= y_2 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 8 &= y_3 = 0 \end{aligned}$$

se obține

	x_1	x_2	x_3	1
y_1	(1)	1	-1	-2
y_2	1	-1	1	-4
y_3	1	-1	-1	-8

$x_1 = y_1 - x_2 + x_3 + 2$

	x_2	x_3	1
x_1	-1	1	2
y_2	-2	(2)	-2
y_3	-2	0	-6

$x_3 = x_2 + y_2/2 + 1$

	x_2	1
x_1	0	3
x_3	1	1
y_3	(-2)	-6

$x_2 = -y_3/2 - 3$

	1
x_1	3
x_3	-2
x_2	-3

Deci soluția este $x_1 = 3$, $x_2 = -3$, $x_3 = -2$.

Metoda lui Gauss. Această metodă se obține din procedeul de eliminare al lui Jordan. Liniile corespunzătoare oricărei variabile schimbate x_i nu se mai trec în tablou ci se notează separat. În acest mod dimensiunea tabloului scade continuu și la sfîrșit se obține un sistem de ecuații liniare cu o matrice triunghiulară foarte ușor de rezolvat.

Exemplu. Pentru exemplul de mai sus se obțin succesiv următoatele tablouri și ecuații, de unde soluția se obține recursiv:

	x_1	x_2	x_3	1
y_1	(1)	1	-1	-2
y_2	1	-1	1	-4
y_3	1	-1	-1	-8

$x_1 = -x_2 + x_3 + 2$

	x_2	x_3	1
y_2	-2	(2)	-2
y_3	-2	0	-6

$x_3 = x_2 + 1$

	x_2	1
y_3	-2	-6

$x_2 = -3$

sau $x_2 = -3$, $x_3 = -2$, $x_1 = 3$.

Procese iterative de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare

Prin substituția $a_{ij} = h_{ij} + c_{ij}$ sistemul de ecuații dat $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ se descompune în $\sum_{j=1}^{n} h_{ij}x_j + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j = b_i$. Coeficienții h_{ij} sînt aleși astfel încît matricea $\mathbf{H} = (h_{ij})$ să aibă inversa $\mathbf{H}^{-1} = (h_{ri}^{-1})$ care se formează ușor, de exemplu ca o matrice diagonală. Rezultă

că $x_r = \sum_i h_{ri}b_i - \sum_{i,j} h_{ri}^{-1}c_{ij}x_j$. Acest sistem de ecuații se poate scrie sub formă iterativă. Dacă se ia valoarea inițială $x_j^0 = \sum_i h_{ri}^{-1}b_i$, atunci se obține $x_r^k = x_j^0 - \sum_{i,j} h_{ri}^{-1}c_{ij}x_j^{k-1}$. Acest proces converge către soluția sistemului liniar de ecuații dacă și numai dacă valoarea absolută a oricărei valori proprii ale matricei $\sum_i (h_{ri}^{-1}c_{ij}) = (k_{ij})$ este mai mică decît 1. O valoare proprie a matricei (k_{ij}) este prin definiție numărul l pentru care sistemul de ecuații $\sum_j k_{ij}x_j = lx_i$ are o soluție nebanală, adică o soluție pentru care nu toți x_j sînt nuli. Aceasta înseamnă $\sum_j \left|\sum_i h_{ri}^{-1}c_{ij}\right| < 1$ sau $\sum_r \left|\sum_i h_{ri}^{-1}c_{ij}\right| < 1$. Aceste condiții sînt satisfăcute de exemplu dacă matricea $\mathbf{K} = (k_{ij})$ satisface condiția $|k_{ii}| \geqslant \sum_{i \neq j} |k_{ij}|$. Creșterea aproximației succeive este dată de

$$x_k^r - x_r^{k-1} = \sum_{i,j} h_{ri}^{-1}c_{ij}(x_j^{k-1} - x_j^{k-2}).$$

Exemplu. Pentru rezolvarea prin iterare ecuațiile sistemului dat se exprimă într-o formă convenabilă iterării:

$10x_1 - x_2 + x_3 = 10$	→	$x_1^k = 0,1x_2^{k-1} - 0,1x_3^{k-1} + 1$
$x_1 + 5x_2 + x_3 = 5$		$x_2^k = -0,2x_1^{k-1} - 0,2x_3^{k-1} + 1$
$x_1 - x_2 + 10x_3 = 10$		$x_3^k = -0,1x_1^{k-1} + 0,1x_2^{k-1} + 1$

Pentru aproximarea inițială $x_1^0 = 1, x_2^0 = 1, x_3^0 = 1$ se obțin creșterile

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -0,4 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,04 \\ 0 \\ -0,04 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,004 \\ 0,016 \\ 0,004 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,0012 \\ -0,0016 \\ 0,0012 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}$$

Acestea adunate aproximării inițiale dau soluția aproximativă după patru pași de iterare $x_1^4 = 0,9652$, $x_2^4 = 0,6144$, $x_3^4 = 0,9652$.

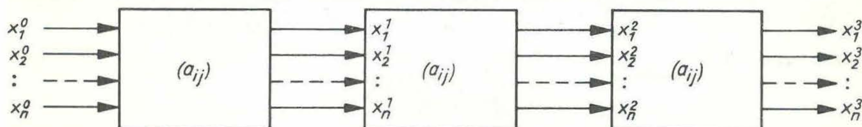
Probleme de valori proprii. Dacă privim sistemul de ecuații liniare $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j = x_i$ pentru $i = 1, 2, \ldots, n$ ca o descriere a unui sistem liniar cu y_j ca variabile de intrare și x_i ca variabile de ieșire a căror relație cauză-efect este dată prin matricea $\mathbf{A} = (a_{ij})$, atunci existența valorilor proprii l, ținînd seama de ecuația $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = lx_i$, înseamnă că *vectorul propriu* $(x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n)$ folosit ca variabilă de intrare rămîne neschimbat, abstracție făcînd de factorul de proporționalitate l. *Ecuația valorilor proprii* $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = lx_i$ este un sistem liniar omogen care are soluții diferite de zero dacă determinantul matricei $\mathbf{A} - l\mathbf{I}$, în care $\mathbf{I}$ este matricea unitate, se anulează, adică

$$\det(\mathbf{A} - l\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a_{11} - l & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - l & \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn} - l \end{vmatrix} = 0.$$

Această *ecuație caracteristică* prin care se determină valorile proprii este algebrică de gradul n. Pentru orice valoare proprie l se obține din ecuația valorilor proprii vectorul propriu cores-

punzător. Cu vectorii proprii este posibilă o decuplare a sistemului, adică se poate realiza ca fiecare variabilă de ieșire să depindă numai de o variabilă de intrare. În acest mod se pot introduce *oscilații normale* în sisteme mecanice oscilatorii. În *teoria giroscopului* se folosesc trei axe plasate pe direcțiile a trei vectori proprii independenți ai matricei momentelor de inerție în scopul obținerii unei forme simple a ecuațiilor dinamice. Teoria *n-portului* electric sau *2-portului* folosind *parametrii de undă* se bazează pe reprezentarea transformării liniare care corespunde lui $\mathbf{A} = (a_{ij})$ numai prin intermediul valorilor proprii și al vectorilor proprii.

Valoarea proprie cea mai mare în valoare absolută și vectorul propriu asociat se pot obține cu o regulă ce s-a dovedit practică în teoria transmisiei electrice. După această regulă se obține o aproximare a vectorului propriu și o estimare a valorii proprii cu valoarea absolută cea mai mare din vectorul de intrare al cărui lanț începe cu un vector de intrare arbitrar și folosește vectorul de ieșire al fiecărui pas ca vector de intrare al pasului următor, în conformitate cu ecuația $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = lx_i$ pentru $i = 1, 2, ..., n$ (fig. 29.5.2). Ultimul vector de ieșire reprezintă aproximativ vectorul propriu și raportul componentelor corespunzătoare ale aproximațiilor succesive reprezintă valoarea proprie. Procesul iterativ $x_i^k = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^{k-1}$ este valabil cu vectorul inițial arbitrar inițial $x_i^0 = b_i$. Rapoartele x_i^k/x_i^{k-1} care tind să fie egale servesc ca estimații ale valorii proprii cu valoare absolută cea mai mare.



29.5.2. Schema unui lanț pentru determinarea valorilor proprii de valoare absolută maximă

Exemplu. Pentru sistemul de ecuații

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= lx_1 \\ 2x_2 + x_3 &= lx_2 \\ x_2 + x_3 &= lx_3 \end{aligned}$$

prin iterare cu valorile inițiale $x_1^0 = 1$, $x_2^0 = 1$, $x_3^0 = 1$ se obține succesiv

x_1	0	−3	−11	−32	−87	−231	−608
x_2	3	8	21	55	144	377	987
x_3	2	5	13	34	89	233	610
$k=$	1	2	3	4	5	6	7

Pentru x_i^7/x_i^6 se obțin succesiv aproximările valorii proprii cu valoare absolută cea mai mare 2,633, 2,62, 2,62. Valorile proprii se obțin din matricea **A** și din ecuația caracteristică

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1-l & -1 & 0 \\ 0 & 2-l & 1 \\ 0 & 1 & 1-l \end{vmatrix} = (1-l)^2(2-l)-(1-l) = 0$$

cu $1-l = 0$ sau $l_1 = 1$ și $l^2 - 3l + 2 = 1$ sau $l_2 = (3 + \sqrt{5})/2 \approx 2{,}6173$ și $l_3 = (3-\sqrt{5})/2 \approx$ $\approx 0{,}3825$.

Inegalități liniare

În aplicațiile metodelor matematice în economie și planificare n-uplurile $(x_1, x_2, ..., x_n)$ se determină din sisteme de inegalități $y_i = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i \geqslant 0$ pentru $i = 1, 2, ..., m$. Dacă

n-uplul este privit ca punct în spațiul n-dimensional, atunci oricare din cele m inegalități determină un semispațiu mărginit de hiperplanul $-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i = 0$. Pentru $m \leqslant n$ hiperplanele se intersectează în subspații de dimensiune de cel puțin $n-m$. Pentru cazul $m > n$, important în practică, configurația intersecției conține puncte care sînt vîrfuri ale intersecției semispațiilor. Această intersecție este regiunea căutată a soluțiilor inegalităților date. Aceasta este un poliedru convex n-dimensional; odată cu două puncte interioare sau de pe frontieră, acesta conține și toate punctele aflate pe dreapta care le unește. Un poliedru finit, care nu conține puncte la distanța infinită, este complet determinat prin vîrfurile sale. În ipoteza $m > n$ atunci cînd matricea coeficienților (a_{ij}) are *rangul* n se poate decide cu ajutorul unui algoritm dacă există n-upluri care sînt soluții ale inegalităților și în caz afirmativ, cum se pot obține vîrfurile regiunii soluțiilor.

Informația inițială

	$-x_1$	$-x_2$ ...	$-x_n$	1
y_1	a_{11}	a_{12}	a_{1n}	b_1
y_2	a_{21}	a_{22}	a_{2n}	b_2
$\vdots$				
y_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{mn}	b_m

$x_1 = -b_{11}y_1 - b_{12}y_2 - \ldots - b_{1n}y_n + b'_1$

$x_2 = -b_{21}y_1 - b_{22}y_2 - \ldots - b_{2n}y_n + b'_2$

$\cdots$

$x_n = -b_{n1}y_1 - b_{n2}y_2 - \ldots - b_{nn}y_n + b'_n$

	$-y_1$	$-y_2$ ...	$-y_n$	1
y_{n+1}	$b_{n+1,1}$	$b_{n+1,2}$ ...	$b_{n+1,n}$	b'_{n+1}
y_{n+2}	$b_{n+2,1}$	$b_{n+2,2}$ ...	$b_{n+2,n}$	b'_{n+2}
.	.	. ...	.	.
.	.	. ...	.	.
.	.	. ...	.	.
y_r	b_{r1}	b_{r2} ...	b_{rn}	b'_r
.	.	. ...	.	.
.	.	. ...	.	.
.	.	. ...	.	.
y_m	b_{m1}	b_{m2} ...	b_{mn}	b'_m

Din *informația inițială* prezentată în tabel se poate conchide că primele n linii de coeficienți a_{ij} sînt liniar independente. Prin eliminare jordaniană fiecare variabilă x_i poate fi schimbată cu o variabilă y_j. Se obține o *formă standard* a sistemului de inegalități compus din n ecuații și un tabel din care variabilele y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, cu $y_i \geqslant 0$ trebuie determinate astfel încît pentru $i = n+1, \ldots, m$ și y_i să fie nenegative, $y_i \geqslant 0$. Atunci n-uplul vîrfului este dat prin n ecuații.

Dacă în acest tabel $b'_i \geqslant 0$, atunci punctul $y_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, conduce la soluție. Dacă unul din numerele b'_i este negativ, de exemplu $b'_r < 0$, atunci punctul $y_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, nu satisface inegalitatea a r-a, deoarece $y_r = b'_r < 0$. Dacă în plus pentru fiecare coeficient al acestei linii $b_{rj} \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, atunci nu există puncte $y_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, care satisfac această inegalitate. Sistemul dat nu are soluție.

Dacă totuși pentru $b'_r < 0$ există un coeficient $b_{rs} < 0$ în linia a r-a, atunci se formează rapoartele b'_i/b_{is}, $i = n+1, \ldots, m$, cu coeficienții coloană s. Dacă printre b'_r/b_{rs} mai sînt și alte rapoarte nenegative, atunci este ales cel mai mic. Dacă acest lucru se întîmplă pentru linia i_0, atunci se alege ca element de schimb pentru un pas jordanian $b_{i_0 s}$ care duce la înlocuirea variabilei y_{i_0} prin y_s. Din ecuația $y_{i_0} = -\sum_{j=s} b_{i_0 j}y_j - b_{i_0 s}y_s + b'_{i_0}$ se obține $y_s = (-\sum_{j=s} b_{i_0 j}y_j - y_{i_0})/b_{i_0 s} + b'_{i_0}/b_{i_0 s}$. Termenul $b'_{i_0}/b_{i_0 s}$ este nenegativ. Dacă $i_0 = r$, atunci printr-un pas jordanian se ajunge ca toate elementele noii coloane 1 să fie nenegative și s-a obținut astfel un vîrf. Dacă totuși $i_0 \neq r$, atunci termenii celorlalte linii $i \neq i_0$ trebuie estimați. După pasul jordanian aceștia satisfac $-b_{is} \cdot b'_{i_0}/b_{i_0 s} + b'_i = b_{is}\,[(b'_i/b_{is}) - (b'_{i_0}/b_{i_0 s})]$. Pentru liniile i cu $b'_i/b_{is} > b'_{is}/b_{i_0 s} \geqslant 0$ se realizează o îmbunătățire în cazul $b_{is} < 0$, deoarece acest termen negativ are o valoare absolută mai mică după acest pas jordanian. Un termen pozitiv $b_{is} > 0$ rămîne pozitiv. Pentru liniile i cu $b'_i/b_{is} < 0$ în cazul $b_{is} < 0$ termenul b'_i este pozitiv și rămîne pozitiv; în cazul $b_{is} > 0$, b'_i a fost negativ, rămîne negativ și valoarea lui absolută chiar crește.

Se poate arăta că pentru cazurile $b'_i/b_{is} \geqslant 0$ dar $b_{is} < 0$, pentru $b'_i/b_{is} < 0$ dar $b_{is} > 0$ și pentru alte cazuri particulare ca $b'_{i_0}/b_{i_0 s} = 0$ rezultă un tablou avînd numai elemente pozitive după un număr finit de pași, obținînd astfel un vîrf $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ al regiunii soluțiilor.

Exemplu. Se cere determinarea unui vîrf al regiunii soluţiilor pentru inegalităţile

$$-x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2 \geqslant 0, \qquad 4x_1 - x_2 + 4x_3 - 5 \geqslant 0,$$
$$-3x_1 + x_2 - 4x_3 + 3 \geqslant 0, \qquad x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0.$$

Acest sistem este scris direct sub forma standard. Cu algoritmul de mai sus se obţin tablourile

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
y_1	1	-2	3	-2
y_2	-4	1	-4	-5
y_3	3	-1	4	3

	$-x_1$	$-x_2$	$-y_3$	1
y_1	$-5/4$	$-5/4$	$-3/4$	$-17/4$
y_2	-1	0	1	-2
x_3	$3/4$	$-1/4$	$1/4$	$3/4$

	$-x_3$	$-x_2$	$-y_3$	1
y_1	$20/12$	$-20/12$	$-4/12$	-3
y_2	$4/3$	$-1/3$	$4/3$	-1
x_1	$4/3$	$-1/3$	$1/3$	1

	$-x_3$	$-y_1$	$-y_3$	1
x_2	-1	$-12/20$	$4/20$	$36/20$
y_2	1	$-4/20$	$84/60$	$-8/20$
x_1	1	$-4/20$	$24/60$	$32/20$

	$-x_3$	$-y_2$	$-y_3$	1
x_2	-4	-3	-4	3
y_1	-5	-5	-7	2
x_1	0	-1	-1	2

29.6. Procedee nomografice

Nomogramele reprezintă grafic dependenţa funcţională dintre mai multe variabile astfel încît valoarea uneia dintre ele să poată fi obţinută din valorile date celorlalte, prin construcţii geometrice simple.

Nomograme pentru două variabile

Pentru relaţia funcţională $y = f(x)$, reprezentarea ei grafică într-un sistem de coordonate carteziene formează o nomogramă care se compune în general din cele două axe de coordonate şi dintr-o curbă. Graficul se poate modifica dacă pe axele Ox şi Oy se vor reprezenta nu multipli ai unei distanţe unitare ci respectiv lungimile $\xi = \varphi(x)$ şi $\eta = \psi(y)$, date de funcţiile monotone inversabile φ şi ψ. Pentru o alegere convenabilă a acestor funcţii se obţin hîrtii grafice în care suportul scalei $\eta = g(\xi)$ reprezintă relaţia dată $y = \psi^{-1}g(\varphi(x)) = f(x)$, astfel încît $f = \psi^{-1}g\varphi$, unde ψ^{-1} este inversa funcţiei ψ. *Suportul scalei* este o dreaptă dacă $\eta = \alpha + \beta\xi$, sau $\psi(y) = \alpha + \beta\varphi(x)$.

Exemple. 1. Pentru hîrtia *semilogaritmică* $\xi = x$ şi $\eta = \log_a x$. Funcţiile $y = Ka^{Lx}$ au ca suport de scală o dreaptă cu $\alpha = \log_a K$ şi $\beta = L$.

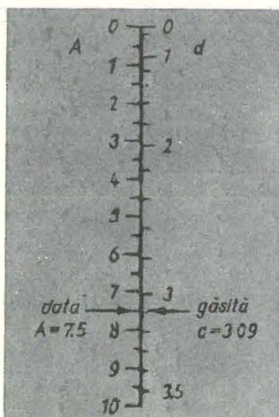
2. Pentru hîrtia dublu logaritmică $\xi = \log_a x$ şi $\eta = m \log_a y$. Funcţiile $y = Ka^{Lx}$ au ca suport de scală o dreaptă cu $\alpha = m \log_a K$ şi $\beta = mL$..

3. Pentru hîrtiile probabilistice, $\xi = x$ şi $\eta = F^{-1}(y)$, unde F^{-1} este inversa funcţiei lui Gauss:

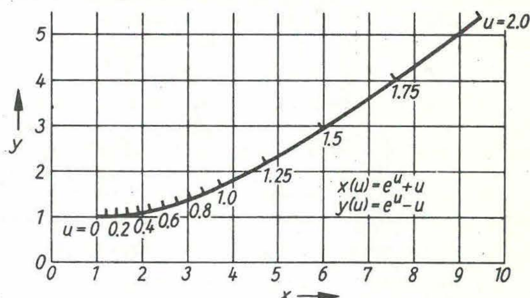
$$F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{w} \exp\left[-x^2/2\right] \mathrm{d}x.$$

Suportul scalei este atunci o dreaptă pentru funcţiile $y = F(k + Lx)$, adică pentru toate funcţiile de repartiţie normală.

Scale duble sînt suporturile de scală pe care pentru un număr suficient de puncte reprezentînd valorile lui x sînt aranjate alăturat şi valorile corespunzătoare lui y. Ne putem imagina scalele acestor valori transformate prin proiecţie paralelă de pe axele Ox şi Oy astfel încît aceste axe nu mai trebuie date (fig. 29.6.1). Se obţine o *scală funcţională* sau o *scală curbă* a unei variabile u, dacă orice punct al unei curbe marcat prin parametrul u este determinat într-un sistem fixat x, y prin $x = \varphi(u)$ şi $y = \psi(u)$. Curba acestei scale funcţionale reprezintă atunci relaţia dintre funcţiile $\varphi(u)$ şi $\psi(u)$.



29.6.1. Scală dublă pentru relația între aria unui cerc $A = \pi d^2/4$ și diametrul d



29.6.2. Suport de scală cu ecuația $(x - y)/2 = \ln[(x + y)/2]$

Exemplu. Pentru funcțiile $x = \varphi(u) = e^u + u$ și $y = \psi(u) = e^u - u$ din $u = \ln[(x + y)/2]$ se obține ecuația suportului de scală $(x - y)/2 = \ln[(x + y)/2]$ (fig. 29.6.2).

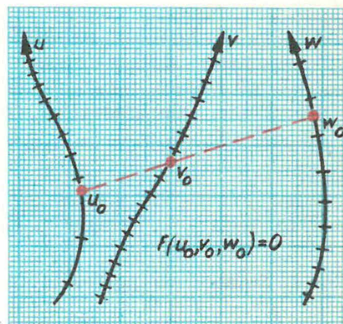
Nomograme pentru trei variabile

Pentru ca din relația funcțională $F(u, v, w) = 0$ să se poată citi ușor valorile uneia dintre variabile cunoscînd valorile celorlalte două, se folosesc nomograme cu puncte aliniate sau nomogramele de coliniaritate.

Nomograme cu puncte aliniate. Dacă se consideră fiecare dintre celei trei variabile ca un parametru, atunci cu ajutorul celor șase funcții φ_i, ψ_i, $i = 1, 2, 3$, se pot găsi trei scale funcționale într-un sistem de coordonate x, y unic, dat de ecuațiile $x_1 = \varphi_1(u)$, $y_1 = \psi_1(u)$, $x_2 = \varphi_2(v)$, $y_2 = \varphi_2(v)$, $x_3 = \varphi_3(w)$, $y_3 = \varphi_3(w)$. Pentru a ușura citirea se va mai pune pentru φ_i, ψ_i condiția suplimentară ca tripletele (u_0, v_0, w_0) legate prin $F(u_0, v_0, w_0) = 0$ să se găsească pe o dreaptă (fig. 29.6.2), adică ca triunghiul cu vîrfurile (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) să fie de arie nulă. Ecuația lui Soreau reprezintă o condiție necesară și suficientă pentru aceasta.

Ecuația lui Soreau	$\begin{vmatrix} 1 & \varphi_1(u) & \psi_1(u) \\ 1 & \varphi_2(v) & \psi_2(v) \\ 1 & \varphi_3(w) & \psi_3(w) \end{vmatrix} = 0$

Dacă există funcții φ_i, ψ_i care satisfac această ecuație, atunci scalele funcționale sînt determinate prin $x_i = \varphi_i$ și $y_i = \psi_i$, desigur nu în mod unic deoarece orice transformare a planului care transformă drepte în drepte duce la o nouă diagramă de coliniaritate. O astfel de transformare poate fi folosită pentru îmbunătățirea mărimii intervalului de variație a variabilelor și de asemenea a preciziei citirii.



29.6.3. Tripletul valorilor asociate (u_0, v_0, w_0) ale unei nomograme cu puncte aliniate pe o dreaptă

Formule și scale de bază pentru nomogramele cu puncte aliniate

(1) Cele trei puncte (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) se găsesc pe o dreaptă dacă $(y_1 - y_2)/(x_1 - x_2) = (y_1 - y_3)/(x_1 - x_3)$. Dacă se notează $x_1 = g_1(u)$; $y_1 = f_1(u)$; $x_2 = -g_2(v)$,

$y_2 = -f_2(v)$ și $x_3 = -g_3(w)$, $y_3 = -f_3(w)$, atunci nu există o relație liniară între f_i și g_i; rezultă trei scale curbilinii și relația de bază.

$$[f_1(u) + f_2(v)]/[g_1(u) + g_2(v)] = [f_1(u) + f_3(w)]/[g_1(u) + g_3(w)].$$

(2) Pentru $x_1 = 0$ ecuația de condiție (1) devine

$$(y_1 - y_2)/(-x_2) = (y_1 - y_3)/(-x_3) \text{ sau } y_1 = (y_3x_2 - y_2x_3)/(x_2 - x_3).$$

Atunci dacă scalele S_1, S_2, S_3 sînt determinate prin $x_1 = 0$, $y_1 = g_1(u)$, $x_2 = -1/g_2(v)$, $y_2 = f_2(v)/g_2(v)$ și $x_3 = 1/g_3(w)$, $y_3 = f_3(w)/g_3(w)$, atunci S_1 este o dreaptă și nu există relații liniare între f_2, g_2 și f_3, g_3. Relația de bază este

$$f_1(u) = [f_2(v) + f_3(w)]/[g_2(v) + g_3(w)].$$

(3) Dacă se substituie $y_2 = px_2 + q$ în ecuația de condiție (2) astfel încît $x_1 = 0$, $y_1 = f_1(u)$, $x_2 = -1/g_2(v)$, $y_2 = px_2 + q$; $x_3 = 1/g_3(w)$ și $y_3 = f_3(w)/g_3(w)$, atunci S_1 și S_2 sînt drepte, p *se* poate alege arbitrar și numai între f_3 și g_3 nu există relația liniară.

Relația de bază este $f_1(u) = [-p + qg_2(v) + f_3(w)]/[g_2(v) + g_3(w)]$

(4) Dacă prin $y_3 = mx_3 + c$ scala S_3 devine și ea liniară, unde m poate fi ales arbitrar, atunci prin condiții identice cu cele din (3) relația de bază devine

$$f_1(u) = [-p + qg_2(v) + m + cg_3(w)]/[g_2(v) + g_3(w)].$$

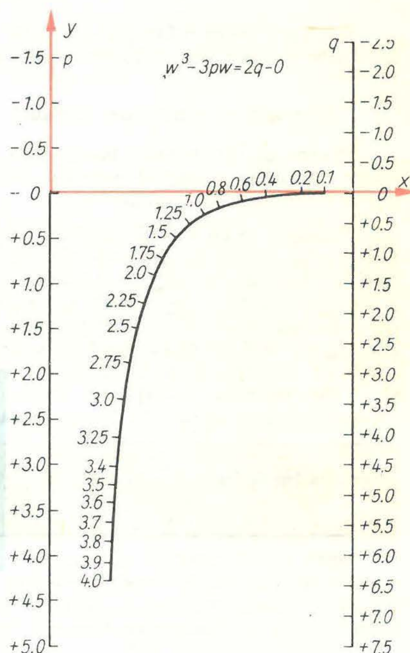
(5) Dacă se substituie $x_1 = 1$ în ecuația de condiție (2), aceasta devine $y_1 = (y_3 - y_2x_3)/(1 - x_3)$ sau $y_1(1 - x_3) + y_2x_3 - y_3 = 0$. Dacă se înlocuiește $x_1 = 0$, $y_1 = f_1(u)$; $x_2 = 1$, $y_2 = f_2(v)$ și $x_3 = g_3(w)/[f_3(w) + g_3(w)]$, $y_3 = -h_3(w)/[f_3(w) + g_3(w)]$, atunci scalele S_1 și S_2 sînt liniare și paralele, pe cînd scala S_3 este liniară numai dacă există o relație liniară între f_3 și g_3. Prin substituție se obține relația de bază $f_1(u)f_3(w) + f_2(v)g_3(w) + h_3(u) = 0$.

(6) Se substituie $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$ în ecuația de condiție (2) și se obține $y_1 = (by_3 - cy_2)/(b - c)$ sau $y_1(b - c) = y_3(b - a) + y_2(a - c)$, adică $y_3(a - b) = y_1(c - b) + y_2(a - c)$. Cu $y_1 = f_1(u)/(c - b)$, $y_2 = f_2(v)/(a - c)$ și $y_3 = f_3(w)/(a - b)$ rezultă ecuația de bază $f_3(w) = f_1(u) + f_2(v)$, unde scalele S_1, S_2, S_3 sînt drepte paralele.

(7) Mai general, s-a arătat că pe lîngă relațiile de bază găsite, mai sînt posibile și următoarele:

$$f_3(w) = f_1(u)f_2(v),$$
$$f_1(u)f_2(v)f_3(w) = f_1(u) + f_2(v) + f_3(w)$$
și
$$f_1(u)f_2(v)f_3(w) + f_1(u) + f_2(v)\, g_3(w) + h_3(w) = 0.$$

Exemplu. Soluțiile reale ale ecuației cubice reduse $w^3 - 3pw - 2q = 0$ se pot obține cu ajutorul unei nomograme de coliniaritate cu două scale rectilinii: $x_1 = 0$, $y_1 = -3p$; $x_2 = 1$, $y_2 = -2q$ și $x_3 = 1/(1 + w)$, $y_3 = -w^3/(1 + w)$, după cum se poate vedea din relația de bază $f_1(p)f_3(w) + f_2(q)g_3(w) + h_3(w) = 0$. De aici se poate citi $f_1(p) = -3p$, $f_2(q) = -2q$, $f_3(w) = w$, $g_3(w) = 1$, $h_3(w) = w^3$.



29.6.4. Nomograma pentru soluțiile reale ale ecuației $w^3 - 3pw - 2q = 0$.

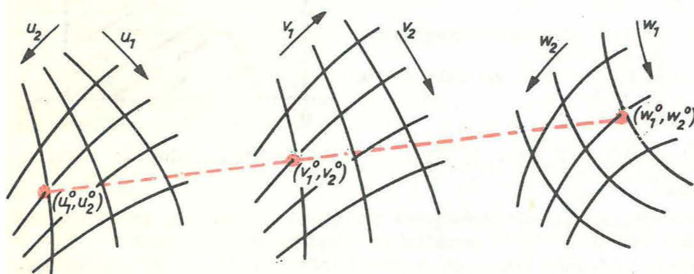
Nomograme pentru mai mult de trei variabile

În loc să se asocieze trei puncte, unul pe fiecare scală funcțională, cu ajutorul unei drepte, se pot căuta și alte construcții cu ajutorul cărora să se asocieze un număr mai mare de puncte. De exemplu, se poate asocia unui triplet de puncte în planul x, y centrul cercului determinat de acesta.

Pentru dependența funcțională $F(u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2) = 0$ între cel mult șase variabile, s-au construit nomograme compuse care leagă trei *nomograme reticulare* prin drepte. O nomogramă reticulară este constituită din două familii de curbe, de exemplu, curbele $r =$

$= \text{const} = \sqrt{x^2 + y^2}$ și curbele $\psi = \text{const} = \text{arctg}\ y/x$ ale unui sistem de coordonate polare. Două valori ale variabilelor asociate cu această rețea determină un punct cu coordonatele $x_1 = \varphi_1(u_1, u_2)$, $y_1 = \psi_1(u_1, u_2)$. Pentru celelalte două nomograme reticulare se obține în plus $x_2 = \varphi_2(v_1, v_2)$, $y_2 = \varphi_2(v_1, v_2)$ și $x_3 = \varphi_3(w_1, w_2)$, $y_3 = \psi_3(w_1, w_2)$.

Este esențial ca pentru o nomogramă reticulară să existe o corespondență inversabilă unică între punctele (u_1, u_2) și (x_1, y_1). Ca și în cazul nomogramelor cu puncte aliniate se cere ca trei puncte (u_1^0, u_2^0), (v_1^0, v_2^0) și (w_1^0, w_2^0) ale celor trei nomograme reticulare (u_1, u_2), (v_1, v_2) și (w_1, w_2)



29.6.5. Punctele corespondente pe trei rețele reticulare se găsesc pe o dreaptă

care satisfac condiția dată, $F(u_1^0, u_2^0, v_1^0, v_2^0, w_1^0, w_2^0) = 0$, să se găsească pe o dreaptă (fig. 29.6.5) În sistemul de coordonate carteziene comun tuturor nomogramelor reticulare trebuie să fie satisfăcută relația alăturată.

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi_1(u, u_2) & \psi_1(u_1, u_2) \\ 1 & \varphi_2(v_1, v_2) & \psi_2(v_1, v_2) \\ 1 & \varphi_3(w_1, w_2) & \psi_3(w_1, w_2) \end{vmatrix} = 0$$

Dacă ecuația care se nomografiază conține 5 variabile, atunci 4 variabile se pot reprezenta prin două nomograme reticulare și este nevoie de un singur suport de scală pentru a cincea variabilă; pentru 4 variabile, o nomogramă reticulară și 2 suporturi de scală sînt suficiente.

Desigur nu orice relație în 6 variabile poate fi nomografiată printr-o nomogramă compusă. Pe de altă parte dacă s-a obținut o astfel de nomogramă, atunci prin aplicarea unei transformări arbitrare a planului care aplică dreptele tot pe drepte, se pot obține și alte soluții sub formă de nomograme compuse.

Exemplu. Relația $(a - b)\ \psi_3(x_2) = [a - \varphi_3(w_1)]\ \psi_2(v) + [\varphi_3(w_1) - b]\ \psi_1(u)$ este echivalentă cu ecuația alăturată.

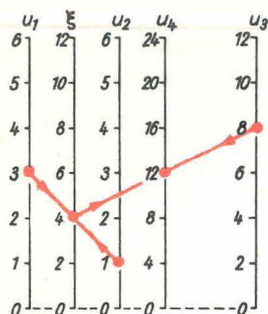
$$\begin{vmatrix} 1 & a & \psi_1(u) \\ 1 & b & \psi_2(v) \\ 1 & \psi_3(w_1) & \psi_3(w_2) \end{vmatrix} = 0$$

De aici se pot găsi direct ecuațiile scalelor și ecuațiile rețelelor de funcții cerute care sînt $x_1 = a$ $y_1 = \psi_1(u)$; $x_2 = b$, $y_2 = \psi_2(v)$; $x_3 = \psi_3(w_1)$, $y_3 = \psi_3(w_2)$. Pentru realizarea acestui lucru este suficientă hîrtia milimetrică obișnuită pe care două drepte la distanța $b - a$ trebuie gradate în conformitate cu scalele funcționale $\psi_1(u)$ și $\psi_2(u)$. Aceeași rețea pe hîrtie milimetrică servește pentru nomogramă reticulară. Axa perpendiculară pe scală trebuie gradată în conformitate cu funcția $\varphi_3(w_1)$ și cea paralelă cu scală după $\psi_3(w_2)$.

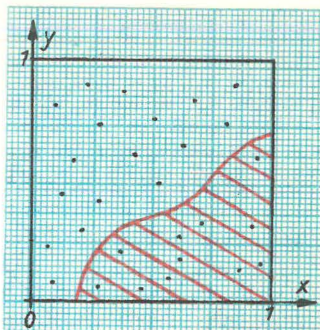
Deseori se încearcă nomografierea relațiilor care comportă mai mult decît trei variabilele operînd cu un șir de nomograme cu puncte aliniate. În astfel de nomograme, pentru valorile date primelor două variabile se determină întîi dintr-o nomogramă cu puncte aliniate o valoare pentru o variabilă auxiliară, de exemplu ξ (fig. 29.6.6). Pentru valoarea astfel determinată și o valoare dată celei de-a treia variabile se determină prin altă nomogramă cu puncte aliniate valoarea unei alte variabile auxiliare sau, după caz, a variabilei căutate. Se continuă în acest mod calculînd de fiecare dată valorile variabilelor auxiliare pînă ce valoarea variabilelor cerute se obține din ultima nomogramă cu puncte aliniate.

29.7. Metode Monte Carlo

Denumirea de *metode Monte Carlo* se atribuie tuturor procedeelor care fac uz de elemente aleatoare pentru rezolvarea problemelor deterministe, de exemplu evaluarea integralelor, determinarea valorilor extreme, rezolvarea ecuațiilor diferențiale ordinare sau cu derivate parțiale. Exemplul integralei $\int_0^1 f(x)\, dx$ folosit pentru ilustrarea metodei poate fi generalizat pentru integrale multiple; desigur importanța metodelor Monte Carlo devine evidentă numai pentru



29.6.6. Variabilă auxiliară ξ în nomograma cu puncte aliniate pentru $u_4 = u_1 + u_2 + u_3$



29.7.1. Calculul integralei $\int_0^1 f(x)\,dx$ prin metoda Monte Carlo

probleme multidimensionale. Un interval finit de integrare $[a, b]$ poate fi redus prin transformarea liniară $u = (x - a)/(b - a)$ la forma $[0, 1]$.

Procedee probabilistice. Funcţia $f(x)$ este presupusă mărginită superior şi inferior astfel încît ea poate fi transformată în aşa fel încît să satisfacă condiţia $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

Integrala care se calculează reprezintă aria unui domeniu mărginit de curba $f(x)$, de axa absciselor şi eventual de segmentele de dreaptă paralele la axa ordonatelor (fig. 29.7.1). Dacă această suprafaţă şi un pătrat unitate ar fi uniform acoperite cu masa, de exemplu cu cartoane decupate de grosime uniformă, atunci raportul celor două mase poate fi privit ca o estimaţie a integralei. Dacă ne imaginăm cele două suprafeţe uniform acoperite cu n puncte de masă egală şi dacă m_f dintre acestea se găsesc în interiorul suprafeţei căutate, atunci m_f/n va fi estimaţia ariei căutate. Aici numărul punctelor n trebuie să fie cel puţin de 10^4. *Repartiţia uniformă* trebuie să fie pur aleatoare în ambele direcţii x şi y astfel încît să reprezinte n experimente independente. Numerele aleatoare uniform repartizate fac posibilă întreruperea procedeului la o valoare n pentru care estimaţiile succesive să difere, cu mai puţin decît un ordin de precizie dinainte stabilit. Dacă $k - 1$ este numărul paşilor executaţi şi I_{k-1} rezultatul obţinut, atunci se foloseşte următoarea schemă recursivă:

$$I_k = I_{k-1} + (\xi_k - I_{k-1})/k = [(k - 1)\,I_{k-1} + \xi_k]/k,$$

unde $\xi_k = 1$ dacă punctul k se găseşte în regiunea lui $f(x)$ şi $\xi_k = 0$ în caz contrar.

Procedee avînd la bază valoarea medie. Dacă se aleg ca argumente numai numere aleatoare x_i uniform repartizate în intervalul $[0, 1]$ şi $f(x)$ se calculează pentru fiecare dintre acestea, atunci valoarea medie $M[f(x)]$ înmulţită cu lungimea intervalului 1 este o estimaţie a integralei căutate. Deoarece media aritmetică este o estimaţie a lui $M[f(x)]$ se obţine $(1/n) \sum f(x_i) = \int_0^1 f(x)\,dx$. Aici s-a dovedit potrivită formula de recurenţă

$$I_k = I_{k-1} + [f(x_k) - I_{k-1}]/k = [I_{k-1}(k - 1) + f(x_k)]/k.$$

Generarea numerelor aleatoare repartizate uniform. Atunci cînd se foloseşte un calculator, de regulă nu se construieşte un generator de numere aleatoare în calculator. Un astfel de generator are o flexibilitate relativ mică atunci cînd trebuie înlăturate dificultăţi mari. În plus, staţionaritatea şirurilor de numere aleatoare generate nu este garantată de-a lungul unor perioade de timp lungi, adică proprietăţile lor statistice se schimbă în decursul testului. Din acest motiv numerele aleatoare se generează din formule de recurenţă deterministe. Pentru ca aceste numere pseudoaleatoare să difere cît se poate de puţin de un şir de numere aleatoare veritabile, se cere o *cvasiindependenţă* între numerele pseudoaleatoare şi neapariţia şirurilor de numere periodice. Deosebit de convenabile sînt formulele de recurenţă bazate pe teoria elementară a numerelor:

1. Numerele Fibonacci reduse $[F_k = F_{k-1} + F_{k-2}]$ mod m;
2. $y_{k+1} = [(2^r + 1)\,y_k + c]$ mod 2^m cu $r > 2$ şi c par;
3. $y_k = s \cdot y_{k-1}$ mod m, de exemplu, $s = 23$ şi $m = 10^8 + 1$;
4. $y_k = \sum_{j=1}^{r} c_j y_{k-j}$ mod m, unde $y_0, y_1, \ldots, y_{r-1}$ sînt numere convenabil alese între 0 şi $m - 1$ şi c_j sînt constante convenabile.

Deoarece toate numerele pseudoaleatoare sînt determinate modulo m sau modulo 2^m, ele se reduc prin $x_k = y_k/m$ sau $x_k = y_k/2^m$ la numere din intervalul $[0, 1]$.

30. Optimizare matematică

Problemele de optimizare au fost formulate încă de EUCLID, dar numai după dezvoltarea calculului diferențial și a calculului variațiilor în secolele 17 și 18 s-a creat un aparat matematic pentru rezolvarea unor astfel de probleme. *Problemele de optimizare în economie* sînt probleme de valori extreme cu condiții suplimentare caracterizate prin aceea că de regulă numărul variabilelor este foarte mare și soluțiile negative nu sînt admise.

În general, o anumită situație economică este privită ca un proces compus din activități diferite și scopul propus este obținerea prin abstractizare a unui model matematic corespunzător. Pentru fiecare activitate există mai multe variante și realizarea lor depinde de restricțiile $g_j(x_i) = 0$ impuse de capacitățile existente, în așa fel încît nu se poate alege pentru fiecare activitate varianta cea mai favorabilă. În locul acesteia se consideră o combinație de variante posibile pentru care o *funcție obiectiv* dată $f(x_i)$ definită pentru totalitatea variabilelor procesului considerat ia o valoare maximă sau minimă; $g_j(x_i) = 0$ și $x_i \geqslant 0$ poartă denumirea de *restricții*.

Problema de optimizare	$\max\ \{f(x_i) \mid g_j(x_i) = 0,\ x_i \geqslant 0\}$	$i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m,\ n > m$

Pentru *optimizarea neliniară generală* funcțiile f și g_j pot fi oarecare; în cazul *optimizării pătratice* $f(x_i)$ este o funcție de gradul doi în x_i și $g_j(x_i)$ sînt funcții liniare iar în cazul programării liniare atît f cît și g_j sînt funcții liniare.

30.1. Optimizare liniară

În probleme de optimizare se introduce o relație de ordine $<$, „mai mic decît" și pentru matrice de același ordin $\mathbf{A} = (a_{ij})$ și $\mathbf{B} = (b_{ij})$ (vezi cap. 17): $\mathbf{A} < \mathbf{B}$ sau $\mathbf{A} \leqslant \mathbf{B}$ dacă și numai dacă $a_{ij} < b_{ij}$ sau respectiv $a_{ij} \leqslant b_{ij}$ pentru orice i și j. În mod corespunzător $\mathbf{A} > \mathbf{B}$ sau $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{B}$ dacă și numai dacă $a_{ij} > b_{ij}$ sau $a_{ij} \geqslant b_{ij}$ respectiv. Trebuie remarcat că se poate întîmpla să existe două matrice de același ordin pentru care să nu aibă loc nici una din relațiile $<$, $>$, $=$, spre deosebire de două numere raționale sau reale pentru care are loc întotdeauna una din aceste relații.

Dacă $\mathbf{c}$ și $\mathbf{x}$ sînt matrice de ordinul $n \times 1$ cu n linii și o coloană, $\mathbf{A} = (a_{ij})$ o matrice de ordinul $m \times n$, $\mathbf{b}$ una de ordinul $m \times 1$, $\mathbf{0}$ matricea nulă și $\mathbf{c}^T$ transpusa matricei $\mathbf{c}$, obținută din $\mathbf{c}$ prin schimbarea liniilor în coloane și invers, atunci pentru funcții obiectiv și restricții liniare, $f(x_i)$ poate fi reprezentată prin $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ și $g_j(x_i) = 0$ prin $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Dacă se pune $\mathbf{c} = -\mathbf{d}$, $\mathbf{A} = -\mathbf{B}$ și $\mathbf{b} = -\mathbf{h}$, problema de maximizare se transformă într-o problemă de minimizare. Pentru o interpretare geometrică, $\mathbf{x}$ poate fi privit ca un vector în spațiul euclidian n-dimensional $\mathbf{R}_n$.

Optimizare liniară	$\max\ \{\mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b},\ \mathbf{x} > \mathbf{0}\}$ sau $\min\{\mathbf{d}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{B}\mathbf{x} \geqslant \mathbf{h},\ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\}$

În raport cu elementele matricelor $\mathbf{c}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ sau $\mathbf{d}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{h}$ se pot deosebi următoarele tipuri de probleme: probleme *deterministe* atunci cînd acești coeficienți sînt constante cunoscute, probleme *parametrice* atunci cînd coeficienții (sau numai unii dintre ei) pot varia în anumite intervale și probleme *stochastice* cînd coeficienții (sau numai unii dintre ei) sînt variabile aleatoare.

Exemple. 1. *Beneficiul maxim.* Dacă componentele x_i ale lui $\mathbf{x}$ reprezintă numărul de unități dintr-un produs într-un proces de fabricație și c_i cîștigul corespunzător unei unități

din produsul i, atunci $\mathbf{x}$ reprezintă planul de producție și $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ cîștigul total. Dacă k este una din cele m activități, de ex. un grup de mașini, b_k capacitatea disponibilă și dacă coeficienții a_{ki} ai matricei $\mathbf{A}$ reprezintă contribuțiile fiecărei activități la producerea fiecărei unități de produs, atunci problema maximizării planului de producție constă în determinarea beneficiului maxim ținîndu-se seama de capacitățile date. Ipotezele pe care se bazează modelul implică faptul că atît beneficiul cît și activitățile sînt proporționale cu numărul de unități de produse și că vectorul $\mathbf{x}$ al numărului de unități poate avea numai componente întregi, $x_i \geqslant 0$. Se mai presupune că cererea pentru produsul respectiv este nelimitată. Cînd nu se întîmplă acest lucru, se pot introduce limitări ale vînzărilor prin restricții suplimentare $x_i \leqslant d_i$.

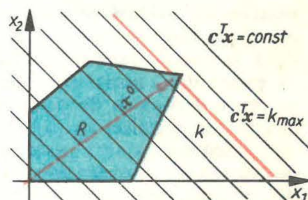
2. *Problema dietei.* Fie i un element nutritiv, din care o cantitate x_i intră într-o combinație de alimente ce trebuie determinată, și fie d_i costul cantității unitate de elemente. Fie k o vitamină sau o substanță nutritivă din care trebuie să apară în combinația respectivă cel puțin cantitatea h_k și din care elementul nutritiv i conține cantitatea b_{ki}. Se ajunge astfel la o problemă de minimizare care sub această formă simplă este aplicabilă la determinarea combinației celei mai ieftine de nutrețuri. Un model diferit de minimizare a costului unei succesiuni de meniuri ale unui hotel se obține prin adăugarea unor ipoteze suplimentare detaliate, privind *distribuția zilnică a meselor*, mic dejun, prînz, cină, structura unei mese, de exemplu felul întîi, felul doi și desert, *sortimentul minimal*, de exemplu trei feluri și *perioada minimă de repetare a felurilor.*

Problema maximizării în optimizarea liniară a fost formulată în 1939 de către KANTOROVICI care a rezolvat-o prin metoda *factorilor rezolvanți*. Problema dietei a fost rezolvată aproximativ în 1941 de către CORNFIELD și în 1945 de către STIGLER. *Problema optimizării liniare* formulată într-un mod destul de general de WOOD și DANTZIG a fost rezolvată de către DANTZIG prin metoda simplex care a fost apoi dezvoltată în multe direcții.

Metoda simplex. În cazul optimizării liniare restricțiile se compun din $\mathbf{Ax} \leqslant \mathbf{b}$ și $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$ sau $a_{j1}x_1 + ... + a_{ji}x_i + ... + a_{jn}x_n \leqslant b_j$ și $x_i \geqslant 0$ pentru $j = 1, 2, ..., m$ și $i = 1, 2, ..., n$ (vezi cap. 29). După cum condiția $2x_1 + 3x_2 \leqslant 4$ definește un semiplan închis, tot așa restricțiile de mai sus determină $n + m$ semispații închise, punctul $\mathbf{x}$ fiind interpretat ca un *punct* sau *vector* într-un spațiu n-dimensional $\mathbf{R}_n$. Dacă cele $n + m$ restricții sînt consistente, atunci intersecția $\mathbf{R}$ a celor $n + m$ semispații conține cel puțin un punct. Orice punct al lui $\mathbf{R}$ este o *soluție admisibilă* sau un *vector admisibil*.

Regiunea (mulțimea) admisibilă $\mathbf{R}$ a problemei ca intersecție de $n + m$ semispații este un *poliedru convex* (fig. 30.1.1). Să presupunem că $\mathbf{R}$ nu este vidă și că este mărginită.

Funcția obiectiv $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ poate fi interpretată geometric considerînd suprafața $f(\mathbf{x}) = \text{const}$, care reprezintă o familie de hiperplane paralele $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = k$ în $\mathbf{R}_n$. Se cere găsirea hiperplanului cu cel mai mare k avînd o intersecție nevidă cu poliedrul convex $\mathbf{R}$. Se furnizează astfel un *plan de sprijin* al lui $\mathbf{R}$ pentru această familie, adică un hiperplan care are un punct comun cu $\mathbf{R}$. În mod corespunzător maximul lui f în $\mathbf{R}$ poate fi atins numai în punctele de pe frontieră.



30.1.1. Reprezentarea geometrică a problemei de maxim în spațiul bidimensional $\mathbf{R}_2$; $\mathbf{R}$ este regiunea posibilă, $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = k_{max}$ — planul de sprijin, $\mathbf{x}^0$ — soluția posibilă de bază

Cu ipotezele de mai sus, $\mathbf{R}$ este înfășurătoarea convexă a vîrfurilor sale. Fie $\mathbf{x}^l$ $(l = 1, ..., s)$ vîrfurile lui $\mathbf{R}$ care pot fi cel mult C_{n+m}^n. Atunci orice $\mathbf{x} \in \mathbf{R}$ se poate reprezenta prin $\mathbf{x} = \sum_{l=1}^{s} \lambda_l \mathbf{x}^l$ cu $\lambda_l \geqslant 0$ și $\sum_{l=1}^{s} \lambda_l = 1$. Atunci $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{c}^T\left(\sum_{l=1}^{s} \lambda_l \mathbf{x}^l\right) = \sum_{l=1}^{s} \lambda_l \mathbf{c}^T\mathbf{x}^l = \sum_{l=1}^{s} \lambda_l f(\mathbf{x}^l)$. Printre s valori ale lui $f(\mathbf{x}^l)$ există cea mai mare $f(\mathbf{x}^{l_0})$. Deci $f(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^{s} \lambda_l f(\mathbf{x}^l) \leqslant \sum_{l=1}^{s} \lambda_l f(\mathbf{x}^{l_0}) = f(\mathbf{x}^{l_0})$. Dacă R este mărginită și nevidă, problema de optimizare se reduce la determinarea vîrfurilor $\mathbf{x}^l$ ale lui $\mathbf{R}$. În orice caz soluția se găsește printre acestea.

Cele m inegalități $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i \leqslant b_j$ pot fi scrise sub forma unor ecuații $\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i + x_{n+j} = b_j$, introducînd m variabile auxiliare $\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix}$. Dacă $\mathbf{I}$ este matricea unitate, se obține o altă formă a problemei de optimizare liniară.

Optimizare liniară cu variabile auxiliare	$\max\left\{(\mathbf{c}^T, \mathbf{0}) \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \bar{\mathbf{x}} \end{pmatrix} \middle\vert \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{I}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}, \bar{\mathbf{x}} \geqslant \mathbf{0}\right\}$

Pentru simplificare se va considera din nou $\max \{\mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\}$ (cu matricele extinse în mod corespunzător) unde $\mathbf{A}$ este de ordinul $m \times (m + n)$ și $\mathbf{x}$ este de ordinul $(n + m) \times 1$. Se poate presupune că rangul lui $\mathbf{A}$ este m pentru că altfel ecuațiile $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ar fi incompatibile și nu ar exista o soluție admisibilă sau unele ecuații ar fi de prisos fiind combinații liniare ale celorlalte.

Un vector $\mathbf{x}$ care are exact m componente pozitive care fac parte din m coloane liniar independente ale matricei $\mathbf{A}$ poartă denumirea de *soluție admisibilă de bază.*

Soluțiile admisibile de bază sînt exact vîrfurile regiunii admisibile R.

Pentru demonstrarea acestei teoreme se folosește *combinația liniară convexă* $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}' + (1 - \lambda)\mathbf{x}^2 = \lambda(\mathbf{x}' - \mathbf{x}^2) + \mathbf{x}^2$ cu $0 < \lambda < 1$, care determină punctul intermediar $\mathbf{x}$ pe segmentul de dreaptă care leagă $\mathbf{x}^1$ cu $\mathbf{x}^2$. Vîrfurile lui $\mathbf{R}$ nu se pot reprezenta însă printr-o combinație liniară convexă a două puncte diferite ale lui $\mathbf{R}$. Dacă $\mathbf{A}$ are m coloane liniar independente $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ și dacă o soluție admisibilă de bază este $\mathbf{x}^1$ cu $x_1^1 > 0, \ldots, x_m^1 > 0$, $x_{m+1}^1 = x_{m+2}^1 = \ldots = x_{m+n}^1 = 0$, atunci o combinație liniară convexă $\mathbf{x}^1 = \lambda\mathbf{x}^2 + (1 - \lambda)\mathbf{x}^3$ cu două puncte admisibile diferite $\mathbf{x}^2$ și $\mathbf{x}^3$ este imposibilă. Deoarece $x_{m+r}^t = 0$ pentru $t = 1, 2, 3$, și $r = 1, \ldots, n$, rezultă din $\mathbf{A}\mathbf{x}^2 = \mathbf{b}$ și $\mathbf{A}\mathbf{x}^3 = \mathbf{b}$ că $\mathbf{A}(\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^3) = \mathbf{0}$ cu soluția banală $\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^3 = \mathbf{0}$, dar aceasta înseamnă că $\mathbf{x}^1$ trebuie să fie un vîrf.

Pe de altă parte, dacă se presupune că $\mathbf{x}^1$ este un vîrf cu componente pozitive $x_1^1, \ldots, x_k^1$ atunci coloanele corespunzătoare $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ din $\mathbf{A}$ trebuie să fie liniar independente. Cum $\mathbf{A}$ are m linii, rezultă $k \leqslant m$ și deci $\mathbf{x}'$ este o soluție admisibilă de bază. Dacă $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ sînt liniar dependente, atunci se pot găsi numere $y_1, \ldots, y_k$, nu toate nule, astfel încît $\sum_{j=1}^{k} y_j\mathbf{a}_j = \mathbf{0}$ și pentru $y>0$, $y\sum_{j=1}^{k} y_j\mathbf{a}_j = \mathbf{0}$. În consecință, cum $\sum_{j=1}^{k} x_j^1\mathbf{a}_j^t \pm y \sum_{j=1}^{k} y_j\mathbf{a}_j = \mathbf{b}$ alegînd pe y suficient de mic, se pot construi doi vectori $\mathbf{x}^2 = (x_1^1 + yy_1, \ldots, x_k^1 + yy_k, 0, \ldots, 0)$ și $\mathbf{x}^3 = (x_1^1 - yy_1, \ldots, x_k^1 - yy_k, 0, \ldots, 0)$ care au primele k componente pozitive. Dar datorită reprezentării $\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^2/2 + \mathbf{x}^3/2$ cu $\lambda = 1/2$, $\mathbf{x}^1$ nu poate fi un vîrf, ceea ce contrazice ipoteza inițială.

Cazul degenerat $k < m$ este posibil dar va fi exclus din considerațiile ce se vor face aici. Acest caz se poate trata prin metoda simplex fără dificultăți deosebite.

Astfel, $\mathbf{R}$ are cel mult $C_{m+n}^{n} = C_{m+n}^{m}$ vîrfuri. Printre aceste soluții admisibile de bază, care sînt în număr finit, trebuie determinată aceea pentru care funcția obiectiv ia valoarea maximă k_{max}. Acest punct nu este neapărat unic determinat, ca de exemplu în cazul cînd frontiera lui $\mathbf{R}$ are o intersecție de dimensiune $d \geqslant 1$ cu hiperplanul cerut $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = k_{max}$. Dacă se presupune că primele m coloane ale lui $\mathbf{A}$ sînt liniar independente și matricea formată de aceste coloane se notează cu $\mathbf{A}_1$ și ceea ce rămîne din matricea $\mathbf{A}$ cu $\mathbf{A}_2$, atunci $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2)$, unde $\mathbf{A}_1$ este nesingulară și de ordinul $m \times m$ iar $\mathbf{A}_2$ este de ordinul $m \times n$. Similar se separă $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{pmatrix}$, unde $\mathbf{c}_1$ și $\mathbf{x}_1$ se compun din primele m componente. Ecuația $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}$ se poate rezolva atunci în raport cu $\mathbf{x}_1$, obținîndu-se $\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{b} + \mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2(-\mathbf{x}_2)$. Presupunînd că $\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{b} > \mathbf{0}$ și $\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$, se obține soluția admisibilă de bază $\mathbf{x}^1$. Substituind în funcția obiectiv, se obține

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_1^T\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{b} + [\mathbf{c}_1^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}_2 - \mathbf{c}_2^T](-\mathbf{x}_2).$$

Pentru $\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$ valoarea funcției obiectiv devine $f(\mathbf{x}') = \mathbf{c}_1^T\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{b}$. Aceste soluții sînt prezentate în așa-numitul *tabel simplex*.

Tabel simplex	$\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{b}$	$\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2$
	$\mathbf{c}_1^T\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{b}$	$\mathbf{c}_1^T\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2 - \mathbf{c}_2^T$

Soluțiile admisibile de bază se găsesc în prima coloană, iar ultima linie dă valorile funcției obiectiv corespunzătoare.

În tabelul simplex se pot deosebi următoarele cazuri distincte.

1. Cele n elemente ale lui $\mathbf{c}_1^T\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2 - \mathbf{c}_2^T$ sînt nenegative. În acest caz există o soluție *optimă* deoarece dacă orice element al lui $\mathbf{x}_2$ devine pozitiv, atunci valoarea funcției obiectiv devine din ce în ce mai mică.

2. $\mathbf{c}_1^T\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2 - \mathbf{c}_2^T$ conține un element negativ, fie acesta al k-lea; să presupunem că toate elementele coloanei k a lui $\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2$ sînt nepozitive. Componenta a k-a a lui $\mathbf{x}_2$ poate fi mărită în mod arbitrar. Dacă $\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{b} + \mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2(-\mathbf{x}_2)$, schimbînd componentele lui $\mathbf{x}_1$ în același timp, se obține întotdeauna o soluție admisibilă pentru care funcția obiectiv crește nemărginit; $f(\mathbf{x})$ nu este mărginită în regiunea admisibilă și problema nu are soluții.

3. Elementul al k-lea din $\mathbf{c}_1^T\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2 - \mathbf{c}_2^T$ este din nou negativ, dar pentru orice k, coloana k din $\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2$ conține cel puțin un element pozitiv. Și în acest caz se poate majora funcția obiectiv prin creșterea componentei a k-a din $\mathbf{x}_2$. Totuși acest lucru se poate face numai pînă cînd prima din componentele descrescătoare din $\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{b} + \mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2(-\mathbf{x}_2)$ ia valoarea zero. Componentele care rămîn (schimbate) în $\mathbf{x}_1$ și a k-a componentă din $\mathbf{x}_2$ determină în acest mod o nouă soluție admisibilă de bază cu o valoare mai mare a funcției obiectiv. Se poate deduce independența liniară a coloanelor corespunzătoare ale lui $\mathbf{A}$. Deoarece există numai un număr finit de soluții admisibile și deoarece funcția obiectiv crește, la fiecare pas al metodei simplex se obțin noi soluții de bază; se ajunge după un număr finit de pași la cazul 1 (soluția optimă) sau la cazul 2.

Obținerea unei soluții admisibile de bază. Dacă $\mathbf{b} > \mathbf{0}$, atunci introducînd variabile ajutătoare și avînd ca obiectiv max $(\mathbf{c}^T, \mathbf{0})\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \bar{\mathbf{x}}\end{pmatrix}$ cu $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$, se obține o soluție admisibilă de bază. Dacă nu se pot introduce variabile ajutătoare, atunci $\mathbf{b} \geqslant \mathbf{0}$ (și în unele probleme practice chiar $\mathbf{b} > \mathbf{0}$). Cu ajutorul așa-numitelor variabile artificiale $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ se rezolvă întîi problema

$$\min\left\{\sum_{j=1}^{m} y_j \mid \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{I}\mathbf{y} = \mathbf{b},\ \ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0},\ \ \mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}\right\}$$

pentru care $\mathbf{y} = \mathbf{b}$ este o soluție admisibilă de bază. Dacă $\min \sum_{j=1}^{m} y_j$ este pozitiv, atunci problema inițială *nu are soluții admisibile*. Dacă minimul este egal cu zero, atunci soluția optimă $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) = (\mathbf{x}^0, \mathbf{0})$ a ultimei probleme este o soluție admisibilă de bază a problemei inițiale. Pentru programul de calculator se alege de regulă ultimul procedeu descris care nu *depinde* de funcția obiectiv.

Dualitate. Problema min $\{\mathbf{b}^T\mathbf{y} \mid \mathbf{A}^T\mathbf{y} \geqslant \mathbf{c},\ \mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}\}$ poartă numele de *problemă duală* a problemei max $\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\}$ care este denumită *problema primală*. Aici $\mathbf{y}$ este o matrice de ordinul $m \times 1$ sau un vector în $\mathbf{R}_m$. Un vector $\mathbf{y}$ cu $\mathbf{A}^T\mathbf{v} \geqslant \mathbf{c}$ și $\mathbf{v} \geqslant \mathbf{0}$ se numește admisibil.

Problema primală	max $\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\}$	Problema duală	min $\{\mathbf{b}^T\mathbf{y} \mid \mathbf{A}^T\mathbf{y} \geqslant \mathbf{c},\ \mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}$

Dacă x și y (*primal și dual* respectiv) sînt admisibile, atunci $\mathbf{c}^T\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}^T\mathbf{y}$.

Demonstrație. $\mathbf{x}$ admisibil înseamnă că $\mathbf{A}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}$ și $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$; $\mathbf{y}$ admisibil înseamnă că $\mathbf{A}^T\mathbf{y} \geqslant \mathbf{c}$ și $\mathbf{y} \geqslant \mathbf{0}$. Astfel $\mathbf{c}^T\mathbf{x} \leqslant (\mathbf{A}^T\mathbf{y})^T\mathbf{x} = (\mathbf{y}^T\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{y}^T(\mathbf{A}\mathbf{x}) \leqslant \mathbf{y}^T\mathbf{b} = \mathbf{b}^T\mathbf{y}$. De aici rezultă imediat:

Dacă $\mathbf{x}^0$ și $\mathbf{y}^0$ sînt admisibile și dacă $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^0 = \mathbf{b}^T\mathbf{y}^0$, atunci $\mathbf{x}^0$ și $\mathbf{y}^0$ sînt optime pentru problema primală, respectiv duală.

Demonstrație. Din teorema de mai sus pentru orice $\mathbf{x}$ admisibil $\mathbf{c}^T\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}^T\mathbf{y}^0 = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^0$ și pentru orice $\mathbf{y}$ admisibil, $\mathbf{b}^T\mathbf{y} \geqslant \mathbf{c}^T\mathbf{x}^0 = \mathbf{b}^T\mathbf{y}^0$. Din prima inegalitate se vede că $\mathbf{x}^0$ este o soluție a problemei primale și din a doua că $\mathbf{y}^0$ este o soluție a problemei duale. GALE, KUHN și TUCKER au demonstrat următoarea teoremă de dualitate.

Teorema de dualitate. $\mathbf{x}^0$ este o soluție a problemei primale dacă și numai dacă există un $\mathbf{y}^0$ admisibil astfel încît $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^0 = \mathbf{b}^T\mathbf{y}^0$; $\mathbf{y}^0$ este o soluție a problemei duale dacă și numai dacă există un $\mathbf{x}^0$ admisibil astfel încît $\mathbf{b}^T\mathbf{y}^0 = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^0$. Problema primală și problema duală au soluții dacă și numai dacă ambele admit simultan vectori admisibili.

Aceste propoziții sînt deosebit de utile dacă o problemă poate fi rezolvată numai aproximativ și dacă vrem să apreciem cît de mult se abate soluția aproximativă de la cea optimă. Acest lucru este important și atunci cînd se folosește un calculator și pentru păstrarea costului în anumite limite se întrerup calculele la un anumit moment.

Exemplul 3. Fie de minimizat $x_1 + 4x_2$ cu restricțiile alăturate. Folosind variabilele ajutătoare x_3 și x_4, se obțin ecuațiile și funcția obiectiv de mai jos. De aici se obține

$$2x_1 + 3x_2 \leqslant 4,\quad 3x_1 + x_2 \leqslant 3,\quad x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{c}_1^T = (0,\ 0),\ \mathbf{c}_2^T = (1,\ 4),\ \mathbf{x}_1^T = (x_3,\ x_4),\ \mathbf{x}_2^T = (x_1,\ x_2)$$

$$\begin{aligned} 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 2x_1 + 3x_2 &= 4 \\ 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 + 3x_1 + 1x_2 &= 3 \\ 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + x_1 + 4x_3 &= f(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Noile ecuații și tablelul simplex S_1 vor avea forma următoare:

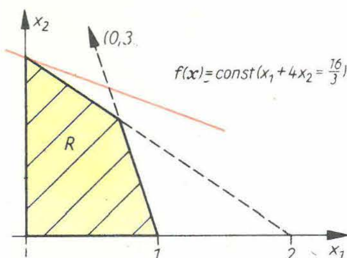
$$\begin{aligned} x_3 &= 4 - 3x_1 - 3x_2 \\ x_4 &= 3 - 3x_1 - x_2 \\ f(\mathbf{x}_1) &= 0 + (0 - 1)(-x_1) + (0 - 4)(-x_2) \end{aligned}$$

S_1			
	4	2	3
	3	3	1
	0	−1	−4

Incluzînd pe x_2 în bază, rezultă creșterea cea mai mare a funcției obiectiv, deci se va folosi x_2. Prin ecuația $x_3 = 4 - 2x_1 - 3x_2$ se determină $x_2 = 4/3$ ceea ce implică $x_3 = 0$ care astfel părăsește baza. Din ecuația modificată pentru x_2, x_4, din valorile $\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2$, $\mathbf{c}_1^T = (4,\ 0)$ și $\mathbf{c}_2^T = (1,\ 0)$ se poate determina o nouă formă a funcției obiectiv $f(\mathbf{x}) = 4x_2 + 0 \cdot x_4 + x_1 + 0 \cdot x_3$:

$$f(\mathbf{x}_1^T) = 16/3 + (8/3 - 1)(-x_1) + (4/3 - 0)\,(-x_3)$$

$$\begin{aligned} x_2 &= 4/3 - 2x_1/3 - x_3/3 \\ x_4 &= 5/3 - 7x_1/3 + x_3/3 \end{aligned}\qquad \mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 7/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$



30.1.2. Soluția problemei primale cu funcția obiectiv $f(x) = x_1 + 4x_2$.

S_2			
	4/3	2/3	1/3
	5/3	7/3	−1/3
	16/3	5/3	4/3

Se obține tabelul simplex S_2. Soluția optimă a problemei se obține pentru $x_2 = 4/3$, $x_4 = 5/3$, $x_1 = x_3 = 0$. În fig. 30.1.2 se arată regiunea admisibilă $\mathbf{R}$ pentru problema inițială fără variabile ajutătoare. Tot pe această figură s-a reprezentat dreapta $x_1 + 4x_2 = 16/3$.

Prețuri fictive (*umbră*). În forma funcției obiectiv care corespunde soluției optimale coeficienții $\mathbf{c}_1^T\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2 - \mathbf{c}_2^T$ corespunzători variabilelor ajutătoare formează vectorul soluțiilor $\mathbf{y}^0$

al problemei duale. În exemplul dat $\mathbf{y}^{0T} = (4/3, 0)$ și deci $\mathbf{b}^T\mathbf{y}^0 = 16/3 = f(\mathbf{x}^0)$. Componentele acestui vector al soluției duale poartă numele de *prețuri fictive, prețuri umbră*. Ele reprezintă creșterea funcției obiectiv la o creștere egală cu unitate a componentei din **b**. De exemplu o creștere a lui $b_2 = 3$ nu va rezolva nimic, deoarece în soluția optimă $x_4 > 0$ și deci nu afectează cu nimic pe $3x_1 + x_2 < 3$. Rezultă însă o creștere egală cu $4/3$ dacă $b_1 = 4$ se înlocuiește prin $b_1 = 5$, după cum se poate verifica ușor.

Aplicații ale metodei simplex. Metoda simplex a fost îmbunătățită în mai multe direcții cu scopul reducerii erorilor de rotunjire, a capacității calculatorului folosit și a timpului de calcul necesar.

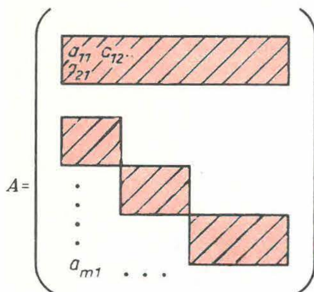
LEMKE în 1954 a dezvoltat metoda simplex duală, rezolvînd problema primală cu ajutorul soluției problemei duale. Pentru a scurta timpul de calcul s-au combinat metodele simplex duală și primală. Metoda *simplex modificată* se folosește în mod frecvent în legătură cu reprezentarea sub formă de produs a matricei inverse. Pentru probleme de volum mare se revine prin reinversare după un anumit număr de pași la datele matricei inițiale, reducîndu-se astfel eroarea de rotunjire.

Pentru problema primală cu o margine superioară pentru variabile ($\mathbf{x} \leqslant \mathbf{d}$), DANTZIG a elaborat un algoritm special pentru care volumul de calcule este comparabil cu cel din cazul problemei cu variabile pentru care nu s-au impus astfel de margini. În sfîrșit, pentru probleme cu o matrice avînd o structură specială în care numai partea hașurată conține elemente nenule (fig. 30.1.3), DANTZIG și WOLFE au găsit în 1960 *o metodă de descompunere* prin care întreaga problemă se descompune într-o problemă principală și o serie de probleme auxiliare. În acest fel probleme cu 32 000 restricții și 2 milioane de variabile ar fi putut fi rezolvate în timp rezonabil încă înainte de 1963.

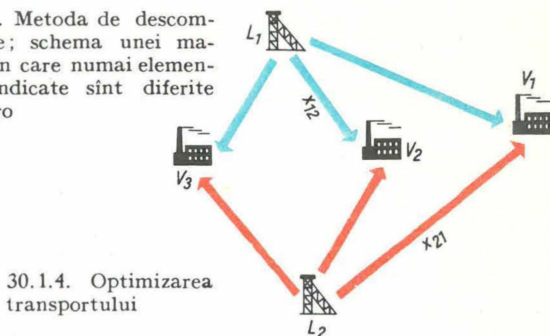
Metoda jocurilor fictive, sugerată de BROWN și ROBINSON, care necesită calculatoare de capacitate mai mică, converge prea încet pentru a fi practicabilă.

Problema transporturilor, care este un caz particular important al problemei primale, a fost formulată în mod independent de HITCHCOCK în 1941 și KANTOROVICI în 1942.

Problema transporturilor	$\min\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i;\ x_{ij} \geqslant 0\right\}$



30.1.3. Metoda de descompunere; schema unei matrice în care numai elementele indicate sînt diferite de zero



30.1.4. Optimizarea transportului

Acestei probleme i se poate atribui următorul sens: există *producători* L_i pentru un anumit produs cu o *capacitate de producție* $a_i \geqslant 0$ și *consumatori* V_j cu *cerere de consum* $b_j \geqslant 0$. Transportul unei unități de produs de la producător la consumator costă c_{ij} unități bănești. Trebuie determinate cantitățile x_{ij} ce trebuie transportate de la L_i la V_j (fig. 30.1.4) în așa fel încît costul total de transport să fie minimum posibil. Matricea **A** are o astfel de structură încît din valori întregi ale lui b_j și ale lui a_i rezultă soluții întregi x_{ij}. Mai mult, această problemă specială are întotdeauna soluție și a fost folosită în practică în mai multe rînduri și foarte eficient. În afară de forma obișnuită a algoritmului simplex, trebuie menționate procedeul de rezolvare prin *metoda maghiară* datorată lui KUHN, *metoda rocadelor* a lui CHARNES și COOPER și *metoda* FORD-FULKERSON care se bazează pe determinarea fluxului maxim

dintr-un *graf orientat*. În acest fel se poate rezolva problema transporturilor ţinînd seama de limitările impuse de capcităţile căilor de transport. Pentru alte generalizări se consideră că transportul se efectuează în etape sau că se transportă mai multe produse.

Exemplul 4. Fie $b_1 = 4, b_2 = 8, b_3 = 2, b_4 = 8$ necesarul pentru 4 consumatori şi $a_1 = 10$, $a_2 = 7$, $a_3 = 5$ capacităţile a 3 furnizori astfel încît $\sum a_i = \sum b_j = 22$. Atunci cînd $\sum a_i = a \gtrless b = \sum b_j$, se introduce un furnizor fictiv pentru cantitatea $b - a$ sau un consumator fictiv cu un consum $a - b$. Coeficienţii c_{ij} ai matricei reprezintă costurile de transport de la i la j pe unitatea de produs.

$c_{11} = 20$	$c_{12} = 6$	$c_{13} = 4$	$c_{14} = 3$
$c_{21} = 10$	$c_{22} = 1$	$c_{23} = 5$	$c_{24} = 8$
$c_{31} = 9$	$c_{32} = 3$	$c_{33} = 8$	$c_{34} = 2$

Prin procedeul unghiurilor nord-vest se ajunge pornind din colţul nord-vest, aflat în partea stîngă sus, la satisfacerea condiţiei pentru sumele de b_j şi a_i respectiv, maximizînd de la cîmp la cîmp. Şirul cîmpurilor cu decizie este indicat prin numere scrise cu roşu şi acele cîmpuri pentru care s-a decis în acelaşi timp numărul pieselor sînt marcate prin săgeţi roşii.

Regula nord-vest

					a_i
	4 1	6 2	0	0	10
	0	2 3	2 4	3 5	7
	0	0	0	5	5
b_j	4	8	2	8	

Metoda matricei minime

					a_i
	4	1	2	3 3	10
	0	7 1	0	0	7
	0	0	0	5 2	5
b_j	4	8	2	8	

Folosind *metoda matricei minime* se atinge de asemenea maximul în raport cu a_i şi b_j dar cîmpurile cu decizie sînt fixe în fiecare caz ţinîndu-se seama de valoarea cea mai mică a lui c_{ij}, în scopul economisirii cheltuielilor de transport. După cum şi este de aşteptat, valoarea funcţiei obiectiv este acum mai mică; procedeul unghiurilor nord-vest dă $f_1 = 162$ şi metoda matricei minime $f_2 = 120$. Pentru soluţia optimă $x_{13} = 2$, $x_{14} = 8$, $x_{22} = 7$, $x_{31} = 4$ şi $x_{32} = 1$ se obţine $f_{opt} = 78$. Soluţia este degenerată deoarece pot să apară numai $5 = n + m - 2$ componente pozitive, pe cînd datorită condiţiei suplimentare $a = b$, vor fi $n + m - 1 = 6$ componente pozitive.

Optimizare în numere întregi. În legătură cu determinarea unui plan de producţie care pentru restricţii privind capacitatea trebuie să asigure venitul maxim apare problema găsirii soluţiilor întregi pentru max $\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} | \mathbf{A}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}, \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\}$. Se caută maximul funcţiei obiectiv nu printre toate punctele regiunii admisibile **R**, ci numai printre toate nodurile reţelei întregi conţinute în **R**. Pentru orice problemă corectă trebuie să se stabilească întîi dacă tratarea problemei în numere întregi este într-adevăr necesară. De exemplu dacă coeficienţii problemei sînt numai estimaţi, atunci munca suplimentară nu este justificată. Erorile introduse prin datele iniţiale nu sînt considerabil mărite prin metodele normale şi prin rotunjirea soluţiilor neîntregi, astfel încît să devină întregi.

Pentru optimizarea în numere întregi GOMORY a elaborat în 1958 *metoda planului de secţiune*. Problema se tratează mai întîi prin metode obişnuite obţinîndu-se o soluţie optimă. Dacă soluţia astfel obţinută nu este formată din numere întregi, atunci se introduce o restricţie suplimentară astfel încît această soluţie să nu mai fie admisibilă în sens primal, dar complementara în **R** a regiunii admisibile $\mathbf{R}_1 \subseteq \mathbf{R}$ să conţină toate nodurile reţelei întregi ale lui **R**. Hiperplanul care înlătură o porţiune din **R** a dat numele metodei. În acest fel soluţia nu este admisibilă ca o soluţie primală dar rămîne admisibilă ca o soluţie duală. În acest mod prin metoda simplex duală se ajunge repede la o soluţie optimă relativ la $\mathbf{R}_1$. Dacă aceasta nu este în numere întregi, se introduce un al doilea plan de secţiune din care rezultă $\mathbf{R}_2 \subseteq \mathbf{R}_1$. Acest procedeu duce la soluţia în numere întregi într-un număr finit de paşi.

În practică apar unele probleme datorate erorilor de rotunjire din calcule. Deoarece planele de secţiune care trec prin punctele reţelei întregi se pot determina numai aproximativ, trebuie admise anumite limite de variaţie cînd se verifică dacă soluţiile sînt numere întregi. Cu toate acestea se poate întîmpla ca punctele întregi să fie înlăturate din **R**. Acest lucru

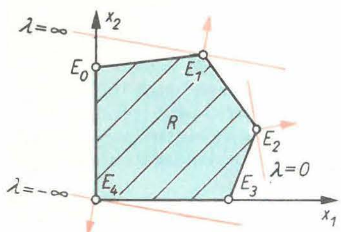
a condus la numeroase lucrări tratînd această problemă și aplicarea metodei rămîne problematică în ceea ce privește tehnica de calcul.

Optimizare parametrică. Toți coeficienții dintr-o problemă de optimizare liniară pot să depindă de parametri. Cele mai simple cazuri sînt

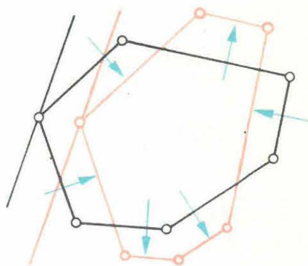
Optimizare parametrică	$\max\{(\mathbf{c} + \lambda\mathbf{d})^T \mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geqslant 0$	$\max\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b} + \lambda\mathbf{f},\ \mathbf{x} \geqslant 0\}$

Această problemă apare atunci cînd trebuie determinat un plan de producție care maximizează beneficiul cînd se cunosc capacitățile și cînd se dau limite pentru beneficiul corespunzător fiecărui produs, sau cînd se pune problema determinării modificărilor survenite în soluția optimă ca urmare a modificărilor survenite în datele problemei. După cum s-a arătat mai sus, unele informații în acest sens se pot obține din componentele problemei duale.

Cele două formulări sînt reciproc *duale*: problema duală primei formulări are structura celei de-a doua. Așadar vom considera mai detaliat prima formulare. Se presupune regiunea admisibilă $\mathbf{R}$ mărginită și nevidă iar $\mathbf{c}$ și $\mathbf{d}$ liniar independente. (Pentru $\mathbf{c}$ și $\mathbf{d}$ dependente rezultă o problemă generală primală.) Hiperplanele $(\mathbf{c} + \lambda\mathbf{d})^T \mathbf{x} = k$ formează pentru orice λ *fixat* o familie de plane paralele cu parametrul k. Pentru un k fixat și λ variabil se obține un fascicul de hiperplane. Figura 30.1.5 ilustrează pentru cazul bidimensional situația care poate fi descrisă la modul general astfel: dacă se duce vectorul normal la hiperplanul $(\mathbf{c} + \lambda\mathbf{d})^T \mathbf{x} = k$ pe partea unde k este crescător, atunci pentru $-\infty < \lambda < +\infty$ acest vector întinde un unghi de mărime π. Pentru exemplul din figură intervalul de variație a lui λ $(-\infty, +\infty)$ poate fi descompus în patru părți: $-\infty < \lambda \leqslant \lambda_1 < 0$, $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2 < 0$, $\lambda_2 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_3$ $(\lambda_3 > 0)$, $\lambda_3 \leqslant \lambda < +\infty$, pentru care soluții optime sînt E_4, E_3, E_2, E_1 respectiv. În general se poate găsi o descompunere a lui $(-\infty, +\infty)$ într-un număr finit de intervale parțiale astfel încît pentru λ în aceste intervale, o soluție admisibilă de bază este optimă. Pentru $\mathbf{R}$ nemărginit nu trebuie să existe soluții în intervalele $-\infty < \lambda \leqslant \lambda_1$ sau $\lambda_r \leqslant \lambda < +\infty$. În practică se rezolvă problema pentru un λ oarecare prin metoda simplex și apoi se determină pentru λ intervalul în care soluția optimă obținută rămîne optimă. La marginile acestui interval se pot determina acele componente ale lui $\mathbf{x}$ care pentru λ crescător sau descrescător intră în bază și de asemenea cele care părăsesc baza. Pentru această nouă bază se obține din nou un interval pentru λ ș.a.m.d. Există mai multe metode pentru rezolvarea acestei probleme ca de exemplu cea propusă de SPURKLAND (1964).



30.1.5. Optimizarea parametrică în plan



30.1.6. Interpretarea geometrică a problemei parametrice duale

Pentru problema duală o variație a lui λ înseamnă o deplasare paralelă a hiperplanului, care include regiunea admisibilă $\mathbf{R}$ (fig. 30.1.6). Se poate arăta că pentru unele intervale pentru λ, aceleași componente ale lui $\mathbf{x}$ sînt în bază, adică sînt pozitive. Soluția însă se modifică odată cu λ. Problema maximizării beneficiului unui plan de producție cu capacități date mai sugerează și următoarea problemă parametrică. În exemplul 1, elementele a_{ki} ale matricei $\mathbf{A}$ reprezintă necesarul de muncă privind activitatea k pentru o unitate de produs i. Acești coeficienți pot să se modifice, de ex. prin creșterea productivității sau prin introducerea unor noi tehnologii. Deci, prezintă interes studiul problemelor cu mai mulți parametri și un număr de cercetări recente cuprind unele generalizări ale rezultatelor cunoscute pentru problemele de optimizare cu un parametru.

Desigur cu fiecare problemă practică se pune întrebarea în ce mod o schimbare în coeficienți influențează soluția. În cazul capacităților imaginate, prețurile umbră dau informații

asupra acestui lucru, dar problema se rezolvă în toată generalitatea ei numai prin *metodele optimizării parametrice*.

Alte aplicații ale optimizării liniare. Optimizarea liniară se poate aplica în multe domenii ale științei, tehnologiei și economiei. Ea este una dintre cele mai eficiente metode ale cercetării operaționale. Se vor indica aici cîteva exemple speciale de aplicații.

Probleme de coordonare. n persoane trebuie asociate cu n activități în așa fel încît fiecărei persoane i se asociază exact o activitate și costul total să fie minim. De exemplu un proces mecanic de producție se compune din n operații și sînt n muncitori care sînt în stare să efectueze fiecare operație dar în timp variabil. Timpul necesar pentru efectuarea operațiilor formează o matrice pătrată cu elementele c_{ij}. Fiecare muncitor trebuie să efectueze exact o operație. Problema se formulează matematic astfel:

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ x_{ij} \geqslant 0\right\}.$$

Acesta este un caz particular al problemei de transport. Exact n valori x_{ij} sînt egale cu 1 și celelalte sînt egale cu 0. Soluția de bază conține în loc de $2n - 1$, numai n componente pozitive, adică problema este puternic degenerată. De aceea metoda lui Kuhn este mai potrivită pentru, rezolvarea ei decît metoda simplex.

Probleme de amestec. Despre o problemă tipică de amestec s-a menționat cînd s-a tratat problema dietei. Încărcarea furnalelor care produc oțel este un al doilea exemplu. Se pune problema celui mai ieftin amestec pentru producerea unui oțel cu proprietăți definite. Producerea unui gaz cu valoare calorică dată prin amestecarea unor gaze cu diferite costuri și cu valori calorice cunoscute conduce de asemenea la o problemă de optimizare liniară.

Probleme de croire. Dacă din bucăți de mărimi date se decupează bucăți mai mici de diferite forme, atunci punîndu-se problema reducerii la minim a pierderilor se ajunge la o problemă de minimizare. Astfel de probleme apar în industria metalelor, a lemnului, textilă și a produselor din piele.

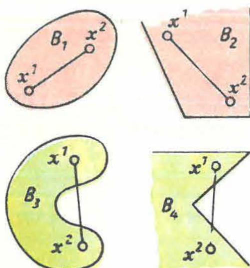
Optimizare liniară stochastică. O problemă de optimizare liniară, $\max\ \{\mathbf{c}^T\mathbf{x}|\mathbf{A}\mathbf{x}\leqslant\mathbf{b},\ \mathbf{x}\geqslant\mathbf{0}\}$, ai cărei coeficienți sînt cantități aleatoare trebuie înțeleasă în sensul maximizării valorii medii a funcției obiectiv. Dacă caracterul aleator al problemei se ia în întregime în considerație, problema devine în cele mai multe cazuri *neliniară* sau ea trebuie reprezentată ori aproximată prin funcții obiectiv liniare pe porțiuni și restricții liniare. Există un singur caz special în care problema rezultată rămîne liniară și anume aceea cînd componentele lui $\mathbf{c}$ sînt cantități aleatoare ale căror funcții de repartiție sînt independente de valorile lui x_i. În acest caz este permisă înlocuirea componentelor aleatoare c_i ale lui $\mathbf{c}$ prin valorile lor medii $\bar{c}_i=M(c_i)$ și să se trateze problema primală în mod determinist cu vectorul $\bar{\mathbf{c}}$ format din componentele $\bar{c}_i$. Acest lucru este posibil, de exemplu, în tratarea problemei *costului minim al furajării* (problema dietei) dacă se presupune pentru anul considerat că prețurile diferitelor nutrețuri sînt variabile aleatoare cu funcții de repartiție cunoscute. Problema devine mai complicată dacă componentele lui $\mathbf{b}$ sînt cantități aleatoare, de exemplu în cazul stabilirii costului optim al unui stoc de piese de rezervă cu cererea aleatoare, sau dacă elementele matricei $\mathbf{A}$ sînt aleatoare.

30.2. Optimizare neliniară

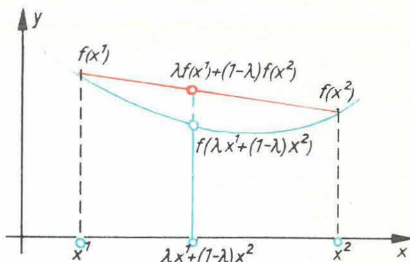
Dintre *problemele neliniare*, numai *teoria optimizării convexe* s-a dezvoltat ca o teorie completă, cel puțin în ceea ce privește teoria.

Optimizare convexă. O regiune B a unui spațiu euclidian n-dimensional $\mathbf{R}_n$ se numește convexă dacă pentru orice pereche de puncte din B toate combinațiile liniare convexe ale acestor puncte aparține de asemenea lui B (fig. 30.2.1). O funcție $f(\mathbf{x})$ definită pe o regiune convexă B se numește convexă dacă pentru $\mathbf{x}^1$ și $\mathbf{x}^2$ din B și $0 < \lambda < 1$ întotdeauna are loc (fig. 30.2.2)

$$f(\lambda\mathbf{x}^1 + (1-\lambda)\,\mathbf{x}^2) \leqslant \lambda f(\mathbf{x}^1) + (1-\lambda) f(\mathbf{x}^2).$$



30.2.1. Mulțimi convexe M_1, M_2 și mulțimi neconvexe M_3 și M_4



30.2.2. Graficul unei funcții conexe de o variabilă

Dacă pentru $\mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^2$ nu poate avea loc semnul egalității, atunci $f(\mathbf{x})$ este *strict convexă*. Cubul, paralelipipedul, tetraedrul, sfera și elipsoidul sînt exemple de regiuni convexe ale lui $\mathbf{R}_3$.

Intersecția unor regiuni convexe este o regiune convexă, proprietate care a fost deja folosită cînd s-a considerat regiunea admisibilă **R** a problemei de maximizare. Dacă funcțiile f și g_j în $\min\{f(\mathbf{x})\,|\,g_j(\mathbf{x}) \leqslant 0,\ x_i \geqslant 0\}$ $(i = 1, ..., n,\ j = 1, ..., m < n)$ sînt funcții convexe, atunci problema respectivă este o problemă de *optimizare convexă. Regiunea admisibilă* **R** a problemei este o regiune convexă în $\mathbf{R}_n$. Pentru existența soluției KUHN, TUCKER și SLATER au demonstrat o teoremă fundamentală, *teorema punctului șa*. Ea se referă la punctul șa $(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)$ al unei funcții $F(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ de două variabile care după $\mathbf{u}$ atinge un maxim în acest punct, avînd astfel valori mai mici în vecinătatea lui $\mathbf{u}^0$ dar după $\mathbf{x}$ atinge un minim și deci are valori mai mari în vecinătetea lui $\mathbf{x}_0$. Această funcție $F(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ este obținută prin *metoda multiplicatorilor lui Lagrange* pentru probleme de extrem legat. Folosind multiplicatorii lui Lagrange u_j cu $j = 1, ..., m$ se definește *funcția lui Lagrange*, $F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m} u_j \cdot g_j(\mathbf{x})$ în care $\mathbf{u}$ este matricea $m \times 1$ formată cu valorile u_j.

Teorema punctului șa. Dacă există un $\mathbf{x}' \geqslant 0$ cu $g_j(\mathbf{x}') < 0$ pentru $j = 1, ..., m$, atunci $\mathbf{x}^0 \geqslant 0$ este soluție pentru $\min\{f(\mathbf{x})\,|\,g_j(\mathbf{x}) \leqslant 0,\ \mathbf{x}_i \geqslant 0\}$ dacă și numai dacă pentru toți $\mathbf{x} \geqslant 0$, $\mathbf{u} \geqslant 0$ există un $\mathbf{u}^0 \geqslant 0$ astfel încît $F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}) \leqslant F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0) \leqslant F(\mathbf{x}, \mathbf{u}^0)$.

Funcția $F(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ are deci în $(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)$ un punct șa nenegativ. Se va arăta acum că acest lucru este suficient pentru ca $\mathbf{x}^0 \geqslant \mathbf{0}$ să fie o soluție a problemei convexe. Se obține $f(\mathbf{x}^0) + \sum_{j=1}^{m} u_j g_j(\mathbf{x}^0) \leqslant f(\mathbf{x}^0) + \sum_{j=1}^{m} u_j^0 g_j(\mathbf{x}^0) \leqslant f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m} u_j^0 g_j(\mathbf{x})$ pentru orice $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$ și orice $u \geqslant \mathbf{0}$.
Din inegalitatea din stînga rezultă că $g_j(\mathbf{x}^0) \leqslant 0$ pentru $j = 1, ..., m$; deoarece dacă $g_{j_0}(\mathbf{x}^0)$ ar fi pozitiv, luînd $u_{j_0} > 0$, $u_j = 0$ pentru $j \neq j_0$, membrul întîi poate fi făcuț oricît de mare. Așadar $\mathbf{x}^0 \geqslant \mathbf{0}$ este admisibilă. Mai mult, $\sum_{j=1}^{m} u_j^0 g_j(\mathbf{x}^0) = \mathbf{0}$, căci astfel inegalitatea din stînga n-ar fi valabilă pentru $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, deoacece toți $g_i = (\mathbf{x}^0) = 0$ și $\mathbf{u}^0 \geqslant \mathbf{0}$. Rezultă astfel că $f(\mathbf{x}^0) \leqslant f(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{m} u_j^0 g_j(\mathbf{x})$ pentru orice $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$ și în consecință $f(\mathbf{x}^0) \leqslant f(\mathbf{x})$ pentru orice $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$ cu $g_j(x) \leqslant 0$ $(j = 1, ..., m)$, întrucît $\mathbf{u}^0 \geqslant \mathbf{0}$. Dar aceasta înseamnă că $\mathbf{x}^0 \geqslant 0$ este o soluție.

O demonstrație completă pentru teorema punctelor șa, așa cum a fost dată aici, este datorată lui SLATER. KUHN și TUCKER au demonstrat-o pentru funcții diferențiabile și pentru aceste funcții se stabilesc mai jos *condițiile Kuhn-Tucker locale*, care sînt echivalente cu condițiile teoremei. Aceste condiții necesară și suficientă pentru existența soluției problemei de optimizare convexă se folosesc în multe aplicații și mai cu seamă în metoda optimizării pătratice.

Condiții Kuhn-Tucker locale. Pentru funcții $f(\mathbf{x})$, $g_j(\mathbf{x})$ convexe, diferențiabile existența unui $\mathbf{x}^0 \geqslant \mathbf{0}$ și a unui $\mathbf{u}^0 \geqslant \mathbf{0}$ astfel încît

$$\frac{\partial F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} \geqslant 0, \quad x^{0T} \frac{\partial F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)}{\partial \mathbf{x}} = 0, \quad \frac{\partial F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)}{\partial \mathbf{u}} \leqslant 0, \quad \mathbf{u}^{0T} \frac{\partial F(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0)}{\partial \mathbf{u}} = 0$$

este necesară și suficientă pentru ca $\mathbf{x}^0 \geqslant \mathbf{0}$ să fie o soluție a problemei convexe.

Optimizarea pătratică. Exemplul dat mai sus privind determinarea planului de producție care aduce beneficiul maxim pentru capacități date a reprezentat o problemă de optimizare liniară. Componentele c_i ale lui **c** reprezintă beneficiul pe unitatea de produs i. Beneficiul reprezintă diferența dintre prețul de vînzare p_i și costurile k_i. Componenta lui k_i cît și cea a factorilor care influențează pe p_i nu se va considera aici în detaliu. Ipoteza că atît p_i cît și k_i sînt independente de numărul unităților din produsul i reprezintă o mare simplificare. Dacă se mai presupune că se dă o reducere dacă se vinde un număr mare de produse și că costul unui produs descrește cînd numărul lor crește, atunci situația se poate exprima aproximativ prin $p_i = \bar{p}_i - r_i x_i$, $k_i = \bar{k}_i - s_i x_i$. Se obține astfel funcția obiectiv pătratică

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} (\bar{p}_i - \bar{k}_i)\, x_i + \sum_{i=1}^{m} (s_i - r_i)\, x_i^2.$$

Problema de programare pătratică poate fi scrisă sub formă completă $\min\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}\}$, unde **C** este o matrice pătrată simetrică de ordinul $n \times n$. Dacă **C** este pozitiv definită sau semidefinită, atunci problema este convexă și sînt aplicabile condițiile Kuhn-Tucker. Și în acest caz o problemă de maxim poate fi transformată într-o problemă de minim schimbînd semnul coeficienților funcției obiectiv. În acest caz pentru a obține o problemă convexă, matricea pătrată din funcția obiectiv pentru problema de maxim trebuie să fie negativ semidefinită. Pentru determinarea planului de producție se ajunge la cazul special în care **C** este o matrice diagonală care pentru $s_i - r_i \leqslant 0$ este negativ semidefinită. Și aceasta este o reprezentare aproximativă a procesului real și este util să se repete aici observația că pentru fiecare caz special trebuie întîi analizat întotdeauna dacă avantajul unui model „mai bun" justifică munca suplimentară comparativ cu cea din cazul modelului liniar.

Funcția Lagrange pentru optimizarea pătratică are forma

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{u}^T(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) \text{ așa încît } \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{c} + 2\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{A}^T\mathbf{u},\quad \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}.$$

Cu notațiile $\dfrac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{v}$ și $-\dfrac{\partial F}{\partial u} = \mathbf{y}$ se obțin condițiile:

(1) $\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b}$; (2) $2\mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{v} + \mathbf{A}^T\mathbf{u} = -\mathbf{c}$;

(3) $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0},\ \mathbf{v} \geqslant \mathbf{0},\ \mathbf{y} \geqslant \mathbf{0},\ \mathbf{u} \geqslant \mathbf{0}$; (4) $\mathbf{x}^T\mathbf{v} = 0,\ \mathbf{y}^T\mathbf{u} = 0$.

Un vector $\mathbf{x} \in \mathbf{R}_n$ este o soluție dacă și numai dacă satisface condițiile (1) — (4) pentru un $\mathbf{v} \in \mathbf{R}_n$, $\mathbf{u} \in \mathbf{R}_m$ și un $\mathbf{y} \in \mathbf{R}_m$. (1) — (3) formează un sistem liniar. Condițiile (4) se mai pot scrie sub forma (4a) $\mathbf{x}^T\mathbf{v} + \mathbf{y}^T\mathbf{u} = 0$ deoarece din (3) anularea fiecărui termen în produsul scalar este implicată atît de (4) cît și de (4*a*). Așadar, această condiție stabilește că sistemul (1)—(3) trebuie să admită o soluție admisibilă pentru care cel mult una din componentele corespunzătoare ale lui **x** și **v** și în mod corespunzător cel mult una din componentele corespunzătoare ale lui **y** și **u** pot fi pozitive. Recapitulînd, cel mult $m + n$ componente ale celor patru vectori pot fi pozitive, adică exact același număr cîte ecuații sînt în (1) și (2). Soluțiile sistemului (1)—(4) se găsesc astfel printre *soluțiile admisibile de bază* ale primelor trei condiții. Aceste soluții admisibile de bază pot fi determinate prin *metoda simplex*.

Pentru considerarea ultimei condiții există două posibilități:

Metoda lui Wolfe. Se introduc variabile suplimentare în (1)—(4) astfel încît o soluție admisibilă de bază pentru (1)—(3) satisfăcînd pe (4) poate fi ușor găsită. Se procedează apoi prin metoda simplex astfel încît condiția aceasta rămîne satisfăcută și variabilele suplimentare se înlătură din bază.

În metodele BARANKIN-DORFMAN și FRANK-WOLFE se pornește de la o soluție admisibilă de bază care nu satisface ultima condiție și se folosește metoda simplex în scopul minimizării expresiei $\mathbf{x}^T\mathbf{v} + \mathbf{y}^T\mathbf{u}$.

Metoda lui Frank-Wolfe. Cu $\mathbf{z}^T = (\mathbf{x}^T, \mathbf{y}^T, \mathbf{v}^T, \mathbf{u}^T)$ și $\bar{\mathbf{z}}^T = (\mathbf{v}^T, \mathbf{u}^T, \mathbf{x}^T, \mathbf{y}^T)$ se pot scrie condițiile Kuhn-Tucker sub forma $\min\{\bar{\mathbf{z}}^T\mathbf{z} \mid \bar{\mathbf{A}}\mathbf{z} = \bar{\mathbf{b}},\ \mathbf{z} \geqslant \mathbf{0}\}$. Aici $\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{I}_m & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 2\mathbf{C} & \mathbf{0} & -\mathbf{I}_n & \mathbf{A}^T \end{pmatrix}$ și $\bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{c} \end{pmatrix}$, unde $\mathbf{I}_m$ și $\mathbf{I}_n$ sînt matrice unitate de ordinul m și n respectiv.

Deoarece $\bar{z}^T = 2(x^T v + y^T u)$, o soluție a problemei inițiale se poate obține ca partea corespunzătoare lui x dintr-o soluție z_0 a problemei transformate cu $\bar{z}^T z_0 = 0$.

O soluție admisibilă de bază z_1 poate fi determinată prin metodele cunoscute din optimizarea liniară. FRANK și WOLFE au considerat atunci $\bar{z}_1^T z$ cu z_1 fixat, ca funcție obiectiv a problemei transformate. În acest mod problema este liniarizată și metoda simplex poate fi aplicată. Dacă se obține o soluție optimă z_2 a acestei probleme cu $\bar{z}_1^T z_2 = 0$, problema este rezolvată. În caz contrar se sugerează următorul procedeu. Se continuă cu aceeași metodă pînă cînd se obține pentru baza z_k fie relația $\bar{z}_1^T z_k = 0$ în care caz procedeul s-a terminat, fie $\bar{z}_1^T z_k \leqslant 1/2 \bar{z}_1^T z_1$. În al doilea caz FRANK și WOLFE au dat o metodă de construcție a unui *nou* z_1. Ei au arătat că unul dintre cazuri are întotdeauna loc și prin folosirea metodei propuse de ei, dacă C este pozitiv semidefinită, primul caz apare întotdeauna după un număr finit de pași, obținîndu-se astfel soluția.

Metoda gradienților. Din definiția lui $v = \dfrac{\partial F}{\partial x}$, $y = \dfrac{\partial F}{\partial u}$ rezultă că $G(z) = \bar{z}^T z$ este o funcție convexă. Liniarizarea în punctul z_1 se face astfel încît $G(z)$ și funcția liniară de înlocuire $H(z) = \bar{z}_1^T z$ au *același gradient* în punctul z_1. În acest mod se ajunge la un nou grup de metode, *metoda gradienților* care poate fi aplicată atît în optimizarea pătratică cît și în optimizarea neliniară. Pentru o funcție derivabilă $f(x)$ cu $x \in R_n$, vectorul gradient, $\operatorname{grad} f = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ este perpendicular pe suprafața $f(x) = \text{const}$ și este îndreptat în direcția creșterii maxime a funcției $f(x)$. Pentru a minimiza o funcție dată fără condiții suplimentare se pornește dintr-un punct dat x_0 în direcția determinată de grad $f(x)$. Dacă funcția are un minim unic, ca de exemplu pentru funcții strict convexe cu minim finit, atunci aplicarea iterativă a acestei metode va conduce cu certitudine la rezultatul dorit. Pentru o problemă de optimizare convexă, trebuie desigur avut grijă, ca să se rămînă în regiunea admisibilă.

Metoda gradienților poate fi descrisă la modul general astfel. Pornind de la un punct admisibil x_0, se determină o direcție astfel încît cel puțin la început să se rămînă în regiunea admisibilă și valoarea funcției obiectiv să descrească cît de rapid posibil. Se continuă în această direcție pînă cînd funcția obiectiv încetează să descrească sau pînă cînd se atinge frontiera regiunii admisibile. Punctul x_1 atins astfel este folosit ca punct de pornire al unui nou pas. Diferitele metode diferă numai prin modul în care se aleg direcțiile pentru fiecare pas.

Metoda direcțiilor admisibile a lui Zoutendijk. Fie problema $\min\{f(x) \mid Ax \leqslant b\}$. Presupunem că restricțiile date conțin și limitări de semn pentru x. Dacă a_j^T sînt liniile matricei A și b_j componentele lui b, atunci restricțiile se pot exprima prin $a_j^T x \leqslant b_j$ pentru $j = 1, ..., m$. Fie funcția obiectiv $f(x)$ convexă cu derivate parțiale continue în regiunea admisibilă R. Metoda descrisă mai sus prin care se trece de la un punct x^k din regiunea admisibilă la punctul următor x^{k+1} se particularizează aici astfel. Direcția aleasă este determinată de vectorul r^k de-a lungul razei $x^k + \lambda r^k$, unde direcția lui r^k se determină astfel încît pentru $\lambda > 0$ raza să rămînă în regiunea admisibilă. Dacă x^k este un punct interior al lui R, atunci nu există nici un fel de limitări. Dacă x^k se găsește pe frontiera lui R și dacă J este o mulțime de indici pentru care are loc $a_j^T x^k = b_j$, atunci necesară și suficientă pentru alegerea lui r^k este condiția $a_j^T r^k \leqslant 0$ pentru $j \in J$. O astfel de direcție se numește *admisibilă*. Scopul este descreșterea maximum posibilă a funcției $f(x)$ de-a lungul razei; $f(x)$ se va reduce pentru toți r^k cu $\operatorname{grad}^T f(x^k) \cdot r^k < 0$. Se scrie grad $f(x^k) = c$ și se determină r^k ca soluție a problemei de optimizare liniară $\min\{c^T r \mid a_j^T r < 0$ pentru $j \in J\}$. Deoarece în general $c^T r$ nu este mărginită inferior, se mai adaugă o condiție admisibilă. Dacă se alege $-1 \leqslant r_i \leqslant 1$ $(i = 1, ..., n)$ pentru componentele r_i ale lui r, atunci se determină prin metoda simplex un r^k convenabil pentru x^k. Se continuă cu această rază $x^k + \lambda r^k$ pînă ce $f(x)$ devine minim, adică pînă se găsește un λ_1 cu $\operatorname{grad}^T f(x^k + \lambda_1 r^k) \cdot r^k = 0$ sau pînă se atinge un punct în care raza părăsește regiunea admisibilă. Valoarea lui λ_2 corespunzătoare se determină din $\lambda_2 = \max\{\lambda \mid a_j^T(x^k + \lambda r^k) = b_j\}$ pentru $j = 1, ..., m$. Repetînd procedeul descris, se obține punctul următor de aproximare $x^{k+1} = x^k + \lambda_k r^k$ cu $\lambda_k = \min(\lambda_1, \lambda_2)$. Dacă λ_k nu este finit, atunci $f(x)$ nu are minim finit. ZOUTENDIJK a stabilit convergența metodei. În cazul special al unei funcții pătratice $f(x)$ se poate conchide că procedeul se sfîrșește după un număr finit de pași.

Pe lîngă optimizarea pătratică mai există o formă specială de optimizare neliniară pentru care s-au găsit în ultimii ani metode satisfăcătoare de rezolvare și pentru care există chiar un

principiu de dualitate. Acestea sînt probleme în care funcția obiectiv este un raport de două funcții liniare și restricțiile sînt inegalități liniare.

30.3. Optimizare dinamică

Ideea de bază a optimizării dinamice va fi mai întîi ilustrată printr-un exemplu simplu. Un vehicul (camion, vagon) trebuie încărcat cu obiecte de tipuri diferite; n este numărul tipurilor s_i $(i = 1, ..., n)$ de obiecte, $v_i > 0$ prețul obiectelor, $w_i > 0$ greutatea lor, $u_i > 0$ numărul obiectelor încărcate de tipul i, și z capacitatea totală a vechiculului; z satisface condiția $z \geqslant \min \{w_i\}$. Problema constă în determinarea numerelor u_i astfel încît să se realizeze încărcarea cu preț total maxim.

Problema conduce la următorul exercițiu de optimizare: să se determine valoarea maximă a funcției obiectiv

$$f(u_1, ..., u_n) = \sum_{i=1}^{n} v_i u_i \quad \text{cu restricțiile}$$

$$u_i \geqslant 0 \quad (i = 1, ..., n) \text{ sînt întregi care satisfac } \sum_{i=1}^{n} w_i u_i \leqslant z.$$

Problema poate fi privită ca un proces în n pași, la fiecare pas determinîndu-se un u_i, astfel încît valoarea maximă căutată să fie atinsă la ultimul pas. Întreaga problemă de optimizare se transformă astfel într-un eveniment care se desfășoară în timp, adică într-un proces.

Procese deterministe discrete. Fie S un sistem, de ex. de natură economică, mecanică sau chimică a cărui stare în intervalul de timp $[t', t'']$ poate fi descrisă prin n funcții $x_i = x_i(t)$ $(i = 1, ..., n)$, unde mulțimea stărilor posibile $\mathbf{x}^T = (x_1, ..., x_n)$ (în intervalul de timp respectiv) este inclusă într-o mulțime $\mathbf{X}$ de puncte ale spațiului euclidian n-dimensional. Componentele lui $\mathbf{x}^T$ se numesc *variabile de stare*.

Pentru definiția unui proces *discret determinist* sînt necesare următoarele ipoteze:

Fie $t' = t_1 < t_i < t_{i+1} < ... < t_{n+1} = t''$ o partiție dată a intervalului $[t', t'']$; atunci starea $\mathbf{x}^{i+1} = (x_1(t_i), ..., x_n(t_i))$ a sistemului rămîne neschimbată în intervalul de timp (t_i, t_{i+1}) $(i = 1, ..., n)$. Starea $\mathbf{x}^{i+1}$ depinde numai de $\mathbf{x}^i$ și de o anumită decizie e^i, adică $\mathbf{x}^{i+1} = T^i(\mathbf{x}^i, e^i)$ $(i = 1, ..., n)$, unde T^i (transformarea stării la pasul i) este independentă de stările anterioare.

Decizia e^i este unic determinată printr-un anumit vector n-dimensional $\mathbf{u}^i(u_1, ..., u_n)$, unde punctele $\mathbf{u}^i$ trebuie să se găsească într-o anumită regiune $\mathbf{U}^i$. Fiecare punct $\mathbf{u}^i \in \mathbf{U}^i$ este un *vector de decizie permis la pasul i*. Orice șir $P = (\mathbf{u}^1, ..., \mathbf{u}^n)$ cu $\mathbf{u}^i \in \mathbf{U}^i (i = 1, ..., n)$ și $\mathbf{x}^{i+1} = T^i(\mathbf{x}^i, \mathbf{u}^i) \in \mathbf{X}$ pentru $i = 1, ..., n$, se numește *strategie permisă* a procesului de decizie în n pași. Deoarece schimbările de stare ale sistemului S survin numai la momente discrete și deoarece cantitățile implicate nu sînt aleatoare, toate procesele de acest tip se numesc *procese deterministe discrete*.

Strategii optime. Pentru un proces determinist discret se dă o anumită funcție $f(\mathbf{x}^1, ..., \mathbf{x}^n, \mathbf{x}^{n+1}, \mathbf{u}^1, ..., \mathbf{u}^n)$, definită pe un domeniu $\mathbf{x}^i \in \mathbf{X}$ $(i = 1, ..., n)$, $\mathbf{u}^i \in \mathbf{U}^i (i = 1, ..., n)$, și care se numește *funcție obiectiv*. Dacă se dă starea inițială $\mathbf{x}^1$, atunci funcția obiectiv f se poate exprima ca o funcție de $\mathbf{x}^1, \mathbf{u}^1, ..., \mathbf{u}^n$. Acest lucru rezultă din ipotezele făcute asupra procesului astfel încît

$$f(\mathbf{x}^1, T^1(\mathbf{x}^1, \mathbf{u}^1), T^2(T^1(\mathbf{x}^1, \mathbf{u}^1), \mathbf{u}^2), ..., \mathbf{u}^1, ..., \mathbf{u}^n) = f(\mathbf{x}^1, \mathbf{u}^1, ..., \mathbf{u}^n).$$

Problema de optimizare constă în găsirea strategiei posibile $P_0 = (\mathbf{u}_0^1, ..., \mathbf{u}_0^n)$ pentru o stare inițială dată $\mathbf{x}^1$, cu proprietățile $f(\mathbf{x}^1, \mathbf{u}_0^1, ..., \mathbf{u}_0^n) = \max\limits_{\{\mathbf{u}^1, ..., \mathbf{u}^n\}} f(\mathbf{x}^1, \mathbf{u}^1, ..., \mathbf{u}^n)$, unde $\{\mathbf{u}^1, ..., \mathbf{u}^n\}$ aparține mulțimii tuturor strategiilor permise. Dacă o astfel de stragtegie P_0 există, ea se numește *strategie optimă*. Metoda optimizării dinamice presupune o anumită proprietate a funcției obiectiv, așa-numita proprietate Markov.

Proprietatea Markov	**Funcţia f este definită pentru orice n, adică funcţiile $f(\mathbf{x}')$, $f(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{u}^1)$, $f(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3, \mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2)$, ... pot fi calculate recursiv. Funcţia $f(\mathbf{x}^1, ..., \mathbf{x}^n, \mathbf{x}^{n+1}, \mathbf{u}^1, ..., \mathbf{u}^n)$ se poate defini cu ajutorul funcţiei $f(\mathbf{x}^1, ..., \mathbf{x}^n, \mathbf{u}^1, ..., \mathbf{u}^{n-1})$ şi al valorilor $\mathbf{x}^{n+1}$ şi $\mathbf{u}^n$.**

Pentru majoritatea problemelor de decizie din aplicaţiile practice funcţiile respective aparţin clasei funcţiilor separabile care mai poartă numele de clasa *funcţiilor aditive* (cu caracter aditiv). Acestea sînt funcţii care se pot scrie sub forma

$$f(\mathbf{x}^1, ..., \mathbf{x}^{n+1}, \mathbf{u}^1, ..., \mathbf{u}^n) = \sum_{i=1}^{n} g_i(\mathbf{x}^i, \mathbf{u}^i).$$

Acestea au proprietatea lui Markov.

În ipoteza că pentru procesul în n paşi (determinist şi discret) descris mai sus cu funcţia obiectiv separabilă f există o strategie optimă care reprezintă soluţia optimă a problemei de optimizare, se introduce notaţia

$$f_n(\mathbf{x}^1) = \max_{\{\mathbf{u}^1, ..., \mathbf{u}^n\}} \sum_{i=1}^{n} g_i(\mathbf{x}^i, \mathbf{u}^i).$$

Principiul de optimalitate al lui Bellman. Metoda optimizării dinamice se bazează pe faptul că în loc de problema iniţială cu starea iniţială $\mathbf{x}^1$ şi numărul fixat de paşi se consideră mai multe probleme. Valoarea $f_n(\mathbf{x}^1)$ este astfel privită ca o funcţie de $\mathbf{x}^1$ şi n. Dacă presupunem valoarea $f_n(\mathbf{x}^1)$ calculată printr-o metodă oarecare, atunci pe baza definiţiei lui $f_n(\mathbf{x}^1)$ şi a proprietăţii de separabilitate a funcţiei obiectiv se deduce următoarea formulă de recurenţă:

$$f_n(\mathbf{x}^1) = \max_{\mathbf{u}^1 \in U^1} \max_{\mathbf{u}^2 \in U^2} ... \max_{\mathbf{u}^n \in U^n} \left\{ \sum_{i=1}^{n} g_i(\mathbf{x}^i, \mathbf{u}^i) \right\} = \max_{\mathbf{u}^1 \in U^1} \{ g_1(\mathbf{x}^1, \mathbf{u}^1) + f_{n-1}(\mathbf{x}^2) \},$$

Dar deoarece $\mathbf{x}^2 = T^1(\mathbf{x}^1, \mathbf{u}^1)$, formula de recurenţă devine

$$f_n(\mathbf{x}^1) = \max_{\mathbf{u}^1 \in U^1} \{ g_1(\mathbf{x}^1, \mathbf{u}^1) + f_{n-1}(T^i(\mathbf{x}^1, \mathbf{u}^1)) \}.$$

Această relaţie se poate deduce şi din *principiul de optimalitate al lui Bellman* care conţine ideea de bază a optimizării dinamice.

Principiul de optimalitate al lui Bellman	**Dacă $\mathbf{u}_0^1, ..., \mathbf{u}_0^n$ reprezintă o strategie optimă a unui proces cu n paşi cu starea iniţială $\mathbf{x}^1$, atunci şirul de decizie $\mathbf{u}_0^2, ..., \mathbf{u}_0^n$ reprezintă strategia optimă a procesului cu $n-1$ paşi cu starea iniţială $\mathbf{x}^2$. Aici $\mathbf{x}^2$ este starea în care s-a transformat sistemul S pornind din starea iniţială $\mathbf{x}^1$ în urma deciziei $\mathbf{u}^1$.**

În literatura asupra optimizării dinamice a apărut astfel o numerotare inversată notîndu-se cu $\mathbf{x}^{n+1}$ starea iniţială şi cu $\mathbf{u}^n$ prima decizie într-un proces cu n paşi. Cu această notaţie transformarea dată prin $\mathbf{x}^i = T^i(\mathbf{x}^{i+1}\mathbf{u}^i)$, $i = 1, ..., n$, cu $\mathbf{x}^n = T^n(\mathbf{x}, \mathbf{u}^n)$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{n+1}$ şi formula de recurenţă care corespunde principiului de optimalitate se transformă în relaţia

$$f_n(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{u}^n \in U^n} \{ g_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}^n) + f_{n-1}(\mathbf{x}^n) = \max_{\mathbf{u}^n \in U^n} \{ g_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}^n) + f_{n-1}(T^n(\mathbf{x}, \mathbf{u}^n)) \}.$$

Exemplul 5. Problema menţionată la începutul acestui capitol poate fi privită ca un proces determinist discret în n paşi, unde folosind notaţia naturală se notează cu $\mathbf{u}^i = (u_i)$ decizia la pasul i, cu $(\mathbf{u}^1, ..., \mathbf{u}^n) = (u_1, ..., u_n)$ o strategie permisă cu proprietăţile

date şi $x^{i+1} = X^i - u_i w_i = z - \sum_{j=1}^{i} w_j u_j \ (i = 1, ..., n)$, unde $x^1 = z$ este starea procesului la pasul i. Din principiul de optimalitate rezultă

$$f_n(z) = f_n(x^1) = \max_{\substack{u_1 \in \{0, 1, ...\} \\ u_1 \cdot w_1 \leqslant z}} \{u_1 v_1 + f_{n-1}(z - u_1 w_1)\}, ..., \quad f_1(z) = \max_{\substack{u_1 \in \{0, 1, ...\} \\ u_1 \cdot w_1 \leqslant z}} u_1 v_1$$

sau, schimbînd numerotarea cu cea inversată,

$$f_n(z) = \max_{\substack{u_n \in \{0, 1, ...\} \\ u_n \cdot w_n \leqslant z}} \{u_n v_n + f_{n-1}(z - u_n w_n)\}, ..., \quad f_1(z) = \max_{\substack{u_n \in \{0, 1, ...\} \\ u_n \cdot w_n \leqslant z}} u_n v_n$$

Evident $g_i(u_i) = u_i v_i$.

Fie date valorile numerice $n = 3$, $z = 100$, $w_1 = 40$, $w_2 = 45$, $w_3 = 60$ $v_1 = 20$. $v_2 = 75$, $v_3 = 102$.

În acest caz

$$g_1(u_1) = 20u_1, \quad g_2(u_2) = 75u_2, \quad g_3(u_3) = 102u_3, \quad f = 20u_1 + 75u_2 + 102u_3$$

şi restricţiile sînt reprezentate de $40u_1 + 45u_2 + 60u_3 \leqslant 100$, unde u_1, u_2, u_3 sînt numere întregi nenegative.

Se tabelează întîi funcţiile $g_i(u_i)$ $(i = 1, 2, 3)$, unde condiţiile $0 \leqslant u_i \leqslant z/w_i$ $(i = 1, 2, 3)$ trebuie să fie îndeplinite pentru orice u_i întreg.

z	u_1	$g_1(u_1)$	z	u_2	$g_2(u_2)$	z	u_3	$g_3(u_3)$
0–39	0	0	0–44	0	0	0–59	0	0
40–79	0	0	45–89	0	0	60–100	0	0
	1	20		1	75		1	102
80–100	0	0	90–100	0	0			
	1	20		1	75			
	2	40		2	150			
	(1)			(2)			(3)	

Folosind formula $f_1(z) = \max_{u_1} 20u_1$, cu ajutorul pasului (1) se calculează tabelul alăturat, în care cu $\bar{u}_1(z)$ se notează valoarea lui u_1 pentru care se obţine $f_1(z)$.

Pentru $n = 2$ se obţine $f_2(z) = \max_{u_2} \{g_2(u_2) + f_1(z - u_2 w_2)\}$ şi cu ajutorul tabelelor (2) şi (4) se ajunge la tabelul (5), unde $\bar{u}_2(z)$ este valoarea lui u_2 pentru care se obţine $f_2(z)$. Pentru $n = 3$, $f_3 = \max_{u_3} \{g_3(u_3) + f_2(z - u_3 w_3)\}$ şi pe baza acestei relaţii se ajunge în sfîrşit la tabelul (6).

u_1	z	$f_1(z)$	$\bar{u}_1(z)$
0	0–39	0	0
1	40–79	20	1
2	80–100	40	2

(4)

$\bar{u}_1$	$\bar{u}_2$	z	$f_2(z)$	$\bar{u}_2(z)$
0	0	0–39	0	0
1	0	40–44	20	0
0	1	45–84	75	1
1	1	85–89	95	1
0	2	90–100	150	2

(5)

u_1	$\bar{u}_2$	$\bar{u}_3$	z	$f_3(z)$	$\bar{u}_3(z)$
0	0	0	0–39	0	0
1	0	0	40–44	20	0
0	1	0	45–59	75	0
0	0	1	60–89	102	1
0	2	0	90–100	150	0

(6)

Pentru $z = 100$ din tabelul (6) se obține $\bar{u}_3 = 0$. Atunci $\bar{u}_2(z - \bar{u}_3 w_3) = \bar{u}_2(100) = 2$ din tabelul (5). Din tabelul (4) se obține $\bar{u}_1 = \bar{u}_1(z - \bar{u}_2 w_2 - \bar{u}_3 w_3) = \bar{u}_1(100 - 2 \cdot 45) = \bar{u}_1(10) = 0$. Soluția optimă $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) = (0, 2, 0)$ este unică. Valoarea optimă este $2v_2 = 150$.

Metoda ecuațiilor funcționale. Și pentru această metodă se va prezenta mai întîi un exemplu. Pentru o anumită sumă de bani x există o posibilitate de investire. Suma u_1 $(0 \leqslant u_1 \leqslant x)$ se investește în primul mod și suma $x - u_2$ în al doilea mod. Într-un anumit interval de timp, de exemplu un an, se obține beneficiul $g_1(u_1)$ din investiția u_1 și beneficiul $g_2(x - u_1)$ din investiția $x - u_1$. La sfîrșitul intervalului de timp, mijloacele folosite pentru obținerea beneficiilor g_1 și g_2 și-au mai pierdut din eficiență prin amortizare, astfel încît după un an situația va fi

$$x_1 = au_1 + b(x - u_1),\ 0 < a < 1,\ 0 < b < 1.$$

Continuînd cu suma x_1 la sfîrșitul celui de-al doilea an, se investesc din nou suma u_2, $0 \leqslant u_2 \leqslant x_1$ în primul mod și suma $x_1 - u_2$ în al doilea, astfel încît beneficiul în doi ani este egal cu

$$g_1(u_1) + g_2(x - u_1) + g_1(u_2) + g_2(x_1 - u_2).$$

În același mod se vor investi bani la începutul celui de-al treilea an, cînd suma aflată la dispoziție va fi $x_2 = au_2 + b(x_1 - u_2)$. După n ani beneficiul realizat va fi

$$\sum_{i=1}^{n} \{g_1(u_i) + g_2(x_{i-1} - u_i)\} = \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}, u_i)$$

cu $x_0 = x$, unde la sfîrșitul anului n suma aflată la dispoziție este $x_n = au_n + b(x_{n-1} - u_n)$. În acest mod s-a descris un proces de n pași cu funcția obiectiv

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(x_{i-1}, u_i) = \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}, u_i) = \sum_{i=1}^{n} \{g_1(u_i) + g_2(x_{i-1}, u_i)\}$$

cu $x_0 = x$ și cu restricțiile $0 \leqslant u_i \leqslant x_{i-1}$ $(i = 1, \ldots, n)$, unde transformarea de stare $x_i = T^i(x_{i-1}, u_i) = T(x_{i-1}, u_i) = au_i + b(x_{i-1} - u_i)$, $i = 1, \ldots, n$, nu depinde de pasul respectiv. Dacă se trece la numerotarea inversă a cantităților de decizie și de stare, adică, dacă $x = x_{n+1}$ se consideră stare inițială, atunci se ajunge la următoarea problemă de optimizare: să se determine maximul funcției obiectiv:

$$\sum_{i=1}^{n} g(x_{i+1}, u_i) = \sum_{i=1}^{n} \{g_1(u_i) + g_2(x_{i+1} - u_i)\} \text{ cu restricțiile } 0 \leqslant u_i \leqslant x_{i+1} (i = 1, .., n),$$

$$x_i = T^i(x_{i+1}, u_i) = T(x_{i+1}, u_i) = au_i + b(x_{i+1} - u_i), \quad i = 1, \ldots, n.$$

În conformitate cu principiul de optimalitate se obține

$$f_n(x) = f_n(x_{n+1}) = \max_{0 \leqslant u_n \leqslant x_{n+1}} \{g_1(u_n) + g_2(x_{n+1} - u_n) + f_{n-1}(x_n)\} =$$

$$= \max_{0 \leqslant u_n \leqslant x} \{g_1(u_n) + g_2(x - u_n) + f_{n-1}(T(x_{n+1}, u_n))\} =$$

$$= \max_{0 \leqslant u \leqslant x} \{g_1(u) + g_2(x - u) + f_{n-1}(au + b(x - u))\},\quad n \geqslant 1,$$

unde f_0 este definit prin $f_0 = 0$.

Pentru $n = 1, 2, \ldots$, acest sistem reprezintă un sistem de ecuații funcționale pentru funcțiile necunoscute $f_1(x), \ldots, f_n(x)$. Pentru rezolvarea problemei într-un caz special, adică atunci

cînd g_1 și g_2 și numerele a, b sînt date, se determină recursiv soluția ultimului sistem de ecuații, adică pentru fiecare $n = 1, 2...$, valoarea $\bar{u}_n = \bar{u}_n(x)$ pentru care

$$g_1(\bar{u}_n) + g_2(x - \bar{u}_n) + f_{n-1}(a\bar{u}_n + b(x - \bar{u}_n)) = f_n(x)$$

în raport cu $u \in [0, x]$ și $\bar{x}_i = \bar{x}_i(x) = a\bar{u}_i + b(\bar{x}_{i+1} - u_i), i = 1, ..., n$. Această metodă poartă numele de *metoda ecuațiilor funcționale*.

Exemplul 6. Fie funcțiile beneficiului din exemplul introductiv $g_1(u) = \alpha\sqrt{u}$, $g_2(x - u) = \beta\sqrt{x - u}$, unde $\alpha > 0$, $\beta > 0$ sînt numere arbitrare și $0 < a = b < 1$. Atunci în acest caz $x_i = au_i + b(x_{i+1} - u_i) = ax_{i+1}$, $i = 1, ..., n$, și deoarece $x_{n+1} = x$, rezultă că $x_i = a^{n+1-i}x$ $(i = 1, ..., n)$. Ecuațiile pentru f_n duc în acest caz la relațiile

$$f_n(x) = \max_{0 \leqslant u \leqslant x} \{\alpha\sqrt{u} + \beta\sqrt{x - u} + f_{n-1}(ax), \quad n \geqslant 1, f_0 = 0\}.$$

Dacă pentru un $x > 0$ fixat se definește funcția $\varphi_{n,x}(u) = \alpha\sqrt{u} + \beta\sqrt{x - u} + f_{n-1}(ax)$, atunci $\frac{d}{du}\varphi_{n,x} = \alpha/(2\sqrt{u}) - \beta/(2\sqrt{x - u})$ pentru $u \in (0, x)$ și $\frac{d}{du}\varphi_{n,x} = 0$ numai pentru punctul $0 < \bar{u}_n(x) = [\alpha^2/(\alpha^2 + \beta^2)] \cdot x < x$, în care este atinsă valoarea maximă a lui $\varphi_{n,x}(u)$ relativ la $u \in [0, x]$. De aceea $f_n(x) = \alpha\sqrt{\bar{u}} + \beta\sqrt{x - u} + f_{n-1}(ax) = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\sqrt{x} + f_{n-1}(ax)$ pentru $n > 1$ cu $f_0(x) = 0$.

De aici rezultă ușor că:

$$f_1(x) = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)\,x},$$

$$f_2(x) = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)\,x} + \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)\,ax} = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)\,x}\,(1 + a^{1/2}),$$

. . . .

$$f_n(x) = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)\,x}\,(1 + a^{1/2} + ... + a^{(n-1)/2}),$$

unde $f_n(x)$ reprezintă beneficiul la pasul n.

Deoarece $0 \leqslant u_i \leqslant x_{i+1}$ $(i = 1, ..., n)$,

$$\bar{u}_i(x_{i+1}) = [\alpha^2/(\alpha^2 + \beta^2)]\,x_{i+1} = [\alpha^2/[\alpha^2 + \beta^2)]\,a^{n-i}x \qquad (i = 1, ..., n).$$

Cum s-a folosit numerotarea inversă, șirul $[\alpha^2/(\alpha^2 + \beta^2)]\,x$, $[\alpha^2/(\alpha^2 + \beta^2)]\,ax, ..., [\alpha^2/(\alpha^2 + \beta^2)]a^{n-1}x$ este strategia optimă a procesului cu n pași considerat, cu beneficiul $f_n(x) = \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)\,x}\sum_{s=0}^{n-1} a^{s/2}$, unde se ajunge la suma $x_n = a^n x$ după pasul n.

Dezvoltări ulterioare. Spre deosebire de problema încărcărilor, maximizarea beneficiului reprezintă un proces discret în n pași pentru care regiunea permisă pentru cantitățile de decizie formează un spațiu compact conex, în cazul concret un interval. Acesta este deci un caz particular de proces discret în n pași pentru care spațiul cantităților de decizie este reprezentat printr-o regiune închisă și mărginită a spațiului de dimensiune corespunzătoare. În acest caz simplu, metoda ecuațiilor funcționale se aplică deseori cu succes. În cazuri mult mai complicate, în special cînd decizia la fiecare pas este caracterizată printr-un vector de decizie $\mathbf{u} = (u_1, ..., u_m)$, $m \geqslant 2$, alte metode ca de exemplu *metoda multiplicatorilor sau metoda aproximărilor succesive* sînt folosite în scopul reducerii problemei inițiale la un număr finit de probleme mai simple pentru care memoria calculatorului este adecvată. Problemele deterministe discrete reprezintă numai o parte din problemele care apar în optimizarea dinamică. Uneori este avantajos să se considere procese cu un număr infinit de pași, deși astfel de procese nu

apar niciodată în practică. Dacă se dă un proces discret cu foarte mulți pași și dacă este posibilă trecerea la limită pentru $n \to \infty$ în f_n, atunci din aceste relații se poate obține o singură ecuație funcțională

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \max_{0\leqslant u\leqslant x} \{g(x, u) + f_{n-1}(T(x, u))\}.$$

În general, această ecuație funcțională este mai ușor de rezolvat decît problema inițială și pentru n mare dă o aproximare bună a soluției căutate. *Teoria proceselor staționare* studiază condițiile în care această metodă este aplicabilă.

O altă clasă de probleme de optimizare dinamică tratează procese de decizie în care la fiecare moment este posibilă și chiar cerută o decizie. Este vorba de *procese de decizie continue*. Teoria corespunzătoare este strîns legată de calculul variațiilor și de teoria proceselor optimale a lui Pontreaghin. Aparatul matematic folosit aici este dintre cele mai dificile. În contrast cu procesele deterministe discrete sînt *procesele stochastice discrete* pentru care se cunoaște numai repartiția de probabilitate a stării la sfîrșitul unui pas. Aceste procese sînt deseori mai adecvate pentru tratarea problemelor din economie condiționate de o multitudine de factori, decît modelele deterministe, și metodele optimizării dinamice s-au dezvoltat și în această direcție.

III. Matematici speciale (sinteză)

31. Teoria numerelor

Obiectul inițial al teoriei numerelor a fost studiul proprietăților numerelor întregi. Ca ramură a matematicii, teoria numerelor s-a constituit sistematic abia mai tîrziu. Rezultate separate se cunosc încă din antichitate și aparțin lui EUCLID (300 î.e.n.) și lui DIOFANTE (250 î.e.n.). În secolul al XVII-lea, în cercetările sale Pierre FERMAT (1601—1666) face descoperiri remarcabile, de o reală valoare științifică. Progrese mari a realizat prin numeroasele sale lucrări Leonhard EULER (1707—1783) ale cărui idei au fost deosebit de fructuoase. Abia Carl Friedrich GAUSS (1777—1855) a dat teoriei numerelor o construcție unitară. În 1801 apare lucrarea *„Disquisitiones arithmeticae"*, operă monumentală despre care se poate spune pe drept cuvînt că pune bazele *aritmeticii superioare*.

Teoria numerelor este azi o ramură cu multe ramificații, înrudită cu algebra abstractă (în special în ceea ce privește teoria *algebrică a numerelor*) și care folosește cele mai rafinate metode ale analizei (*în teoria analitică a numerelor*). Apar astfel probleme și subdomenii care au numai indirect legătură cu numerele întregi.

Spre deosebire de alte domenii ale matematicii, multe rezultate ale teoriei numerelor sînt accesibile și unor nespecialiști fără cunoștințe temeinice aprofundate. Demonstrațiile acestor rezultate necesită însă un instrument matematic foarte complicat.

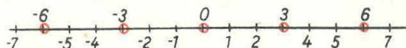
Teoria numerelor este denumită regina matematicii. Vorbind despre ea, Gauss a afirmat „Este remarcabil că oricine se ocupă serios de această știință, este cuprins de o adevărată pasiune"(GAUSS — 1808 — către prietenul lui din tinerețe BÒLYAI).

Inel și corp. Bazele *teoriei elementare a numerelor* au fost tratate în cap. 1. Din teoria divizibilității se știe că raportul a două numere întregi poate fi uneori tot un număr întreg, de exemplu $15:5=3$. Nu însă întotdeauna se întîmplă acest lucru, de exemplu $15:7$ nu este un număr întreg. Se spune că inversa operației de înmulțire, împărțirea nu poate fi efectuată fără restricții în domeniul numerelor întregi. Astfel de domenii de numere în care operațiile de adunare, scădere și înmulțire se pot efectua fără restricții se numesc *inele*. Dacă și împărțirea poate fi efectuată fără restricții (cu excepția împărțirii la zero), domeniul de numere va fi *corp*, de exemplu numerele raționale formează un corp. Vom nota în cele ce urmează cu **Z** inelul numerelor întregi $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ și cu **Q** corpul numerelor raționale. În **Q** se pot efectua fără restricții toate cele patru operații algebrice (exceptînd împărțirea la 0). Acest lucru nu mai este valabil pentru **Z**. Împărțirea a două numere din **Z** nu conduce întotdeauna tot la un număr din **Z**. Dacă cîtul $b:a$ a două numere din **Z** este tot un număr din **Z** (pentru $a \neq 0$), atunci b se zice divizibil cu a sau se mai spune că b este un multiplu al lui a sau că a divide pe b.

Ideal. Pe lîngă **Z** se mai cunosc și alte inele R ale căror elemente pot fi de exemplu numere reale sau complexe. Deosebit de importante sînt submulțimile I ale unui inel R care au următoarele proprietăți.

1. Dacă a și b sînt numere din I, atunci $a-b$ este un număr din I.

2. Pentru orice număr r din R și orice număr a din I produsul ra este un număr din I.



31.1. Idealul (3) pe dreapta numerelor

Astfel de submulțimi I ale lui R se numesc *ideale* ale lui R.

Dacă de exemplu m este un număr natural, atunci mulțimea numerelor $0, \pm m, \pm 2m, \pm 3m, \ldots$ este un ideal al lui $\mathbf{Z}$, în particular $0, \pm 3, \pm 6, \pm 9 \ldots$ (fig. 31.1) este un ideal al lui $\mathbf{Z}$.

Diferența a doi multipli ai lui m este tot un număr întreg, multiplu al lui m (prima proprietate a idealului) și fiecare multiplu întreg al unui multiplu al lui m este tot un multiplu al lui m (a doua proprietate a idealului). Se scrie în acest caz: $\mathbf{M} = (m)$, adică toți multiplii lui m. Astfel de ideale, generate de un element al inelului se numesc *ideale principale*. Este ușor de stabilit că orice ideal în $\mathbf{Z}$ trebuie să fie principal. Totalitatea idealelor în $\mathbf{Z}$ se vor obține atunci înlocuind $m = 0, 1, 2, \ldots$ în (m).

Și pentru ideale s-a introdus noțiunea de divizibilitate. Un ideal $\mathbf{A}$ este divizibil prin idealul $\mathbf{B}$ dacă orice element al lui $\mathbf{A}$ este element al lui $\mathbf{B}$, deci dacă $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$. Sensul cuvîntului „divizibil" este aici aparent inversat. Legătura cu teoria divizibilității clarifică această exprimare. Aplicînd această definiție pentru două ideale $\mathbf{A} = (a)$, $\mathbf{B} = (b)$ din $\mathbf{Z}$, rezultă că $\mathbf{A}$ este divizibil prin $\mathbf{B}$ atunci cînd a este divizibil cu b; de exemplu idealul (2) se compune din numerele $0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \ldots$ iar idealul (4) din numerele $0, \pm 4, \pm 8, \pm 12, \ldots$ Dar $(4) \subseteq (2)$, ceea ce înseamnă că idealul (4) este divizibil prin idealul (2) deoarece și 4 este divizibil cu 2. Mai rămîne de clarificat noțiunea de produs $\mathbf{AB}$ a două ideale $\mathbf{A}$ și $\mathbf{B}$. Acest produs se definește ca mulțimea sumelor finite de produse ab, unde a este un element din $\mathbf{A}$ și b un element din $\mathbf{B}$. În $\mathbf{Z}$ rezultă că $\mathbf{AB} = (ab)$, de exemplu $(2) \cdot (4) = (8)$. Noțiunea de ideal a rezultat din construcția teoriei algebrice a numerelor. Teoria idealelor are ca obiect studiul inelelor și a idealelor lor. Pentru a exprima rezultatele sub o formă mai simplă s-a adoptat următoarea terminologie: dacă a și b sînt numere din inelul R și $\mathbf{I}$ este un ideal al lui R, atunci se spune că $a \equiv b \pmod{\mathbf{I}}$ (se citește a este congruent cu b modulo $\mathbf{I}$), dacă $a - b$ este un număr din $\mathbf{I}$. Relația de congruență este o relație de echivalență. Ea satisface cunoscutele condiții de reflexivitate, simetrie și tranzitivitate. Cu ajutorul acestei relații este posibilă împărțirea tuturor numerelor din R în clase de resturi modulo $\mathbf{I}$, adică se pun în aceleași clase toate numerele congruente modulo $\mathbf{I}$. Acest mod de scriere a fost inspirat de faptul că principalele reguli de calcul pentru ecuații rămîn valabile pentru congruențe în raport cu același modul. Din punct de vedere istoric, noțiunea de congruență aparține lui GAUSS care a definit-o pentru inelul $\mathbf{Z}$. Dacă $a \equiv b \pmod{m}$, aceasta înseamnă că diferența numerelor întregi a și b se găsește în idealul $\mathbf{M} = (m)$, adică $a - b$ este divizibil cu m sau a și b dau la împărțirea cu m același rest.

Exemplu. $88 \equiv -10 \pmod{14}$ deoarece $88 - (-10) = 98$ este divizibil cu 14; $3^7 \equiv 1 \pmod{1093}$; $2^{32} \equiv -1 \pmod{641}$.

31.1. Numere întregi

În inelul numerelor întregi $\mathbf{Z}$ clasele de resturi au proprietăți speciale. În studiul lor un rol important îl are divizibilitatea numerelor. Se notează cu (a, b) cel mai mare divizor comun (c.m.m.d.c.) a două numere a și b și cu p un număr prim.

Inelul claselor de resturi modulo m. Clasele de resturi mod m formează un inel. Pentru a arăta acest lucru trebuie definite adunarea și înmulțirea a două clase de resturi mod m. Se va folosi în acest scop un exemplu. Fie r_1 clasa $\overline{2}$ mod 6 care conține numerele $\ldots, -10, -4, 2, 8, 14, \ldots$ și r_2, clasa de resturi $\overline{5}$ mod 6 care conține numerele $\ldots, -7, -1, 5, 11, \ldots$ Fie $r_1 + r_2$ clasa de resturi care conține pe $\overline{2} + \overline{5} = \overline{7}$, adică clasa care conține toate numerele care la împărțirea prin 6 dau ca rest 1. Atunci se scrie $\overline{2} + \overline{5} = \overline{1}$; la fel și $\overline{5} + \overline{0} = \overline{5}$, $\overline{3} + \overline{3} = \overline{0}$ mod 6. Produsul se definește prin $\overline{2} \cdot \overline{5} = \overline{10} = \overline{4}$; alte exemple mod 6 sînt $\overline{5} \cdot \overline{0} = \overline{0}$, $\overline{3} \cdot \overline{3} = \overline{3}$; $\overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{0}$.

Cu operațiile de adunare și înmulțire definite mai sus, clasele de resturi mod m formează un inel, *inelul claselor de resturi* mod m. Structura acestui inel este precis determinată. Inelul claselor de resturi mod m este un corp dacă și numai dacă m este un număr prim.

Grupul claselor de resturi prime. Alegînd dintre cele m clase de resturi distincte $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots \overline{m-1}$ mod m pe acelea ale căror număr este prim cu m, se obțin clase de resturi prime mod m. Pentru $m = 6$ există două clase de resturi prime $\overline{1}$ și $\overline{5}$, pentru $m = p$ există întotdeauna $p - 1$ clase de resturi prime $\overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{p-1}$.

Numărul claselor de resturi prime mod m se notează cu $\varphi(m)$ (*funcția lui Euler*). De exemplu $\varphi(6) = 2$, $\varphi(p) = p - 1$; $\varphi(m)$ este o funcție definită pentru argumente întregi. Această funcție este multiplicativă, adică $\varphi(ab) = \varphi(a)\,\varphi(b)$ dacă $(a, b) = 1$. Se poate vedea ușor că $\varphi(p^k) = p^{k-1}(p - 1)$. Cu aceste reguli $\varphi(m)$ poate fi calculată pentru orice m; de exemplu $\varphi(3\,240) = \varphi(2^3)\,\varphi(3^4)\,\varphi(5) = 4 \cdot 54 \cdot 4 = 864$.

Clasele de resturi prime mod m formează grupul G_m avînd ca lege de compoziție înmulțirea. Ordinul acestui grup este $\varphi(m)$. Este importantă cunoașterea structurii lui G_m pentru orice m. Se va considera aici numai cazul $m = p$. Grupul G_p este ciclic, adică orice clasă de resturi prime mod p se poate scrie ca putere a unei clase de resturi prime $\bar{g}$; g se numește *rădăcină primitivă* mod p. Pentru $p = 11$, de exemplu, grupul claselor de resturi G_{11} este generat de către clasa de resturi $\bar{g} = \overline{2}$ (sau $\overline{6}, \overline{7}, \overline{8}$) deoarece puterile $2^0 \equiv 1$, $2^1 \equiv 2$, $2^2 \equiv 4$, $2^3 \equiv 8$, $2^4 \equiv 5$, $2^5 \equiv 10$, $2^6 \equiv 9$, $2^7 \equiv 7$, $2^8 \equiv 3$, $2^9 \equiv 6$ (mod 11) epuizează toate cele $p - 1 = 10$ clase de resturi prime $\overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{10}$. Deoarece orice element a al unui grup finit G de ordinul n satisface ecuația $a^m = e$ (e este elementul unitate), se obține pentru $G = G_m$ *teorema lui Euler*.

Teorema lui Euler. $a^{\varphi(m)} \equiv 1$ (mod m) *dacă* $(a, m) = 1$. *În cazul special* $m = p$ *ea devine* **Teorema lui Fermat**: $a^{p-1} \equiv 1$ (mod p) *dacă a nu se divide cu* p.

Congruențe. În inelul claselor de resturi și în grupul claselor de resturi se pot rezolva probleme algebrice. Astfel, se poate pune problema determinării claselor de resturi $\bar{x}$ mod m care să satisfacă ecuația $\overline{ax} = \bar{b}$. Se ajunge astfel la rezolvarea unor congruențe mod m. *Congruența liniară* $ax = b$(mod m) nu admite întotdeauna o soluție, de exemplu $3x \equiv 2$ (mod 12) nu are soluție deoarece nu există nici un multiplu al lui 3 care prin împărțire cu 12 să dea restul 2. Ecuația $ax \equiv b$(mod b) se poate rezolva numai atunci cînd b se divide cu cel mai mare divizor comun (a, m). *O congruență de gradul* n, adică $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \equiv 0$ (mod m) poate să aibă mai multe soluții necongruente decît n. De exemplu, $x^2 \equiv 1$(mod 8) are soluțiile $x \equiv 1, 3, 5, 7$. Dacă modulul m este un număr prim p, congruența poate să nu aibă soluții și poate avea ca soluții mai mult decît n clase de resturi.

Resturi de puteri. Un deosebit interes prezintă *congruențele binomiale* $x^n \equiv a$(mod p), unde a nu este divizibil cu p. Clasele de resturi a(mod p) printre care aceste congruențe admit soluții se numesc resturi de putere n mod p. În legătură cu aceasta se pun două probleme:

1. Ce numere sînt resturi de putere n modulo un număr prim dat?
2. Pentru care numere prime p un număr dat a este rest de putere n?

Răspunsul la prima întrebare este dat de *criteriul lui Euler* $a^{(p-1)/d} \equiv 1$(mod p), unde $d = (p - 1, n)$. Numai acele clase de resturi care satisfac această condiție sînt resturi de putere n. Răspunsul la întrebarea a doua conduce la *legile de reciprocitate* care fac parte din categoria celor mai adînci și frumoase rezultate ale teoriei numerelor. În cazul $n = 2$, clasele de resturi a(mod p), pentru care congruența $x^2 \equiv a$(mod p) cu $(a, p) = 1$ are soluții, se numesc *resturi pătratice* mod p (pe scurt resturi). Dacă congruența $x^2 \equiv a$ (mod p) nu admite soluție, atunci a este un *nerest pătratic* (pe scurt nerest). Pentru p impar există $\frac{p-1}{2}$ resturi și $\frac{p-1}{2}$ neresturi mod p. De exemplu sînt verificate următoarele congruențe mod 17: $1^2 \equiv 1$, $2^2 \equiv 4$, $3^2 \equiv 9$, $4^2 \equiv 16$, $5^2 \equiv 8$, $6^2 \equiv 2$, $7^2 \equiv 15$, $8^2 \equiv 13$. Deci 1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16 vor fi cele opt resturi mod 17 și 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14 cele opt neresturi mod 17. Congruența $x^2 \equiv 5$ (mod 17) nu admite soluții.

Legea de reciprocitate. Problema găsirii modulelor p pentru care un număr dat a este rest pătratic a dus la găsirea renumitelor teoreme de reciprocitate ale resturilor pătratice. Leonhard EULER a descoperit legea pe baza observării unui număr foarte mare de exemple. Fie p și q două numere prime impare. Dacă cel puțin unul dintre ele este de forma $4k + 1$, atunci ambele congruențe $x^2 \equiv p$(mod q) și $x^2 \equiv q$(mod p) au sau nu au soluții (cu alte cuvinte, p este rest mod q dacă și numai dacă q este rest mod p). Dacă însă p și q sînt de forma $4k + 3$, atunci numai una dintre cele două congruențe admite soluție, pe cînd cealaltă nu

admite soluție. Prima demonstrație completă a legii a fost dată de Gauss la vîrsta de 18 ani. Mai tîrziu acesta a mai găsit șase demonstrații a ceea ce numea *Theorema fundamentale*. De atunci s-au găsit pentru acest rezultat mai mult de cincizeci de demonstrații diferite.

Diversele principii de demonstrare cît și încercarea de a demonstra legi de reciprocitate pentru resturi de ordin superior au dat impulsuri puternice teoriei numerelor. Cu zece ani înainte de Gauss, LEGENDRE a demonstrat legea de reciprocitate a resturilor pătratice, dar demonstrația lui conținea o greșeală. Pentru a putea scrie mai simplu această lege, Legendre a introdus un simbol $\left(\frac{a}{p}\right)$ (*simbolul lui Legendre*) care poate fi $+1$, -1 sau 0 după cum a este rest, nerest sau 0 mod p. Se obține atunci pentru legea de reciprocitate formula $\left(\frac{p}{q}\right)\cdot\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$ pentru numere prime impare p și q. Ca o completare a legii de reciprocitate se obține $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$ și $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$. Astfel congruența $x^2 \equiv -1$ (mod p) nu are soluție pentru $p = 3$ (mod 4) deoarece $\frac{p-1}{2}$ este un număr impar. Ea admite soluții dacă p este de forma $4k + 1$ deoarece în acest caz $\frac{p-1}{2}$ este par.

Ecuații diofantice. Orice congruență $ax_1 + c \equiv 0($ mod $b)$ se poate scrie ca o ecuație $ax_1 + bx_2 + c = 0$ (în care $a \neq 0$), $b \geqslant 1$ și c, x_1, x_2 sînt numere întregi. Dacă a, b, c sînt numere întregi date și x_1, x_2 sînt considerate necunoscute, problema se reduce la găsirea soluțiilor întregi ale unei ecuații liniare cu coeficienți întregi. Dacă $f(x_1, ..., x_n)$ este un polinom în $x_1, ..., x_n$ cu coeficienți întregi, atunci ecuația $f(x_1, x_2, ..., x_n) = A$ se numește *diofantică* dacă soluțiile ei sînt numere întregi. Denumirea acestor ecuații derivă de la numele matematicianului grec DIOFANTOS din Alexandria.

Un sistem de ecuații diofantice $f_1=b_2$, $f_2=b_2, ..., f_k = b_k$ este echivalent cu ecuația $(f_1 - b_1)^2 + (f_2 - b_2)^2 + ... + (f_k - b_k)^2 = 0$, adică mulțimea soluțiilor din **Z** ale sistemului este aceeași cu mulțimea soluțiilor ecuației. O ecuație diofantică liniară

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b \qquad (a_1, a_2, ..., a_n, b \text{ sînt numere întregi})$$

admite soluții dacă și numai dacă b este divizibil cu cel mai mare divizor comun a numerelor întregi $a_1, a_2, ..., a_n$. Dacă o astfel de ecuație admite soluții, atunci ea admite o infinitate de n-upluri care o satisfac. Cazul $n = 2$ poate fi urmărit cu ușurință. Dacă a_1 și a_2 sînt numere prime între ele și x_1', x_2' constituie o soluție pentru $a_1x_1 + a_2x_2 = b$, atunci totalitatea soluțiilor se poate reprezenta sub forma $x_1 = x_1' + a_2t$, $x_2 = x_2' - a_1t$, unde t este un număr întreg oarecare. O soluție a ecuației se poate obține cu ajutorul penultimei fracții de aproximare pentru reprezentarea sub formă de fracție continuă a lui a_1/a_2.

Exemplu. $43x_1 + 19x_2 = b$. Fracțiile de aproximare (vezi cap. 3.6) ale lui 43/19 sînt 7/3, 9/4, 43/19. Din fracția 9/4 se obține $x_1' = 4b$, $x_2' = -9b$ astfel încît soluția generală se poate scrie sub forma $x_1 = 4b + 19t$, $x_2 = -9b - 43t$.

Pentru $n \geqslant 3$ s-au elaborat metode mai generale bazate pe fracțiile continue. Fiind dat un sistem de m ecuații independente, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, $i = 1, 2, ..., m$, dacă $m > n$, sistemul nu are în general soluții. Dar dacă $m < n$, sistemul este nedeterminat și are, în general, o infinitate de soluții. Mai precis, în ultimul caz sistemul admite soluțiile întregi $x_1, x_2, ..., x_n$ dacă și numai dacă cel mai mare divizor comun al determinanților cu m linii formați cu coeficienții matricei (a_{ij}) este egal cu cel mai mare divizor comun al determinanților cu m linii formați din matricea obținută din (a_{ij}) prin adăugarea coloanei coeficienților b_i.

Problema rezolvării celei mai generale ecuații diofantice de gradul doi cu două necunoscute x_1, x_2:

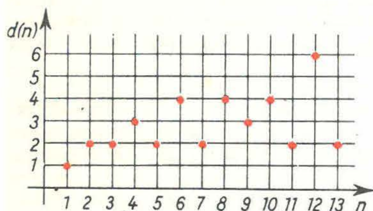
$$c_1x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{22}x_2^2 + c_{13}x_1 + c_{23}x_2 + c_{33} = 0,$$

unde c_{ij} sînt numere întregi, poate fi redusă printr-o transformare de variabile la problema rezolvării ecuației de formă specială $y_1^2 - Dy_2^2 = b$, unde D și b sînt întregi. Trebuie deosebite două cazuri. Dacă $D < 0$, atunci nu există soluții sau un număr finit de soluții y_1, y_2. Dacă $D > 0$ ($D \neq k^2$ $k \in \mathbf{N}$) și $b = 1$, atunci așa-numita *ecuație a lui Pell* $y_1^2 - Dy_2^2 = 1$ admite în afara soluției banale $y_1 = \pm 1$, $y_2 = 0$ o infinitate de soluții, care pot fi obținute dintr-o soluție minimală. Este ușor de văzut că ecuația mai generală $y_1^2 - Dy_2^2 = b$ nu poate avea soluții dacă b este nerest pătratic (mod D).

Exemple. 1. $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 19$ are exact 12 perechi de soluții 2, 3; −2, −3; 3, 2; −3, −2; 2, −5; −2, 5; 5, −2; −5, 2; 3, −5, −3, 5; 5, −3; −5, 3.
2. $y_1^2 - 5y_2^2 = 1$. Din soluția minimală $y_1' = 9$, $y_2' = 4$ se obține pentru $n = 0, 1, 2, \ldots$, totalitatea soluțiilor $y_1 = \pm(9 + 4\sqrt{5})^n + (9-4\sqrt{5})^n/2$, $y_2 = \pm[(9+4\sqrt{5})^n - (9-4\sqrt{5})^n]/(2\sqrt{5})$.

Problema găsirii tuturor triunghiurilor dreptunghice pentru care catetele x, y și ipotenuza z sînt multipli întregi ai unității de lungime, a condus la ecuația diofantică $x^2 + y^2 = z^2$. Soluțiile acestei ecuații, *numerele pitagoreice*, pot fi reprezentate prin formulele $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$, $z = u^2 + v^2$, unde u și v sînt întregi arbitrari. Cele mai mici soluții sînt $3^2 + 4^2 = 5^2$ și $5^2 + 12^2 = 13^2$.

Se remarcă o surprinzătoare diferență între cazul $n = 2$ și $n \geqslant 3$. *Teorema lui Thue* afirma: ecuația $a_1x^n + a_2x^{n-1}y + \ldots + a_ny^n = b$ ($n \geqslant 3$, $a_1 \neq 0$), cu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ întregi, are numai un număr finit de soluții, atunci cînd membrul întîi nu poate fi descompus în factori omogeni de grad inferior cu coeficienți întregi. Ecuațiile diofantice de grad superior ridică probleme foarte adînci a căror rezolvare necesită cunoștințe din teoria algebrică a corpurilor numerice. Dintre acestea *prezumția lui Fermat* (intitulată și *marea teoremă a lui Fermat*) s-a bucurat de un mare interes: oricare ar fi n întreg, $n > 2$, nu există numere întregi diferite de zero x, y, z care să satisfacă ecuația $x^n + y^n = z^n$. Fermat a scris pe marginea unui exemplar al *Aritmeticii* lui Diofant că a găsit o demonstrație minunată pentru acest rezultat dar marginea este prea îngustă pentru a o cuprinde. Demonstrația nu a putut fi reconstituită. Cu toate strădaniile unor matematicieni de frunte prezumția lui Fermat nu a putut fi nici demonstrată, nici contrazisă. S-au obținut însă rezultate parțiale interesante. Astfel, s-a verificat valabilitatea prezumției pentru toți exponenții n pînă la 4 002.



31.1.1. Funcția $d(n)$: numărul total al divizorilor pozitivi ai lui n

Teoria analitică a numerelor. În afară de funcția lui Euler $\varphi(n)$, în teoria numerelor mai există și multe alte funcții $f(n)$, cu ajutorul cărora se studiază proprietăți ale numerelor întregi. De exemplu $\pi(x)$ reprezintă numărul întregilor primi $\leqslant x$; $d(n)$ numărul divizorilor și $\sigma(n)$ suma divizorilor pozitivi ai lui n (fig. 31.1.1); $r(n)$ numărul perechilor de numere întregi x, y care sînt soluții ale ecuației $x^2 + y^2 = n$. Unele din aceste funcții au o comportare foarte neregulată, de exemplu $d(1) = 1$, $d(2) = 2$, $d(3) = 2$, $d(4) = 3$, $d(5) = 2$, $d(6) = 4$, $d(7) = 2$, $d(8) = 4$ etc. Totuși, de multe ori media primelor n valori ale funcției f are o comportare regulată. Funcția $[f(1) + f(2) + \ldots + f(n)]/n$ se comportă de multe ori asimptotic, pentru n care crește, ca o funcție analitică de n. Astfel $\frac{1}{n}\sum_{k \leqslant n} d(k)$ se comportă ca logaritmul natural de n. Punînd $\frac{1}{n}[d(1) + \ldots + d(n)] = \ln n + R(n)$, ordinul de mărime al lui $R(n)$ este foarte mic în comparație cu cel al lui $\ln n$. Studiul valorilor medii ale funcțiilor cu valori întregi și în special al resturilor $R(n)$ necesit cele mai rafinate metode ale analizei. Acest domeniu de cercetare nu este încă închis. Matematicieni de seamă ai secolelor XIX și XX s-au ocupat cu această ramură a matematicii numită *teoria analitică a numerelor*. De un deosebit interes s-a bucurat funcția $\pi(x)$, numărul întregilor primi mai mici sau egali cu x.

Carl Friedrich GAUSS a presupus că această funcție este determinată într-o primă aproximație de integrala $\mathrm{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$. Evaluarea restului $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$, care pentru valori ale lui x mari este cînd pozitivă cînd negativă, prezintă mari dificultăți. Ea este strîns legată

de ipoteza făcută de Bernhard RIEMANN (1826 — 1866) care leagă poziția zerourilor complexe ale unei funcții analitice de *funcția zeta*, ce îi poartă numele, $\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s}$, unde $s=\sigma + it$ și $\sigma > 1$.

Dintre alte multe probleme de repartiție trebuie amintită cunoscuta teoremă demonstrată pentru prima dată de Peter Gustav Lejeune DIRICHLET (1805—1859): în orice serie aritmetică, în care primul termen și rația sînt numere prime între ele, există o infinitate de numere prime.

Teoria aditivă a numerelor. Problema teoriei aditive a numerelor va fi caracterizată aici prin unele rezultate și probleme speciale.

Teorema lui Fermat. Orice număr prim p cu $p \equiv 1 \pmod 4$ este suma pătratelor a două numere naturale. Reprezentarea este unică făcînd abstracție de ordinea termenilor.

Exemplu. $233 = 8^2 + 13^2$.

Teorema lui Lagrange. Orice număr natural n se descompune într-o sumă de cel mult patru pătrate de numere naturale.

Exemplu. Numărul 11 se poate scrie ca sumă de trei pătrate: $3^2 + 1^2 + 1^2$; 7 ca sumă de patru pătrate: $2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$.

Problema lui Waring (expusă de Eduard WARING în 1770 și rezolvată de David HILBERT în 1909). Orice număr natural n este o sumă de cel mult $g(k)$ numere naturale ridicate la puterea k, unde $g(k)$ nu depinde de n. Din teoria lui Lagrange rezultă $g(2) = 4$, de asemenea $g(3) = 9$. Este interesant că pentru n suficient de mare și $k \geqslant 3$ sînt necesari mai puțin de $g(k)$ termeni. De exemplu $239 = 4^3 + 4^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3 + 1^3 + 1^3 + 1^3$ este cel mai mare număr ce se formează din 9 cuburi. Pentru orice număr natural mai mare descompunerea în cuburi este posibilă cu un număr mai mic de termeni. S-a demonstrat că se poate da un număr natural n astfel încît toate numerele naturale mai mari decît acesta admit o descompunere în cel mult 7 cuburi.

Ipoteza lui Goldbach. Ch. GOLDBACH (1690—1764) într-o scrisoare din 1742 adresată lui Leonhard EULER a enunțat următoarele: orice număr par $n > 6$ este suma a două numere prime impare. Această ipoteză nu a putut fi nici demonstrată, nici infirmată. Prin metode foarte ingenioase, I.M. VINOGRADOV (n. 1891) a reușit să demonstreze teorema celor trei numere prime: orice număr impar n suficient de mare este o sumă de trei numere impare prime.

Partiția unui număr natural. Prin partiție a unui număr natural n se înțelege reprezentarea lui n ca sumă de numere naturale. Dacă nu se limitează numărul termenilor, se acceptă termeni egali și se face abstracție de ordinea termenilor, numărul partițiilor lui n se notează cu $p(n)$. De ex. $1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 2 = 1 + 1 + 3 = 1 + 2 + 2 = 1 + 4 = 2 + 3 = 5$ sînt cele șapte partiții ale lui 5; în acest caz $p(5) = 7$. Funcția $p(n)$ are multe proprietăți interesante, de exemplu $p(5n + 4) \equiv 0 \pmod 5$. Pentru n mare avem $p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi \sqrt{\frac{2n}{3}}\right)$. O problemă fundamentală, foarte generală, a teoriei aditive a numerelor este următoarea: dacă A este o mulțime de numere naturale și $s > 2$ este un număr natural, poate fi reprezentat orice număr natural ca o sumă de s elemente din A? Prin metode și noțiuni noi (densitatea și ordinul lui A) astfel de probleme au fost abordate cu succes începînd din 1930.

31.2. Numere algebrice

Corpul numerelor algebrice. Un *număr algebric* α este un număr care satisface o ecuație algebrică $f(x) = 0$, unde $f(x) = a_0x^m + ... + a_m$ este un polinom în corpul $\mathbf{Q}$ al numerelor

raționale cu $a_0 \neq 0$, $m \geqslant 1$. Coeficienții $a_0, a_1, ..., a_m$ sînt numere raționale. Numărul α satisface o infinitate de ecuații algebrice de diferite grade, de exemplu $\alpha = \sqrt{3}$ satisface ecuațiile $x^2 - 3 = 0$, $x^3 - x^2 - 3x + 3 = 0$, $x^4 - 9 = 0$ etc. Polinoamele din ultimele două ecuații se descompun în polinoame de grad mai mic și anume

$$x^3 - x^2 - 3x + 3 = (x^3 - 3)(x - 1) \text{ și } x^4 - 9 = (x^2 + 3)(x^2 - 3).$$

Astfel de polinoame se numesc *reductibile*. Dacă un polinom nu poate fi descompus în $\mathbf{Q}$ în polinoame de grad inferior, acest polinom este *ireductibil* în $\mathbf{Q}$, de exemplu $P(x) = x^2 - 3$ este ireductibil în $\mathbf{Q}$. Există în $\mathbf{Q}$ un singur polinom ireductibil $A(x)$ cu primul coeficient 1, astfel încît $A(\alpha) = 0$. Gradul numărului algebric α este prin definiție gradul n al polinomului $A(x) = x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$. De exemplu orice număr rațional este un număr algebric de gradul întîi deoarece orice număr rațional satisface ecuația $x - r = 0$; $\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ este de gradul 2 ca soluție a ecuației $x^2 - x + 1 = 0$ și $\sqrt[n]{2}$ este de gradul n ca soluție a ecuației $x^n - 2 = 0$.

Rădăcinile $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, ..., \alpha^{(n)}$ ale lui $A(x) = 0$ (una dintre acestea fiind α) se numesc *conjugatele* lui α. Ele toate sînt distincte. Dacă coeficienții lui $A(x)$ sînt numere întregi, atunci α se zice *întreg algebric*.

Fie θ un număr algebric. Cel mai mic corp $k = \mathbf{Q}(\theta)$ care conține pe $\mathbf{Q}$ și pe θ se numește *corp algebric*. De exemplu, $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$ conține toate numerele de forma $a + b\sqrt{3}$, unde a și b sînt numere raționale. Se poate verifica ușor că aceste numere constituie un corp, de exemplu, $1/(a + b\sqrt{3}) = (a - b\sqrt{3})/(a^2 - 3b^2) = A + B\sqrt{3}$. Gradul lui k este definit prin gradul n unic determinat al oricărui număr pentru care $k = \mathbf{Q}(\theta)$.

Corpuri de numere pătratice. De un tip special sînt *corpurile de numere pătratice* în care $\theta = \sqrt{d}$. Se presupune că d nu are ca factor un pătrat perfect. În acest caz trebuie examinate două cazuri; cazul 1: $d \equiv 1 \pmod 4$; cazul 2: $d \equiv 2 \pmod 4$ sau $d \equiv 3 \pmod 4$. În cazul 1, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{d})$; în cazul 2, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \sqrt{d}$, formează o bază întreagă a corpului, adică orice număr întreg algebric din corpul $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ se poate exprima în mod unic sub forma $g_1\omega_1 + g_2\omega_2$, unde g_1 și g_2 sînt întregi.

Corpul rădăcinilor unității. Dacă n este un număr natural, ecuația $z^n - 1 = 0$ va fi *ecuația de diviziune a cercului*. Cele n soluții ale ei, numite *rădăcini ale unității*, reprezentate în planul complex, împart cercul unitate cu centrul în origine în n părți egale. Cele $n - 1$ soluții diferite de 1 statistfac pentru $n \geqslant 2$ ecuația $f(z) = 0$, unde

$$f(z) = \frac{z^n - 1}{z - 1} = z^{n-1} + z^{n-2} + ... + z + 1.$$

Dacă n este un număr prim p, se poate demonstra că $f(z)$ este un polinom ireductibil în $\mathbf{Q}$. Se vede ușor că în acest caz toate soluțiile ecuației $f(z) = 0$ se pot reprezenta sub forma $\omega, \omega^2, ..., \omega^{p-1}$, unde ω este oricare dintre soluții. Corpul $\mathbf{Q}(\omega)$ se numește *corp al rădăcinilor unității*. Corpurile conjugate $\mathbf{Q}(\omega), \mathbf{Q}(\omega^2), ..., \mathbf{Q}(\omega^{p-1})$ au toate gradul $p - 1$ și coincid. Corpul rădăcinilor unității a fost descoperit de Ernst Eduard KUMMER (1810—1893) în legătură cu problema lui Fermat. Rezultatele obținute au fost deschizătoare de drumuri în teoria algebrică a numerelor. Cu ajutorul teoriei lui, s-au putut determina toate poligoanele regulate ce se pot construi cu rigla și compasul. Astfel, la teoria rădăcinilor unității colaborează trei domenii ale matematicii și anume geometria, algebra și teoria numerelor.

Unități. Cazuri particulare de numere întregi algebrice în corpul k sînt unitățile ε, adică divizorii elementului unitate. Pentru acestea și valoarea reciprocă ε^{-1} este un număr întreg algebric. În $\mathbf{Q}$, ± 1 sînt singurele unități. În corpurile algebrice există însă de regulă o infinitate de unități. Acestea toate se obțin dintr-un număr finit dintre ele (unități de bază) prin înmulțire și ridicare la putere (*teorema lui Dirichlet asupra unităților*). În afară de $\mathbf{Q}$ mai are un număr finit de unități corpul imaginar pătratic (pentru care numărul generator θ este complex). Studiul corpurilor algebrice a dus la rezultate foarte interesante.

Teoria idealelor. Pe baza proprietăților corpului numerelor raționale s-ar putea presupune că orice număr întreg algebric se poate descompune în factori primi, în mod unic, făcînd

abstracție de ordinea factorilor și de unități, în așa fel încît factorii să fie tot numere întregi algebrice. Se poate vedea ușor că această ipoteză este falsă. Astfel, există în corpul pătratic $\mathbf{Q}(\sqrt{-5})$ pentru numărul 6 două descompuneri diferite: $6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$. Mai rămîne de verificat că factorii 2, 3, $1 + \sqrt{-5}$, $1 - \sqrt{-5}$ nu se mai descompun în $\mathbf{Q}(\sqrt{-5})$ Se pare că o construcție simplă a teoriei nu este posibilă. Totuși Ernst Eduard KUMMER (1810—1893) a găsit o cale în mod independent de Richard DEDEKIND (1831—1916) și Leopold KRONECKER (1823—1891). DEDEKIND a pus bazele teoriei idealelor. El a înlocuit numerele întregi algebrice prin ideale în inelul R al numerelor întregi algebrice ale corpului k și a demonstrat teorema fundamentală.

Orice ideal din R diferit de R și de (0) *se poate descompune în mod unic,* (*abstracție făcînd de ordinea factorilor*) *într-un produs de ideale prime.*

Pentru inelul $\mathbf{Z}$ al numerelor întregi teorema fundamentală se enunță astfel: orice ideal principal (m) se exprimă în mod unic, abstracție făcînd de ordinea factorilor prin produsul de ideale prime $(p_1)(p_2) \dots (p_n)$. Aceasta reprezintă o altă exprimare a teoremei fundamentale a teoriei elementare a numerelor $m = \pm p_1 p_2 \dots p_n$.

Clase de ideale. Două ideale $\mathbf{A}$ și $\mathbf{B}$ ale inelului R în k se numesc echivalente, dacă există două ideale principale (α) și (β) astfel încît $(\alpha)\mathbf{A} = (\beta)\mathbf{B}$. Împărțind cu ajutorul acestei echivalențe mulțimea idealelor în R în clase, numărul h al claselor este *finit*. Idealele principale constituie o clasă. În inelul $\mathbf{Z}$ al numerelor întregi aceasta este *unica clasă*, deci $h = 1$. Determinarea lui h prezintă greutăți, obținîndu-se formula transcendentă a lui Dirichlet pentru numărul claselor. Pentru tipuri speciale de corpuri se cunoaște și o reprezentare aritmetică a lui h.

31.3. Numere transcendente

Un număr γ care nu este algebric se numește *transcendent*. Acesta nu va fi deci soluție a unei ecuații algebrice cu coeficienți întregi. Existența numerelor transcendente nu este chiar evidentă. Joseph LIOUVILLE (1809—1882) a construit cîteva, de exemplu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n!}}$, folosind teorema care afirmă că numerele algebrice nu pot fi aproximate „oricît de bine" prin numere raționale. El a demonstrat printre altele că: pentru orice număr algebric α de grad n există un singur număr $a > 0$, diferit de α, astfel încît pentru orice numere întregi r, s $(s > 0)$ are loc inegalitatea $\left|\alpha - \frac{r}{s}\right| > as^{-n}$. Un rezultat mai profund îl constituie teorema lui THUE-SIEGEL-ROTH: inegalitatea $\left|\alpha - \frac{r}{s}\right| < s^{-\mu}$ are pentru $\mu > 2$ și un număr algebric α un număr finit de soluții $\frac{r}{s}$, r, s fiind întregi $(s > 0)$.

De un deosebit interes a fost problema dacă o valoare a unei funcții analitice date este transcendentă sau nu. Charles HERMITE a arătat în 1873 că baza e a logaritmilor naturali este un număr transcendent. La scurt timp după aceea Ferdinand LINDEMANN (1852—1939) a reușit să demonstreze în 1882 că aria π a cercului unitate este de asemenea un număr transcendent; de aici derivă imposibilitatea cvadraturii cercului, adică a construcției cu rigla și compasul a unui pătrat de arie egală cu un cerc dat. Mai general: dacă $\alpha \neq 0$, atunci α și e^{α} nu pot fi ambele algebrice. Funcțiile e^x $(x \neq 0)$ și $\ln x$ $(x \neq 0, x \neq 1)$ au pentru x algebric valori transcendente. Pentru demonstrație se folosește teoria funcțiilor de variabilă complexă. Cu ajutorul ei se mai obțin și alte rezultate ca de exemplu transcendența lui e^{π}. Încă nu se știe dacă e^e sau $e + \pi$ sau constanta lui Euler γ sînt transcendente.

De asemenea a putut fi rezolvată a șaptea din cele 23 de probleme puse la începutul secolului de David HILBERT (1862—1953): α^{β} este transcendent dacă α este algebric și di-

ferit de 0 și 1, iar β este algebric irațional. De aici rezultă despre cîturile logaritmilor numerelor raționale că sînt sau numere raționale sau transcendente. Se cunosc foarte multe teoreme ce afirmă transcendența unor numere bazate pe integrale eliptice și funcții eliptice. De exemplu, lungimea unei elipse, ale cărei axe au ca lungimi numere algebrice, se exprimă printr-un număr transcendent.

În teoria numerelor transcendente un rol important îl joacă problema independenței algebrice a numerelor transcendente. În acest sens cităm *teorema lui Lindemann*:

Dacă $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sînt numere algebrice, liniar independente, peste corpul $\mathbf{Q}$ al numerelor raționale, atunci relația $\beta_1 e^{\alpha_1} + \beta_2 e^{\alpha_2} + \ldots + \beta_n e^{\alpha_n} = 0$ poate avea loc dacă coeficienții algebrici $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ sînt toți nuli.

32. Geometrie algebrică

Geometria algebrică s-a dezvoltat din *teoria curbelor și suprafețelor algebrice* cît și din geometria spațiilor multidimensionale a școlii italiene. Primele contribuții la teoria curbelor algebrice plane le-au adus Isaac NEWTON (1643—1727), Colin MACLAURIN (1698—1746), Leonhard EULER (1707—1783) și Gabriel CRAMER (1704—1752). Fondatorul geometriei algebrice în sens restrîns a fost Max NOETHER (1844—1921). Geometrii italieni și în primul rînd Corrado SEGRE (1863—1924), Francesco SEVERI (1879—1941) și Federigo ENRIQUES (1871—1946) au adus această disciplină matematică la deplină înflorire. În secolul nostru, școala germană și în primul rînd Emmy NOETHER (1882—1935), fiica lui Max NOETHER. Bartel L. Van Der WAERDEN (n. 1903) și Wolfgang GROBNER (n. 1899) s-au ocupat în special de cercetarea aspectelor algebrice ale bazelor geometriei algebrice.

Curbe și suprafețe algebrice. Noțiunea centrală a geometriei algebrice este varietatea algebrică (VA) în *spațiu n-dimensional proiectiv* S_n, în care orice punct este dat de rapoartele $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ale celor $n+1$ coordonate.

Pentru clarificarea acestei noțiuni se va considera mai întîi cazul $n = 2$; atunci S_2 este *planul proiectiv*. O *ecuație algebrică* omogenă $F(x_0, x_1, x_2) = 0$ definește numai o curbă algebrică (plană) în S_2 și anume curba care reprezintă totalitatea punctelor $(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2)$ care satisfac ecuația. Pentru parabola $y^2 = 2p(x-a)$, de exemplu, se obține prin omogenizare $\frac{x_2^2}{x_0^2} = 2p\left(\frac{x_1}{x_0} - a\right)$ sau $2apx_0^2 - 2px_0x_1 + x_2^2 = 0$; în membrul întîi se află un polinom omogen $F(x_0, x_1, x_2)$ (o formă omogenă). Prin două ecuații algebrice omogene $F_1(x_0, x_1, x_2) = 0$ și $F_2(x_0, x_1, x_2) = 0$ se definesc punctele comune curbelor $F_1 = 0$ și $F_2 = 0$ și anume punctele (ξ_0, ξ_1, ξ_2) care satisfac ambele ecuații. Dacă $F_1(x_0, x_1, x_2)$ și $F_2(x_0, x_1, x_2)$ nu au factori comuni, atunci există numai un număr finit de astfel de puncte. Ambele cazuri (curbe algebrice, un *număr finit* de puncte) reprezintă exemple de varietăți algebrice în planul proiectiv.

În cazul $n=3$, adică în *spațiul proiectiv* S_3, forma $F(x_0, x_1, x_2)$ corespunde unei *suprafețe algebrice*; două forme fără factori comuni determină o curbă algebrică plană sau strîmbă și trei sau mai multe forme F_1, F_2, F_3 fără factori comuni pot să determine o curbă. Punctele $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ale unei curbe în S_3 mai satisfac pe lîngă ecuațiile $F_i = 0$ ($i = 1, 2$ sau $i = 1, 2, 3, \ldots$) și alte ecuații, de exemplu $GF_i = 0$, unde G este o constantă sau chiar o altă formă, sau $F_i \pm F_k = 0$ (dacă F_i și F_k au același grad).

Ideale de polinoame, mulțimea zerourilor și varietăți algebrice. Pentru a studia toate aceste ecuații, se introduce noțiunea de *ideal* într-un inel comutativ R.

Definiție. O mulțime de elemente ale unui inel R se numește *ideal* **a** dacă odată cu orice pereche a și b conține și pe $a-b$, și odată cu orice element a conține și multiplul ra, unde

r este un element din R. Un exemplu simplu de ideal este mulţimea tuturor ra, unde a este un element fix din R. Un astfei de ideal se numeşte *ideal principal* şi se notează cu (a). Din punct de vedere istoric, noţiunea de ideal a apărut pentru prima dată în teoria numerelor în legătură cu problema lui Fermat. Dacă în particular R este un inel de polinoame $f, g, \ldots$, atunci idealele sale sînt ideale polinomiale. Dacă se consideră numai forme în R şi deci şi în idealele sale, atunci se obţin *ideale omogene* (H-ideale). Un punct $(\xi) = (\xi_0\ \xi_1, \ldots, \xi_n)$ al lui S_n este un zero al H-idealului **a** dacă orice formă $F(x) = F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ din **a** se anulează pentru $x_0 = \xi_0, x_1 = \xi_1, \ldots, x_n = \xi_n$. Mulţimea tuturor zerourilor lui **a** se numeşte *mulţimea zerourilor* (NG) al H-idealului (vezi exemplul dat).

În cele ce urmează se vor da alte propoziţii de importanţă pentru geometria algebrică, privind idealele în inele comutative R.

Prin *intersecţia* $\mathbf{a} \cap \mathbf{b}$ a două ideale **a** şi **b** în R se înţelege totalitatea acelor elemente a din R care se găsesc atît în **a** cît şi în **b**. Intersecţia a două ideale este tot un ideal. Prin *suma* (**a**, **b**) se înţelege totalitatea elementelor de forma $a + b$ cu $a \in \mathbf{a}$ şi $b \in \mathbf{b}$. Suma a două ideale este tot un ideal. *Intersecţia mulţimilor zerourilor* a două ideale NG(**a**) $\cap$ NG(**b**) este mulţimea acelor puncte (ξ) care aparţin atît lui NG(**a**) cît şi lui NG(**b**). Prin reuniunea sau *suma a două mulţimi de zerouri*

$$\mathrm{NG}(\mathbf{a}) \cup \mathrm{NG}(\mathbf{b}) = \mathrm{NG}(\mathbf{a}) + \mathrm{NG}(\mathbf{b})$$

se înţelege mulţimea tuturor punctelor care aparţin cel puţin unui NG. Au loc relaţiile:

(1) $\mathrm{NG}(\mathbf{a} \cap \mathbf{b}) = \mathrm{NG}(\mathbf{a}) + \mathrm{NG}(\mathbf{b})$;

(2) $\mathrm{NG}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathrm{NG}(\mathbf{a}) \cap \mathrm{NG}(\mathbf{b})$.

Aceste definiţii şi proprietăţi se pot generaliza pentru un număr finit de ideale.

Un ideal **a** se numeşte *reductibil* dacă se poate reprezenta ca intersecţie a două ideale diferite de **a**; în caz contrar idealul se numeşte *ireductibil*. În mod corespunzător NG(**a**) este *reductibil* sau *ireductibil* după cum **a** este reductibil sau ireductibil.

Exemplu. $\mathbf{a} = (x_1^2 - x_2^2) = (x_1 + x_2) \cap (x_1 - x_2)$; NG(**a**) în S_2 este perechea de drepte $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 - x_2 = 0$.

Un ideal de polinoame nu este însă unic determinat de mulţimea zerourilor sale. Aşa de exemplu H-idealele $\mathbf{a} = (x_1 + x_2)$ şi $\mathbf{b} = ((x_1 + x_2)^2)$ au acelaşi NG în S_2 şi anume punctele dreptei $x_1 + x_2 = 0$. De aici rezultă necesitatea determinării unei *varietăţi algebrice* VA(**a**) nu numai prin NG(**a**) dar şi prin alte caracteristici. Astfel, VA(**a**) ar putea fi caracterizată prin însăşi idealul **a**. În acest sens, în exemplul de mai sus VA(**a**) $\neq$ VA(**b**). Orice *ideal de polinoame* se poate reprezenta ca o intersecţie finită de ideale ireductibile (*teorema Lasker-Noether*).

(3) $\mathbf{a} = \mathbf{q}_1 \cap \mathbf{q}_2 \cap \cdots \cap \mathbf{q}_s$.

Prin definiţie, acestei reprezentări îi corespunde descompunerea:

(4) $\mathrm{VA}(\mathbf{a}) = \mathrm{VA}(\mathbf{q}_1) + \mathrm{VA}(\mathbf{q}_2) + \ldots + \mathrm{VA}(\mathbf{q}_s)$.

Se poate observa că reprezentarea (3) şi deci şi descompunerea (4) nu sînt unice pentru orice ideal **a**.

Pentru o cercetare mai aprofundată a idealelor ireductibile se defineşte: un ideal **p** al inelului R se numeşte prim dacă din $ab \in \mathbf{p}$ şi $a \notin \mathbf{p}$ rezultă $b \in p$. Un ideal **q** din R se numeşte *primar* dacă din $ab \in \mathbf{q}$ şi $a \notin \mathbf{q}$, $b \notin \mathbf{q}$ rezultă $a^\rho \in \mathbf{q}$ şi $b^\sigma \in \mathbf{q}$ (ρ şi σ fiind două numere naturale). Pentru idealele de polinoame au loc propoziţiile:

(5) **Orice ideal prim este ireductibil.**

(6) **Orice ideal ireductibil este primar dar nu orice ideal primar este ireductibil.**

(7) **Oricărui ideal primar q îi corespunde exact un ideal prim p cu NG(q) = NG(p).**

(8) **Idealele prime $p_1, p_2, \ldots, p_s$ corespunzătoare idealelor $q_1, q_2, \ldots, q_s$ din descompunerea** (3) **sînt unic determinate prin a; ele poartă denumirea de ideale prime ale lui a.**

De aici (comparînd pe (6) cu (7)) rezultă că pentru orice mulţime de zerouri a unui ideal ireductibil **q** îi corespunde exact un ideal prim **p**, astfel încît NG(**q**) = NG(**p**). Un ideal prim este unic determinat prin mulţimea zerourilor sale. Se defineşte VA(**p**) = NG(**p**).

Zerouri generice. După Van der WAERDEN orice NG(**p**) poate fi caracterizat în modul următor. În afară de așa-numitele puncte speciale (ξ) ale căror coordonate sînt elemente ale unei extensii algebrice a corpului K al coeficienților se mai consideră și puncte

(9) $(\xi(t)) = (\xi_0(t_0), \ldots, t_k), \ldots, \xi_n(t_0, \ldots, t_k))$

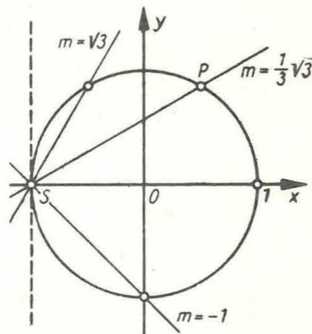
ale căror coordonate sînt elemente ale unei extensii algebrice a lui $K(t_0, \ldots, t_k)$; $K(t_0, \ldots, t_k)$ fiind corpul funcțiilor raționale cu necunoscutele $t_0, \ldots, t_k$ și coeficienți din K.

Definiție. $(\xi(t))$ este un *zero generic* al idealului **a** sau *punct generic* al lui NG(**a**), dacă $F(x) \in \mathbf{a}$ este o condiție necesară și suficientă pentru ca $F(\xi(t)) = 0$. De exemplu cercul (10) $x_1^2 + x_2^2 = x_0^2$ (în coordonate neomogene (11) $x^2 + y^2 = 1$) are punctul generic (12) $x_0 = t_0(1 + t_1^2)$, $x_1 = t_0(1 - t_1^2)$, $x_2 = 2t_0t_1$. Are loc propoziția:

Un ideal are exact un zero generic numai atunci cînd este un ideal prim p.

Din (12) se obține un punct generic pentru (11) trecînd la (13) $x = \dfrac{x_1}{x_0} = \dfrac{1 - t_1^2}{1 + t_1^2}$, $y = \dfrac{x_2}{x_0} = \dfrac{2t_1}{1 + t_1^2}$. Analog din (9) se poate obține un punct generic în coordonate neomogene împărțind toate coordonatele prin prima dintre ele care este diferită de zero. Numărul maxim de *coordonate neomogene* algebric independente obținute astfel se numește *dimensiunea* lui **p** sau a lui NG(**p**), s numere $u_1, \ldots, u_s$ se numesc *algebric independente* peste corpul K, dacă din $f(u_1, \ldots, u_s) = 0$, f fiind un polinom cu coeficienți din K, rezultă că toți coeficienții lui f sînt nuli. Deci, din (9) se obțin toate punctele lui NG(**p**) (eventual cu excepția componentelor de dimensiune mai mică) prin înlocuirea în $(\xi(t))$ cu toate valorile speciale posibile $t_0, t_1, \ldots, t_s$. Astfel din zerourile generice (12) ale cercului (10) se obțin toate punctele sale cu excepția punctului S pentru care $x_0 : x_1 : x_2 = 1 : (-1) : 0$. În mod corespunzător se obțin din (13) toate punctele lui (11) cu excepția lui $S(x, y) = (-1, 0)$.

Considerînd familia de drepte de pe figura 32.1, fiecare dintre dreptele (14) $y = m(x + 1)$ intersectează cercul (11) în S și încă într-un punct P ale cărui coordonate (x, y) sînt unic determinate prin panta m. Înlocuind pe y din (14), în (11), se obține $(1 + m^2)\, x^2 + 2m^2x - (1 - m^2) = 0$. Această ecuație de gradul doi are rădăcinile -1 și $\dfrac{1 - m^2}{1 + m^2}$; se obțin astfel din (14) ambele puncte $S(-1, 0)$ și $P\left(\dfrac{1 - m^2}{1 + m^2}, \dfrac{2m}{1 + m^2}\right)$. Toate punctele P astfel obținute sînt diferite de S, deoarece nici un m nu verifică ecuația $\dfrac{1 - m^2}{1 + m^2} = -1$. Acest lucru este datorat faptului că dreapta $x = -1$ nu este cuprinsă în reprezentarea (14). Invers, orice punct $P(x, y)$ diferit de S se poate exprima prin $m = \dfrac{y}{x + 1}$. Alegînd panta m ca parametru t_1, coordonatele lui P iau forma (13). Spre deosebire de $x = \cos t$, $y = \sin t$ s-a obținut astfel o reprezentare parametrică rațională a cercului.



32.1. Reprezentarea parametrică rațională a cercului unitate

Multiplicitate. Independent de caracterizarea lui VA(**a**) prin idealul **a**, dată mai sus, VA se mai poate defini unic cînd se dau idealele prime $\mathbf{p}_\sigma$ (vezi (8)) ale lui **a** și pentru fiecare dintre acestea se atașează un număr întreg nenegativ μ_σ numit *multiplicitate*. Folosind scrierea simbolică,

$$\mathrm{VA}(\mathbf{a}) = \mu_1 \mathrm{NG}(\mathbf{p}_1) + \ldots + \mu_s \mathrm{NG}(\mathbf{p}_s).$$

De exemplu idealului considerat mai înainte $\mathbf{b} = ((x_1 + x_2)^2)$ i se poate atașa dreapta $x_1 + x_2 = 0$ cu multiplicitatea 2. Necesitatea introducerii noțiunii de multiplicitate a rezultat

printre altele din cercetările privind intersecțiile varietăților algebrice. În acest sens s-au dat două definiții ale multiplicității care coincid pentru S_2 și S_3, dar conduc la rezultate diferite pentru spații cu mai multe dimensiuni. La baza primei definiții stă *principiul conservării numărului*, postulat de către geometrii din antichitate, după care numărul punctelor de intersecție în cazul particular trebuie să fie egal cu numărul acestora în cazul general. O formulare exactă a acestui principiu cît și limitarea aplicabilității lui este datorită lui Van der WAERDEN prin introducerea noțiunii de specializare care conservă relațiile. Dimpotrivă a doua definiție a multiplicității are ca fundament teoria idealelor, multiplicitatea fiind privită ca lungimea unui ideal. Folosind această definiție spre deosebire de primul caz, teorema lui Bezout generalizată nu mai este valabilă fără restricții (Etienne BEZOUT, 1730—1783); în alte probleme însă folosirea multiplicității ca lungimea idealelor este convenabilă (vezi Otto Heinrich KELLER (n. 1906) Geometrie algebrică).

Metode mai noi. Pentru o cercetare mai aprofundată a noțiunii de varietate legat de NG și multiplicitate, Oscar ZARISKI (n. 1899) a folosit în 1938 metoda evaluării care este strîns legată de *teoria lui Krull* a *inelelor locale* (Wolfgang KRULL, 1899—1971), de *teoria funcțiilor, mulțimilor și topologie*. Pentru aceasta, pentru noua fundamentare a geometriei algebrice dată de André WEIL (n. 1906), cît și pentru metodele topologice (*teoria fasciculelor teoria coomologiei*) se pot găsi indicații bibliografice în cartea citată a lui O.H. KELLER.

33. Alte structuri algebrice

Trăsăturile caracteristice ale unei structuri algebrice au fost prezentate pe larg în capitolele 16 și 17 în legătură cu spațiile vectoriale. Cum acest concept este de primă importanță pentru algebra contemporană, va urma acum o scurtă trecere în revistă a unor dezvoltări care conduc de la grupuri și corpuri la latice, inele și algebre și la teoria reprezentărilor.

33.1. Latice

Conceptul de latice s-a format în scopul generalizării și unificării unor relații care există între submulțimile anumitor structuri ca de ex. grupuri, corpuri, spații topologice și altele. Teoria laticelor a apărut și s-a dezvoltat în jurul anului 1930 și a fost influențată de lucrările lui Garrett Birkhoff.

O mulțime L cu două operații numite intersecție ($\cap$) și reuniune ($\cup$) se numește latice dacă pentru elemente arbitrare $a, b, \ldots$ ale lui L au loc următoarele axiome:

(1) **comutativitatea** $a \cap b = b \cap a$, $a \cup b = b \cup a$;
(2) **asociativitatea** $(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c)$; $(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$;
(3) **proprietatea de absorbție** $a \cup (a \cap b) = a$ și $a \cap (a \cup b) = a$.

Exemplul 1. Dacă H_1 și H_2 sînt subgrupuri arbitrare ale unui grup G, atunci $H_1 \cap H_2$ și $H_1 \dot{\cup} H_2 = \langle H_1 \cup H_2 \rangle$ sînt subgrupuri ale lui G. Cu aceste operații mulțimea tuturor subgrupurilor lui G devine o latice.

Exemplul 2. Mulţimea numerelor întregi nenegative formează o latice, intersecţia a două numere fiind definită prin cel mai mare divizor comun al acestora şi reuniunea lor prin cel mai mic multiplu comun.

Exemplul 3. Anumite clase de propoziţii logice formează o latice cu operaţiile *şi* (intersecţia) şi *sau* (reuniunea).

Exemplul 4. Submulţimile unei mulţimi formează o latice cu intersecţia şi reuniunea definite în mod obişnuit.

Exemplul 5. Mulţimea corpurilor intermediare cuprinse între două corpuri date formează o latice, cu intersecţia dată la intersecţia obişnuită şi reuniunea a două corpuri fiind definită prin cel mai mic corp care le conţine pe amîndouă (vezi cap. 16).

O aplicaţie bijectivă φ a unei matrice L_1 pe o matrice L_2 se numeşte *izomorfism* dacă pentru două elemente arbitrare a şi b ale lui L_1

$$\varphi(a \cap b) = \varphi(a) \cap \varphi(b) \quad \text{şi} \quad \varphi(a \cup b) = \varphi(a) \cup \varphi(b).$$

Schimbînd între ele operaţiile $\cap$ şi $\cup$ într-o latice L_2, se obţine o nouă latice $D(L_2)$, *matricea duală* laticei L_2. O aplicaţie bijectivă φ a unei latice L_1 pe o latice L_2 este un *izomorfism dual* dacă este un izomorfism al lui L_1 pe $D(L_2)$.

Conceptele teoriei laticelor permit următoarea reformulare a teoriei fundamentale a teoriei lui Galois (vezi cap. 16).

Teorema fundamentală a teoriei lui Galois. Aplicaţia care asociază fiecărui corp intermediar grupul Galois corespunzător este un izomorfism dual al laticei corpurilor intermediare pe laticea subgrupurilor grupului lui Galois.

Mulţimi parţial ordonate. O mulţime S cu elementele $a, b, c, \ldots$, pe care s-a definit o relaţie $a \subseteq b$ se numeşte *parţial ordonată* (în raport cu această relaţie) dacă relaţia este *reflexivă, tranzitivă şi antisimetrică* (vezi cap. 14), antisimetric înseamnă că din $a \subseteq b$ şi $b \subseteq a$ rezultă $a = b$.

Trebuie specificat că una din relaţiile $a \subseteq b$ sau $b \subseteq a$ nu trebuie neapărat să aibă loc pentru orice pereche de elemente ale lui S.

Exemplul 6. Mulţimea numerelor naturale 1, 2, 3, ... este parţial ordonată prin relaţia „a divide pe b".

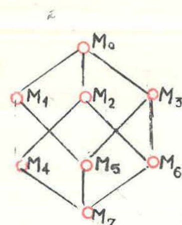
Exemplul 7. Mulţimea tuturor submulţimilor unei mulţimi date este parţial ordonată prin relaţia de incluziune din teoria mulţimilor „A este o submulţime a lui B".

Exemplul 8. Mulţimea tuturor funcţiilor reale continue pe intervalul [0, 1] este parţial ordonată de relaţia $f \subseteq g$, în sensul să $f(x) \leqslant g(x)$ pentru orice $x \in [0, 1]$.

De regulă, relaţia $\subseteq$ se interpretează ca „este conţinut în" şi mulţimile parţial ordonate se reprezintă prin diagrame. Astfel de diagrame se obţin asociind fiecărui element a un mic cerc K_a în plan şi unind cercurile K_a şi K_b printr-o linie dacă a şi b sînt comparabile. Dacă $a \subset b$, atunci cercul K_a se găseşte dedesubtul cercului K_b.

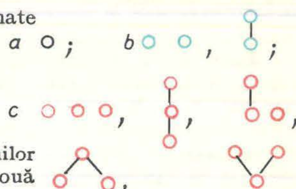
Exemplul 9. S se compune din submulţimile mulţimii $M = \{a, b, c\}$: $M_0 = M$, $M_1 = \{a, b\}$, $M_2 = \{a, c\}$, $M_3 = \{b, c\}$, $M_4 = \{a\}$, $M_5 = \{b\}$, $M_6 = \{c\}$, $M_7 = \emptyset$ şi este reprezentată prin diagrama din fig. 33.1.1.

Exemplul 10. Toate mulţimile parţial ordonate posibile sînt reprezentate prin diagramele din fig. 33.1.2.



33.1.1. Diagrama mulţimii S parţial ordonate (vezi exemplul 9)

33.1.2. Toate diagramele posibile ale mulţimilor parţial ordonate: a) — un element; b) — două elemente; c) — trei elemente



Orice latice L *defineşte* o mulţime parţial ordonată $S(L)$ cu *aceleaşi* elemente ca L. Se defineşte $a \subseteq b$ dacă $a \cap b = a$. Pentru unele mulţimi parţial ordonate această afirmaţie se poate inversa.

Aplicaţii. Domeniul aplicaţiilor teoriei laticelor este foarte întins ţinînd seama de generalitatea acestei teorii. Cele mai importante aplicaţii sînt în logică, fundamentele matematicii, algebră, topologice şi teoria integrării. Numai cu ajutorul conceptelor teoriei laticelor a fost posibilă dezvoltarea unui concept de integrală suficient de general pentru nevoile matematicii moderne.

33.2. Inele şi algebre

Inele. O mulţime R se numeşte *inel* dacă sînt definite pe ea două operaţii: adunarea şi înmulţirea. În raport cu adunarea, R trebuie să fie grup abelian, *grupul aditiv* al lui R, iar adunarea şi înmulţirea trebuie să fie legate prin două reguli de distributivitate: $a(b + c) = ab + ac$ şi $(a + b)c = ac + bc$. Dacă înmulţirea este asociativă, inelul se numeşte *inel asociativ* şi se spune că este un *semigrup multipicativ*. Dacă înmulţirea este şi comutativă, atunci *inelul este comutativ*. Domeniile de integritate şi corpurile sînt tipuri speciale de inele comutative.

Alte *exemple* de inele sînt:
1. Inelul neasociativ al vectorilor în spaţiul euclidian cu trei dimensiuni cu operaţiile adunare scalară şi înmulţirea scalară.
2. Inelul asociativ dar necomutativ al matricelor $(n \times n)$ avînd ca operaţii adunarea şi înmulţirea matricelor.

Studiul inelelor, care constituie o parte integrantă a cercetărilor în algebră, a fost decisiv pentru dezvoltarea algebrei abstracte în secolul nostru. Analiza structurilor algebrice, care azi reprezintă o practică standard în cercetarea algebrică, a fost sugerată de Emmy NOETHER (1882— 1935) şi aplicată pentru prima dată de către aceasta şi elevii ei în unele exemple importante. Cercetările lor au dat algebrei un nou impuls şi a condus la noi domenii de aplicaţie.

Algebre. Conceptul de algebră s-a dezvoltat în legătură cu inelele care sînt în acelaşi timp şi *spaţii vectoriale*. O algebră este un inel asociativ A al cărui grup aditiv A^+ este un spaţiu vectorial peste un corp K, pentru care înmulţirea cu scalari ai corpului se poate comuta cu înmulţirea definită în inel; $(\alpha u)\, v = u(\alpha v)$, $\alpha \in K$ şi $u, v \in A$. Dimensiunea unei algebre A privită ca spaţiu vectorial poartă denumirea de *rang* al algebrei.

Exemple. 1. Mulţimea funcţiilor reale sau complexe *continue* şi *derivabile* pe un interval formează o algebră.
2. Matricele reale sau complexe $(n \times n)$ formează o algebră de rang n^2.

Constante de structură. Deoarece orice element al unei algebre de rang finit n poate fi reprezentat ca o combinaţie liniară a elementelor bazei $u_1, \ldots, u_n$, produsul a două elemente $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ şi $v = \sum_{j=1}^{n} \beta_j u_j$ se poate scrie $uv = \sum_{i,j}^{n} \alpha_i \beta_j (u_i u_j)$. De aici rezultă că toate

produsele uv pot fi calculate dacă se cunosc produsele u_iu_j ale elementelor din bază. Aceste produse trebuie să fie la rîndul lor combinații liniare ale elementelor din baza $u_iu_j = = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ij}^{k} u_k$.

Cele n^3 constante $\gamma_{ij}^{k} u_k$ se numesc *constante de structură* ale algebrei. Ele determină complet înmulțirea în algebră cu ajutorul ecuațiilor pentru uv și u_iu_j.

Exemplu. Algebra H de rangul 4 cu baza formată din elementele 1, i, j, k și produsele $1^2 = 1$, $1i = i$, $1j = j$, $1k = k$, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$ și $ji = -k$, $kj = -i$, $ik = -j$ poartă numele de *algebra lui Hamilton sau a cvaternionilor*. Ea conține ca subcorp numerele complexe $a + bi$.

Aplicații. Pe lîngă aplicațiile menționate în teoria corpurilor în care teoria inelelor joacă un rol decisiv, în ultimul timp au apărut importante aplicații în *analiza funcțională*. Introducînd o generalizare a valorii absolute (vezi cap. 40), se ajunge la conceptul de *algebră Hilbert sau normată*. Teoria algebrelor normate este un instrument de analiză important în algebra *topologică*.

33.3. Teoria reprezentărilor

Teoria reprezentărilor este strîns legată de teoria algebrelor. Această teoria are ca obiect aplicațiile într-un *grup sau inel de matrice sau transformări liniare ale unui spațiu vectorial*. Acest spațiu vectorial se numește *spațiul reprezentărilor*. Determinarea reprezentărilor unui grup sau ale unei algebre prezintă importanță nu numai pentru studiul structurii respective dar și pentru numeroasele aplicații în fizică și chimie, de ex. în *mecanică cuantică*. Mai mult chiar, teoria reprezentărilor poate fi privită ca un principiu de ordonare în geometrie și generalizează teoria invarianților care își atinsese stadiul de înflorire la începutul secolului nostru.

Reprezentările unui grup. Se consideră ca spațiu al reprezentărilor spațiul vectorial complex V. O reprezentare a unui grup G peste V este un omomorfism al lui G în *grupul general iniar* GL(V) al *transformărilor nesingulare liniare* ale lui V. Dacă dimensiunea lui V este n, e spune că reprezentarea este n-dimensională. În acest caz orice transformare liniară se poate reprezenta după alegerea unei baze în V printr-o matrice ($n \times n$) și se obține un omomorfism al lui G în GL(n). Un astfel de omomorfism poartă denumirea de *reprezentare matrilceală* a grupului G.

Descrierea concretă a reprezentărilor poate fi deosebit de dificilă. Pentru unele grupuri importante s-au elaborat metode de găsire a reprezentărilor posibile, de exemplu, pentru grupul tuturor permutărilor unui număr fix de elemente. Pentru grupuri infinite, ca de exemplu grupurile *topologice*, problema devine foarte dificilă. Totuși multe probleme au fost rezolvate pentru *grupuri Lie* particulare, ca de exemplu grupurile de rotații și grupurile Lorentz.

Aplicații. Pe lîngă aplicațiile menționate mai sus, teoria reprezentărilor se folosește în mod frecvent în analiză. Astfel, reprezentarea grupului de rotație, adică grupul de rotații ale sferei în spațiul cu tre dimensiuni au condus la o teorie mai aprofundată a *funcțiilor sferice*, pe cînd reprezentările altor grupuri sînt folosite pentru găsirea unor proprietăți importante ale funcțiilor Bessel și ale altora. Desigur, reprezentările grupului Lorentz sînt importante în fizică.

33.4. Concluzii

Rezumînd, se poate afirma că algebra contemporană este teoria *structurilor algebrice*. O structură algebrică este o mulțime pe care s-au definit anumite operații (adunarea, înmulțirea, intersecția etc.), pentru care natura exactă a obiectelor mulțimii nu este esențială pentru

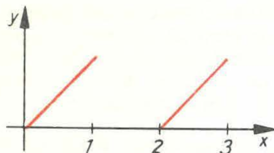
cercetarea respectivă. Acest concept de structură, care s-a dezvoltat la începutul acestui secol, a avut o importanță majoră pentru algebră și a caracterizat gîndirea algebrică în ultimii 50 de ani. În decursul timpului a mai suferit modificări și s-a extins și la alte domenii ale matematicii, ca de exemplu la structurile topologice sau diferențiale.

În ultimii ani s-au dezvoltat noi concepte legate de alte discipline matematice. Studiul lor este în curs și importanța lor nu este încă, în multe cazuri, pe deplin clarificată.

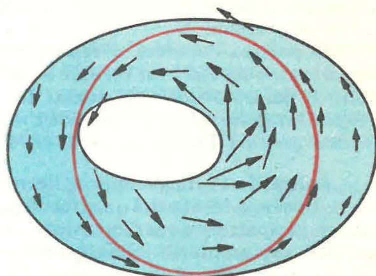
34. Topologie

34.1. Topologia mulțimilor de puncte

În unele teoreme din analiză și geometrie *conexiunea* unei figuri joacă un rol esențial; de exemplu teorema care afirmă că o funcție este bijectivă dacă derivata ei este peste tot diferită de zero este valabilă numai dacă domeniul de definiție al funcției este conex. Este ușor de găsit o funcție care definită pe intervalele deschise (0, 1) și (2, 3), nu este bijectivă dar are derivata 1 în fiecare punct al acestor intervale (fig. 34.1.1). Situația este și mai complicată atunci cînd se consideră proprietatea de conexiune în plan. Teorema prin care un cîmp vectorial cu rotorul egal cu zero are un potențial este în general valabilă numai dacă domeniul unde este definit cîmpul nu conține găuri; un astfel de domeniu se numește simple conex. De exemplu, lungimile vectorilor unui cîmp vectorial pot fi alese astfel încît rotorul să devină zero (fig. 34.1.2), cu toate că nu are potențial; se poate vedea acest lucru prin integrarea de-a lungul curbei marcate pe figură. Studiul proprietății de conexiune a figurilor, sugerat de aceste exemple și de altele asemănătoare, formează o parte mică dar caracteristică a topologiei.



34.1.1. Funcția reprezentată nu este bijectivă

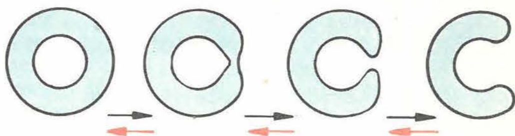

34.1.2. Cîmp vectorial cu rotor nul și fără potențial

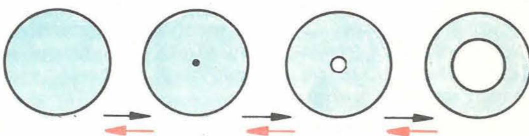
Conceptul de figură. Pentru început se presupune că figurile în studiu se găsesc pe o dreaptă, în plan sau în spațiul euclidian cu trei dimensiuni E^3. Situația se complică dacă dimensiunea crește. Pe dreaptă singurul lucru care contează este numărul de părți din care se compune figura pe cînd în plan trebuie considerat și numărul găurilor pe care le are fiecare parte. În spațiul cu trei dimensiuni există de fapt două tipuri de găuri, *cavități* asemănătoare celor din brînza Schweitzer și *canale* asemănătoare găurilor dintr-o sită.

În general o *figură* se definește ca o *mulțime de puncte* din spațiul considerat. De aceea figurile se mai numesc uneori și mulțimi de puncte. Definiția conduce la exemple foarte complicate, greu de vizualizat, ca de exemplu mulțimea tuturor punctelor din plan pentru care o coordonată este rațională și cealaltă irațională. Deși următoarele observații sînt valabile și pentru astfel de mulțimi de puncte complicate, este suficient să ne mărginim la figurile ce

pot fi „percepute", de exemplu intervale pe o dreaptă sau suprafețe în plan, sau suprafețe și corpuri în spațiul cu trei dimensiuni.

Mulțimi de puncte omeomorfe. Înainte de a se face unele afirmații privind conexiunea figurilor, trebuie dată o definiție precisă a figurilor cu aceeași conexiune; astfel de figuri sînt *omeomorfe*. Intuitiv, două figuri X și Y sînt omeomorfe dacă X poate fi transformată în Y prin întindere, îndoire sau deformare fără rupere sau lipire a unor părți ale lui X (fig. 34.1.3). Dacă X se transformă în Y în acest mod, atunci fiecărui punct p al lui X i se asociază un punct unic $f(p)$ în Y și invers, adică aplicația care asociază fiecărui punct p al lui X transformatul $f(p)$ este o aplicație bijectivă a lui X pe Y. Condiția că rupturile nu se permit implică faptul că dacă două puncte p și q ale lui X sînt suficient de apropiate, atunci și imaginile lor $f(p)$ și $f(q)$ sînt de asemenea apropiate. Această condiție poate fi precizată folosind noțiunea de distanță dintre două puncte $d(p, q)$ și devine astfel analoagă cu condiția de continuitate a funcțiilor de variabilă reală.



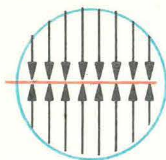


34.1.3. Ruperea și alipirea suprafețelor

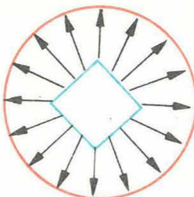
O aplicație f a unei figuri X pe o figură Y se numește continuă dacă pentru orice punct p din X și orice număr pozitiv ε există un număr pozitiv δ astfel încît pentru orice punct q din X, din $d(p, q) < \delta$ rezultă $d(f(p), f(q)) < \varepsilon$

Continuitatea exprimă faptul că prin deformarea f nu se introduc rupturi, dar mai rămîne de precizat ideea că punctele nu pot fi alipite și cavitățile nu pot fi umplute. Acest lucru se poate realiza considerînd aplicația inversă f^{-1}, care asociază fiecărui punct p' al lui Y un singur punct p al lui X (care există, f fiind bijectivă), astfel încît $f(p) = p'$. A spune că f nu produce alipiri de puncte este echivalent cu a spune că f^{-1} nu introduce rupturi sau că f^{-1} este continuă. Astfel este acum posibilă definirea precisă a omeomorfismului.

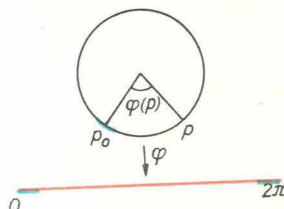
Două figuri X și Y se numesc omeomorfe dacă există o aplicație continuă bijectivă a lui X pe Y astfel încît aplicația inversă f^{-1} să fie de asemenea continuă. Aplicația f poartă atunci denumirea de omeomorfism sau aplicație topologică.



34.1.4. Proiecția unui cerc pe un diametru



34.1.5. Proiecția unui pătrat pe un cerc

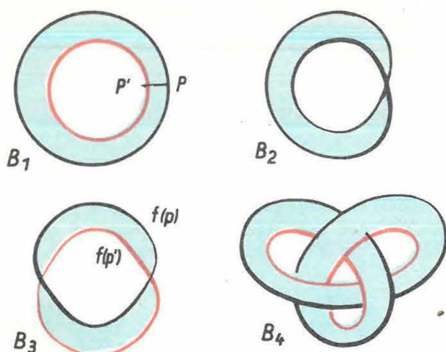


34.1.6. Aplicația unui cerc pe un interval semideschis

Exemple. *1* Proiecția ortogonală a unui cerc pe un diametru este o aplicație continuă dar nu un omeomorfism, deoarece nu este injectivă (fig. 34.1.4).

2. Proiecția centrală a frontierei unui pătrat pe un cerc este un omeomorfism (fig. 34.1.5),

3. Aplicația unui cerc C pe intervalul semideschis $[0, 2\pi)$, prin care fiecărui punct p al lui C îi corespunde unghiul $\varphi(p)$, nu este continuă în punctul p_0 cu unghiul 0 deoarece imaginile punctelor apropiate de p_0 se găsesc la celălalt capăt al intervalului (fig. 34.1.6).



34.1.7. Benzi nerăsucite, răsucite și înnodate

Definiția omeormorfismului nu corespunde exact ideii intuitive de deformare a unei figuri în alta fără ruperi și îndoiri. Se mai permite și tăierea figurii (fig. 34.1.7), cu condiția ca după deformare tăietura să se lipească punct cu punct așa cum a fost inițial. Din cele patru benzi B_1, B_2, B_3, B_4 de pe figură, B_3 și B_4 sînt omeomorfe cu B_1 dar nu și *banda lui Möbius* B_2. Figura B_2 se obține din B_1 prin tăiere, răsucire o dată și alipire, B_3 este răsucită de două ori și în B_4 banda se întinde și apoi se răsucește. Figurile B_1 și B_2 nu sînt omeomorfe, deoarece B_1 are frontiera formată din două curbe pe cînd frontiera lui B_2 este formată numai dintr-o curbă. Figurile B_1 și B_3 sînt omeomorfe deoarece partea din frontiera lui B_1 reprezentată cu negru poate fi aplicată pe partea lui B_3 reprezentată cu negru și partea din frontiera lui B_1 reprezentată cu roșu se aplică pe partea lui B_3 reprezentată cu roșu în așa fel încît punctele opuse p și p' se aplică în punctele opuse $f(p)$ și $f(p')$. Dacă fiecare segment de dreaptă care leagă punctele opuse p și p' se aplică pe segmentul corespunzător dintre $f(p)$ și $f(p')$, atunci aplicația este un omeomorfism al lui B_1 pe B_3. B_1 nu poate fi însă deformată în B_3; trebuie întîi tăiată de-a lungul segmentului pp', răsucită și apoi din nou lipită. Dacă B_1 se transformă în B_2 într-un mod similar, atunci se lipesc puncte care inițial nu erau apropiate.

Aplicații omeomorfe apar frecvent în viața curentă, de ex. în hărțile schematice ale liniilor de metrou sau ale rețelelor de linii de tramvai în care se indică punctele de transfer.

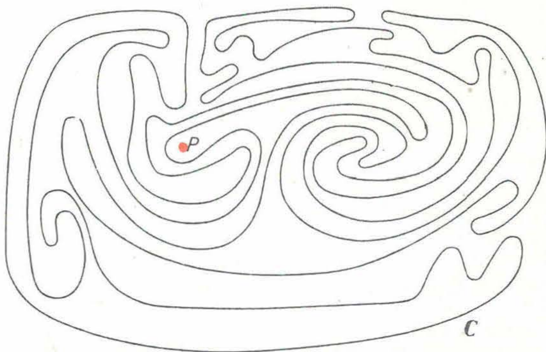
Proprietăți topologice. Proprietățile mulțimilor care depind numai de conexiunea lor se numesc topologice. Orice astfel de proprietate a unei mulțimi se păstrează pentru toate imaginile omeomorfe. Astfel enunțul *teoremelor topologice* se referă la proprietățile topologice ale mulțimilor de puncte.

Un ex. de astfel de teoremă este *teorema lui Jordan* referitoare la *curbe*.

Teorema lui Jordan. Orice curbă simplă închisă împarte planul în două părți.

Proprietățile la care se referă această teoremă sînt proprietatea curbei de a fi *simplă și închisă și fără puncte duble* (puncte în care curba se intersectează cu ea însăși) și *împărțirea planului în două părți*. Aceste proprietăți sînt topologice deoarece în primul rînd orice imagine omeomorfă a unei curbe simple închise este tot o curbă simplă închisă, toate curbele simple închise fiind imagini omeomorfe ale unui cerc. În al doilea rînd, împărțirea planului în două părți înseamnă că complementara curbei se compune din două părți disjuncte, ceea ce este tot o proprietate topologică. Teorema, deși pare evidentă, se demonstrează destul de greu. Acest lucru se poate aprecia observînd că o curbă plană simplă închisă C poate fi destul de complicată și că este greu de apreciat dacă un punct P este interior sau exterior unei astfel de curbe (fig. 34.1.8).

Pe lîngă teoremele referitoare la proprietățile topologice mai pot fi privite ca aparținînd topologiei și teoreme referitoare la concepte topologice ca de ex. *teorema de punct fix a lui Brouwer* care se referă la aplicații continue.



34.1.8. Curbă simplă închisă cu punct exterior P

Teorema de punct fix a lui Brouwer. Dacă C este un disc circular incluzînd perimetrul, atunci orice aplicație continuă a lui K în K are un punct fix, adică un punct care se aplică în el însuși.

Așadar, dacă discul se deformează astfel încît figura rezultată se găsește în întregime în interiorul discului, atunci cel puțin un punct al noii figuri va ocupa poziția sa inițială.

Unul dintre principalele obiective ale topologiei constă în a decide dacă două figuri X și Y sînt omeomorfe. Dacă acest lucru este adevărat, el poate fi demonstrat în mod frecvent prin găsirea unui anumit omeomorfism de la X la Y. Dacă X și Y nu sînt omeomorfe, demonstrarea acestui lucru este de regulă mult mai complicată. Metoda de bază în acest gen de demonstrații constă în găsirea unei proprietăți topologice satisfăcute de una din figuri dar nu și de către cealaltă. În acest caz X și Y nu pot fi omeomorfe deoarece dacă o mulțime are o anumită proprietate topologică, orice imagine omeomorfă a ei trebuie să posede aceeași proprietate. Această metodă necesită o foarte bună cunoaștere a principalelor proprietăți topologice; se va da aici o listă a celor mai simple și mai importante dintre acestea.

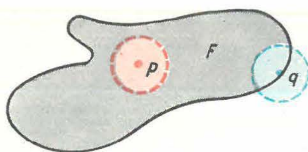
O mulțime de puncte Z se numește *conexă* dacă orice două puncte ale ei p și q pot fi unite printr-un drum în întregime conținut în Z, adică dacă există o aplicație continuă a unui interval în Z care aplică extremitățile intervalului în punctele p și q respectiv. Astfel, figurile sînt conexe dacă nu se compun din mai multe părți disjuncte. Figurile conexe în plan și în spațiu pot avea însă *găuri*. Pentru a exclude posibilitatea existenței anumitor tipuri de găuri se cere ca mulțimea să fie *simplu conexă*. O mulțime Z este simplu conexă dacă orice curbă simplă închisă conținută în Z se poate contracta într-un punct conținut în Z. Intuitiv este clar că o figură plană simplu conexă nu poate avea găuri, altfel o curbă care înconjoară o gaură nu poate fi contractată într-un punct interior lui Z. Pe de altă parte, pentru figurile tridimensionale condiția exclude canalele dar nu și cavitățile; de ex. o sferă goală este simplu conexă, deși are o cavitate. O sită însă nu este simplu conexă.

Acest tip de proprietăți topologice care se referă la găurile figurilor și la conexiunea lor au constituit punctul de pornire al topologiei algebrice în care conexiunea figurilor de dimensiune arbitrar de mare este descrisă prin anumite structuri algebrice asociate cu figura ca de ex. *grupurile de omologie și de omotopie*.

Oricărei mulțimi de puncte X i se poate asocia un număr natural din X, numit *dimensiunea mulțimii de puncte*. Pentru figurile familiare nouă ca de ex. o curbă C, o suprafață S sau un corp geometric B, pentru care avem o noțiune intuitivă asupra ceea ce trebuie să fie dimensiunea, $\dim X$ are valorile la care ne așteptăm și anume $\dim C = 1$, $\dim S = 2$ și $\dim B = 3$. În *teoria dimensiunii* se dă o definiție precisă a dimensiunii și se poate astfel demonstra că două mulțimi de puncte omeomorfe X și Y au aceeași dimensiune: $\dim X = \dim Y$. Astfel, dimensiunea unei mulțimi de puncte este o proprietate topologică, de ex. o curbă nu poate fi niciodată omeomorfă cu o suprafață.

Vecinătatea unui punct. Pe lîngă conexiune și dimensiune, topologia mai include studiul altor proprietăți ale mulțimilor de puncte care sînt importante și pentru alte ramuri ale matematicii ca de ex. calculul diferențial. Cînd s-a explicat conceptul de derivată într-un punct x al unei funcții definite pe un interval închis I, contează foarte mult dacă x este sau nu o extremitate a intervalului. În primul caz se poate vorbi numai despre o derivată la dreapta sau la stînga. O situație similară are loc pentru o funcție de două variabile $f(x, y)$ definită într-un domeniu D din plan. Cînd se definesc derivatele parțiale sau derivata totală a lui f într-un punct, este necesar să se distingă dacă punctul respectiv se găsește în interiorul sau pe frontiera domeniului D. Într-adevăr, deseori este necesar să se facă distincție între punctele interioare și cele aflate pe frontiera unei figuri. Primul pas pentru precizarea acestor concepte este introducerea ideii de vecinătate a unui punct. Se definește ε-vecinătatea $U_\varepsilon(p)$ a unui punct p ca mulțimea tuturor punctelor a căror distanță la p este mai mică decît ε, ε fiind un număr pozitiv arbitrar. În acest context este important de stabilit dacă p este privit ca un element al unei drepte, al unui plan sau al unui spațiu bidimensional. În primul caz ε-vecinătatea este un interval deschis (adică fără extremități) de lungime 2ε, în al doilea caz un disc deschis de rază ε și în al treilea caz o sferă solidă de aceeași rază. Trebuie observat că frontiera discului și suprafața sferei nu se consideră aparținînd vecinătăților respective.

La orice figură F se deosebesc *puncte interioare* p care au o ε-vecinătate în întregime conținută în F și puncte *frontieră* q, pentru care orice ε-vecinătate conține și puncte care nu aparțin lui F (fig. 34.1.9) Se vede că dimensiunea spațiului în care se găsește F joacă un rol decisiv în aceste definiții. De ex. în plan, centrul M al discului K este un punct interior,



34.1.9. Punct frontieră q și punct interior p

dar în trei dimensiuni discul K este format numai din puncte frontieră deoarece nici o sferă de rază pozitivă nu poate fi conținută în K,

Mulțimile deschise sînt mulțimi fără puncte frontieră, formate numai din puncte interioare, de ex. o bilă în spațiu considerată fără suprafața sferică care o mărginește. În teoria funcțiilor de variabilă complexă, mulțimile deschise și conexe joacă un rol special, ele se numesc *domenii.*

Un punct p este *aderent* mulțimii X dacă orice ε-vecinătate a lui p conține cel puțin un punct din X. Intuitiv, mulțimea punctelor aderente lui X se compune din acele puncte care dacă nu sînt conținute în X sînt „oricît de apropiate" de X; de ex. extremitățile unui interval deschis nu aparțin intervalului dar sînt oricît de apropiate de acesta. Mulțimea punctelor aderente unui disc deschis K, de rază r și centru z, conține pe lîngă mulțimea discului însăși, punctele q de pe perimetrul discului pentru care $d(q, z) = r$. Dacă singurele puncte aderente ale lui F sînt însăși punctele lui F, atunci F se numește *închis*. Discul deschis K poate fi transformat într-o mulțime închisă prin adăugarea tuturor punctelor q de pe frontieră, $d(q, z) = r$. Relația esențială dintre mulțimi închise și deschise se exprimă prin aceea că o mulțime G pe dreaptă, în plan sau în spațiul cu trei dimensiuni este deschisă dacă și numai dacă complementara ei este închisă, adică numai dacă mulțimea tuturor punctelor din spațiul respectiv care nu sînt în G este închisă.

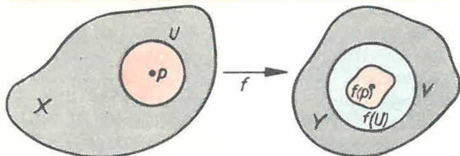
În scopul unor generalizări ulterioare, se definesc ε-vecinătățile relative $U_\varepsilon(p)$ ale unui punct p și mulțimile deschise în raport cu o submulțime X. *ε-vecinătatea* relativă a lui p în X se compune din punctele q din X pentru care $d(p, q) < \varepsilon$, adică această vecinătate va fi $X \cap U_\varepsilon(p)$. În mod similar, o submulțime G a lui X se numește deschisă în X dacă orice punct p în G are o ε-vecinătate relativă în X în întregime conținută în G. Mulțimea vidă care este o submulțime a oricărei mulțimi și deci și a lui X, este considerată deschisă în X

Următoarele propoziții sînt adevărate pentru sistemul de submulțimi ale lui X care sînt deschise în X: 1. *X și mulțimea vidă fac parte din sistem, adică sînt deschise în X.* 2. *Reuniunea unui număr arbitrar de mulțimi deschise în X este o mulțime deschisă în X.* 3. *Intersecția unui număr finit de mulțimi deschise în X este o mulțime deschisă în X.*

Cu aceste concepte de ε-vecinătate relativă și mulțimi deschise se poate da o nouă definiție a continuității pentru aplicații f ale unei mulțimi X într-o mulțime Y.

O aplicație f a unei mulțimi de puncte X pe o altă mulțime de puncte Y este continuă dacă și numai dacă pentru orice punct p din X și orice ε-vecinătate relativă V a lui $f(p)$ din Y se poate găsi o δ-vecinătate U a lui p din X care este aplicată prin f într-o submulțime a lui V (fig. 34.1.10).

O aplicație f a lui X în Y este continuă dacă și numai dacă imaginea inversă a oricărei mulțimi deschise în Y este deschisă în X.



34.1.10. Aplicații continue

Imaginea inversă A a unei submulțimi B a lui Y prin aplicația f este mulțimea tuturor punctelor din X care sînt aplicate prin f în puncte din B.

34.2. Spații n-dimensionale

Pînă acum expunrrea s-a limitat la figuri de dreaptă, în plan san în spațiul cu trei dimensiuni, adică la spațiul euclidian E^1, E^2 și E^3. Punctul de pornire pentru generalizarea în cazul spațiului euclidian n.dimensional E^n este observația că orice punct p din E^3 poate fi descris printr-un triplet de coordonate (x_1, x_2, x_3).

Aplicația lui E^3 în mulțimea tuturor tripletelor de numere reale este biunivocă și odată cu fixarea unui sistem cartezian de coordonate, punctele lui E^3 pot fi identificate prin tripletele de coordonate. Spațiul E^n se definește în mod similar.

E^n este mulțimea n-uplurilor de numere reale $(x_1, x_2, ..., x_n)$; un n-uplu privit ca un element al acestei mulțimi este de regulă numit punct.

Funcția distanță în E^3, $d(p, q) = [(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+(y_3-x_3)^2]^{1/2}$ pentru $p=(x_1, x_2, x_3$ și $q = (y_1, y_2, y_3)$ poate fi generalizată la E^n; această funcție are cele trei proprietăți esențiale ale distanței în E^3, unde *inegalitatea triunghiului* afirmă că într-un triunghi cu vîrfurile p, q și r o latură este cel mult egală ca lungime cu suma celorlalte două.

Distanța dintre punctele p și q în E^n	$d(p, q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$	1. $d(p, q) = d(q,p)$ 2. $d(p, q) \geqslant 0$, $d(p, q) = 0$ dacă și numai dacă $p = q$ 3. Inegalitatea triunghiului $d(p, r) \leqslant d(p, q) + d(q, r)$

Folosind distanța $d(p, q)$, este acum posibilă definirea proprietăților topologice pentru submulțimi X și Y din E^n în același mod cum s-a făcut pentru E^n cu $n = 1, 2, 3$. O *aplicație* f de la o mulțime X la o mulțime Y este *continuă* dacă pentru orice punct p în X și orice număr pozitiv ε există un număr pozitiv δ astfel încît $d(p, q) < \delta$ implică $d(f(p), f(q)) < \varepsilon$. O astfel de aplicație este un omeomorfism dacă este bijectivă iar f și f^{-1} sînt continue. Două mulțimi X și Y sînt omeomorfe dacă există un *omeomorfism* de la X la Y. În sfîrșit, ε-vecinătatea unui punct din X poate fi definită exact în același mod ca mai sus, astfel încît toate conceptele de bază au fost extinse pentru mulțimile mult mai generale ce se vor considera în continuare.

Spații cu dimensiuni mai mari se folosesc în studiul obiectelor sau condițiilor ce nu pot fi descrise cu cel mult trei coordonate în spațiu, dar pot fi descrise cu un număr finit de coordonate care îi determină poziția în spațiu dar și printr-o coordonată timp. Astfel orice eveniment corespunde unui punct în E^4. Dacă se urmărește nu numai descrierea unui singur eveniment ci a mai multor evenimente, atunci se obține o submulțime a lui E^4. O situație similară se întîlnește în fizica sistemelor cu mai multe grade de libertate. Desigur că acest mod de a privi lucrurile poate fi fructificat numai dacă se reușește stabilirea și demonstrarea pentru spațiile cu dimensiune mai mare a unor teoreme cu conținut geometric și topologic, interesante și aplicabile în practică. În continuare se vor enunța două astfel de teoreme.

Teorema Jordan-Brouwer. Pentru generalizarea în E^3 a teoremei lui Jordan care a fost stabilită pentru E^2, curba închisă a fost înlocuită cu *sfera topologică 2-dimensională*. Aceasta se definește ca orice submulțime a lui E^3 care este omeomorfă cu suprafața unei sfere sau, în termeni intuitivi, o sferă deformată. Orice sferă topologică bidimensională divide pe E^3 în două părți. Prin analogie cu E^3 în E^n se mai definește sfera plină n-dimensională ca mulțimea punctelor p a căror distanță la un punct fix z este cel mult egală cu un număr fixat r, $d(p, z) < r$. Suprafața sferei plane este mulțimea acelor p pentru care $d(p, z) = r$. O *sferă* $(n - 1)$*-dimensională* este o submulțime a lui E^n omeomorfă acestei suprafețe; din nou aceasta se poate descrie intuitiv ca o suprafață deformată a sferei pline *n-dimensionale*. Teorema Jordan-Brouwer și teorema de punct fix a lui Brouwer pot fi acum enunțate la modul cel mai general.

Teorema Jordan-Brouwer. Orice sferă topologică $(n-1)$-dimensională împarte pe E^n în două părți.

Teorema de punct fix a lui Brouwer. Dacă f este o aplicație continuă a unei sfere pline n-dimensionale în ea însăși, atunci f are un punct fix.

34.3. Structuri topologice

Incomparabil mai multe generalizări cu largi perspective ale conceptelor topologice intuitive pot fi făcute introducînd în topologie ideea de *structură* a unei mulțimi, idee ce a apărut inițial în algebră. În algebră, structuri ca acelea de inel sau corp se obțin din sistemele de numere printr-un proces de abstractizare în care proprietățile numerelor neesențiale pentru algebră sînt ignorate și se rețin numai acelea necesare pentru bazele cercetărilor algebrice. Dacă se urmează o cale similară în topologie, atunci mai întîi trebuie determinate acele proprietăți ale mulțimilor de puncte care stau la baza argumentelor topologice și apoi să se definească o *structură generală* pentru care unica cerință este realizarea condițiilor esențiale cercetării topologice. Una dintre aceste proprietăți esențiale ale mulțimilor de puncte ce duce la concepte topologice este posibilitatea definirii *continuității* aplicațiilor; multe alte concepte topologice ca de ex. cele de omeomorfism și conexiune sînt definite pe baza ideii fundamentale de continuitate.

O structură topologică va fi deci definită ca o mulțime T cu anumite proprietăți care ne dau posibilitatea să recunoaștem dacă o aplicație f a lui T pe altă structură T' este continuă sau nu. Este plauzibilă *considerarea spațiilor metrice din analiza funcțională* ca structuri convenabile pentru acest scop, continuitatea rezultînd imediat din conceptul de distanță (vezi spații n-dimensionale) iar spațiile metrice sînt prin definiție mulțimi în care s-a definit o distanță $d(p, q)$ pentru orice pereche de elemente p, q. Deși aceasta ar fi o cale posibilă, pentru unele studii topologice spațiile metrice sînt prea restrictive. S-a ajuns la definiția finală observînd că se poate defini continuitatea unei aplicații f a unei mulțimi de puncte X pe o mulțime de puncte Y dacă se cunosc mulțimile deschise în X și Y (vezi Proprietăți topologice). Aplicația f este continuă dacă și numai dacă imaginea inversă a oricărei mulțimi deschise în Y este deschisă în X.

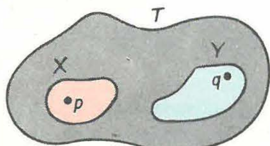
De aceea următoarea definiție *a spațiului topologic* prezintă cea mai convenabilă structură pentru studiul topologiei.

Un spațiu topologic T este o mulțime cu un sistem O de submulțimi ale lui T cu următoarele proprietăți:
1. *T și mulțimea vidă aparțin lui O.*
2. *Reuniunea unui număr arbitrar de mulțimi din O este de asemenea o mulțime din O.*
3. *Intersecția unui număr finit de mulțimi ce aparțin lui O aparține lui O.*

Mulțimile din O se numesc mulțimi deschise ale lui T.

Aceste trei axiome corespund întocmai proprietăților sistemului de submulțimi deschise ale mulțimilor de puncte enumerate mai sus, astfel încît orice mulțime de puncte împreună cu submulțimile ei (relativ) deschise formează un spațiu topologic, definiția continuității de la sfîrșitul paragrafului precedent avînd sens pentru aplicațiile de la un spațiu topologic T la un spațiu topologic T'. O aplicație f de la T la T' se numește omeomorfism dacă este bijectivă și atît f cît și f^{-1} sînt continue. Două spații topologice T și T' se numesc omeomorfe dacă există un omeomorfism de la T la T'. Un spațiu topologic T este conex dacă pentru orice pereche (p, q) de elemente din T există o aplicație continuă a unui interval în T, astfel încît extremitățile intervalului să se aplice pe p și q respectiv.

Aceste exemple ilustrează modul în care conceptele definite pentru mulțimile de puncte pot fi extinse la spații topologice arbitrare. Totuși, rezultatele generale tind să fie mult mai puțin intuitive în termeni geometrici decît cel pentru mulțimi de puncte. Mai mult, există concepte referitoare la mulțimi de puncte care nu pot fi generalizate la spații topologice arbitrare, de ex. nu se poate da o definiție satisfăcătoare a dimensiunii pentru toate spațiile topologice. *Topologia generală* care se ocupă cu studiul spațiilor topologice arbitrare cu greu poate fi privită ca făcînd parte din geometrie. Mai degrabă prezintă un caracter de *teorie a structurii* comparabilă cu teoria grupurilor din algebră. La fel cum în teoria grupurilor se examinează clase speciale de grupuri, ca de ex. grupurile abeliene, tot așa în topologia generală se deosebesc spații topologice care satisfac pe lîngă axiomele 1, 2 și 3 de mai sus și alte axiome, de ex. *axioma de separare a lui Hausdorff*. Aceasta se enunță astfel: pentru orice două elemente p și q din T există mulțimi disjuncte deschise X și Y astfel încît $p \in X$ și $q \in Y$ (fig. 34.3.1).



34.3.1. Axioma de separare a lui Hausdorff

Spațiile topologice sînt mai generale decît *spațiile metrice*, în particular orice spațiu metric fiind spațiu topologic. În orice spațiu metric se poate distinge sistemul de mulțimi deschise. Aceste mulțimi deschise se definesc exact ca în spațiile euclidiene. Fie M un spațiu metric, p un element al lui M și ε un număr pozitiv; ε-vecinătatea lui p în M este mulțimea tuturor elementelor din M a căror distanță la p este mai mică decît ε. O submulțime X a lui M este deschisă dacă pentru orice element p din X există o ε-vecinătate a lui p în întregime conținută în X. Nu este greu de arătat că sistemul de mulțimi deschise astfel definit are proprietățile 1, 2 și 3 și că astfel M devine un spațiu topologic.

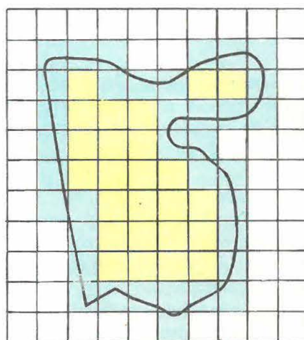
Această observație are ca importantă consecință posibilitatea aplicării conceptelor și rezultatelor topologiei generale la spațiile metrice și în particular în analiza funcțională.

Ca un exemplu important de problemă a topologiei generale poate fi dată *problema metrizării*. Aceasta se enunță astfel: în ce condiții impuse sistemului de mulțimi deschise O ale unui spațiu topologic T, T este metrizabil, adică în ce condiții se poate defini o distanță d pe T care transformă pe T într-un spațiu metric ale cărui mulțimi deschise sînt exact mulțimile din O? Este ușor de văzut că o condiție necesară dar nu și suficientă este condiția de separare a lui Hausdorff. *Teorema de metrizare* a lui NAGATA și SMIRNOV dă condiții necesare și suficiente pentru existența unei astfel de metrici pe un spațiu topologic. Formularea precisă a acestor condiții depășește cadrul acestui capitol.

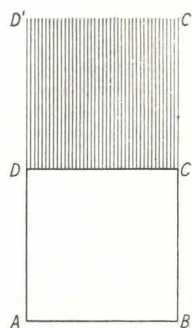
35. Teoria măsurii

Teoria măsurii are ca obiect determinarea conținutului configurațiilor geometrice sau mai general, a mulțimilor de puncte. Ea este direct legată de calculul integral și de teoria mulțimilor și își găsește importante aplicații în multe cazuri ale analizei și în bazele teoriei probabilităților. În contrast cu calculul ariilor triunghiurilor, dreptunghiurilor și a altor figuri mărginite de drepte, figurile mărginite de curbe și linii chiar mai complicate prezintă dificultăți. Chiar definirea conceptului de *conținut al unei mulțimi de puncte* constituie o problemă. O primă rezolvare a acesteia, prin introducerea *conceptului de măsură Riemann* se sprijină pe noțiunea de integrală Riemann și a fost dată în 1890 de Giuseppe PEANO (1858—1932) și de Marie Ennemond Camille JORDAN (1838—1922). Pentru a ajunge la măsura unei mulțimi de puncte (de exemplu, în plan), se construiește o rețea pătratică în plan și figura dată se *aproximează printr-o regiune interioară* ei, formată numai din pătrate ale rețelei (galben în fig. 35.1). O *regiune de aproximare exterioară* va conține figura dată (galben și albastru). Luînd apoi o rețea cu latura egală cu jumătate din latura rețelei inițiale, se obține o rețea mai fină astfel încît noua aproximare interioară o conține pe cea veche pe cînd noua aproximare exterioară este conținută în aproximarea exterioară anterioară. Astfel, diferența dintre ariile acestor regiuni de aproximare este descrescătoare. Construind în continuare rețele din ce în ce mai fine, măsurile interioare, respectiv exterioare devin oricît de apropiate și limita lor comună se numește *măsura Peano-Jordan* sau aria figurii date.

Această noțiune de măsură conduce la formulele bine cunoscute pentru ariile figurilor mărginite de linii drepte ca și pentru alte figuri printre care cercul și elipsa. Totuși *există mulțimi de puncte cărora nu li se poate atașa o arie sau o măsură Peano-Jordan*. Figura 35.2 reprezintă un pătrat $ABCD$ pe a cărui latură CD sînt trasate perpendiculare egale cu latura în fiecare punct a cărui distanță



35.2. Aproximarea unei arii Peano-Jordan



35.1. Figură care nu are arie Peano-Jordan

de la vîrful C este un *număr rațional.* În acest caz, toate măsurile exterioare sînt cel puțin de două ori mai mari decît cele interioare și nu pot tinde către o limită comună atunci cînd rețelele devin din ce în ce mai fine, deoarece întregul pătrat $CC'D'D$ aparține întotdeauna aproximării exterioare și numai acesteia. Orice pătrat al unei rețele, oricît de mic ar fi, conține atît puncte care aparțin figurii cît și puncte ce nu aparțin acesteia.

Măsura Lebesgue. În matematicile moderne prezintă importanță tocmai astfel de mulțimi de puncte care la prima vedere par excepționale. În multe cazuri s-a putut defini un concept mai larg de măsură, *măsura Lebesgue,* introdusă în 1902 de către Henri Léon LEBESGUE (1875—1941). Spre deosebire de măsura Peano-Jordan figurile de aproximare pot să conțină o infinitate de arii elementare de diferite mărimi.

Mulțimile de puncte care au arii sînt măsurabile și măsura lor Lebesgue este numeric egală cu aria. Există însă mulțimi de puncte care nu admit o măsură Peano-Jordan dar care au o măsură, de exemplu măsura figurii 35.2 este egală cu aria pătratului $ABCD$, submulțimea formată din perpendiculare are măsura zero. *Mulțimile de măsură nulă* joacă un rol deosebit de important atît în matematica pură cît și în descrierea matematică a proceselor naturale; ea caracterizează, ca să spunem așa, neesențialul.

În spații cu altă dimensiune considerațiile sînt complet analoage, de ex. pentru spațiul cu trei dimensiuni se obține volumul sau *măsura în spațiu.*

În *calculul integral* folosirea măsurii în locul ariei a condus la *integrala Lebesgue.* Ea reprezintă o generalizare a conceptului de integrală Riemann tot așa cum măsura Lebesgue este o generalizare a conceptului de măsură Peano-Jordan sau a ariei.

Prin abstractizare, în teoria generală a măsurii se înțelege prin măsura pe o mulțime Ω, o funcție cu valori reale $m(A)$, al cărei argument parcurge anumite submulțimi A din Ω și care are proprietăți corespunzătoare celor mai simple interpretări geometrice. În primul rînd $m(A) \geqslant 0$ și $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ pentru mulțimi de puncte disjuncte A și B. Mulțimile A care aparțin domeniului de definiție al lui m se numesc măsurabile în raport cu m. Această definiție face posibilă aplicarea directă a teoremelor din teoria măsurii în teoria probabilităților; aici un *eveniment aleator* este privit ca o submulțime A a mulțimii Ω de evenimente elementare și măsura $m(A)$ este *probabilitatea* evenimentului A

36. Teoria grafurilor

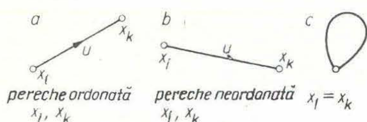
36.1. Fundamente

Grafuri orientate și neorientate. Un graf $G=[X, U, f]$ este o combinație a două mulțimi de figuri elementare, mulțimea X a *nodurilor* x și mulțimea U a *arcelor* u, și a unei funcții definite pe U, *mulțimea de incidență.* Aceasta pune în corespondență fiecărui *arc orientat* $u \in U$ exact o *pereche ordonată de noduri* $x_i, x_k \in X$ și unui arc neorientat o pereche neordonată (fig. 36.1.1).

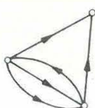
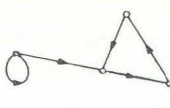
Nodurile corespunzătoare unui arc nu trebuie să fie distincte. Dacă $x_i = x_k$, atunci $f(u) = (x_k, x_k)$ se numește *buclă.* Funcția f nu trebuie să fie inversabilă, adică o pereche (x_i, x_k) poate să corespundă mai multor arce care se numesc atunci *arce paralele sau muchie.* Fiecare din mulțimile X și U pot fi finite sau infinite. Dacă X și U sînt finite, atunci graful se numește *finit.* Toate considerațiile care urmează se referă la grafuri finite.

Pentru reprezentarea grafului, nodurile se reprezintă prin puncte și *arcele* prin arce de curbă care unesc punctele corespunzătoare lor. Graful este *orientat* sau *neorientat* după cum ordinea nodurilor într-o pereche contează sau nu (fig. 36.1.2, 36.1.3).

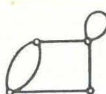
Exemplu. Planul străzilor unui oraș este de regulă reprezentat pe o hartă printr-un graf neorientat. Acest lucru este absolut suficient pentru pietoni. Totuși atunci cînd există multe străzi cu sens unic pentru automobiliști este necesară reprezentarea străzilor printr-un graf orientat.



36.1.1. a) Arc orientat; b) arc neorientat; c) buclă

36.1.2. Graf orientat



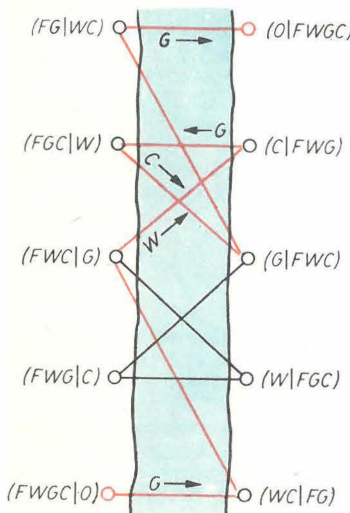

36.1.3. Graf conex neorientat; cel din dreapta este complet

Aplicații. Cele cinci *corpuri ale lui Platon* (tetraedru, cub, octaedru, dodecaedru, icosaedru) ca dealtfel toate celelalte poliedre reprezintă grafuri pentru care muchiile sînt arce și vîrfurile sînt noduri. Frontierele dintre țări pe o hartă geografică formează un graf; la fel și rețelele căilor ferate, maritime și aeriene.

Toate rețelele de comunicație ca de exemplu rețelele telefonice și cele telegrafice pot fi reprezentate prin grafuri, la fel și rețelele electrice, de apă și de încălzire centrală. În teoria sistemelor și în cibernetică se consideră sisteme complexe a căror structură se poate reprezenta cu ajutorul grafurilor, de exemplu diagramele tabelului de distribuție, diagramele de transmitere a semnalelor și structura producției în economie. O ramură practică a teoriei grafurilor o constituie *tehnica rețelelor*. Timpii de pornire și legăturile părților unui proces complet sînt transferate într-o rețea și pot fi apoi calculate și dirijate.

În general, se poate spune că grafurile sînt un instrument de rezolvare a problemelor combinatoriale.

Exemplu. Un barcagiu F dorește să treacă un lup W, o capră G și o varză C de pe pe malul stîng al unui rîu pe malul drept cu ajutorul unei bărci care poate transporta o dată numai doi dintre F, W, G, C. Lupul și capra nu pot rămîne împreună nesupravegheați, la fel capra și varza. Cum se poate realiza acest lucru?



36.1.4. Combinațiile posibile pentru traversarea cu o barcă a barcagiului F, a lupului W, a caprei G și a verzei C; unul din șirurile posibile de muchii legate este colorat

Întîi se clasifică toate combinațiile admise. De exemplu, una este (FWG/C), care înseamnă că F, W și G sînt pe malul stîng și C pe malul drept. Un zero înseamnă că nici unul din cele patru obiecte nu se găsește pe malul corespunzător. O combinație în care barca este pe malul drept este pusă în legătură cu o combinație în care barca este pe malul stîng dacă barcagiul poate ajunge de pe un mal pe celălalt într-o zi.

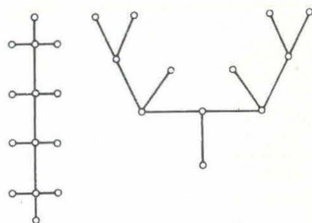
Combinațiile și legăturile sînt nodurile și muchiile unui graf (fig. 36.1.4). Problema se poate rezolva acum căutînd un șir legat de muchii ce încep în $(FWGC/0)$ și se termină la $(0/FWGC)$. Există cîteva astfel de șiruri.

Grafuri speciale. Un graf în care oricare două noduri sînt legate exact printr-o muchie se numește *complet*.

Dacă graful se compune numai din puncte izolate, adică mulțimea muchiilor este nulă, graful se numește *graf nul*. Dacă se poate ajunge din orice nod în oricare alt nod, de-a lungul muchiilor, graful se numește *conex*. Un graf complet este conex.

Trecînd succesiv de la o muchie la alta printr-un nod comun celor două muchii, se obține un *șir de muchii*. Dacă într-un șir de muchii fiecare muchie apare o singură dată, atunci șirul de muchii este un *drum*. Drumul se numește *închis* atunci cînd punctul inițial coincide cu punctul final. Un drum închis în care nici un nod cu excepția nodului final nu apare de două ori se numește *cerc* (topologic). Un graf conex nevid se numește *arbore* dacă nu

conține drumuri închise (fig. 36.1.5). Arborii se folosesc, de exemplu, în formulele de structură din chimie pentru lanțurile de hidrocarburi. În sfîrșit, un graf se numește *planar* dacă poate fi reprezentat într-un plan, sau ceea ce este topologic echivalent, dacă se poate aplica pe suprafața unei sfere, fără ca muchiile să se intersecteze. De exemplu arborii sînt grafuri planare.

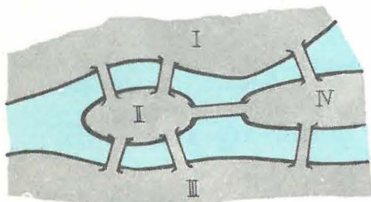


36.1.5. Arbori

Structuri combinatoriale. Teoria grafurilor se ocupă cu probleme combinatoriale. Obiectul *teoriei grafurilor* este nu numai determinarea de numere, ca în teoria combinatorială elementară, ci determinarea *structurii combinatoriale*.

Problema studiului structurii combinatoriale a fost ridicată pentru prima dată de Leonhard EULER în 1736. El a început cu *problema celor șapte poduri din Königsberg*. Enunțul acestei probleme este următorul: există un itinerariu prin care fiecare din cele șapte poduri este traversat o singură dată (fig. 36.1.6)? Se poate observa imediat că itinerariul nu poate să înceapă și nici să se termine în cel puțin două dintre cele patru regiuni I pînă la IV. În aceste regiuni se intră și se iese. Totuși, deoarece în fiecare regiune se poate ajunge printr-un număr impar de poduri, un astfel de itinerariu nu este posibil. Euler și-a pus o problemă mai generală: în ce condiții un graf conex dat poate fi parcurs pe un drum închis astfel încît fiecare muchie să se acopere exact o dată. Un *drum eulerian* de acest tip există dacă și numai dacă în fiecare nod se întîlnesc un număr par de muchii.

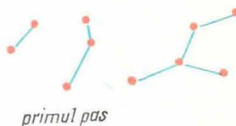
Grafurile întîlnite în practică au adesea o structură foarte generală și problema principală este aceea a unui algoritm pentru soluția efectivă a unei probleme de optimizare legată de graf. Un exemplu de astfel de probleme este *problema celei mai ieftine rețele telefonice*.



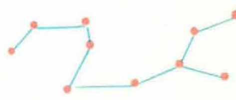
36.1.6. Cele șapte poduri din Königsberg



distribuția nodurilor (graf nul)



primul pas



al doilea pas

36.1.7. Arbori minimali

Exemplu. Trebuie legate n posturi printr-o rețea telefonică cu cost minim, astfel încît punctele de racord să fie chiar posturile. Costurile legăturilor dintre două posturi sînt cunoscute.

Rețeaua cerută este evident un *arbore*. Pentru a o construi se folosește un algoritm simplu. *Primul pas*: se unește fiecare *nod* cu nodul pentru care costul legăturii este minim. Se obține astfel un *sistem de arbori*.

Al doilea pas: se asimilează fiecare arbore cu un punct și se repetă procedeul. Dacă se continuă în acest mod, se întrerupe procesul atunci cînd rămîne un singur arbore. Acesta este *arborele minimal* cerut. În fig. 36.1.7 se ilustrează acest proces pentru 10 posturi, considerîndu-se că distanța dintre două puncte este proporțională cu costurile.

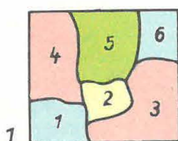
Dacă se rezolvă problema încercînd toate posibilitățile, atunci se încearcă n^{n-2} posibilități pentru n posturi, adică 10^8 posibilități pentru $n = 10$ posturi.

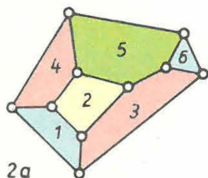
36.2. Problema celor patru culori

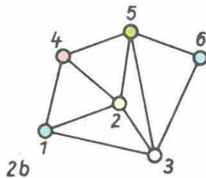
Cartografii știu că orice hartă politică poate fi desenată cu patru culori astfel încît două țări cu frontieră comună (care nu se reduce la un punct) să fie colorate diferit. Problema dacă patru culori sînt întotdeauna suficiente este de mare importanță pentru

dezvoltarea ulterioară a teoriei grafurilor și este încă nerezolvată. Este însă destul de ușor de demonstrat că cinci culori sînt întotdeauna suficiente pentru a colora o hartă.

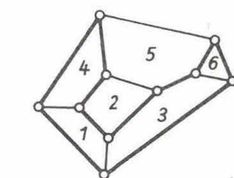
Pe o hartă (1) (fig. 36.2.1) țările și frontierele lor pot fi întotdeauna reprezentate printr-un graf, în două moduri diferite: sau punctele de întîlnire a trei sau mai multe frontiere sînt noduri și frontierele sînt muchii (2*a*), sau țările sînt noduri și muchiile indică țări vecine (2*b*). În primul caz se colorează ariile, în cazul al doilea nodurile. O hartă desenată pe suprafața unei sfere se numește normală dacă exact trei frontiere se întîlnesc în fiecare nod și fiecare țară este mărginită printr-un cerc (topologic). Problema celor patru culori poate fi redusă la problema hărților *normale*. Dacă există un cerc topologic sau *circuit hamiltonian* (fig. 36.2.2) conținînd toate nodurile grafului ale unei hărți normale, atunci țările hărții pot fi colorate cu patru culori, deoarece sînt necesare două culori pentru exteriorul circuitului hamiltonian. Mult timp s-a crezut că un cerc hamiltonian există întotdeauna. Un contraexemplu a fost găsit abia în 1965, astfel încît acum se știe că această metodă nu poate conduce la o soluție a problemei celor patru culori.







36.2.1. Hartă (1) cu graful respectiv (2*a*, 2*b*)



36.2.2. Graful unei hărți normale cu circuit hamiltonian (vezi fig. 36.2.1, 2*a*)

Graful unei hărți normale este un *graf cubic*, adică, în fiecare nod se întîlnesc exact trei arce neorientate. Mai mult, acest graf nu conține muchii prin a căror înlăturare graful să se împartă în două părți separate, adică graful nu are *poduri*. Pentru a demonstra problema celor patru culori ar fi suficient de arătat că orice graf cubic poate fi descris prin mai multe cercuri care au toate un număr par de muchii. Fără a presupune planaritatea PETERSEN a putut demonstra că orice graf cubic fără poduri poate fi descris prin mai multe cercuri astfel încît fiecare nod să aparțină exact unui cerc. Desigur, unele dintre aceste cercuri pot avea un număr impar de muchii.

Cercetări ulterioare l-au condus pe TUTTE în 1956 la teorema care afirmă că un graf planar, care nu poate fi divizat în părți separate prin înlăturarea a trei noduri oarecare, admite un circuit hamiltonian. Alte lucrări privind problema celor patru culori folosesc metode topologice sau combinatoriale. *Argumentele topologice* se referă la proprietăți speciale ale grafurilor planare folosind proprietăți ale suprafeței unei sfere; *argumentele combinatoriale* încearcă să enunțe ipotezele topologice și să caracterizeze grafurile planare prin mijloace pur combinatoriale.

36.3. Tehnica rețelelor

Tehnica rețelelor se folosește pentru reprezentarea, analiza și optimizarea desfășurării proceselor complicate, de exemplu ridicarea clădirilor mari, care se compun din mai multe procese parțiale. Scopurile tehnicii rețelelor sînt: planificarea timpului final și a timpilor intermediari, căutarea timpilor de desfășurare a proceselor intermediare, determinarea succesiunii celei mai avantajoase a proceselor parțiale cu scopul scurtării timpului total, a scăderii costurilor și pentru îmbunătățirea utilizării capacităților, dezvoltarea unui sistem de control și limitarea responsabilităților.

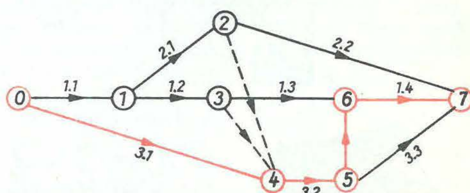
Activități și evenimente. O *rețea* este un graf orientat ale cărui elemente sînt exprimate ca activități și evenimente. *Activitățile* sînt procese parțiale sau părți ale unei lucrări; lor le corespund *durate*. Un *eveniment* constă în efectuarea unui singur pas al procesului sau apariția

unui singur ciclu; acestora le corespund *puncte sau momente de timpi*. *Activitățile fictive* sînt cele de durată nulă care exprimă numai dependența dintre activitățile reale. Dacă activitățile și evenimentele sînt reprezentate prin muchiile și nodurile unei rețele, atunci rețeaua este o rețea de evenimente. Invers, dacă activitățile sînt reprezentate prin noduri și interdependența dintre acestea prin muchii, atunci rețeaua este o rețea de activități. Aici muchiile corespund evenimentelor, pe cînd dependența dintre activități constă de regulă în aceea că o activitate trebuie terminată înainte de a începe alta. Următorul exemplu se referă la o rețea de evenimente.

Exemplu. Pentru construirea unui magazin (atelier de mașini) cu căi de acces și curte trebuie efectuate următoarele lucrări, u fiind unitatea de timp:

1.1. Turnarea fundației 5 u
1.2. Lucrări de zidărie 11 u
1.3. Construcția acoperișului 4 u
1.4. Lucrări interioare 10 u
2.1 Construcția căilor de acces 9 u
2.2. Turnarea planșeelor 10 u
3.1. Timpul de livrare a mașinilor 24 u
3.2. Montarea mașinilor 3 u
3.3. Alte echipări 8 u

Activitățile din primul grup (1.1 — 1.4) trebuie efectuate succesiv. Construcția căilor de acces (2.1) trebuie începută numai după ce s-a turnat fundația (1.1) și trebuie terminată înainte de montarea mașinilor (3.2) (activități fictive (2) — (4)) pe cînd lucrările interioare (1.4) urmează montării mașinilor (activități fictive (5) — (6)) (fig. 36.3.1). Activitatea fictivă (3) — (4) este necesară deoarece montarea mașinilor (3.2) nu poate începe înainte de lucrările de zidărie (1.2).



36.3.1. Rețeaua exemplului; drumul critic este însemnat cu roșu

Drumul critic. Într-o rețea prezintă interes durata întregului proces, adică timpul de la primul eveniment și pînă la ultimul eveniment. Aceasta se poate determina deoarece există cel puțin un drum de-a lungul muchiilor pentru care suma duratelor activităților este maximă. Un astfel de drum se numește *drum critic* și activitățile aflate pe acesta se numesc *activități critice*. În fig. 36.3.1 drumul critic are 37 unități de timp. Orice prelungire a unei activități critice duce la o prelungire a duratei totale, ceea ce nu este cazul dacă o activitate necritică este prelungită între anumite limite.

Timpi de activitate. Pentru orice activitate în rețea există un prim timp (maxim) și un ultim timp de începere și un prim timp (maxim) și un ultim timp (minim) de terminare. Diferența dintre timpul de începere și de terminare reprezintă *durata activității*. Pentru activitățile critice primul timp și ultimul timp coincid.

t_n	0	1	2	3	4	5	6	7	evenimente
0		5			24				0
5			9	11					1
14					0			10	2
16					0		4		3
24						3			4
27							0	8	5
27								10	6
37									7
$T_n=$	0	12	24	23	24	27	27	37	
$T_n-t_n=$	0	7	10	7	0	0	0	0	

36.3.2. Matricea rețelei

Matricea rețelei. Pentru determinarea drumului critic al unei rețele și obținerea timpilor activităților se folosește matricea rețelei (fig. 36.3.2). Liniile și coloanele ei corespund evenimentelor rețelei și elementele ei dau numărul de unități de timp pentru durata activităților care unesc evenimentele (vezi tabloul din exemplu). Pentru a ajunge la un algoritm de calcul trebuie găsite evenimentele succesive și numerele succesive. Dacă t_n este primul timp și T_n ultimul timp pentru evenimentul n, atunci:

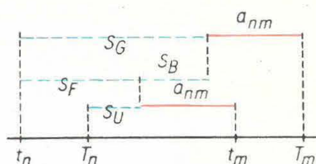
$t_0 = T_0$, unde 0 este primul eveniment;
$t_e = T_e$, unde e este ultimul eveniment;

$$\left.\begin{aligned} t_n &= \max\,(t_v + a_{vn}),\ v < n \\ T_n &= \min\,(T_v - a_{nv}),\ v > n \end{aligned}\right\}$$

pentru toate celelalte evenimente, unde a_{vn} este durata activității care unește evenimentele v și n.

Pentru a calcula primul eveniment t_n se lucrează cu coloanele matricei rețelei, începînd cu primul eveniment.

De ex. pentru a calcula t_4 se formează sumele $t_0 + a_{04} = 0 + 24$, $t_2 + a_{24} = 14 + 0$, $t_3 + a_{34} = 16 + 0$ și se ia cel mai mare $t_4 = 24$. Pentru a calcula ultimul timp T_n, se începe cu ultimul eveniment și se lucrează cu liniile matricei. De ex. $T_5 = 27$ este minimul diferențelor $T_7 - a_{57} = 37 - 8$ și $T_6 - a_{56} = 27 - 0$. Pentru a obține drumul critic se marchează pe rețea acele evenimente pentru care $t_n = T_n$ în matricea rețelei, adică $n = 0,4, 5, 6$ și 7.



36.3.3. Timpi tampon

Timpi tampon. Într-o rețea este posibilă, datorită timpilor tampon, extinderea sau mutarea între anumite limite a activităților necritice fără ca timpul total al procesului să se modifice (fig. 36.3.3). Durata activității $(n) \to (m)$ se notează cu a_{nm}. Folosind *timpul tampon total* $S_G = T_m - t_n - a_{nm}$, timpii tampon ai activităților precedente și următoare se reduc. Dacă activitatea este critică, atunci $t_n = T_n$, $t_m = T_m$ și $T_m - t_n = a_{nm}$, astfel $S_G = 0$. Folosirea *timpului tampon independent* $S_U = \max\{0, t_m - T_n - a_{nm}\}$ nu are nici un efect asupra timpilor tampon ai activităților precedente și următoare.

Folosirea timpului *tampon liber* $S_F = t_m - t_n - a_{nm}$ are efect numai asupra timpilor tampon ai activităților precedente, pe cînd folosirea timpului tampon condiționat $S_B = T_m - t_m$ are efect numai asupra timpilor tampon ai activităților următoare. Din $S_G \geqslant S_F \geqslant S_U \geqslant 0$ și $S_G = S_F + S_B$ rezultă că toți timpii tampon ai activităților critice sînt nuli.

De exemplu, activitatea 2.2 care duce de la (2) la (7) are timpul tampon $S_G = 13$, $S_U = 3$, $S_F = 13$, $S_B = 0$. Întrucît $S_U = 3$, activitatea 2.2 se poate prelungi cu trei unități de timp fără amînarea executării construcției. Totuși prelungirea cu 13 unități de timp ar însemna că drumul $(0) \to (1) \to (2) \to (7)$ ar fi critic și la fel activitățile 1.1 și 2.1 ar trebui să înceapă la primul timp și nu ar putea fi prelungite, ceea ce ar fi altfel posibil deoarece 1.1 și 2.1 au timpii tampon condiționați 7, respectiv 10.

Un calcul manual al matricei rețelei este posibil numai pentru o rețea cu un număr mic de evenimente și activități. Pentru rețelele proceselor ce apar în practică de regulă trebuie utilzate calculatoare electronice.

Metode speciale în rețele. Tehnica rețelelor se ocupă în special de găsirea drumurilor critice și a timpilor tampon pentru rețele de evenimente. S-au dezvoltat următoarele metode:

Metoda drumului critic (MDC) folosește atît rețele de evenimente cît și rețele de activități și evaluează numai activitățile cu ajutorul unei durate (obținute determinist). Scopul ei este obținerea drumurilor critice și calcularea timpilor tampon cu ajutorul unui program de calcul derivat din matricea rețelei.

Prin *metoda metro-potențială* (MPM) atît activitățile (noduri) cît și dependențele (muchii) sînt evaluate într-o rețea de activități. Pentru activități se evaluează o durată pe cînd evaluarea dependenței constă în stabilirea unei *distanțe de cuplare*, de ex. intervalul de timp între timpii de începere a activităților unite prin muchie. Distanțele de cuplare pot lua valori negative. În raport cu relația dintre distanța de cuplare și durata activității se poate face distincție între execuția amînată (distanța de cuplare mai mare decît durata activității), execuția normală (distanța de cuplare egală cu durata activității) și execuția devansată (distanța de cuplare mai scurtă decît durata activității).

Dacă în întreaga rețea are loc execuția normală, rețeaua este o rețea MDC.

Metoda PERT folosește de cele mai multe ori o rețea de evenimente, dar fixează duratele activităților nu în mod determinist ci pe bază aleatoare. Pentru durata d a unei activități există o estimație optimistă d_o, o estimație pesimistă d_p și estimația cea mai probabilă d_m. Durata activității este dată de $d = (d_o + d_p + 4d_m)/6$. Separat de drumul critic se calculează valorile medii și dispersiile timpilor.

Metodele date pînă în prezent presupun conexiunea și dependența rețelei care s-a obținut prin abstractizarea procesului studiat, adică aceste metode sînt valabile pentru o structură topologică a rețelei, dinainte stabilită. Într-o *rețea de combinație* (RC) structura topologică nu se mai dă și determinarea unei structuri optime este însăși scopul metodei. Se presupune acum că în mulțimea activităților există o relație astfel încît $A \to B$ înseamnă că B trebuie efectuat după A; $C \leftrightarrow D$ înseamnă că C și D trebuie efectuate simultan. Aceste

condiții trebuie formulate pentru toate activitățile care apar în rețea și trebuie găsită o structură a rețelei pentru care drumul critic să fie minim.

Metodele de mai sus sînt legate de *calcularea resurselor*. Aceasta implică o înțelegere și considerare a resurselor în legătură cu care decurg activitățile. Ca resurse se consideră mașini, muncă, materiale și de asemenea prețuri și costuri ale activităților. Se deosebesc două grupuri de probleme: 1. În distribuirea optimă a resurselor limitate, dîndu-se timpul pentru întregul proces, se încearcă realizarea celei mai regulate utilizări a resurselor prin folosirea *timpilor tampon* și împărțirea activităților în secțiuni. 2. În repartizarea optimă a resurselor se dau limitele superioare pentru resursele disponibile și se încearcă minimizarea duratei procesului ținîndu-se seama de resursele limitate. Încă nu se cunosc soluții complete pentru problema resurselor dar s-au aplicat metode aproximative destul de eficiente.

În sfîrșit se fac încercări pentru elaborarea unor algoritmi de optimizare cu criterii complicate de eficiență.

37. Teoria potențialului și ecuații cu derivate parțiale

37.1. Ecuații cu derivate parțiale

Ordin, liniaritate, omogenitate. Ecuațiile diferențiale ordinare conțin numai funcții de o variabilă independentă. În contrast cu ele, ecuațiile cu derivate parțiale au funcția necunoscută $u=u(x_1, x_2, ..., x_n)$ care depinde de mai multe variabile independente $x_1, x_2, ..., x_n$ și conține derivate parțiale $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ etc., pentru $i, j = 1, 2, ..., n$. Derivata de ordinul cel mai mare determină *ordinul* ecuației. Ecuația diferențială se numește *liniară* dacă funcția necunoscută și derivatele sale apar în mod liniar și nu sînt înmulțite între ele.

O ecuație cu derivate parțiale liniară se numește *omogenă* dacă nu conține termen liber, și *neomogenă* în caz contrar. Atît pentru ecuațiile cu derivate parțiale liniare cît și pentru cele ordinare este valabil *principiul superpoziției*: dacă u_1 și u_2 sînt soluții, atunci orice combinație liniară $u = C_1u_1 + C_2u_2$, unde C_1 și C_2 sînt constante, este o soluție a ecuației.

Ecuații cu derivate parțiale de ordinul întîi. Integrarea ecuației cu derivate parțiale de ordinul întîi poate fi întotdeauna redusă la integrarea unui sistem de ecuații diferențiale ordinare, numit *sistem caracteristic*. În cazul ecuației diferențiale $F(x_0, ..., x_n, u, p_0, ..., p_n) = 0$, unde $p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, sistemul are forma

$$x_i' = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \qquad p_i' = -\frac{\partial F}{\partial x_i} - p_i \frac{\partial F}{\partial u}, \qquad u' = \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_j} p_j, \tag{1}$$

unde x_i și p_i sînt funcții de noul parametru t iar prin u' este reprezentată derivata în raport cu t.

Dacă ecuația diferențială nu depinde explicit de u, ea poate fi pusă sub forma $\frac{\partial u}{\partial t} + H(t, x_1, ..., x_n, p_1, ..., p_n) = 0$, unde $x_0 = t$, $p_0 = \frac{\partial u}{\partial t}$, iar variabilele pot fi renumerotate. O ecuație de această formă se numește *ecuație diferențială Hamilton-Jacobi*, funcția H este numită *hamiltonian*. Sistemul caracteristic are forma canonică $\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$.

Mișcările punctelor materiale din diferite sisteme mecanice sînt descrise de astfel de ecuații. În acest caz x_i și p_i sînt coordonate generalizate de poziție și impuls, iar hamiltonianul H este egal cu energia totală (vezi cap. 38).

Ecuații cu derivate parțiale de ordin superior. Nu există o teorie pentru integrarea ecuațiilor cu derivate parțiale de ordin superior. Cu toate că nu se poate afla integrala, putem de foarte multe ori afla soluții particulare de formă a unui produs sau a unei sume de funcții, fiecare din ele fiind dependentă numai de o parte din variabile. Această metodă este numită *separarea variabilelor*. Ecuația diferențială dată se poate despărți într-un număr de ecuații diferențiale mai simple.

Proprietățile unei *ecuații liniare cu derivate parțiale de ordinul doi* sînt tratate de teoria potențialului.

37.2. Teoria potențialului

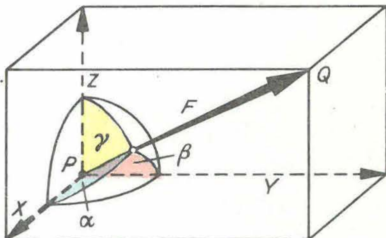
La origine teoria potențialului a apărut ca urmare a unor probleme de mecanică, dar cu timpul a devenit o ramură independentă a matematicii. Rezultatele sale sînt aplicate în numeroase discipline ale fizicii, în particular în probleme de mecanică, electrostatică, magnetism, electrodinamică, hidrodinamică și termodinamică. Teoria potențialului a contribuit la dezvoltarea teoriei ecuațiilor diferențiale ordinare și a ecuațiilor cu derivate parțiale, analizei complexe și geometriei diferențiale.

Potențialul newtonian. Conceptul de potențial în cel mai simplu mod a fost introdus de Newton pentru explicarea atracției corpurilor materiale.

Legea lui Newton a gravitației	$F = k \cdot (m\mu)/r^2$

Potențialul unui punct. Legea gravitației a lui Newton arată că două corpuri într-un spațiu tridimensional exercită o atracție unul asupra celuilalt direct proporțională cu masele lor și invers proporțională cu pătratul distanței dintre ele. Dacă corpurile sînt idealizate astfel încît toată masa lor este concentrată într-un punct, punct-masă și notăm cu m masa unui corp în punctul P și cu μ masa corpului din punctul Q, atunci obținem formula de mai sus. Această formulă se transformă în legea lui Coulomb, dacă în loc de mase folosim sarcini electrice. În acest caz r este distanța dintre puncte, iar k este un factor de proporționalitate, de exemplu constanta gravitațională. Pentru a simplifica calculele vom presupune $km = 1$. Dacă presupunem că masa din P este atrasă de cea din Q, atunci forța F este dirijată din P în Q. Dacă această direcție face cu axele sistemului de coordonate carteziene unghiurile α, β, γ respectiv, iar punctele P și Q au coordonate (x, y, z) și (ξ, η, ζ), atunci datorită teoremelor geometriei analitice (fig. 37.2.1) $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$, $\cos\alpha = (\xi - x)/r$, $\cos\beta = (\eta - y)/r$, $\cos\gamma = (\zeta - z)/r$ și componentele X, Y, Z ale forței F sînt date de

$$X = F\cos\alpha = \mu(\xi - x)/r^3, \quad Y = F\cos\beta = \mu(\eta - y)/r^3,$$
$$Z = F\cos\gamma = \mu(\zeta - z)/r^3.$$



37.2.1. Descompunerea unei forțe în componente

Lagrange a demonstrat în 1773 că aceste trei componente sînt derivate parțiale ale funcției $U(x, y, z)$ pe care Gauss a numit-o în 1840 *potențialul masei* μ în Q pentru punctul $P(x, y, z)$.

Dacă $U = \mu/r = \mu[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]^{-1/2}$ și dacă Q este luat drept fix iar P variabil, atunci derivata parțială a lui U în raport cu x este

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -(\mu/2)\,[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]^{-3/2} \cdot 2(x-\xi) = \mu \cdot (\xi - x)/r^3 = X.$$

În mod similar derivatele parțiale ale lui U în raport cu y și z sînt $\dfrac{\partial U}{\partial y} = Y$, $\dfrac{\partial U}{\partial z} = Z$.

Potențial
$U = U(x, y, z) = \mu/\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$

Potențialul U este definit pe spațiul tridimensional cu excepția lui Q; dacă $P = Q$, numitorul se anulează, iar expresia μ/r nu este definită pentru $r = 0$.

Valoarea $-U(x, y, z)$ este egală cu energia potențială a sistemului compus din două puncte de masă.

Potențialul unui număr finit de puncte. Dacă masa lui P este atrasă de un număr finit de puncte Q_s ($s = 1, 2, \ldots, n$) cu masa μ_s, atunci componentele X, Y, Z ale forței totale acționînd în P sînt sumele componentelor X_s, Y_s, Z_s ale forțelor individuale.

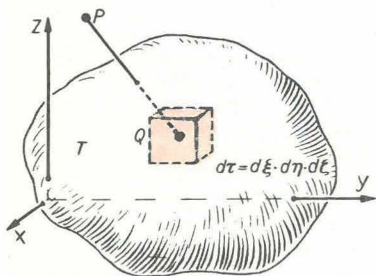
$$X_s = \mu_s \cdot (\xi - x)/r^3, \quad Y_s = \mu_s \cdot (\eta - y)/r^3, \quad Z_s = \mu_s \cdot (\zeta - z)/r^3$$

$$X = \sum_{s=1}^{n} X_s, \quad Y = \sum_{s=1}^{n} Y_s, \quad Z = \sum_{s=1}^{n} Z_s.$$

Potențial	$U = \sum_{s=1}^{n} \mu_s/r_s$

În mod similar potențialul U este suma potențialelor individuale, atîta timp cît P nu coincide cu nici unul din punctele Q_s.

Potențialul unei mase distribuite continuu. Pentru generalizare este normal să abandonăm abstractizarea punctului cu masă și să investigăm atracția pe care masa *distribuită continuu* o exercită asupra unui punct P exterior ei. Fie o masă care acoperă regiunea T, împărțită într-un număr infinit de elemente de volum $d\tau = d\xi\, d\eta\, d\zeta$ cu masa $d\mu$ și densitatea $\rho = \dfrac{d\mu}{d\tau}$. Elementul de volum din $Q(\xi, \eta, \zeta)$ exercită asupra celui din $P(x, y, z)$ o forță de atracție de componente dX, dY, dZ. Componentele forței de atracție a întregii mase se obțin prin însumarea după toate elementele infinite de volum, adică prin integrarea pe T (fig. 37.2.2).



37.2.2. Deducerea potențialului newtonian

$$dX = [(\xi - x)/r^3]\, d\mu, \qquad dY = [(\eta - y)/r^3]\, d\mu,$$
$$dZ = [(\zeta - z)/r^3]\, d\mu,$$

$$X = \iiint_T [(\xi - x)/r^3]\, d\mu, \qquad Y = \iiint_T [(\eta - y)/r^3]\, d\mu,$$

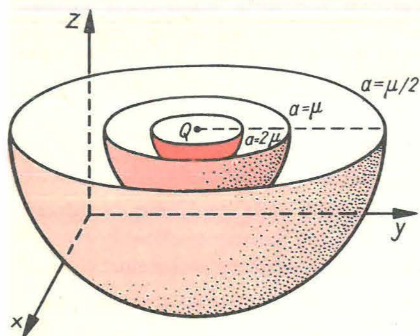
$$Z = \iiint_T [(\zeta - z)/r^3]\, d\mu.$$

Aceste componente sînt derivate parțiale ale lui U; acest fapt se poate arăta derivînd parțial sub semnul integralei.

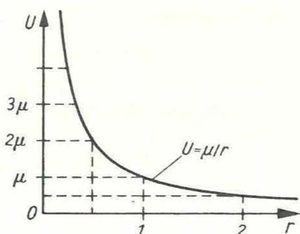
Potențialul newtonian	$U = \iiint_T \dfrac{d\mu}{r} = \iiint_T \dfrac{\rho}{r}\, d\tau$

Suprafețe echipotențiale. Interpretarea geometrică a potențialului se face pe baza *suprafețelor echipotențiale*. Potențialul se poate defini pentru fiecare punct P din spațiul tridimensional care nu coincide cu punctul Q sau nu se află în interiorul masei continue care atrage. Dacă toate punctele P au același potențial, obținem o suprafață echipotențială $U(x, y, z) = a$. Variind valoarea a, ecuația dată reprezintă o familie de suprafețe care depinde de un parametru.

În cazul potențialului $U = \mu/r$ familia este dată de $\mu/r = a$. Acestea sînt sfere concentrice cu centrul în Q, ale căror raze descresc cînd a crește. Figurile 37.2.3 și 37.2.4 reprezintă familia $\mu/r = a$ și ne indică cum potențialul U depinde de distanța r.



37.2.3. Suprafețe echipotențiale definite prin $a = \mu/r$



37.2.4. Variația potențialului U în raport cu distanța r

Ecuații diferențiale pentru potențiale. Dacă derivăm de două ori pe

$$1/r = [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]^{-1/2}$$

în raport cu x, obținem

$$\frac{\partial}{\partial x}(1/r) = -[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]^{-3/2}(x-\xi),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(1/r) = 3[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]^{-5/2}(x-\xi)^2 -$$

$$-[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]^{-3/2} = 3(x-\xi)2/r^5 - 1/r^3$$

Similar procedăm în cazul derivatelor parțiale în raport cu y și z:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(1/r) = 3(y-\eta)^2/r^5 - 1/r^3, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2}(1/r) = 3(z-\zeta)^2/r^5 - 1/r^3.$$

Adunînd aceste derivate parțiale, obținem

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(1/r) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(1/r) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(1/r) = 0.$$

Funcția $u = 1/r$ satisface ecuația diferențială $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ care a fost dedusă de Laplace în 1782 și care îi poartă numele.

Această ecuație cu derivate parțiale omogene de ordinul doi se scrie pe scurt $\Delta u = 0$. Deoarece ecuația diferențială este omogenă și liniară, ea rămîne valabilă și dacă o înmulțim cu o constantă μ. Din $\Delta(1/r) = 0$ obținem $\Delta(\mu/r) = 0$. Potențialul $U = \mu/r$ este astfel o soluție a ecuației Laplace. Deoarece ecuația $\Delta(\mu_s/r_s) = 0$ este satisfăcută pentru orice termen al sumei $\sum_{s=1}^{n} \mu_s/r_s$, ecuația diferențială este satisfăcută de sumă. În final, prin derivare sub semnul integralei obținem

Operatorul lui Laplace	$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta$

$$\Delta U = \iiint \Delta(1/r)\rho \, d\tau = 0.$$

Toate cele trei potențiale sînt de aceea soluțiile ecuației lui Laplace. Acest lucru este un alt mod interesant de abordare a teoriei potențialului; luăm ca punct de plecare ecuația lui Laplace iar soluțiile reprezintă potențialele.

Dacă P se află în interiorul masei de atracție, obținem o ecuație diferențială neomogenă de forma $\Delta u = -4\pi\rho$, unde ρ este densitatea masei; această ecuație a fost dedusă de POISSON în 1813. Mai mult, *operatorul lui Laplace* apare în multe ecuații cu derivate parțiale ale fizicii teoretice. Vom da în continuare cîteva exemple.

1. *Ecuația oscilațiilor lui Helmholtz*

$$\Delta u + k^2 u = 0.$$

2. *Ecuația de transmitere a căldurii* $\Delta u = \frac{1}{c^2}\frac{\partial u}{\partial t}$, care se aplică și la probleme de difuzie.

3. *Ecuația undei* $\Delta u = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ pentru unde electromagnetice, propagarea sunetelor și oscilațiilor coardei.

3. *Ecuația telegrafului* $\Delta u = a\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b\frac{\partial u}{\partial t} + cu$ pentru transmiterea undelor electromagnetice în cabluri.

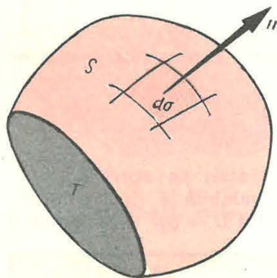
Funcția generală a potențialului. Orice funcție $U(x, y, z)$ care este derivabilă de două ori în raport cu toate cele trei variabile și care satisface ecuația $\Delta U = 0$ într-o regiune T a spațiului este numită *funcție potențial* sau *funcție armonică în această regiune.*

Teoria potențialului este teoria soluțiilor ecuației potențiale $\Delta U = 0$.

Decît a afla toate soluțiile ecuației, este mai interesant de multe ori să cercetăm proprietățile comune ale funcțiilor potențial sau condițiile pe care le satisfac.

Proprietățile funcțiilor potențial. Fie T o regiune deschisă a unui spațiu tridimensional mărginit de o suprafață S și fie $d\tau$ și $d\sigma$ elementul de volum și elementul de suprafață (fig. 37.2.5). În fiecare punct din S vom duce o direcție perpendiculară pe S după normala exterioară **n**. Dacă V este o funcție derivabilă de două ori, definită pe T și S, și $\frac{\partial V}{\partial n}$ este derivata parțială după direcția normală pentru toate punctele din S, atunci, prin teorema integrală a lui Gauss obținem

$$\iint_S \frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma = \iiint_T \Delta V\, d\tau.$$



Dacă V este o funcție potențial U, atunci $\Delta U = 0$ în T și:

Pentru orice funcție potențial U, $\iint_S \frac{\partial U}{\partial n}\, d\sigma = 0$

37.2.5. Element de suprafață și normală

Această lege caracterizează funcțiile potențial; dacă este verificată pe suprafața S' a oricărei regiuni T' din T, atunci U este o funcție potențial. Bazîndu-ne pe altă teoremă integrală, teorema lui Green, pentru orice funcții V și W definite pe T și S derivabile de două ori avem

$$\iint_S \left(W\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial W}{\partial n}\right) d\sigma = \iiint_T (W\Delta V - V\Delta W)\, d\tau.$$

Dacă alegem $W = 1/r$, unde r este distanța din P la un punct fix P_0, atunci $\Delta W = \Delta(1/r) = 0$, exceptînd $P = P_0$. Acest punct este exclus din regiunea de integrare T, deoarece W

are aici o singularitate. Dacă vrem să-l admitem și pe P_0 în T, trebuie să găsim un proces limită care să ne conducă la

$$\iiint_T (1/r)\,\Delta V\,d\tau = -4\pi V(P_0) \quad \text{pentru} \quad P_0 \in T.$$

Dacă considerăm o funcție potențial U pentru V, obținem:

Formula de reprezentare a lui Green pentru funcția potențial generală	$U(P) = \dfrac{1}{4\pi} \iint_S \left(\dfrac{1}{r} \dfrac{\partial U}{\partial n} - U \dfrac{\partial(1/r)}{\partial n} \right) d\sigma$

U este definită complet în fiecare punct P_0 al lui T în cazul în care cunoaștem valorile funcției U și ale derivatei normale $\dfrac{\partial U}{\partial n}$ pe frontiera S.

Dacă luăm o sferă C cu centrul P_0 și raza R drept S, atunci $\dfrac{\partial(1/r)}{\partial n} = \dfrac{\partial(1/r)}{\partial r} = -1/r^2$.

Acum avem $r = R =$ const pe C, și ținînd seama de $\iint_C \dfrac{\partial U}{\partial n}\,d\sigma = 0$, obținem

Teorema de medie a lui **Gauss** pentru funcții potențial	$U(P_0) = 1/(4\pi R^2) \iint_C U\,d\sigma$

Valoarea funcției în centrul sferei este egală cu media valorilor pe care le ia funcția în punctele de pe suprafața sferei. Din această cauză funcția potențial nu poate avea maxim sau minim relativ într-un punct interior al lui T.

Probleme la limită. Formula lui Green conduce la următoarea întrebare: în ce condiții putem determina potențialul U, în interiorul unei regiuni T, avînd date valorile lui U și $\dfrac{\partial U}{\partial n}$ pe frontiera S a lui T? Probleme de acest gen se numesc probleme la limită. Ele apar în multe ramuri ale fizicii, de exemplu în electrostatică, hidrodinamică și în teoria transmiterii căldurii.

U și $\dfrac{\partial U}{\partial n}$ nu pot fi alese arbitrar pe S. Dacă sînt date valorile limită ale lui U, atunci funcția este determinată în mod unic. Diferența $U - \overline{U}$ a două funcții cu aceleași valori limită este egală cu zero pe întreaga frontieră și în interior, pe baza proprietății valorii medii a lui Gauss.

Problema determinării potențialului în interiorul domeniului în cazul unor valori limită date ale lui U se numește *prima problemă la limită a teoriei potențialului* sau *problema lui Dirichlet*, după numele matematicianului care a dedus-o.

A *doua problemă la limită* sau *problema lui Neumann* constă în găsirea potențialului care are derivata $\dfrac{\partial U}{\partial n}$ dată în toate punctele de pe frontieră. Valorile la limită trebuie să satisfacă condiția $\iint_S \dfrac{\partial U}{\partial n}\,d\sigma = 0$.

A *treia problemă la limită* constă în găsirea soluțiilor ecuației potențialului pentru care combinația liniară $\dfrac{\partial U}{\partial n} + hU$, unde h este o constantă pozitivă, ia în punctele de pe frontieră valori date.

Soluțiile simple ale ecuației potențialului. Funcțiile potențial U în spațiul tridimensional sînt funcții de trei variabile independente și au forma $U = U(x, y, z)$ în coordonate carte-

ziene, $U = U(\rho, \varphi, z)$ în coordonate cilindrice și $U = U(r, \theta, \varphi)$ în coordonate sferice. De multe ori ne interesează soluțiile pentru care U poate fi scrisă ca un produs de trei funcții de o variabilă, $U(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$ sau $U(\rho, \varphi, z) = P(\rho), \Phi(\varphi), Z(z)$ sau $U(r, \theta, \varphi) = R(r)\,\theta(\theta)\,\Phi(\varphi)$. În acest caz obținem din ecuația diferențială $U = 0$ trei ecuații diferențiale ordinare, care pot fi rezolvate direct. Acest procedeu se numește separarea variabilelor. De exemplu dacă $U(x, y, z) = X(x)\,Y(y)\,Z(z)$, atunci din ecuația $\Delta U = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$, rezultă următoarele trei ecuații diferențiale:

$$\frac{1}{X} \cdot \frac{d^2X}{dx^2} = k^2, \quad \frac{1}{Y} \cdot \frac{d^2Y}{dy^2} = l^2, \quad \frac{1}{Z} \cdot \frac{d^2Z}{dz^2} = -(k^2 + l^2)$$

și astfel soluția va fi $U_{klm}(x, y, z) = e^{kx}e^{ly}e^{mz}$; $m^2 = -(k^2 + l^2)$; k, l, m sînt numere complexe.

Transformări. Anumite proiecții ale spațiului tridimensional mențin neschimbată funcția potențial. Acestea se numesc *transformări Thomson* și sînt inversiuni față de sfere. De exemplu $U(r, \theta, \varphi)$ inversată în raport cu sfera unitate $|r| = 1$ devine $(1/r)\ U[(1/r), \theta, \varphi]$, care este de asemenea o funcție potențial. Din potențialul newtonian $U = 1/r$ rezultă potențialul constant $U = 1$ și invers.

Potențiale în plan. Potențialele bidimensionale sînt soluțiile ecuației diferențiale $\Delta U = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$. Ele apar deseori în problemele de fizică cînd soluțiile nu depind de a treia coordonată; de exemplu forța de atracție a unei vergele uniforme foarte lungi în direcția axei Oz este aceeași în două puncte $P_1(x, y, z_1)$ și $P_2(x, y, z_2)$ atîta timp cît coordonatele z_1 și z_2 sînt mici în comparație cu lungimea $2L$. Pentru o soluție aproximativă presupunem că U nu depinde de z, $U = U(x, y)$ (fig. 37.2.6).

Soluțiile unei ecuații de potențial bidimensional sînt strîns legate de analiza complexă; o funcție $w = u + iv$ de o variabilă complexă $z = x + iy$ este analitică dacă și numai dacă partea reală $u(x, y)$ și partea imaginară $v(x, y)$ satisfac *ecuațiile diferențiale Cauchy-Riemann*

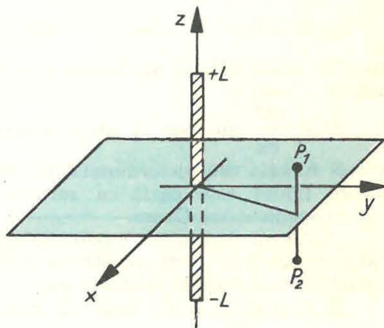
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Atunci avem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \text{ și } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Același lucru este adevărat și pentru v.

Părțile reală și imaginară ale oricărei funcții analitice sînt funcții potențial. Ele se numesc conjugate.



37.2.6. Potențialul unei bare de lungime $2L$

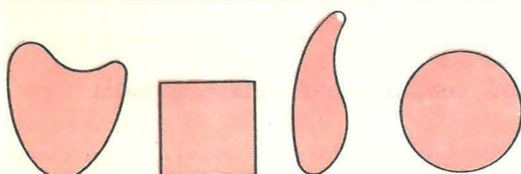
Exemplu. Din $w = \ln z = \ln (r\,e^{i\varphi}) = \ln r + i\varphi$ obținem două potențiale conjugate în plan. Acestea sînt $u = (r, \varphi) = \ln r$ și $v(r, \varphi) = \varphi$ sau în coordonate carteziene $U(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, $V(x, y) = \operatorname{arctg}(y/x)$.

Potențialul $U = \ln r$, *potențialul logaritmic* joacă același rol în plan ca și potențialul newtonian $U = 1/r$ în spațiu. Este potențialul unui cîmp de forță al unui punct de atracție, însă forța de atracție este proporțională cu $1/r$ în loc de $1/r^2$.

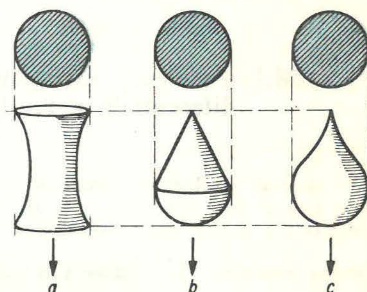
38. Calculul variațional

Metodele calculului variațional sînt folosite la rezolvarea multor probleme ale geometriei, fizicii teoretice și ale tehnicii. Întrebări care în cursul dezvoltării au condus la probleme ale calculului variațional au apărut în antichitate, de exemplu care din suprafețele cu același perimetru are cea mai mare arie. ZENODOROS (180 î.e.n) cunoștea problema izoperimetrică. În fața aceleiași probleme s-a aflat țăranul Pahom din povestirea lui Tolstoi, care trebuia să găsească răspunsul optim la oferta pe care i-a făcut-o căpitanul bașchir de a-l împroprietări cu atîta pămînt cît poate să înconjoare el într-o zi cu piciorul.

Problema izoperimetrică. Dintre toate figurile plane cu același perimetru cercul are cea mai mare arie (fig. *38.1.1*) **iar dintre toate corpurile cu aceeași arie a suprafeței sfera are cel mai mare volum.**



38.1.1. Dintre toate figurile cu același perimetru cercul are aria maximă



38.1.2. Problema lui Newton: corpuri de rotație cu aceeași secțiune, generate de curbe de lungimi egale

Newton s-a lovit de o problemă dificilă. Odată cu dezvoltarea cunoștiințelor naturii și a celor matematice în sec 17 matematicienii și fizicienii au întîlnit probleme asemănătoare dar mai profunde și mai grele. Isaac NEWTON (1643—1727) a calculat în lucrarea sa „Principiile matematice ale filosofiei naturale" (1687) rezistența pe care o întîmpină corpuri ca cilindrul sau sfera la căderea într-un mediu fluid. El a căutat acele corpuri de rotație care în cădere (la o aceeași viteză în direcția de mișcare) întîmpină cea mai mică rezistență, deci în aceleași condiții în cazul corpurilor cu aceeași lungime și aceeași secțiune axială este căutată curba care mărginește secțiunea longitudinală a corpului. Se poate afirma cu siguranță că hiperboloidul de rotație (a) este mai necorespunzător decît emisfera care se termină cu un con (b) (fig. 35.1.2) Dar Newton și cei din generația sa nu puteau da ca soluție corpul aerodinamic (c).

Problema brahistocronei. Mult mai celebră și cu consecințe mai bogate a fost problema pusă de BERNOULLI în 1696—*problema brahistocronei*. În grecește *brachistos* înseamnă cel mai scurt, *cronos* — timp. Fiind date două puncte P_1 și P_2 care se află la înălțimi diferite (dar nu unul sub altul), să se afle dintre toate curbele de legătură între cele două puncte, curba pe care o parcurge un punct material sub acțiunea gravitației, neținînd seama de frecare, în timpul cel mai scurt. Această problemă a preocupat în acel timp pe cei mai buni matematicieni din Europa: I. NEWTON, Gotfried Wilhelm LEIBNIZ (1646—1716), Jakob BERNOULLI (1654—1705), Guillaume-Francois Antoine L'HOSPITAL (1661—1704), HUDDE, FATIO etc. Începînd de atunci, calculul variațional s-a dezvoltat ca o disciplină matematică specială.

Într-un sistem de coordonate ales convenabil între punctele P_1 și P_2 sînt desenate diferite curbe $y = y(x)$ (fig. 38.1.3). În fiecare punct al acestor curbe drumul s, timpul t și viteza

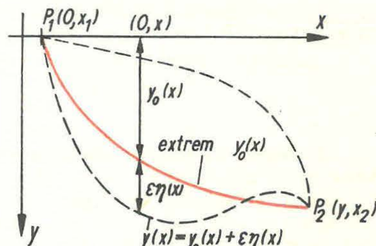
instantanee v sînt legate prin relația $v = \frac{ds}{dt}$. Viteza de cădere are în funcție de accelerația gravitațională valoarea $v = \sqrt{2gy}$ iar elementul de arc ds este o funcție de y' și x, $ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx$. Deci timpul T de parcurgere a drumului de la P_1 la P_2 este integrala între limitele x_1 și x_2, pentru

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\,dx$$

se obține

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{x_2}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\,dx.$$

Această integrală trebuie să aibă pentru *funcția căutată* $y_0 = y_0(x)$ cea mai mică valoare, deci valoarea sa este mai mare pentru toate funcțiile $g(x)$ diferite de y_0. Conform metodelor de care le vom indica mai departe (rezolvarea ecuației diferențiale a lui Euler) obținem ca soluție o cicloidă care are pe α drept parametru și constantele C_1 și C_2:



38.1.3. Problema brahistocronei

$$x_0 = \frac{C_1}{2}(\alpha - \sin\alpha) + C_2, \quad y_0 = \frac{C_1}{2}(1 - \cos\alpha).$$

38.1. Probleme variaționale fără condiții suplimentare. Ecuația diferențială a lui Euler

Studiul problemei brahistocronei a dus la problema următoare: găsirea unei funcții $y(x)$ pentru care integrala unei alte funcții $f(x, y, y')$ să aibă o valoare maximă sau minimă; funcția $f(x, y, y')$ este determinată prin date geometrice, tehnice sau fizice și se numește *funcție argument*. În problema brahistocronei funcția argument este $f(x, y, y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}$.

Dacă marcăm condiția de extrem printr-un semn de exclamare, atunci

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx = \text{valoare extremă!}$$

Integrala se numește funcțională. Funcția argument depinde de variabila independentă x, de funcția pe care o căutăm $y(x)$ și de derivata $y'(x)$ Funcția căutată $y_0(x)$ se numește *extremală.*

Problema de bază a calculului variațional este o problemă de maxim sau minim de dificultate mai mare decît cele din calculul diferențial. Trebuie aflată o funcție pentru care o integrală anumită ia valoarea cea mai mare (maximă) sau cea mai mică (minimă).

În timp ce frații BERNOULLI, NEWTON și alții au rezolvat problema brahistocronei numai cu ajutorul unor artificii de calcul speciale, Leonhard EULER (1707—1783), Joseph Louis LAGRANGE (1736—1813), Karl WEIERSTRASS (1815—1897), M.V. OSTROGRADSKI (1801—1861), Constantin CARATHEODORY (1873—1950) și alții au dezvoltat o teorie care conduce întotdeauna la o soluție.

EULER a reușit să transforme problema variațională într-o problemă de ecuații diferențiale. El a pornit de la faptul că toate celelalte funcții $y(x)$ nu trebuie să difere în punctele P_1 și P_2 de extremala căutată $y_0(x)$. El și-a închipuit funcția $y(x)$ compusă din extremala $y_0(x)$ și funcția $\varepsilon\eta(x)$. Deci funcția $y(x) = y_0(x) + \varepsilon\eta(x)$; pentru valoarea $\varepsilon = 0$ a parametrului $y(x)$ va fi extremala. Totodată trebuie ca $\eta(x)$ să aibă în punctele P_1 și P_2, deci pentru

valorile x_1 și x_2, valoarea zero. Aceste condiții $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ se numesc *condiții la limită*. Pentru $y = y(x)$ integrala J devine o funcție de ε:

$$J(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y_0 + \varepsilon\eta, \; y_0' + \varepsilon\eta')\, \mathrm{d}x.$$

Această funcție are pentru $\varepsilon=0$ un extrem, deci, conform regulilor din calculul diferențial, derivata sa pentru $\varepsilon = 0$ este egală cu zero. Deoarece limitele intervalului sînt fixe, vom deriva expresia sub semnul de integrală:

$$J'(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} [f_y(x, y_0 + \varepsilon\eta, \; y_0' + \varepsilon\eta')\eta + f_{y'}(x, y_0 + \varepsilon\eta, y_0' + \varepsilon\eta')\,\eta']\, \mathrm{d}x.$$

Pentru orice funcție $\eta(x)$ care este continuă și derivabilă în intervalul cuprins între x_1 și x_2 și care este zero în punctele x_1 și x_2 avem

$$J'(0) = \int_{x_1}^{x_2} [f_y(x, y_0, y_0')\,\eta + f_{y'}(x, y_0, y_0')\,\eta']\, \mathrm{d}x = 0.$$

Ultimul termen îl integrăm prin părți și obținem

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(f_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{y'}\right) \eta(x)\, \mathrm{d}x + [f_{y'}\eta(x)]_{x_1}^{x_2} = 0.$$

Termenul al doilea al sumei dispare datorită condițiilor la limită. Relația

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(f_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{y'}\right) \eta(x)\, \mathrm{d}x = 0$$

este îndeplinită pentru toate funcțiile $\eta(x)$ numai în cazul în care paranteza este egală cu zero; $f_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{y'} = 0$ sau altfel scris $\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$. Dacă derivăm după x, atunci obținem cunoscuta ecuație diferențială a lui Euler a calculului variațional.

Ecuația diferențială a lui Euler	$f_{y'y'}y'' + f_{yy'}y' + f_{xy'} - f_y = 0$

Ea este o ecuație diferențială de ordinul doi.

Cerința ca o integrală oarecare să ia o valoare extremă pentru o anumită funcție se reduce la o ecuație diferențială.

Variația întîi. LAGRANGE (1755) a introdus noțiunea de *variație* δy *a unei funcții* $y(x)$

$$\delta y = \varepsilon\eta(x); \quad y = y_0 + \delta y.$$

Deoarece funcționala J ia pe o extremală o valoare extremă, diferența $\Delta J = J(y) - J(y_0)$ nu poate fi pentru un maxim niciodată pozitivă iar pentru un minim al integralei niciodată negativă. Pentru valori foarte mici ale lui ε schimbarea valorii integralei poate fi privită ca o diferențială a funcției $J(\varepsilon)$ pentru $\varepsilon = 0$. Numim produsul $J'(0)\,\varepsilon$ variația întîi și o notăm cu δJ:

$$\delta J = J'(0)\,\varepsilon = [f_{y'} \cdot \delta y]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left(f_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_{y'}\right) \delta y\, \mathrm{d}x.$$

Condiția necesară pentru existența unui extrem al funcționalelor găsite în cazul derivării ecuației diferențiale a lui Euler se reduce la $\delta J = 0$, deci variația întîi este nulă.

Generalizare. Funcția argument $f(x, y, y')$ și astfel integrala J poate depinde nu numai de o funcție $y(x)$ ci și de o mulțime finită de funcții $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ și de derivatele

lor. În loc de ecuația lui Euler se obține un sistem de n ecuații diferențiale. În cazul unei funcții $y(x)$ pot interveni în funcția argument și *derivate de ordin superior* ale lui $y(x)$ ca de exemplu $y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)$. Atunci ecuația lui Euler este de ordinul $2n$. Cu definiția aceasta se pot cerceta și proprietățile extremale ale suprafețelor în spațiu. Un *balon de săpun* mărginit de un inel de sîrmă care nu este plan are datorită tensiunii la suprafață cea mai mică arie posibilă. Astfel de suprafețe cu arie minimă se numesc *suprafețe minimale*. În acest caz funcționala J este o integrală dublă, variabilele x și y din funcția argument sînt independente și se caută funcția $z = z(x, y)$ care definește suprafața și îndeplinește condiția

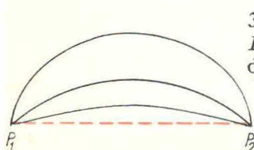
$$\iint_B f(x, y, z, z_x, z_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \text{valoare extremă!}$$

Condiția ca funcția $z(x, y)$ să realizeze un extrem relativ este ca ea să verifice ecuația cu derivate parțiale de ordinul doi a lui Ostrogradski.

Ecuația diferențială a lui Ostrogradski	$f_z - \frac{\partial}{\partial x} f_{z_x} - \frac{\partial}{\partial y} f_{z_y} = 0$

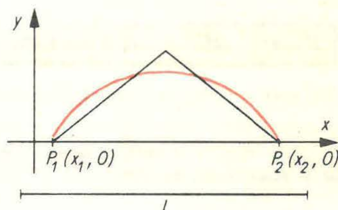
38.2. Condiții necesare și suficiente în cazul unui extrem

În ipoteza că se realizează un extrem, prima derivată $J'(0)$ trebuie să fie egală cu zero iar ecuația lui Euler trebuie să fie verificată. O astfel de condiție care trebuie îndeplinită de orice soluție se numește condiție *necesară*. Condițiile *suficiente* pentru existența unui extrem au fost stabilite de Karl WEIERSTRASS (1815—1897). Acestea ca și teorema de existență care ne indică faptul că există o soluție nu pot fi demonstrate în această carte. În cele mai multe cazuri se verifică dacă soluția ecuației lui Euler are proprietăți extremale în condițiile geometrice, tehnice sau fizice date aprioric, de exemplu figura 38.2.1 prezintă faptul că între două puncte nu există nici o curbă care să reprezinte cea mai scurtă distanță dintre ele; prin ipoteză excluzînd linia dreaptă, întotdeauna vom putea găsi o curbă mai scurtă.



38.2.1. Între două puncte P_1 și P_2 nu există cel mai scurt drum de legătură rectiliniu

38.3.1. Aria mărginită de segmentul P_1P_2 și de o curbă de lungime dată l este maximă cînd curba este un arc de cerc



38.3. Probleme variaționale cu condiții suplimentare

De multe ori întîlnim probleme în care se cere determinarea extremalelor funcționalei $\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\,\mathrm{d}x$ cu condiții suplimentare, numite *condiții la limite* sau *de frontieră*.

Problema zoperimetrică. Dorimi să determinăm maximul ariei $\int_{x_1}^{x_2} y\,\mathrm{d}x$, $x_2 > x_1$, a suprafeței mărginite de curba $y(x)$ în cazul în care lungimea de arc $\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}y = l$ este mai mare sau egală cu $x_2 - x_1$, $l \geqslant x_2 - x_1$. Soluția acestei probleme de a închide cea mai mare arie posibilă cu un perimetru dat format din segmentul P_1P_2 și l este un segment de cerc (fig. 38.3.1).

În general, în cazul *problemei izoperimetrice* în afară de condiția $\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\,\mathrm{d}x =$ $=$ valoare extremă!, mai apare și o *condiție suplimentară sub forma integrală* care cere ca integrala unei funcții de y și y', $g(x, y, y')$ să fie egală cu o constantă dată a:

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x, y, y')\,\mathrm{d}x = a.$$

Această *problemă izoperimetrică generală* se transformă cu *metoda multiplicatorilor* lui LAGRANGE (1736—1813) într-o problemă variațională fără condiții suplimentare. Din cele două funcții date $f(x, y, y')$ și $g(x, y, y')$ formăm cu ajutorul unui multiplicator λ o funcție nouă: $h(x, y, y') = f(x, y, y') + \lambda g(x, y, y')$ și rezolvăm în cazul ei ecuația lui Euler

$$h_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} h_{y'} = 0.$$

În exemplul cu arcul de curbă l se pune $h(x, y, y') = y + \lambda\sqrt{1 + y'^2}$. Prin integrarea ecuației lui Euler obținem $(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = \lambda^2$, deci extremalele sînt arcuri de cerc de rază $|\lambda|$.

Condiții suplimentare sub formă de ecuație. În cazul problemei izoperimetrice, cu toată forma exterioară aparent complicată, condițiile suplimentare reprezintă în fond numai un număr, de exemplu lungimea. O condiție suplimentară sub formă de ecuație, cu toate că arată mai simplu, lasă deschise mai multe posibilități pentru determinarea extremalei, de exemplu de a parcurge drumul dintre două puncte pe o sferă!

Liniile geodezice pe o suprafață sînt cele mai scurte curbe care unesc două puncte de pe o suprafață. Să considerăm problema determinării *geodezicelor* unei suprafețe date printr-o ecuație $g(x, y, z) = g(x(t), y(t), z(t)) = 0$. Coordonatele $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ ale unui punct de pe suprafață depind de parametrul t $\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x},\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dot{y},\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \dot{z}\right)$. Vom avea de determinat sistemul de funcții $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ care minimizează integrala $\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,\mathrm{d}t$ și totodată verifică ecuația suprafeței (condiție suplimentară) $g(x, y, z) = g[x(t), y(t), z(t)] = 0$.

38.4. Principiile minimale ale fizicii teoretice

Matematicienii și fizicienii au demonstrat relativ timpuriu că o *rază de lumină* ce trece prin două puncte determină un drum a cărui parcurgere necesită mai puțin timp decît orice alt drum vecin (vezi cap. 19.4). Dacă considerăm acest *principiu al lui Fermat* drept principiu de bază al opticii geometrice, atunci se pot deduce relativ ușor din el legile reflecției și refracției.

Astfel de principii minimale au fost interpretate în secolul XVIII pe baze teologice. Francezul Pierre-Louis Moreau de MAUPERTUIS (1698—1759), pe atunci președinte al Academiei din Berlin, a încercat să dovedească pe baza *principiului acțiunii minime* existența lui dumnezeu. VOLTAIRE în ironica sa povestire „Dr. Akakia" (1752) l-a ridiculizat pe Maupertuis demonstrînd întregii Europe contrariul. Mai tîrziu s-a ajuns la concluzia că drumul străbătut de lumină poate conduce la un maxim de timp, dar cea mai importantă concluzie a fost faptul că principiile variaționale ale mecanicii pot fi reduse la ecuații diferențiale. La dezvoltarea acestei teorii au contribuit lucrările lui LAGRANGE, GAUSS, HAMILTON și JACOBI.

Mișcarea unui punct material în cîmpul gravitațional al pămîntului sau a unei particule încărcate cu electricitate într-un cîmp electric sau magnetic depinde nu numai de viteza sa instantanee cauzată de o forță exterioară ci și de potențiale, deci depinde de energia cinetică T și de *energia potențială* U. Conform lui Lagrange funcția denumită *funcția lui Lagrange* $L =$ $= T - U$ este o funcție dependentă de timpul t, de coordonatele din spațiu x, y și z și de derivatele lor $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$. Dacă considerăm un *sistem* de N *puncte materiale*, atunci L este o funcție de timpul t, de $3\,N$ coordonate și $3\,N$ componente ale vitezei. În cazul diferitelor probleme de fizică s-au introdus *coordonatele generalizate* q_k, $k = 1, \ldots, 3N$, astfel încît $L = L(t, q_k, \dot{q}_k)$,

$k = 1, 2, ..., 3N$, este o funcție de aceste coordonate. Mișcarea punctelor materiale se obține din *ecuațiile de mișcare ale lui Lagrange*

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0, \quad k = 1, 2, ..., 3N.$$

Aceste ecuații se pot deduce din *principiul lui Hamilton*. Sistemul trece din starea 1 pe care o are la timpul t_1 într-o perioadă de timp $t_2 - t_1$ într-o stare 2 bine stabilită. Integrala $J = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q_k, \dot{q}_k)\, \mathrm{d}t$ este minimă în condițiile impuse de trecerea de la o stare la alta. Acest principiu integral al mecanicii clasice devine astfel o problemă variațională iar ecuațiile lui Euler atașate sînt ecuațiile de mișcare ale lui Lagrange de tipul doi.

38.5. Metode directe

Cu toate că metodele calculului variațional pe care le-am schițat par foarte elegante, rezolvarea practică a acestora este destul de greoaie. În cazul multor probleme soluția exactă a ecuației lui Euler este dificil sau imposibil de obținut. De aceea s-au dezvoltat metode de aproximare care, datorită faptului că evită ecuația lui Euler, se numesc metode directe ale calculului variațional.

Metoda lui Ritz. Walter Ritz (1878—1909). În cazul lui $J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, \mathrm{d}x =$ valoarea extremă! pentru funcția $y(x)$ introducem următoarea funcție de aproximare:

$$y = c_1\varphi_1(x) + ... + c_n\varphi_n(x),$$

unde $\varphi_i(x)$ îndeplinește condițiile la limită. Trebuie determinați coeficienții constanți c_i. Înlocuim pe y în J și obținem $J(c_1, ..., c_n) =$ valoare extremă! Constantele c_i se calculează din condițiile necesare $\frac{\partial J}{\partial c_i} = 0,\ i = 1, ..., n$.

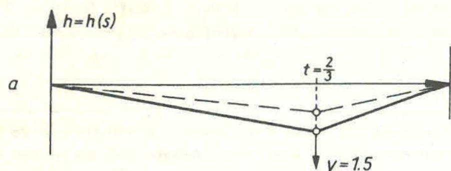
Exemplu. Fie $\int_0^1 (y'^2 - y'' - 2xy)\, \mathrm{d}x =$ valoare exetremă! Condițiile la limită sînt $y(0) = y(1) = 0$. Funcțiile $\varphi_1 = x(1 - x)$ și $\varphi_2 = x^2(1 - x)$ verifică condițiile la limită. Obținem următoarea soluție aproximativă: $y = \frac{7}{41}x^3 - \frac{8}{369}x^2 + \frac{71}{369}x$.
Ca probă se găsește pentru ecuația diferențială a lui Euler soluția $J = \frac{\sin x}{\sin 1} - x$. Diferența dintre soluția exactă și cea aproximativă este de ordinul de mărime 10^{-4}.

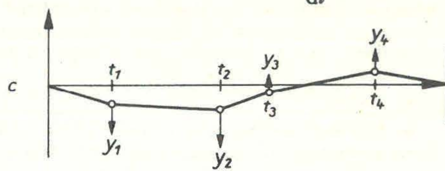
39. Ecuații integrale

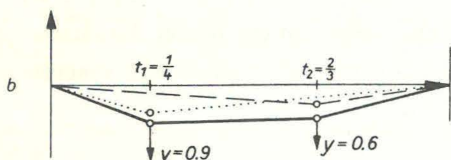
O ecuație folosită pentru determinarea unei funcții se numește *ecuație integrală* dacă funcția pe care o căutăm se află sub semnul de integrală. Un exemplu foarte simplu este ecuația

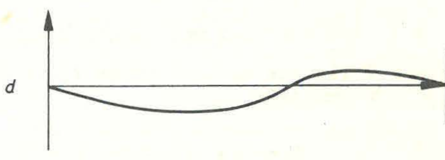
(1) $$\int_a^s y(t)\, \mathrm{d}t = f(s) - f(a), \quad a \leqslant s \leqslant b.$$

Funcția $f(s)$ este dată și funcția $y(t)$ este necunoscută. Soluția va fi $y(t) = \frac{df(t)}{dt}$.









39.1. Coardă încărcată

Ecuațiile integrale se întîlnesc deseori la tratarea matematică a problemelor de fizică sau tehnică, de exemplu probleme de încovoieri sau torsiuni elastice (construcția podurilor) și probleme de propagare a căldurii. Vom da un exemplu cu o coardă întinsă de lungime l descrisă pe intervalul $0 \leqslant s \leqslant l$. În punctul de coordonate t se acționează cu o forță egală cu 1. Coarda deformată va fi reprezentată de funcția $E(s, t)$; în figura 39.1, *a* (linia întreruptă) este reprezentată curba $h(s) = E\left(s, \frac{2}{3}\right)$ pentru $t = \frac{2}{3}$ cînd acționăm cu o forță egală cu 1. Dacă forța este de mărime y, deformarea este $h(s) = E(s, t)\, y$ (linie continuă). Dacă acționează două forțe y_1 și y_2 în punctele t_1 și t_2, atunci $h(s) = E(s, t_1)\, y_1 + E(s, t_2)\, y_2$ este rezultanta curbelor deformate $E\left(s, \frac{1}{4}\right) \cdot 0{,}9$ (linie punctată) și $E\left(s, \frac{2}{3}\right) \cdot 0{,}6$ (linie întreruptă) (fig. 39.1. *b*). În mod analog acțiunea a n forțe $y_1, \ldots, y_n$ în punctele $t_1, t_2, \ldots, t_n$ duce la

$$h(s) = E(s, t_1)\, y_1 + E(s, t_2)\, y_2 + \ldots + E(s, t_n)\, y_n$$

(fig. 39.1, *c*). În particular, deformarea are în punctul $s = t_k$ valoarea

$$(2) \qquad h_k = h(t_k) = E(t_k, t_1)\, y_1 + \ldots + E(t_k, t_n)\, y_n$$

sau

$$h_k = \sum_{i=1}^{n} E(t_k, t_i)\, y_i \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Pentru o forță distribuită continuu care acționează de-a lungul întregii coarde se obține

$$(3) \qquad h(s) = \int_0^1 E(s, t)\, y(t)\, dt.$$

Funcția $y(t)$ este *densitatea de forță* sau *forța pe unitatea de lungime* iar $y\, dt$ este deci forța care acționează pe elementul de arc dt; semnul de însumare din (2) se transformă în (3) în integrală. Coarda deformată formează o curbă „netedă" $h = h(s)$ (fig. 39,1,*d*). Invers, dacă cunoaștem forma coardei deformate, adică funcția $h(s)$ și vrem să determinăm forța $y(t)$ care acționează pe coardă, atunci relația (3) este o *ecuație integrală liniară de speța întîi* pentru funcția căutată $y(t)$. Funcția $E(s, t)$ de două variabile se numește *nucleul ecuației integrale*.

Pentru rezolvarea ecuației integrale putem opta pentru drumul invers. Ecuația (3) se aproximează prin ecuația (2), deci printr-o sumă finită, cu precizia dorită, înlocuind pe $y(t)$ cu diferite valori y_i. Determinarea lui y_i din (2) nu este altceva decît rezolvarea unui *sistem de ecuații liniare* de n ecuații cu n necunoscute y_i.

În fond teoria ecuațiilor integrale liniare prezintă multe analogii cu teoria sistemelor de ecuații liniare; s-ar putea interpreta ecuațiile integrale drept *ecuații liniare cu un număr*

infinit de necunoscute. Aceste legături le-a folosit Erik John FREDHOLM (1866—1927) cînd a creat teoria generală a ecuațiilor integrale. El a studiat ecuații integrale de alt tip, *ecuații integrale liniare de speța a doua sau ecuații integrale de tip Fredholm*. Aceste ecuații le întîlnim des și ca rezultat al rearanjării ecuațiilor diferențiale, de exemplu oscilația armonică a coardei este descrisă cu ajutorul unei ecuații diferențiale de ordinul al doilea cu condiții la limite

$$(4) \qquad y'' + \lambda y = f(s), \qquad y(0) = y(l) = 0.$$

$y = y(0)$ este deformarea coardei în punctul s într-o anumită *fază a oscilației*, constanta λ este determinată de *frecvența oscilației* iar funcția $f(s)$ este dată de *forța externă* acționînd cu aceeași frecvență ca și în aceeași fază. Introducem în dezvoltarea lui Taylor $y(s) = y(0) + sy'(0) + + \int_0^s (s-t)\, y''(t)\, dt$ pe $y'' = f(t) - \lambda y(t)$ după cum rezultă din (4). Scriem dezvoltarea în serie Taylor pentru cazul special $s = 1$ și folosind condițiile $y(0) = y(l) = 0$, îl eliminăm pe y'. Obținem astfel ecuația

$$(5) \qquad y(s) - \lambda \int_0^l K(s, t)\, y(t)\, dt = h(s),$$

care este o *ecuație integrală liniară de speța a doua* pentru $y(s)$. [Nucleul K este asemănător cu *funcția de influență* $E(s, t)$ de mai sus; $h(s)$ este calculat cu ajutorul lui $f(s)$ și, în particular, este egal cu zero dacă nu acționează forțe din afară ($f = 0$, oscilație liberă). Condiții la limite nu mai sînt necesare.

Ecuațiile integrale de speța a doua au fost studiate mult de SCHMIDT (1876—1959). Vom aminti anumite proprietăți ale ecuațiilor de acest tip.

Alternativa lui Fredholm. O ecuația integrală liniară de speța a doua sau admite o soluție unică $y(s)$ pentru orice funcție dată h(s), sau admite o infinitate de soluții numai pentru anumite funcții $h(s)$.

Cele două cazuri se deosebesc după cum ecuația omogenă

$$(6) \qquad \bar{y}(s) - \lambda \int_0^l K(s, t)\, y(t)\, dt = 0$$

are numai soluția banală $\bar{y} = 0$ (primul caz) sau soluții nebanale $\bar{y}(s)$, numite soluții nule (cazul al doilea). Semnificația fizică în cazul $\bar{y} \equiv 0$ este următoarea: nu există oscilații libere, numite *oscilații caracteristice*, în cazul frecvenței determinate de λ. Va exista întotdeauna o formă de oscilație bine definită, indiferent de distribuția forțelor exterioare. În cazul al doilea, cînd avem soluții nule, există oscilații caracteristice. În cazul unei distribuții de forță $h(s)$ este posibilă existența unei oscilații $y(s)$ a coardei peste care se poate suprapune o *oscilație caracteristică* oarecare $\bar{y}(s)$; $y(s) + \bar{y}(s)$ este de asemenea o soluție a problemei. Se poate însă la fel de bine să nu avem nici un fel de soluție; acest caz este din punct de vedere fizic privit în următorul mod: se alege o forță astfel încît să dea naștere la o oscilație caracteristică (rezonanță) și teoretic conduce la un număr infinit de mare de deformări ale coardei.

Valori proprii. În general, valorile parametrului λ pentru care (6) are soluție nebanală sînt excepții. Ele se numesc *valori proprii* iar soluțiile nule corespunzătoare *funcții proprii*; de ex. în cazul oscilației unei coarde valorile proprii sînt numerele $\lambda_n = (\pi^2/l^2) \cdot n^2$ ($n = 1, 2, \ldots$) iar funcțiile proprii corespunzătoare sînt $\bar{y}_n = \sin(s\sqrt{\lambda_n})$. Valorile proprii și funcțiile proprii au un rol important în teoria și practica ecuațiilor integrale, de ex. dezvoltarea în serie a unor funcții date în funcție de valorile proprii sînt importante și pentru aflarea soluției ecuațiilor diferențiale și integrale: binecunoscutele serii Fourier aparțin acestei categorii.

Rezolvant. Dacă (5) are o soluție unică, atunci soluția $y(s)$ poate fi reprezentată cu ajutorul *nucleului* sau *rezolvantului* $\Gamma(s, t)$:

$$(7) \qquad h(s) + \lambda \int_0^l \Gamma(s, t)\, h(t)\, dt = y(s).$$

Pentru λ suficient de mic rezolvantul se calculează cu ajutorul *iterațiilor*. În acest scop înlocuim în (5) pe $y(t)$ care se află sub integrală, cu valoarea

$$h(t) + \lambda \int_0^l K(t, r)\, y(r)\, dr$$

obținută tot din (5); vom obține o ecuație de forma

$$y(s) - \lambda^2 \int_0^l K_2(s, r)\, y(r)\, dr = h(s) + \lambda \int_0^l K(s, t)\, h(t)\, dt.$$

În această ecuație vom înlocui pe y care se află sub semnul integralei din nou cu expresia de mai sus și așa mai departe. Comparînd cu (7), obținem dezvoltarea

(8) $$\Gamma(s, t) = K(s, t) + \lambda K_2(s, t) + \lambda^2 K_3(s, t) + \ldots,$$

numită *serie Neumann*. *Nucleele de iterație* $K_2, K_3, \ldots$, se calculează prin integrări repetate ale lui K.

Alte tipuri de ecuații. În afara ecuațiilor (3) și (5) există și *ecuații integrale, liniare de speța a treia*

(9) $$g(s)\, y(s) - \lambda \int_0^l K(s, t)\, y(t)\, dt = h(s),$$

unde $g(s)$ și $h(s)$ sînt funcții date. Ecuațiile integrale de speța întîi și a doua sînt cazuri speciale ale acestui tip; aceasta se obțin din (9) în cazul lui $g(s)$ constant.

Mai departe putem aminti de *ecuațiile integrale neliniare* care nu au încă o teorie generală. În cazul acestor ecuații funcția căutată y nu apare sub semnul integralei ca un simplu factor ci într-un mod mult mai complicat. De exemplu.

(10) $$y(s) - \int_0^l g(s, t)\, [y(t)]^2\, dt = h(s)$$

este o ecuație integrală neliniară.

40. Analiză funcțională

Analiza funcțională s-a dezvoltat în ultimii 30 de ani. Începuturile ei se datorează faptului că diferite operații matematice de la operațiile de bază pînă la diferențiere și integrare au multe trăsături comune și că *obiectele matematice* au față de aceste operații multe caracteristici identice sau asemănătoare; deși aparțin diferitelor domenii ale matematicii, aceleași reguli de calcul guvernează adunarea unghiurilor, numerelor, vectorilor, etc. În acest sens analiza funcțională a constituit la început o secțiune prin diferite domenii ale analizei, de exemplu teoria ecuațiilor integrale, a calculului variațional și a algebrei liniare.

Căutarea și recunoașterea unor *proprietăți comune*, stabilirea unor principii generale independente de obiectele matematice speciale, determinate numai pe baza unor *relații abstracte* au condus la noi concepte care au devenit baza analizei funcționale și sînt frecvent folosite în matematicile moderne.

40.1. Spații abstracte

Deviind de la înțelesul cuvîntului în viața de toate zilele, noțiunea de spațiu în analiza funcțională nu are o legătură directă cu geometria sau cu noțiunea de spațiu pe care o înțelegem noi. Datorită unor asemănări cu geometria, în special cu geometria analitică și algebra liniară, cuvîntul spațiu a fost extins și la obiectele analizei funcționale. În mod similar și alte noțiuni, ca de exemplu *distanța sau lungimea,* au fost preluate din geometria analitică dar și-au pierdut semnificația geometrică inițială.

Noțiunea de spațiu abstract. În analiza funcțională denumim *spațiu abstract* o mulțime de elemente în care este definită limita. Următoarea afirmație trebuie să aibă un sens foarte bine definit: un *șir* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ de *elemente ale spațiului tinde către o valoare limită* $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Exemplul 1. Elementele unui spațiu euclidian *k-dimensional* pe care-l notăm cu $\mathbf{R}^k$ sînt sisteme ordonate de k numere reale $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$. Un șir de elemente $x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_n^{(n)})$, $n = 1, 2, \ldots$, tinde către un element $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ dacă fiecare șir de numere $\{\xi_n^{(n)}\}$ pentru $n \to \infty$ tinde către ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$. Dacă spațiul euclidian are dimensiunea $k = 3$, atunci $\mathbf{R}^3$ este compus din totalitatea tripletelor $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ de numere reale, ξ_1, ξ_2, ξ_3 reprezintă coordonatele iar x un punct în sensul geometriei analitice a spațiului.

Exemplul 2. Spațiul *polinoamelor de grad cel mult m* de variabilă t are elementele $x = x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_m t^m$, unde $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ sînt numere complexe. Mulțimea acestor polinoame definește un spațiu dacă introducem și noțiunea de limită. Polinomul $x(t)$ este unic determinat într-un punct $t = t_0$ conform formulei lui Taylor, cunoscînd valorile funcției și ale derivatelor pînă la ordinul m în punctul $t = t_0$:

$$x(t) = x(t_0) + x'(t_0)(t - t_0) + \frac{x''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \ldots + \frac{x^{(m)}(t_0)}{m!}(t - t_0)^m.$$

Deci vom da următoarea definiție: un șir de polinoame $x_n = x_n(t)$ este *convergent către polinomul* $x = x(t)$ dacă valorile funcției x_n și a derivatelor sale în punctul $t = t_0$ converg către valoarea funcției $x(t_0)$ și valorile derivatelor $x'(t_0), \ldots, x^{(m)}(t_0)$ în $t = t_0$, deci avem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t_0) = x(t_0)$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n'(t_0) = x'(t_0), \ldots, \lim\limits_{n\to\infty} x_n^{(m)}(t_0) = x^{(m)}(t_0)$.

Spații liniare. În spațiile liniare sînt definite *înmulțirea* elementelor $x, y, z, \ldots$ cu numere reale sau complexe $\lambda, \mu, \ldots$ și adunarea ale două elemente ale spațiului. Fiecărui număr λ și fiecărui element x al spațiului îi corespunde în mod unic un element notat cu λx. Tot astfel fiecărei perechi de elemente (x, y) îi va corespunde în mod unic un element notat cu $x + y$. Înmulțirea și adunarea trebuie să îndeplinească următoarele condiții:

Condiții pe care trebuie să le îndeplinească adunarea și înmulțirea în spații liniare

(1) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$, (2) $1 \cdot x = x$, (3) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$, (4) $x + y = y + x$,

(5) $(x + y) + z = x + (y + z)$, (6) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

(7) Există un element zero O astfel încît $0 \cdot x = y \cdot 0 = O$.

Adunarea și înmulțirea trebuie să fie *operații continue,* deci trebuie să mai îndeplinească următoarele condiții:

(8) Din $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ și $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ avem $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$.

(9) Din $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$ și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ avem $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n x_n = \lambda x$.

Exemple în care toate axiomele sînt îndeplinite:

1. Spațiul euclidian k-dimensional $\mathbf{R}^k$ devine spațiu liniar dacă definim înmulțirea prin

$$\lambda x = \lambda(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k) = (\lambda\xi_1, \lambda\xi_2, \ldots, \lambda\xi_k)$$

și adunarea a două elemente $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k)$ și $y = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_k)$ pentru $x + y = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, ..., \xi_k + \eta_k)$. Elementul zero este $O = (0, 0, ..., 0)$.

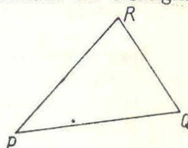
2. Spațiul polinoamelor devine spațiu liniar așa prin definirea înmulțirii, adunării și elementului zero astfel:

$$\lambda x = \lambda\alpha_0 + \lambda\alpha_1 t + ... + \lambda\alpha_m t^m,$$

$$x + y = x(t) + y(t) = (\alpha_0 + \beta_0) + (\alpha_1 + \beta_1)t + ... + (\alpha_m + \beta_m)t^m.$$

$$O = O(t) = 0.$$

Noțiunea de metrică și de spațiu metric. Două puncte P și Q dintr-un spațiu euclidian tridimensional se află la o distanță nenulă unul de altul în cazul în care nu sînt confundate; această distanță se măsoară prin lungimea segmentului $|PQ|$ care unește punctele P și Q. Distanța dintre P și Q este egală cu distanța dintre Q și P, deci $|PQ| = |QP|$, unde, $|PQ| > 0$ dacă $P \neq Q$. Fie un al treilea punct R care nu se află pe dreapta PQ; ele formează un triunghi PQR. Conform unei teoreme din geometria elementară o latură oarecare a triunghiului de ex. PQ, este mai mică decît suma celorlate două, PR și QR, deci avem $|PQ| < |PR| + |QR|$. Această relație se numește *inegalitatea triunghiului*. Forma $|PQ| \leqslant |PR| + |QR|$ este valabilă nu numai cînd punctele formează un triunghi ci și cînd sînt coliniare (fig. 40.1.1).



40.1.1. Inegalitatea triunghiului

Și în analiză sîntem de multe ori nevoiți să măsurăm *distanțele*, în sens figurativ, dintre elementele considerate $x, y, z, ...$, să decidem dacă două elemente x, y se află la o distanță mai mare sau mai mică. Pentru a măsura distanța trebuie introdusă o *funcție de distanță*, care asociază fiecărei perechi de elemente x, y pe $d(x, y) \geqslant 0$. Ea se numește *metrică*.

O metrică trebuie să verifice trei axiome: (1) $d(x, y) = d(y, x)$, (2) $d(x, y) = 0$, dacă și numai dacă $x = y$, (3) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ (*inegalitatea triunghiului*).

Un spațiu se numește *spațiu metric* dacă definim o funcție de distanță pentru perechile de elemente ale sale. Procesul limită $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, care se presupune într-un spațiu abstract, este definit prin $\lim_{n\to\infty} d(x, x_n) = 0$.

Exemple de metrice într-un spațiu euclidian k-dimensional:

1. $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (\xi_i - \eta_i)^2}$ — generalizarea formulei pentru lungime în geometria analitică;

2. $d(x, y) = \max_{i=1, ..., k} |\xi_i - \eta_i|$. 3. $d(x, y) = \sum_{i=1}^{k} |\xi_i - \eta_i|$.

În cazul celor trei metrice trebuie arătat că ele verifică cele trei axiome. Este foarte ușor, numai în cazul primei este mai dificil, de arătat valabilitatea inegalității triunghiului.

Noțiunea de normă și de spațiu normat. Este cunoscut că fiecărui număr complex $\zeta = \xi + i\eta$ îi corespunde un număr real nenegativ $|\zeta| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, numit *modulul* sau valoarea absolută a lui ζ. În cazul funcțiilor, vectorilor, matricelor de multe ori datorită formulării problemei sîntem nevoiți să le atașăm de asemenea numere reale nenegative care să reprezinte o măsură a „mărimii" lor. Numim această măsură numerică corespunzătoare elementelor $x, y, ...$ ale unui spațiu, normă și o notăm cu $||x||, ||y||, ...$

Proprietățile normelor $||x||$: (1) $||x|| > 0$ pentru $x \neq O$ $||O|| = 0$; (2) $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$, pentru orice λ real sau complex; (3) $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$ (inegalitatea triunghiului)

Aceste proprietăți sînt îndeplinite de modulul numerelor complexe.
Un spațiu se numește *spațiu normat* dacă elementelor sale le corespunde o normă.

Norma poate fi transformată într-o metrică astfel: norma diferenței a două elemente o definim ca o funcție de distanța $d(x, y) = ||x - y||$.

Într-un spațiu euclidian k-dimensional $\mathbf{R}^k$ următoarele norme au toate proprietățile cerute:

$$1.\ ||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \xi_i^2};\quad 2.\ ||x|| = \max_{i=1,\ldots,k} |\xi_i|;\quad 3.\ ||x|| = \sum_{i=1}^{k} |\xi_i|.$$

Din ele rezultă metricile din $\mathbf{R}^k$ care au fost redate în exemplul anterior. Alegerea unei anumite definiții într-un spațiu dat depinde de scopul pe care-l urmărim.

Spații metrice complete. Dacă un șir $x_1, x_2, \ldots$ de elemente ale unui spațiu metric X converge către un element x, atunci distanțele $d(x_1, x), d(x_2, x), \ldots$ formează șirul nul. Pe baza inegalității triunghiului distanța $d(x_i, x_k)$ dintre două elemente oarecare x_i, x_k ale șirului tinde de asemenea către zero odată cu creșterea indicilor i și k; ei formează un șir Cauchy.

Un șir $\{x_n\}$ se numește șir Cauchy dacă oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există un indice $n(\varepsilon)$ astfel încît pentru oricare $i, k \geqslant n(\varepsilon)$ să avem $d(x_i, x_k)$ 3 $\leq$.

Orice șir convergent este un șir Cauchy, dar nu orice șir Cauchy este convergent. Spațiile în care orice șir Cauchy $\{x_n\}$ are o limită x se numesc *complete*. Spațiile liniare normate complete se numesc *spații Banach*, după numele lui Stephan BANACH (1892—1945) care este fondatorul analizei funcționale. Toate spațiile de dimensiune finită, de exemplu spațiul polinoamelor de grad cel mult m, sînt complete. Spațiul $L_2(a, b)$ (vezi spații Hilbert) este complet. În general se cere spațiului produsului scalar să fie complet, înainte de a-l desemna ca spațiu Hilbert.

Spații Hilbert. Aceste spații denumite astfel după matematicianul german David HILBERT (1862—1943) sînt cazuri speciale importante ale spațiilor liniare și normate. Fiecărei perechi de numere x, y îi facem să corespundă o funcție cu valori complexe (x, y), denumită produs scalar, care are următoarele proprietăți (trasarea unei linii deasupra înseamnă trecerea la un număr complex conjugat):

(1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$;
(2) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$, λ fiind un număr complex oarecare;
(3) $(x, x) \geqslant 0$ este egal cu 0 cînd $x = O$;
(4) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

Spațiul se normează astfel: $||x|| = \sqrt{(x, x)}$.

Exemple pentru spații Hilbert. 1. Spațiul $\mathbf{C}^k$ al unor sisteme k-dimensionale complexe cu produsul scalar $(x, y) = \sum_{i=1}^{k} \xi_i \eta_i$ și norma $||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} |\xi_i|^2}$, unde ξ_i, η_i sînt complexe.

2. Spațiul $L_2(a, b)$. Elementele sale se formează din funcțiile cu valori complexe $x = x(t)$, unde $a \leqslant t \leqslant b$, pentru care există integrala $\int_a^b |x(t)|^2\,dt$. Toate proprietățile produsului scalar sînt îndeplinite de $(x, y) = \int_a^b x(t)\,\overline{y(t)}\,dt$.

Justificarea metodelor analizei funcționale. Este clar că introducerea noțiunilor analizei funcționale a avut un țel precis. Avantajele metodelor analizei funcționale vor fi ilustrate prin cîteva consecințe ale inegalității lui Schwarz.

Inegalitatea lui Schwarz. Într-un spațiu Hilbert are loc inegalitatea $|(x, y)| \leqslant ||x|| \, ||y||$.

Demonstrația folosește întîi proprietatea a treia a produsului scalar din care reiese că $(x + \lambda y, x + \lambda y) \geqslant 0$ pentru orice număr complex λ. Conform celorlalte proprietăți obținem

$$(x + \lambda y, x + \lambda y) = (x, x + \lambda y) + \lambda(y, x + \lambda y) = \overline{(x + \lambda y, x)} + \lambda\overline{(x + \lambda y, y)} =$$
$$= \overline{(x, x)} + \overline{\lambda(y, x)} + \lambda\overline{(x, y)} + \lambda\bar{\lambda}\overline{(y, y)} = (x, x) + \bar{\lambda}(x, y) +$$
$$+ \lambda(y, x) + \lambda\bar{\lambda}(y, y) \geqslant 0.$$

Este valabilă și pentru $\lambda = -\dfrac{(x, y)}{(y, y)}$, așadar

$$(x, x) - \overline{(x, y)}\,(x, y)/(y, y) - (x, y)\,(y, x)/(y, y) + (x, y)\,\overline{(x, y)}/(y, y) \geqslant 0.$$

Deci

$$(x, y)\,\overline{(y, x)} = (x, y)\,\overline{(x, y)} = |(x, y)|^2 \leqslant ||x||^2 \cdot ||y||^2.$$

Acest rezultat general poare fi folosit astfel: dacă recunoaștem că o operație numerică aplicată la o pereche oarecare de elemente x și y ale unui spațiu satisface condițiile cerute unui produs scalar într-un spațiu Hilbert, atunci datorită valabilității inegalității lui Schwarz în cazul acestui spațiu special obținem imediat relații importante, ca de exemplu inegalitățile:

$$\left|\sum_{i=1}^{k} \xi_i \eta_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \xi_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \eta_i^2} \quad \text{pentru spațiul } \mathbf{R}^k \text{ și}$$

$$\left|\int_a^b x(t) \cdot \overline{y(t)}\, dt\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2\, dt} \cdot \sqrt{\left(\int_a^b |y(t)|^2\, dt\right)} \quad \text{pentru spațiul } L_2(a, b).$$

Acestea sînt relații care au fost stabilite în cazul unor spații găsite mai devreme și independent de CAUCHY, BUNEAKOVSKI și SCHWARZ. Prin introducerea conceptelor analizei funcționale s-au pus în evidență proprietățile comune ale diferitelor ramuri ale analizei. În mod similar multe relații deja cunoscute se obțin în mod simplu ca interpretări ale unei teoreme a analizei funcționale, de ex. inegalitatea triunghiului pentru norme din *inegalitatea lui Schwarz*. Deoarece $||x|| = \sqrt{(x, x)}$, avem $||x + y||^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) \leqslant$ $\leqslant ||x||^2 + ||y||^2 + |(x, y) + (y, x)| \leqslant ||x||^2 + ||y||^2 + 2||x||\,||y|| = (||x|| + ||y||)^2$. Deci am demonstrat afirmația făcută.

În cazul spațiilor $\mathbf{R}^k$ și $L_2(a, b)$ obținem inegalitățile cunoscute ale lui Cauchy și Minkovski

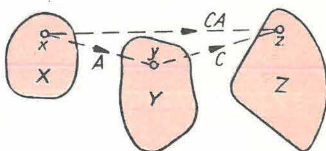
Inegalitatea lui Cauchy	$\sqrt{\sum_{i=1}^{k} (\xi_i + \eta_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \xi_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \eta_i^2}$
Inegalitatea lui Minkowski	$\sqrt{\int_a^b \lvert x(t) + y(t) \rvert^2\, dt} \leqslant \sqrt{\int_a^b \lvert x(t)\rvert^2 dt} + \sqrt{\int_a^b \lvert y(t)\rvert^2\, dt}$

40.2. Operatori

În timp ce prin noțiunea de spațiu s-a obținut în fond o tipizare a obiectelor matematice, un operator caracterizează o anumită operație matematică care se efectuează cu elementele spațiului. Aproape fiecare operație matematică poate fi privită ca o corespondență

definită printr-o anumită regulă de calcul care face să *corespundă fiecărui element x al unui spațiu abstract X în mod univoc un element y al unui spațiu Y.* Această corespondență se mai numește și aplicația lui X în Y, iar legea de corespondență se numește operator $A, B, \ldots$ sau F; corespondența este reprezentată de ecuații de forma $y = Ax$ sau $y = A(x)$ (fig. 40.2.1).

Funcțiile reale F de variabilă reală x sînt operatori speciali; ele aplică spațiul numerelor reale $\mathbf{R}^1$ *sau un subspațiu X al acestuia în* $Y \subset \mathbf{R}^1$.



40.2.1. Ilustrarea unui operator care transformă pe X în Y prin A și pe Y în Z prin C

Dacă fiecărui polinom $x(t)$ al spațiului X al polinoamelor de grad cel mult m îi facem să corespundă polinomul

$$y = Ax = x''(t) - 3x'(t) - \alpha x^2(t),$$

atunci $y = Ax$ este o aplicație a lui X în Y, spațiul polinoamelor de grad cel mult $2m$.

Operatori liniari. Din punct de vedere al aplicațiilor lor, operatorii liniari formează cea mai importantă clasă de operatori. Ei se bucură de următoarele proprietăți:
(1) $A(\lambda x) = \lambda Ax$ pentru orice număr λ;
(2) $A(x + y) = Ax + Ay$. Operatorul din exemplul de mai sus este operator liniar în cazul în care $\alpha = 0$.

Compunerea operatorilor. Fie A și B doi operatori care sînt aplicații ale lui X în Y și λ un număr oarecare. Produsul λA este un operator care duce pe x în $\lambda(Ax)$, astfel încît $(\lambda A)x = \lambda(Ax)$. Suma $A + B$ duce pe x în $Ax + Bx$ astfel; $(A + B)x = Ax + Bx$. Fie un al treilea operator C care aplică spațiul Y în spațiul Z; atunci *operatorul CA* face să-i corespundă fiecărui element x al spațiului X un element $C(Ax)$ din Z. Operațiile se fac în ordinea următoare: întîi A, apoi C. Aceasta se exprimă prin următoarea formulă $(CA)x = C(Ax)$.

Operatori liniari mărginiți. Un operator liniar A care transformă un spațiu liniar normat X în alt spațiu liniar normat Y se numește *mărginit*, dacă este valabilă următoarea inegalitate:

$$||y|| = ||Ax|| \leqslant K||x||, \text{ unde } K > 0, \text{ pentru orice } x \text{ aparținînd lui } X.$$

Cel mai mic număr K cu această proprietate se numește *norma operatorului A* și se notează cu $||A||$. Este normal ca norma $||y||$ în spațiul Y să fie eventual diferită de norma $||x||$ din X.

Exemplu. Fie X din $\mathbf{R}^3$ cu norma $||x|| = \max |\xi_i|$ și Y din $\mathbf{R}^2$ cu norma $||y|| = \max |\eta_i|$ pentru $i = 1, 2$. Prin $\eta_1 = a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3$ și $\eta_2 = a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + a_{23}\xi_3$ facem să corespundă fiecărui $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ un anumit $y = (\eta_1, \eta_2)$. Operatorul definit astfel este mărginit deoarece

$$|\eta_i| \leqslant |a_{i1}| \cdot |\xi_1| + |a_{i2}| \cdot |\xi_2| + |a_{i3}|\,|\xi_3| \leqslant \sum_{k=1}^{3} |a_{ik}|\,||x||,$$

deci $||y|| = \max\limits_{i=1,2} |\eta_i| \leqslant \left(\max\limits_{i=1,2} \sum_{k=1}^{3} |a_{ik}|\right) ||x||$. La o analiză mai amănunțită observăm că $\max\limits_{i=1,2} \sum_{k=1}^{3} |a_{ik}|$ este chiar cel mai mic număr K, deci norma operatorului A.

Prin adunarea operatorilor, înmulțirea lor cu un număr și norma operatorilor, *totalitatea operatorilor liniari și mărginiți A, B, ...* care aplică un spațiu X în alt spațiu Y formează un spațiu liniar normat. Acest fapt este de o importanță considerabilă pentru analiza funcțională și aplicarea metodelor analizei funcționale. Clasele de operatori care sînt elemente de legătură dintre două spații ar părea să fie în afara teoriei spațiilor dar, după cum am văzut, ele însele fac parte din categoria spațiilor abstracte.

Funcționale. Printre aplicațiile unui spațiu *funcțiile numerice* ocupă un loc special. Ele sînt aplicații în mulțimea numerelor reale sau complexe, se numesc *funcționale* și de aici provine denumirea de analiza funcțională.

În spațiile liniare normate norma, de exemplu, este o funcțională. Pentru simplificare vom analiza în cele ce urmează numai spațiile liniare normate.

Un caz excepțional îl constituie *funcționalele liniare* f, care fac să corespundă fiecărui element $x, y, \ldots$ al spațiului X un număr real sau complex $f(x), f(y), \ldots$, astfel încît condițiile de liniaritate $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ sînt verificate pentru toate elementele x, y din X și oricare α real sau complex. O funcțională liniară este mărginită și de asemenea continuă dacă norma $||f||$ a lui f satisface condiția $||f|| = \sup\limits_{x \in X} (|f(x)|/||x||) < \infty$ (unde $x \neq 0$).

Totalitatea funcționalelor liniare continue definite pe X formează *spațiul dual* X^*. Dacă X este un spațiu normat liniar, atunci și X^* este la fel.

O problemă importantă a analizei funcționale constă în determinarea proprietăților funcționalelor liniare continue sau a reprezentării lor și a valorilor lor $f(x)$, $x \in X$, ca o sumă sau ca o integrală și în caracterizarea șirurilor și marginilor spațiului original X prin elemente și imagini de elemente ale spațiului dual X^*. Din punctul de vedere al acestei probleme, analiza funcțională poate fi privită ca o dezvoltare a unei discipline geometrice, geometria liniară.

Teoria funcționalelor liniare continue joacă un rol important de ex. în teoria *ecuațiilor operatoriale liniare* sau a ecuațiilor integrale, în teoria *integrării aproximative*, în teoria *distribuțiilor* sau a *funcțiilor generalizate* și în teoria metodei *multiplicatorilor nedeterminați ai lui Lagrange*. Vom arăta anumite rezultate pentru diferite spații.

1. *În* $\mathbf{R}^k$, $x = (x_1, \ldots, x_k)$ *cu* x_i *reali* $(i = 1, 2, \ldots, k)$ *fiecărei funcționale liniare* f *îi corespund* k *numere reale* $f_1, \ldots, f_k$ *astfel încît valoarea* $f(x)$ *a funcționalei poate fi reprezentată sub forma* $f(x) = f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots + f_kx_k$.

Aceasta se numește *reprezentarea* lui f. Invers, pentru orice k-uplu de numere reale $f_1, \ldots, f_k$ poate fi definită o funcțională liniară. Pe baza normei (vezi Spații normate), cu ajutorul căruia normăm elementele $x \in \mathbf{R}^k$, obținem:

$$1.\ ||f|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} f_i^2}, \quad 2.\ ||f|| = \sum_{i=1}^{k} |f_i|, \quad 3.\ ||f|| = \max_{i=1,\ldots,k} |f_i|.$$

2. În spațiul $L_2(a, b)$ al funcțiilor de pătrat integrabil Lebesgue în intervalul $[a, b]$ este valabilă *teorema reprezentării lui Riesz: fiecărei funcționale liniare continue* f *îi corespunde în mod unic o funcție determinată* g *în* $L_2(a, b)$ *astfel încît valoarea* $f(x)$ *a funcționalei pentru* $x \in L_2(a, b)$ *poate fi reprezentată sub forma* $f(x) = \int_a^b x(t)\, \bar{g}(t)\, \mathrm{d}t = (x, g)$.

Mai general, în orice spațiu Hilbert (complet) valorile funcționalei $f(x)$ pot fi reprezentate ca un produs scalar (x, g). Invers pe baza unui element arbitrar $g \in X$ putem defini o funcțională liniară continuă $f(x) = (x, g)$. Se poate demonstra că norma $||f||$ a funcționalei f este egală cu norma $||g||$ a elementului generator.

3. Spațiul X al polinoamelor de o variabilă de grad cel mult m poate fi privit ca un spațiu liniar normat cu norma $||x|| = \sum\limits_{i=0}^{m} |x^{(i)}(t_0)|$.

O funcțională liniară f din X asociază polinoamelor $1, t, t^2, \ldots, t^m$ anumite valori numerice complexe $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_m$ și polinomului x cu

$$x(t) = x(t_0) + x'(t_0)\,t + \ldots + \frac{x^{(m)}(t_0)}{m!}\,t_m$$

valorile numerice

$$f(x) = x(t_0)\,f_0 + x'(t_0)\,f_1 + \ldots + \frac{x^{(m)}(t_0)}{m!}\,f_m.$$

Invers, pe baza acestei relații cu ajutorul unor numere arbitrare $f_0, \ldots, f_m$ putem defini o funcțională liniară. Aceasta este de asemenea continuă, deoarece $||f|| = \max\limits_{i=0,\ldots,m} (|f_i|/i!)$.

4. *Hiperplane*. O ecuație liniară în variabilele x_1, x_2, x_3 determină un plan în spațiul tridimensional $\mathbf{R}^3$. O extindere a acestei situații este următoarea: totalitatea elementelor x ale spațiului liniar X care satisfac ecuația $f(x) = \alpha$ se numește *hiperplan*, H; $f(x)$ este o funcțională liniară continuă iar α un număr. *Distanța* $d(y, H)$ a unui element $y \in X$ față de hiperplanul H este definită a fi limita inferioară cea mai mare a distanțelor $||y - x||$, $x \in H$, astfel încît $d(y, H) = \inf\limits_{x \in H} ||y-x||$. În geometria tridimensională în care este folosită valoarea absolută a distanței, o expresie a distanței este dată de forma normală a lui Hesse. În mod similar într-un spațiu liniar normat general X avem $d(y, H) = |f(y) - \alpha|/||f||$. Dacă X este un spațiu complet, atunci ca și în spațiul tridimensional, există un element $x_0 \in H$ a cărui distanță $||y - x_0||$ este egală cu distanța elementului y față de hiperplanul H.

Problemele de optimizare din teoria controlului necesită în mod frecvent determinarea distanței de la un element dat y la un hiperplan.

5. *Unui element u al unui spațiu liniar normat îi corespunde o funcțională liniară continuă f de normă* 1 *astfel încît* $||u|| = f(u)$.

Norma unui element u, cu care este cîteodată dificil de lucrat, poate fi reprezentată ca valoarea unei funcționale liniare. De exemplu, dacă $x(t) = [\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)]$ este o funcție reprezentată printr-un vector k-dimensional cu componente reale derivabile $\xi_i(t)$, unde t este o variabilă reală și dacă s este o altă valoare a variabilei independente, atunci poate fi aflată o estimare pentru norma $||x(t) - x(s)||$; $\sum\limits_{i=1}^{k} |\xi_i(t) - \xi_i(s)|$ în funcție de diferența $s - t$. Pe baza teoremei menționate ne imaginăm o funcțională f pe spațiul $\mathbf{R}^k$, aleasă astfel încît $f(x(t) - x(s)) = ||x(t) - x(s)||$ și $||f|| = 1$; astfel ne imaginăm k numere reale $f_1, \ldots, f_k$ care satisfac condițiile $||x(t) - x(s)|| = \sum\limits_{i=1}^{k} f_i [\xi_i(t) - \xi_i(s)]$ și $\max\limits_{i=1,\ldots,k} |f_i| = 1$. Fie $\varphi(t) = \sum\limits_{i=1}^{k} f_i \xi_i(t)$ și folosind prima teoremă a valorii medii din calculul diferențial, găsim $||x(t) - x(s)|| = \varphi(t) - \varphi(s) = \varphi'(\tau)(t - s) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{k} |\xi_i'(\tau)| \cdot |t - s|$ pentru un punct τ oarecare cuprins între s și t.

6. *Extensia funcționalelor*. În mod ocazional o funcțională liniară continuă este definită numai pe un subspațiu liniar. În acest caz se ivește problema definirii funcționalei și pe restul spațiului astfel încît ea să rămînă liniară și continuă și dacă este posibil să-și păstreze norma. Teoreme privind o astfel de extensie au fost demonstrate de exemplu de HAHN, BANACH, KREIN și RUTMAN.

40.3. Folosirea metodelor analizei funcționale în teoria aproximațiilor

Noțiuni și teoreme ale analizei funcționale se folosesc azi în aproape toate domeniile analizei. În special, în cazul *teoriei aproximațiilor*, în teoria ecuațiilor diferențiale și integrale superioritatea metodelor analizei funcționale este de necontestat. Teoria metodelor de aproximare se ocupă cu diferite metode pentru găsirea unei soluții aproximative a ecuațiilor de diferite tipuri. Schema abstractă a acestor ecuații este următoarea: fie un operator A care face să corespundă elementelor x ale unui spațiu X complet, normat elementele y ale unui spațiu Y normat. Dorim să găsim elementul x^* din X care cu ajutorul operatorului A trece în elementul O al spațiului Y, pentru care deci avem $A(x^*) = O$. O metodă care duce de

multe ori la rezultat este metoda iterațiilor. Reformulăm ecuația $A(x^*) = O$ astfel încît se ajunge la forma echivalentă $x = B(x)$. Alegem apoi o aproximare inițială x_0 și apoi se obțin alte aproximări $x_1 = B(x_0)$, $x_2 = B(x_1)$, $x_3 = B(x_2)$, ..., $x_n = B(x_{n-1})$, ... Șirul $\{x_n\}$ de obicei tinde către soluția x^*, conform *teoremei punctului fix.*

Teorema punctului fix a lui Banach. *Dacă B este o imagine a unei submulțimi M a unui spațiu Banach în el însuși și dacă B satisface pentru oricare elemente* $x, y \in M$ *condiția lui Lipschitz* $||B(x) - B(y)|| \leqslant L\, ||x - y||$ *cu constanta lui Lipschitz* $L < 1$, *atunci pentru oricare aproximare inițială arbitrară* x_0 *din M șirul aproximațiilor* $x_1 = B(x_0)$, $x_2 = B(x_1)$, ..., $x_n = B(x_{n-1})$, ... *converge către soluția unică* x^* *din M a ecuației* $x = B(x)$ *iar o estimare a erorii este dată de* $||x^* - x_n|| \leqslant [L/(1 - L)]||\, x_n - x_{n-1}|| \leqslant [L^n/(1-L)]||x_1 - x_0||$.

Exemplul 1. Fie $X = Y$ o mulțime de numere reale, $A(x) \equiv x - \sin x - 1$, $B(x) \equiv \equiv \sin x + 1$. Submulțimea M, intervalul $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2$, va fi aplicat prin $B(x)$ în intervalul $\left(\frac{\pi}{2} < 1 + \sin 2 \leqslant x \leqslant 2\right.$. Deoarece pentru orice $x, y \in M$, $|B(x) - B(y)| = |\sin x - \sin y| \leqslant L \cdot |x - y|$, condițiile de convergență cu $x_0 = \frac{\pi}{2}$ și $L = |\cos 2|$ sînt îndeplinite. Obținem aproximările succesive următoare: $x_1 = 2$, $x_2 = \sin 2 + 1 = 1{,}909$, ... Estimînd eroarea, obținem $|x^* - x_2| \leqslant \leqslant 0{,}066$. Soluția exactă corectă pînă la a treia zecimală este $x^* = 1{,}935\ldots$

Exemplul 2. Fie $X = Y = L_2(0, 1)$, $[A(x)](s) = x(s) - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x(t)}{1 + s + t}\,dt - 2 (= 0$ pentru $0 \leqslant s \leqslant 1)$, $[B(x)](s) = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x(t)}{1 + s + t}\,dt + 2$, $M = L_2(0, 1)$. Imaginea unei funcții integrabile de două ori obținută prin B este de asemenea o funcție integrabilă de două ori. Pentru orice $x, t \in L_2(0, 1)$ avem

$$||B(x) - B(y)||^2 = \int_0^2 \left| \frac{1}{2} \cdot \frac{x(t) - y(t)}{1 + s + t}\,dt \right|^2 \leqslant \frac{1}{4}\int_0^1 |x(t) - y(t)|^2\,dt = \frac{1}{4}\,||x - y||^2.$$

Condițiile teoremei lui Banach sînt îndeplinite cu $L = 1/2$ și o funcție integrabilă inițială arbitrară, de ex. $x_0(s) = 0$. Obținem șirul aproximațiilor $x_1(s) = 2$, $x_2(s) = \ln[(2 + s)|(1 + s)] + 2$, ... Estimarea erorii ne indică pentru funcția x_2 eroarea medie pătratică $||x^* - x_2|| = \left(\int_0^1 |\ln[2 + s)/(1 + s)]|^2\,ds\right)^{1/2} = 0{,}48$. Valoarea exactă a soluției $x^*(s)$ nu este cunoscută.

41. Fundamentele geometriei. Geometrie euclidiană și geometrie neeuclidiană

Geometria euclidiană este cel mai vechi și din punct de vedere istoric cel mai important exemplu de disciplină științifică bazată pe deducție. Pînă în vremurile noastre ea a fost un model de știință exactă și a constituit punctul de plecare pentru dezvoltarea sistematică a fundamentelor geometriei. Această dezvoltare a început în secolul al XIX-lea odată cu descoperirea geometriei neeuclidiene, a atins zenitul în studiile lui HILBERT și acum acoperă un cîmp larg de investigații.

41.1. Fundamentele geometriei

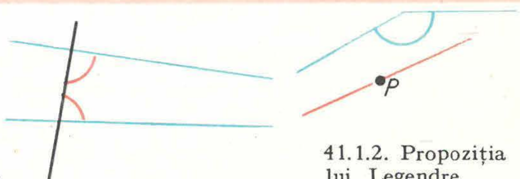
Elementele lui Euclid. *Elementele (Stoicheia)* lui EUCLID din Alexandria (365—300 î.e.n.) conțin o sistematizare a cunoștințelor de matematică din timpul său. Întîlnim teoreme din *teoria numerelor*, de exemplu algoritmul lui Euclid și o demonstrație referitoare la existența unei infinități de numere prime, din *geometria în spațiu* ca de exemplu teoria poliedrelor regulate; de asemenea întîlnim teoria proporțiilor și asemănării împreună cu o discuție asupra cantităților *incomensurabile* cît și probleme din geometria plană. Importanța lucrării constă în faptul că teoremele de geometrie — cu unele rezerve — sînt demonstrate fără a recurge la lumea reală ci numai prin *deducții logice* pe baza unui șir de axiome.

ARISTOTEL (cca 384—322 î.e.n.) a privit axiomele ca afirmații care sînt de la sine înțelese provenind direct din experiențe și conținînd numai concepte al căror înțeles era clar. Din această cauză EUCLID a folosit și *definiții* ale conceptelor de bază, de ex. *un punct este ceva care nu are părți*. Dar în deducții reale el nu folosește aceste definiții. S-a arătat numai în sec. al 19-lea că EUCLID a folosit anumite proprietăți de ordine fără să le definească ca axiome. Aceste deficiențe ale sistemului de axiome al lui Euclid au fost îndepărtate de HILBERT în anul 1899 în cartea sa *„Grundlagen der Geometrie"* (Fundamentele geometriei) care de asemenea răspunde la anumite întrebări cu un caracter nou și fundamental. După Hilbert, problemele referitoare la natura conceptelor de bază sau la legătura lor cu obiectele reale nu aparțin teoriei matematice considerate ci *metateoriei* sale. Axiomele stabilesc numai relații sigure între conceptele fundamentale. Multe dintre teoremele lui Euclid sînt în principiu la fel de ușor de verificat ca însăși axiomele; astfel pentru modul de gîndire modern faptul că se folosește o anumită dezvoltare axiomatică este o chestiune de convenție.

Axioma paralelelor a lui Euclid. Formularea acestei axiome sau a postulatului de către Euclid este de așa natură încît pare mai puțin evidentă decît celelalte.

Versiunea lui Euclid a axiomei paralelelor. Dacă o dreaptă intersectează două alte drepte astfel încît suma unghiurilor interioare de pe aceeași parte a dreptei este mai mică decît două unghiuri drepte, atunci cele două drepte se intersectează pe această parte (fig. 41.1.1).

O serie întreagă de afirmații aparent evidente conduc la o serie de verificări false ale axiomei. Majoritatea acestor afirmații sînt echivalente cu axioma însăși.



41.1.1. Postulatul paralelelor al lui Euclid

41.1.2. Propoziția lui Legendre

Propoziții echivalente cu postulatul paralelelor

1. **Poseidonius** (cca 135 — 51 î.e.n): **Două drepte paralele sînt echidistante.** 2. **Proclus** (cca 500 e.n.): **Dacă o dreaptă intersectează una din două drepte paralele atunci o intersectează și pe cealaltă.** 3. **Saccheri** (1700 e.n.): **Suma unghiurilor interioare ale unui triunghi este egală cu două unghiuri drepte.** 4. **Legendre** (1752—1833). **O dreaptă care trece printr-un punct interior al unui unghi care nu este drept intersectează cel puțin una din laturile unghiului** (fig. 41.1.2). 5. **Farkas Bólyai** (1775—1856): **Prin oricare trei puncte necoliniare se poate construi un cerc.**

Importanța acestei axiome a fost pusă în evidență cînd GAUSS (1777—1855), LOBACEVSKI (1792—1856) și Janos BÓLYAI (1802—1850) au construit independent unul de altul o geometrie care nu respectă postulatul paralelelor. Această geometrie neeuclidiană are aceeași consistență ca și geometria euclidiană. Zece ani după moartea lui Lobacevski, BELTRAMI a găsit prima realizare a acestei geometrii pe o suprafață curbă, iar mai tîrziu KLEIN a inclus și geometria euclidiană și cea neeuclidiană în cadrul geometriei proiective.

Caracterizarea axiomatică a geometriei euclidiene. Geometria euclidiană este o *teorie categorică* în care orice afirmație este fie adevărată, fie demonstrabilă ca falsă în sensul că pre-

supunerea adevărului ei duce la contradicții. Pe de altă parte, ea este intuitiv legată de experiența directă și multe teoreme își au originea în experimente cu rigla, compasul și instrumentele similare. Acest aspect empiric a devenit din ce în ce mai puțin pregnant odată cu creșterea importanței geometriei analitice, care identifică planul euclidian cu mulțimea perechilor de numere reale. HILBERT a clarificat complet această legătură și a demonstrat că sistemul lui de axiome este categoric, arătînd că orice două modele ale lui sînt izomorfe, tipul de izomorfism este al aceluia dintre planul euclidian și corpul numerelor reale. Extinzînd interpretarea sa axiomatică asupra altor sisteme de numere, HILBERT a putut utiliza o caracterizare axiomatică a numerelor reale, bazată în esență pe rezultatele lui DEDEKIND, pentru a demonstra că sistemul său de axiome, care caracterizează geometria euclidiană este *complet*.

Conceptele de bază ale *sistemului de axiome al lui Hilbert* pentru geometria euclidiană sînt *punctul*, *dreapta*, *incidența* ca relație între puncte și drepte, *ordonarea* ca relație între trei puncte și *convergența segmentelor de dreaptă* și a *unghiurilor*. Axiomele sînt clasificate în patru grupe: A — *axiome de incidență*; B — *axiome de ordine*; C — *axiome de congruență*; D — *axiome de continuitate*; *în fiecare grupă sînt utilizate concepte din grupa precedentă*. Pentru geometria în spațiu trebuie introdus un nou concept, cel de plan iar axiomele trebuie modificate. Noțiunea de sistem categoric de axiome a fost considerabil adîncită de rezultatele lui TARSKI asupra *completitudinii* și *decidabilității* geometriei euclidiene cu condiția ca aceasta să fie privită ca o *teorie elementară* în care nu intervin sau pot fi evitate în principiu variabile de mulțimi. Exceptînd anumite considerații legate de continuitate, acest lucru este realizabil. Axioma completă de continuitate a lui DEDEKIND trebuie înlocuită printr-o schemă de continuitate care cere existența intersecțiilor numai pentru acele *tăieturi Dedekind* ale dreptelor care pot fi definite cu ajutorul conceptelor geometrice fundamentale (v. cap. 15). Rezultatul lui TARSKI constă în aceea că orice afirmație a geometriei elementare poate fi demonstrată ca fiind adevărată sau falsă, pornind de la axiome, cu ajutorul logicii formale, și că există un algoritm pentru a decide dacă o anumită afirmație poate fi dedusă din axiome. Un asemenea algoritm, care ar putea fi realizat pe un calculator, ar putea avea chiar utilitate practică, întrucît există multe probleme nebanale ale geometriei elementare cum ar fi partiționarea poligoanelor în altele mai simple, care ar putea fi rezolvate, în acest caz, mecanic.

Așa cum decidabilitatea geometriei euclidiene se reduce la cea a aritmeticii numerelor reale, prin intermediul geometriei analitice, decidabilitatea a fost demonstrată și pentru alte teorii geometrice, de exemplu geometria neeuclidiană (hiperbolică).

Întrucît alegerea conceptelor de bază și a axiomelor geometriei euclidiene este în mare măsură arbitrară, s-a pus problema dacă sistemul lui HILBERT ar putea fi simplificat.

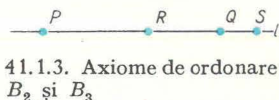
Dacă conceptele de dreaptă și incidență se exprimă cu ajutorul unei relații cu trei variabile, coliniaritatea punctelor, col (A, B, C), a cărei semnificație intuitivă este că A, B și C sînt pe aceeași dreaptă, atunci axioma paralelelor poate fi reformulată astfel:

Axioma paralelelor în termenii coliniarității: Dacă A, B și P sînt puncte distincte necoliniare, atunci există un punct Q astfel încît col (A, B, R) *și* col (P, Q, R) *nu pot avea loc simultan pentru nici un R; dacă Q' este orice alt punct cu aceleași proprietăți, atunci are loc* col (P, Q, Q').

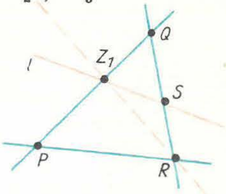
Coliniaritatea poate fi redusă ușor la relația de *ordonare*, întrucît trei puncte sînt coliniare dacă și numai dacă unul dintre ele se află între celelalte două. Este ceva mai greu de arătat că relația de ordonare se poate exprima în termenii coliniarității. *Relațiile metrice* pot fi și ele reduse; într-adevăr, toate conceptele de bază ale lui HILBERT pot fi formulate în termenii unei singure relații de trei argumente, de ex. cir (A, B, C) care înseamnă că A și B sînt echidistante față de C. Pe de altă parte, se poate demonstra că este imposibilă fundamentarea geometriei euclidiene pe o singură relație binară.

Sistemul de axiome al geometriei plane, bazat pe deplasări. Fundamentarea geometriei pe baza teoriei grupurilor, pornind de la conceptul de deplasare, diferă de alte sisteme axiomatice ale geometriei plane, mai mult sau mai puțin înrudite cu sistemul lui Hilbert, prin aceea că *axiomele de congruență* sînt înlocuite cu afirmații despre *proprietățile grupului deplasărilor*. Unele afirmații metateoretice sînt folosite pentru demonstrarea propozițiilor de congruență. Conceptele de bază sînt *punctul*, *linia* (ca mulțime distinctă de puncte), *ordonarea* și *deplasarea*. *Axiomele de incidență* și de *ordonare* se păstrează, dar axiomele de congruență sînt înlocuite prin afirmații asupra *proprietăților grupului deplasărilor*. Următorul sistem de axiome duce la *geometria absolută* dacă se omite axioma paralelelor, respectiv la geometria neeuclidiană, dacă axioma paralelelor este înlocuită prin negația ei. Simbolul P/l înseamnă

că punctul P și dreapta l sînt incidente, cu alte cuvinte „l trece prin P", „P se află pe l" sau „l conține pe P".



41.1.3. Axiome de ordonare B_2 și B_3



41.1.4. Axioma de ordonare B_3

Axiome de incidență. — I_1. Oricare ar fi două puncte, există exact o dreaptă care trece prin aceste puncte; orice dreaptă conține cel puțin două puncte. — I_2. Nu toate punctele se află pe o singură dreaptă. — I_3. Postulatul paralelelor: pentru orice dreaptă l și orice punct P care nu se află pe l există o singură dreaptă care trece prin P și nu are nici un punct comun cu l.

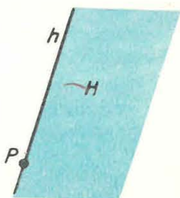
Axiome de ordonare. — B_1. Dacă R se află între P și Q, atunci R se află între Q și P și P, Q, R sînt puncte distincte de pe aceeași dreaptă. — B_2. Din trei puncte distincte pe o dreaptă exact unul se află între celelalte două. — B_3. Dacă R se află între P și Q și Q se află între P și S, atunci R se află între P și S (fig. 41.1.3). — B_4. Dacă P, Q și R nu sînt coliniare și dacă dreapta l intersectează PQ într-un punct Z_1 între P și Q, atunci l conține pe R sau un punct S aflat între R și P sau între R și Q (fig. 41.1.4).

Definiții: D_1: Se spune că P și Q se află pe aceeași *parte a dreptei l în raport cu punctul O*, dacă $P, Q, O | l$ și O nu este între P și Q.

Cele două clase de echivalență determinate de această relație, pentru l și $O|l$ date, se numesc *semidreptele lui l* cu vîrful în O. —D_2. P, $Q \nmid l$ se află de aceeași *parte a dreptei l dacă nici un punct al lui l* nu se află între P și Q. Cele două clase de echivalență generate de această relație pentru o dreaptă dată l se numesc semiplane mărginite de l (fig. 41.1.5). — D_3. Un triplet (P, h, H) format dintr-un semiplan H, o semidreaptă h pe frontiera lui și vîrful O al lui h se numește *steag* (fig. 41.1.5). —D_4. Un *automorfism* al unui plan este o aplicație bijectivă a planului pe el însuși, astfel încît un punct R se află între punctele P și Q dacă și numai dacă R^α se află între P^α și Q^α.



41.1.5. Semiplanele mărginite de dreapta l



41.1.6. Steagul definit de tripletul (P, h, H)

Se arată ușor că automorfismele de ordine duc dreptele, semidreptele și semiplanele în drepte, respectiv semidrepte și semiplane. În particular, steagurile sînt duse în steaguri. *Deplasările* sînt automorfisme care satisfac următoarele axiome:

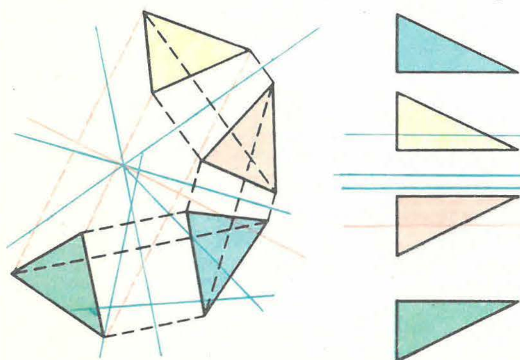
Axiomele deplasărilor: —M_1: Dacă α și β sînt deplasări, atunci compunerea lor (întîi α, apoi β) este tot o deplasare. —M_2: aplicația identică 1 este o deplasare. —M_3. Dacă F și F' sînt două steaguri, atunci există o deplasare și numai una care duce pe F în F'. —M_4. Pentru orice două puncte P și Q există o deplasare care duce pe P în Q și pe Q în P; pentru orice două semidrepte h, h' avînd un vîrf comun există o mișcare care duce pe h în h' și pe h' în h.

O consecință a acestor axiome este faptul că deplasările formează un *grup*; în particular dacă α este o deplasare, atunci și α^{-1} este o deplasare, deoarece dacă α duce un steag F arbitrar în F', atunci, conform lui M_2, există o deplasare β care duce pe F' în F. Aplicația $\gamma = \alpha \cdot \beta$ duce pe F în el însuși deci γ trebuie să fie identitatea, altminteri ar fi o altă deplasare care duce pe F în el însuși.

O altă consecință este faptul că o deplasare este unic determinată prin trei puncte necoliniare și imaginile lor.

Definițiile congruenței și simetriei. D_5. *O pereche de puncte P, Q se numește congruentă cu altă pereche P', Q', dacă există o transformare care duce pe P în P' și pe Q în Q'.* D_6. *O transformare care păstrează o dreaptă fixă și numai una se numește simetrie în raport cu o dreaptă. Simetriile* ρ *sînt involuții, adică* $\rho \neq 1$, $\rho^2 = 1$.

Teorema fundamentală referitoare la simetrii afirmă că produsul a trei simetrii în raport cu drepte care au un punct comun sau admit o perpendiculară comună este tot o simetrie (fig. 41.1.7). Această afirmație, precum și celelalte, pot fi demonstrate fără a face apel la postulatul paralelelor și, prin urmare, sînt valabile și în geometria neeuclidiană. Pentru demonstrații care evită utilizarea postulatului paralelelor este convenabilă introducerea unui *calcul al simetriilor*. În loc de sistemul de concepte din teoria grupurilor introdus mai sus, se pornește numai de la sistemul Γ al simetriilor care este privit ca un sistem generator format din *involuțiile* unui grup (grupul deplasărilor). Dreptele sînt identificate cu elemente din Γ astfel încît elementele din Γ vor fi și ele numite *drepte*. *Punctele* sînt acele produse lm de două drepte l și m care sînt și involuții, adică pentru care $(l \cdot m)(l \cdot m) = 1$, ceea ce este echivalent cu $l \cdot m = m \cdot l$. Deci, intuitiv, punctele sînt identificate cu simetriile prin ele. Un punct P este incident cu o dreaptă l dacă $P \cdot l = l \cdot P$. Definind în același mod toate celelalte concepte de bază, teoremele geometrice devin reguli de calcul pentru grupul generat de Γ. Acest calcul al simetriilor reprezintă un nou procedeu, diferit de geometria analitică clasică, de transformare a geometriei în algebră.



41.1.7. Trei reflexii succesive ale căror axe trec printr-un punct comun sau au o perpendiculară comună formează o reflexie

Introducerea coordonatelor. În afară de caracterizarea axiomatică completă a unui singur model specific unei geometrii, prezintă interes și relațiile dintre clase de modele pentru aserțiuni geometrice și caracterizările lor algebrice. Acest tip de probleme duce la studii referitoare la numărul minim de axiome necesare pentru asigurarea existenței unor proceduri standard din teoria modelelor sau teoria reprezentărilor, de exemplu, pentru introducerea coordonatelor. Teoriile care au fost create pentru a trata asemenea probleme au o terminologie geometrică, dar metodologia lor se aseamănă cu cea a teoriei grupurilor sau cu cea a teoriei laticelor; exemple de astfel de teorii sînt teoria spațiilor vectoriale sau teoria planelor afine sau proiective.

Modelele axiomelor I_1, I_2 și I_3 formează clasa *planelor afine*, care încă nu au fost complet clasificate pînă în prezent. Printre ele, *planele de translație* se disting prin faptul că pentru orice două puncte există cel puțin o translație care duce unul din puncte în celălalt. De asemenea ele trebuie să satisfacă *mica teoremă a lui Desargues*.

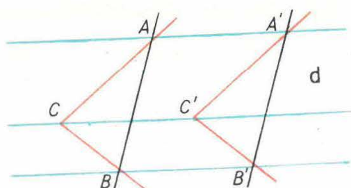
Mica teoremă d *a lui Desargues. Dacă două perechi de vîrfuri din două triunghiuri se află pe drepte paralele și dacă două perechi de laturi corespunzătoare sînt paralele, atunci și dreptele care constituie a treia pereche de laturi sînt paralele (fig.* 41.1.8).

Se poate arăta că translațiile unui plan de translație T formează un spațiu vectorial peste un corp K (spațiul scalarilor lui T), a cărui dimensiune peste K este fie pară, fie infinită.

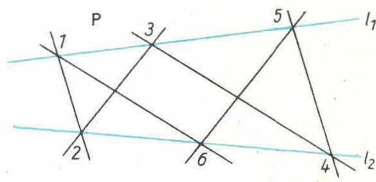
Cel mai elegant mod de a defini scalarii se realizează cu ajutorul unei aplicații liniare speciale a grupului translațiilor.

Dimensiunea spațiului vectorial al translațiilor este egală cu 2 dacă planul T este un plan al lui Desargues, adică dacă este valabilă marea teoremă D a lui Desargues:

Teorema D *a lui Desargues. Dacă dreptele duse prin vîrfurile corespunzătoare a două triunghiuri sînt concurente într-un singur punct și dacă două perechi de laturi corespunzătoare sînt paralele, atunci și dreptele care formează a treia pereche de laturi sînt paralele* (fig. 41.1.8).



41.1.8. Teorema lui Desargues D și mica teoremă a lui Desargues d



41.1.9. Teorema lui Pappus P

Afirmația D este necesară numai pentru a demonstra că dacă $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in T$ cu $\mathbf{a} \neq 0$ și $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, atunci există cel puțin o aplicație liniară α a grupului de vectori, care duce pe **a** în **b**. Deci, dacă se alege o origine O și două axe de coordonate l și m prin O, atunci orice punct P poate fi reprezentat în mod unic prin vectorul său de poziție, iar acest vector poate fi descompus în componentele sale relative la l și m. Coordonatele se obțin asociind elementele corpului de scalari cu vectorii de pe o dreaptă și deci cu punctele de pe ea. Dacă se alege un vector arbitrar $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ pe dreaptă, atunci oricărui vector **a** paralel cu **e** i se asociază scalarul care duce pe **e** în **a**.

Propozițiile d și D sînt exemple de așa-numite *teoreme de închidere*. Un alt cuplu de *teoreme de închidere* îl constituie teoremele p și P ale lui Pappus. Valabilitatea lui P este o condiție necesară și suficientă pentru ca corpul de scalari K să fie comutativ.

Marea teoremă P *a lui Pappus. Dacă vîrfurile unui hexagon se află, alternativ, pe două drepte* l_1 *și* l_2 *și nici unul din vîrfuri nu coincide cu intersecția lui* l_1 *și* l_2 *și dacă două perechi de laturi opuse sînt paralele, atunci și laturile aparținînd celei de-a treia perechi sînt paralele* (*fig.* 41.1.9). *Mica teoremă* p *a lui Pappus afirmă același lucru, cu ipoteza suplimentară că* l_1 *și* l_2 *sînt paralele.*

Dacă axiomele de incidență sînt acceptate, atunci aceste teoreme de închidere sînt logic dependente una de alta în următoarea ordine: P → D → d → p. Este o problemă deschisă dacă ultima săgeată poate fi inversată; primele trei nu pot fi inversate. Totuși, pentru *plane afine finite*, avem P ↔ D deoarece, conform teoremei lui Wedderburn, orice corp finit este comutativ. Deocamdată nu s-a găsit o demonstrație geometrică a acestui fapt.

41.2. Geometria neeuclidiană

Legăturile dintre geometria euclidiană, neeuclidiană și cea proiectivă au fost prima dată stabilite în jurul anului 1860 de Arthur CAYLEY (1821—1895) și dezvoltate de Felix KLEIN (1849—1925) un deceniu mai tîrziu. Acest lucru justifică afirmația lui Cayley: „Geometria proiectivă reprezintă întreaga geometrie".

Geometria proiectivă poate fi descrisă printr-un sistem de axiome de incidență, ordonare și continuitate care diferă de axiomele geometriei euclidiene în principal în următoarele puncte: orice două drepte se intersectează; axiomele de ordonare sînt înlocuite prin axiome referitoare la o relație de separare a perechilor de puncte, deoarece dreapta proiectivă trebuie considerată întotdeauna ca fiind ciclic închisă.

Trecerea de la geometria proiectivă la geometria euclidiană sau la cea neeuclidiană se face prin introducerea noțiunii de paralelism și de ortogonalitate.

Două drepte sau plane sînt paralele dacă se intersectează în planul impropriu al spațiului. În geometria euclidiană există o singură dreaptă paralelă la o altă dreaptă dusă printr-un punct exterior dreptei, deoarece există o singură dreaptă care trece prin punctul dat și punctul impropriu de pe dreapta dată. Dacă în planul impropriu se introduce o *polaritate absolută*, adică o polaritate fără o curbă fundamentală, atunci se poate defini ortogonalitatea pentru spațiul euclidian.

Dacă, în loc să avem un plan impropriu, declarăm ca fiind improprie o mulțime oarecare, de ex. o cvadrică în spațiul proiectiv, aceasta împarte spațiul în două regiuni: interioară, respectiv exterioară ei. O polarizare a întregului spațiu prin considerarea suprafeței improprii ca fiind cvadrică fundamentală definește „ortogonalitatea" pentru drepte și plane în interiorul suprafeței, în felul următor: se spune că o dreaptă este ortogonală la un plan, dacă ea trece prin polul planului. Se va vedea mai departe că într-un plan, care acum constă numai din partea interioară suprafeței fundamentale, există mai multe paralele la o dreaptă dată, duse printr-un punct exterior dreptei. În acest mod se obține geometria hiperbolică descoperită de GAUSS, BOLYAI și LOBACEVSKI.

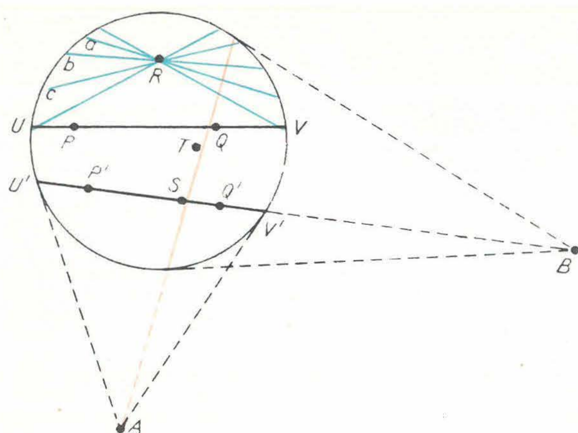
Dacă în planul proiectiv nu se delimitează nici o suprafață, iar ortogonalitatea se definește printr-o polaritate arbitrară pe tot spațiul, fără suprafață fundamentală, atunci geometria neeuclidiană care rezultă este *geometria eliptică* care a fost studiată pentru prima dată de Bernhard RIEMANN (1826—1866).

Geometria hiperbolică. Geometria hiperbolică plană se obține cel mai ușor dacă în sistemul de axiome al geometriei euclidiene înlocuim axioma paralelelor cu următoarea axiomă: pentru orice dreaptă dată și orice punct exterior dreptei, există cel puțin două drepte care trec prin acel punct și nu intersectează dreapta dată.

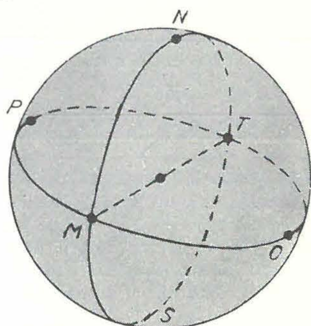
Pentru a obține un model pentru această geometrie, se încearcă definirea ortogonalității cu ajutorul unei polarități, cu o curbă fundamentală (vezi cap. 25). În cazul planului se alege drept curbă fundamentală un cerc (fig. 41.2.1). Punctele de pe cerc sînt considerate ca fiind punctele improprii ale modelului. Punctele și coardele din interiorul cercului sînt punctele proprii și dreptele geometriei hiperbolice (în cele ce urmează, ele vor fi numite h-puncte și h-drepte). Se verifică ușor că h-punctele și h-dreptele satisfac axiomele de incidență, cu excepția postulatului paralelelor. De ex. fiind date h-dreapta PQ și h-punctul R, atît RU cît și RV sînt „paralele" la PQ; U și V nu sînt h-puncte, dar am fi putut lua h-dreptele a, b și c. Pentru a defini h-ortogonalitatea, recurgem la polaritatea în planul euclidian avînd drept curbă fundamentală cercul. h-dreapta ST este h-ortogonală la h-dreapta $P'Q'$ dacă polul A al dreptei euclidiene $P'Q'$ se află pe dreapta euclidiană ST, iar polul B al dreptei euclidiene ST se află pe dreapta euclidiană $P'Q'$. Întrucît polara oricărui punct al dreptei euclidiene $P'Q'$ trece prin A, este suficient să ducem o dreaptă prin S și A sau prin T și A pentru a duce o h-perpendiculară la $P'Q'$. h-congruența se definește în felul următor: două h segmente PQ și $P'Q'$ se numesc h-congruente dacă valorile absolute ale logaritmilor rapoartelor anarmonice formate prin intersecția dreptelor lor cu arcul fundamental sînt egale: PQ este h-congruent cu $P'Q'$ dacă $|\ln D(P, Q; U, V)| = |\ln D(P', Q'; U', V')|$. Definind pe aceeași bază h-congruența h-unghiurilor, se poate arăta că suma unghiurilor unui h-triunghi este mai mică decît unghiuri drepte și că două h-triunghiuri sînt h-congruente dacă au cele trei h-unghiuri egale.

Cele expuse mai sus oferă unele informații referitoare la grupul de transformări care stă la baza geometriei hiperbolice. După KLEIN, problema este următoarea: ce grup de transformări lasă invariante conceptele definite mai sus? Pentru a răspunde la această întrebare, modelul se interpretează din nou ca un obiect în planul euclidian. În primul rînd este clar că aplicațiile relevante trebuie să fie colineații care duc atît cercul cît și interiorul său pe ele însele. Exemple de asemenea aplicații sînt rotațiile cercului în jurul centrului său sau simetrii în raport cu un diametru; în schimb translațiile, dilatările și contracțiile trebuie excluse. Colineațiile caracterizate mai sus formează un grup. Aplicațiile din acest grup păstrează congruența segmentelor și a unghiurilor. Invarianța congruenței segmentelor se datorește definiției cu ajutorul raportului anarmonic D. Aceste *colineații automorfe* ale cercului constituie grupul de congruență al modelului.

Geometria eliptică. Această geometrie nu se poate obține din cea euclidiană într-un mod atît de simplu ca cea hiperbolică, adică omițînd sau modificînd o singură axiomă, deoarece din axiomele de incidență, ordine și convergență ale geometriei plane euclidiene rezultă că pentru orice dreaptă există o alta care nu o intersectează. Deci aceste grupuri de axiome trebuie modificate, în particular orice două drepte trebuie să se intersecteze totdeauna. Geome-



41.2.1. Modelul geometriei hiperbolice



41.2.2. Modelul geometriei eliptice

tria eliptică este în esență identică cu *geometria sferică*. Se consideră suprafața sferei ca fiind planul eliptic, *el*-dreptele sînt cercurile mari ale sferei, iar un *el*-punct este o pereche de puncte diametral opuse ale sferei (fig. 41.2.2).

Două *el*-drepte au totdeauna un punct comun, deoarece orice două cercuri mari ale sferei se intersectează în două puncte diametral opuse. *El*-punctele (N, S) și (M, T) determină o *el*-dreaptă unică, anume $(NMST)$; în schimb, din punctul (N, S) se pot duce o infinitate de *el*-perpendiculare la *el*-dreapta $(MOTP)$. Dacă alegem ca distanță eliptică între două puncte lungimea arcului cel mai scurt de pe cercul mare care le unește, atunci $\pi/2$ va fi cea mai mare distanță în geometria eliptică. Suma unghiurilor unui *el*-triunghi este totdeauna mai mare decît două unghiuri drepte.

În cap. 17 s-a arătat că rotațiile sferei în jurul centrului ei formează un grup. În cazul de față, acest grup de transformări ale sferei este grupul de transformări de congruență ale geometriei plane eliptice.

42. Fundamentele matematicii

Dezvoltarea modernă a fundamentelor matematicii a început odată cu cea a logicii matematice pe la sfîrșitul secolului trecut. Și astăzi aceste două domenii sînt în strînsă legătură.

Fundamentele matematicii (sau *metamatematica*) conțin un spectru larg de probleme, de la investigațiile științifice ale diferitelor discipline matematice pînă la problemele filozofice legate de natura unor afirmații matematice și cunoașterea matematică. Atîta timp cît natura problemelor permite, analiza și clarificarea problemelor interesante se face cu aceeași precizie și rigurozitate cît este necesar pentru o tratare cu succes a problemelor matematice. Desigur, instrumentele matematice nu pot fi folosite întotdeauna fără restricții, întrucît obiectul discuției constă adesea în însăți clarificarea fundamentării acestor instrumente. Următoarea prezentare poate constitui o introducere în acest tip de probleme și poate lua în considerare numai anumite puncte de vedere. Cititorul interesat în probleme mai vaste ale fundamentelor matematice poate să le aprofundeze studiind lucrarea lui Andrei Mostovski „Treizeci de ani de studii asupra fundamentelor" (în: *Acta Philosophica Fennica*, Fasc. XVII, 1965.)

Se constată că metamatematica reprezintă cea mai avansată teorie științifică a unei discipline științifice specifice. Aceasta ne indică că matematica în mai mare măsură decît alte științe a fost pusă mai devreme în fața problemei unei analize critice a fundamentelor sale, avînd un grad mai înalt de abstractizare și rezultatele sale cerînd o precizie a definițiilor și a deducerii sale logice. Sistemul conceptelor unei teorii matematice prin care sînt reflectate anumite proprietăți ale realității obiective este aproape întotdeauna o idealizare sau o abstractizare pe baza teoriei mulțimilor cu toate că denumirile acestor concepte abstracte sînt în general împrumutate din sfera mai îngustă a aplicațiilor concrete, de exemplu conceptele abstracte de mulțime, măsură, algoritm și automate.

Matematica secolului XX și-a schimbat considerabil caracterul în comparație cu matematica celorlalte secole. Aproape toate disciplinele matematice sînt tratate într-un sens axiomatic-deductiv, astfel încît regulile admise în inferența matematică sînt precis stabilite (vezi capitolul 15). Oricum, în prezentarea esenței lor majoritatea teoriilor nu folosesc numai logica pură, ci și anumite părți ale teoriei mulțimilor sau aritmetica elementară atîta timp cît nu sînt contraindicate. Între altele, din rațiuni de economie de gîndire în procesul de cercetare și folosire a tehnicilor de demonstrare, se obișnuiește în tratarea practică a unei discipline matematice speciale depășirea cadrului restrîns al acestei discipline și al limbajului său caracteristic ajungîndu-se astfel la dezvoltarea *metateoriei* acestei discipline.

Una din cele mai arzătoare probleme ale metamatematicii este problema adevărului pentru afirmațiile matematice. Se poate afirma oare că orice propoziție matematică decretată adevărată este de fapt descrierea unei trăsături obiective, sau, cel puțin, că unele dintre aceste propoziții, de exemplu teoria privind posibilitatea bunei ordonări, sînt doar construcții de limbaj care pot fi justificate numai printr-un număr de aplicații folositoare? Această problemă va fi tratată în detaliu mai jos.

42.1. Direcții tradiționale ale gîndirii în filozofia matematicii

Investigațiile matematice au fost întotdeauna legate de o analiză critică a fundamentelor lor, corespunzătoare nivelului cunoașterii în acel timp; aceasta se aplică nu numai la perioada greacă, ci și la matematica din evul mediu și din perioada capitalismului timpuriu. Deoarece ne referim cîteodată la *rezultatele secolului XIX în fundamentele matematice*, acestea vor fi schițate pe scurt.

După o perioadă de rapidă dezvoltare a analizei, pe la mijlocul ultimului secol s-a făcut o cercetare atentă a fundamentelor ei. În afară de CAUCHY (1789—1857), K.F. GAUSS (1777—1855), K. WEIERSTRASS (1815—1897) și B. BOLZANO (1781—1848) trebuie amintite și numele lui R. DEDEKIND (1831—1916) și G. CANTOR (1845—1918). O problemă importantă a fost stabilirea definiției exacte a conceptului de număr real. Clarificarea conceptului de număr dată de DEDEKIND, WEIERSTRASS și CANTOR este o parte a ideilor în circulație.

1. **Logicism.** Independent unul de altul, G. FREGE (1848—1925) și DEDEKIND au dezvoltat teoria numerelor naturale „logic" sau cum se spune azi, pe baza teoriei mulțimilor. Înaintea tuturor FREGE a încercat să pună la baza teoriei numerelor naturale și apoi a întregii matematici, legile gîndirii pure și deci legile logicii. În terminologia lui KANT aceasta înseamnă demonstrarea caracterului analitic al propozițiilor matematice. FREGE a stabilit legătura dintre logică și matematică. A stabilit fundamentul unui program care este cunoscut sub denumirea de *logicism*. B. RUSSELL (1872—1970) a observat că structura lui Frege este inconsistentă și a dezvoltat un sistem îmbunătățit în binecunoscuta lucrare *Principia Mathematica* (împreună cu A.N. Whitehead). Esența acestei lucrări este demonstrarea faptului că întreaga matematică s-a dezvoltat pe baza teoriei mulțimilor.

O variantă a logicismului, o interpretare radicală care are ca scop să privească matematicile așa cum erau, ca un rezultat al gîndirii raționale este *platonismul matematic*; el apare, de exemplu, în ideile lui CANTOR privind fundamentele teoriei mulțimilor. În această interpretare mulțimile sînt obiecte ideale care există independent de activitatea intelectuală. Sarcina investigațiilor matematice este de a găsi legile care guvernează lumea generală a obiectelor, *universul lui Cantor*.

Într-un anumit sens logicismul este absorbit de fundamentarea matematicii pe teoria mulțimilor care va fi descrisă detaliat mai departe.

2. **Formalism.** Interpretarea formală a apărut ca un răspuns la greutățile teoriei cunoașterii exprimate în logicism. Un pas important în această direcție este cartea apărută în 1899 *Grundlagen der Geometrie (Fundamentele geometriei)* a lui HILBERT (1862—1943). Aici a fost arătat pentru prima dată în cazul geometriei ce înseamnă o axiomatică formală și o analiză metalogică. Programul unei fundamentări formaliste a matematicii a fost formulat în final de HILBERT în 1920. Pe baza acestui program, și alte domenii matematice ca teoria numerelor, analiza și teoria mulțimilor, care prin natura lor păreau la prima vedere a fi specificate prin conținutul lor, trebuie să fie înțelese ca teorii formale. Prima problemă a fundamentelor pentru un cercetător este stabilirea formală că sistemul este necontradictoriu, adică a arăta în concluzie că afirmația și rigoarea sa nu sînt ambele derivate din axiomele obținute prin intermediul legilor logice. Sarcina este de a le asocia cu metode absolut sigure. Printre aceste metode pe care HILBERT le numește *finite* găsim metoda analizei combinatorice elementare, în particular principiul demonstrației prin inducție matematică, dar nu și pe acelea ale teoriei mulțimilor transfinite, numite *metode infinite*. Rezultatele acestea se găsesc în cele două volume *Grundlagen der Mathematik* (*Fundamentele matematicii*) ale lui HILBERT și BERNAYS care alături de *Principia Mathematica* se află printre cele mai semnificative lucrări din domeniul fundamentelor matematicii ale acestui secol.

Încercarea originală a lui HILBERT a trebuit să fie revizuită ținînd cont de rezultatele lui I. GÖDEL (1906). Unul din aceste rezultare afirmă că orice demonstrație a faptului că un sistem formal este necontradictoriu necesită metode exterioare acelora furnizate de sistemul însuși, prin urmare, nu se poate demonstra că teoria numerelor este necontradictorie pe baza unor metode finite în sensul strict.

Astăzi nu s-a căzut încă de acord asupra tipului și rangului extensiilor admisibile ale metodelor finite; una dintre aceste posibilități este încorporarea funcționalelor recursive. Nu este posibil a merge mai departe cu aceste probleme în cadrul lucrării de față; ne vom limita la a spune că investigațiile finite nu sînt limitate la problema libertății de contradicție ci se referă, de exemplu, la probleme de decizie și, mai general, la analiza miezului problemelor in fundamentele matematicii și în rezultatele metamatematice de natură infinită.

3. **Intuiționism.** Acest punct de vedere, care este complet opus interpretării logice și formale, a fost susținut de L.E. Brouwer (1881—1966). Idei similare au fost dezvoltate mai devreme de L. KRONECKER (1823—1891) și H. POINCARÉ (1854—1912). Următoarele puncte de vedere sînt caracteristice pentru intuiționism. *1.* Respingerea *infinitului actual*. *2.* Postulatul *constructivității efective* ca unicul mijloc de definire a obiectelor matematicii. *3.* Materialul original de construcție constă din numerele naturale și ele sînt privite numai ca un agregat potențial dat. *4.* Limitările principiilor logice clasice în aplicarea agregatelor infinite.

Pentru a explica cel puțin unul din aceste puncte de vedere definim

$$a_n = \begin{cases} 0, \text{ dacă } 2(n+1) \text{ este suma a două numere prime;} \\ 1 \text{ în caz contrar.} \end{cases}$$

Numărul real $g = 0, a_1a_2 \ldots$ se numește *numărul Goldbach* și poate fi calculat la orice nivel de precizie, deși nu se știe încă dacă g este sau nu egal cu zero. Deoarece nu putem fi siguri dacă problema Goldbach (cap. 31) are soluție, este oarecum justificat argumentul că nu are sens să spunem $g = 0$ sau $g \neq 0$. Totuși aceasta implică în mod evident o anumită limitare a legii *tertium non datur*, legea terțului exclus.

4. **Situația actuală.** Nici una din școlile de gîndire menționate pînă acum nu a fost în stare să-și îndeplinească scopul inițial. În ciuda acestui fapt tratarea problemelor metamatematice din diverse puncte de vedere a pus în lumină rezultate valoroase, care inițial nici nu fuseseră vizate. Problemele de decidabilitate puse de metamatematică au dus într-un prim stadiu la formularea precisă a calculabilității formale și a conceptului de algoritm. Limbajele matematice formale, care au fost precizate de Hilbert și școala lui, sînt fundamentale pentru construcția limbajelor algoritmice (de exemplu ALGOL și FORTRAN). În acest sens pot fi date oricît de multe exemple. Astăzi, rareori se poate spune despre un anumit om de știință că aparține unei direcții definite; mai degrabă el urmează o evoluție dialectică studiind chestiuni și rezultate din puncte de vedere diferite, în parte contradictorii. Menținerea unor postulate de constructivitate diferențiate în decursul unei cercetări nu este atît o expresie a unei anumite poziții filozofice, cît un principiu metodologic de a nu încălca în mod inutil limitele unei cunoașteri sigure.

42.2. Anumite rezultate în fundamentarea matematicii

1. **Fundamentarea matematicii bazată pe teoria mulțimilor.** Ceea ce a rămas din programul original de logicism este ideea că întreaga matematică poate fi construită pe baza *teoriei axiomatice a mulțimilor*. Aceasta înseamnă că azi orice teorie matematică existentă, fie că are un caracter axiomatic, fie că conține un domeniu parțial al teoriei axiomatice a mulțimilor limitat în mod convenabil prin scopurile teoriei relevante.

Contribuții esențiale la fundamentarea axiomatică a teoriei mulțimilor au adus B. Russel (1872—1970), E. Zermelo (1871—1953), J. von Neumann (1903—1957), A. Fraenkel (1891—1965), P. Bernays (născut în 1888) și K. Gödel (n. 1906). *Școala lui Bourbaki* a întreprins o sistematizare metodologică bine gîndită a matematicii din punctul de vedere al teoriei mulțimilor și prin aceasta a contribuit în mod esențial la popularizarea ei.

Limbajul teoriei axiomatice a mulțimilor, de exemplu, în sistemul Zermelo-Fraenckel este un limbaj cu predicate foarte simplu, cu un singur predicat $\in$. Axiomele corespund așa-ziselor principii ale conținutului teoriei mulțimilor, care sînt enumerate în capitolul „Teoria mulțimilor". Regulile de deducție sînt regulile naturale de inferență date în capitolul „Elemente de logică matematică" sau reguli reductibile la acestea. *Definirea conceptului* se realizează exclusiv cu ajutorul regulilor cu definiții explicite; alte definiții recursive sau implicite sînt reductibile la definiții explicite în cadrul teoriei axiomatice a mulțimilor.

Matematicianul, în principiu, nu este obligat să treacă dincolo de cadrul teoriei formale a mulțimilor, dar natural aceasta se aplică numai la cercetările matematice ca atare și nu la aplicațiile lor, la procese fizice sau la alte procese extramatematice. Problema unui model matematic convențional pentru acest fel nu este, riguros vorbind, o problemă matematică. Trebuie remarcat că multe teorii matematice se bazează pe un aparat formal complicat; nu este întotdeauna clar cum pot fi ele reduse la teoria mulțimilor și cum poate fi „codificat" în mod adecvat limbajul lor în limbajul simplu al teoriei mulțimilor. Această observație se aplică chiar și la prezentarea conținutului teoriei mulțimilor însăși. Să considerăm exemplele de formare a mulțimilor din capitolul „Teoria mulțimilor", majoritatea cărora trebuie să fie prezentată în cadrul teoriei axiomatice a mulțimilor. Pentru a forma mulțimea tuturor submulțimilor mulțimii numerelor reale, trebuie să avem o definiție a conceptului de număr real în interiorul teoriei axiomatice a mulțimilor. Aceasta la rîndul ei necesită o definiție a conceptului mulțimii numerelor naturale și conduce la o analiză axiomatică a conceptului de finitudine în cadrul teoriei generale a mulțimilor.

În plus, toate conceptele utilizate în semantica limbajelor formale pot fi definite în termenii teoriei mulțimilor. Acest lucru este valabil în particular pentru înseși obiectele lingvistice. Acestea au fost definite ca șiruri finite de *simboluri*. Așa cum în terminologia teoriei mulțimilor elementele unei mulțimi structurate într-un anumit mod sînt numite *puncte*, tot așa elementele unei mulțimi arbitrare (de obicei măsurabilă) pot fi denumite *simboluri*.

2. **Critica fundamentării bazate pe teoria mulțimilor utilizînd rezultate din fundamentele matematicii.** Se pune problema dacă posibilitatea unei fundamentări pe teoria mulțimilor a întregii matematici poate arunca suficientă lumină asupra problemei fundamentării metamatematice a matematicii. Deși prin reducerea întregii matematici la teoria mulțimilor, problemele metamatematice apar reduse într-o mare măsură la cele ale teoriei axiomatice a mulțimilor cu limbajul simplu și axiomele ușor inteligibile, aceasta ar fi un eșec din mai multe motive dintre care unele vor fi discutate pe scurt în cele ce urmează.

i. O obiecție imediată este *problema necontradicției sistemului formal al teoriei mulțimilor.* În lumina experienței actuale sistemul de axiome a teoriei mulțimilor este la un nivel de abstractizare prea înalt pentru a putea fi vorba de o verificare directă. Există, în cel mai bun caz, un fel de control empiric pentru unele consecințe ale acestor axiome, de exemplu pentru afirmații asupra existenței soluțiilor ecuațiilor diferențiale cu anumite condiții la frontieră. Deci nu este foarte surprinzător faptul că teoria mulțimilor exact ca la începuturile ei a trebuit să elimine un număr de paradoxuri grave din sistemul ei de concepte, care în ciuda faptului că au fost eliminate au dus la o neîncredere permanentă din partea multor matematicieni în utilizarea liberă a metodelor infinitistice.

ii. O altă obiecție se referă la *incompletitudinea în principiu a sistemului de axiome* în teoria mulțimilor (care va fi discutată în paragraful următor) în sensul că în orice sistem

recursiv de axiome există afirmații care sînt independente de acest sistem de axiome. Prin urmare, nu există speranța de a înțelege complet universul teoriei intuitive a mulțimilor prin alegerea unui sistem fix de axiome.

iii. În ciuda faptelor menționate mai sus s-ar putea totuși presupune că un anumit domeniu U de obiecte (universul teoriei intuitive a mulțimilor) corespunde unui sistem de axiome acceptat A al teoriei mulțimilor și că orice afirmație referitoare la teoria mulțimilor este fie adevărată (adică valabilă în U), fie falsă.

Este deci posibil să vorbim despre structura $\langle A, U\rangle$ în cadrul unui metalimbaj convenabil L^*. Dar în L^* se poate formula un binecunoscut rezultat al lui T. SKOLEM (1887—1963), cunoscut ca *paradoxul lui Skolem*, care afirmă că există diferite modele neizomorfe nu numai ale sistemului de axiome A, dar chiar ale sistemului sintactic complet al tuturor afirmațiilor valide în U (vezi capitolul 15). Dar prin aceasta ideea unui model standard, adică a unui model al teoriei axiomatice a mulțimilor care se poate distinge într-un anumit fel, devine cu totul îndoielnică.

Aceste obiecții arată că scopul unei fundamentări logico-empirice a matematicii, în particular în forma clasică a platonismului lui Cantor, nu poate fi atins într-un viitor previzibil. Prin urmare, este justificată întrebarea dacă o fundamentare universală a matematicii bazată pe teoria mulțimilor este o cerință reală sau dacă anumite principii avînd un caracter mai constructiv sînt suficiente în acest scop; în ceea ce privește aplicarea reală a metodelor matematice în domeniul extramatematic se observă că numai *metodele constructive* sînt utilizabile. În starea de lucruri actuală putem spune cu certitudine că *metodele infinitistice* ale teoriei mulțimilor nu pot fi abandonate. Metaforic vorbind, tunurile teoriei mulțimilor infinitistice au o rază de bătaie care pînă acum nu a fost depășită. Aceasta se aplică în particular la posibilitatea utilizării metodelor constructive ale matematicii aplicate. Se poate spune că în ciuda faptului că la o analiză mai aprofundată universul lui Cantor se dovedește a fi o ficțiune, matematicianul, în special cel care studiază fundamentele, își obține de regulă rezultatele numai pe baza unei anumite idei intuitive ale unei realități matematice abstracte.

3. **Incompletitudinea teoriilor matematice și nedefinisabilitatea conceptului de adevăr.** În aprecierea unei teorii matematice create cu scopul de a furniza un model într-un anumit domeniu de obiecte, de exemplu spațiul fizic sau anumite procese fizice sau economice, singurul lucru semnificativ este succesul. Întrucît T reprezintă doar o idealizare conștient aleasă a unui proces real, problema adevărului afirmațiilor din T are o importanță secundară. Totuși problema adevărului devine relevantă pentru matematică ca un tot care este o știință închisă. Același lucru este valabil pentru orice ramură a ei, de exemplu teoria numerelor naturale sau teoria mulțimilor care inițial nu sînt teorii axiomatice ci descrieri ale unor domenii abstracte de obiecte.

Un mare număr de afirmații matematice, în ciuda caracterului lor abstract, au o relație imediată cu realitatea. Să considerăm de exemplu următoarea teoremă al cărei adevăr este evident: *dacă există o partiție a unei mulțimi finite S în n clase disjuncte $C_1, C_2, \ldots, C_n$, atunci există de asemenea o partiție a lui S în m clase disjuncte, fiecare conținînd n elemente.* Situația este cu totul diferită în ceea ce privește afirmația acceptată astăzi pe scară largă, *„mulțimea numerelor reale este bine ordonată"* și în general pentru afirmații de existență în care nu se spune nimic despre metoda de construcție a obiectului în chestiune.

Dacă U este un anumit domeniu de obiecte (universul discursului) și L un limbaj formalizat peste U, atunci se știe că este posibilă precizarea (vezi cap. 15) conceptului de *validitate* sau *adevăr* al unei afirmații din L în U, în cadrul unei metateorii peste U și L. Prima întrebare care se pune este dacă există un sistem codificat de axiome A astfel încît mulțimea afirmațiilor deductibile din A prin regulile raționamentului formalizat să coincidă cu mulțimea afirmațiilor adevărate peste U. În anumite cazuri acest lucru este posibil, de exemplu atunci cînd U este un univers finit sau atunci cînd limbajul L este atît de sărac în expresii încît nici nu permite formularea unor proprietăți complicate ale lui U.

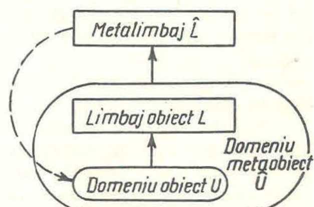
Cele ce urmează se referă la un domeniu U care conține numerele naturale și un limbaj L în care aritmetica numerelor naturale este exprimabilă. În aceste condiții este valabilă *prima teoremă de incompletitudine a lui Gödel*, care afirmă că orice sistem axiomatic formulat în L care constă dintr-un număr finit sau, mai general, dintr-o mulțime recursivă de axiome este incomplet, în sensul că nu toate afirmațiile adevărate în U pot fi deduse din A.

Un rezultat fundamental ulterior este teorema lui A. TARSKI (n. 1901), care afirmă că, în ipotezele date, nu se poate defini în L nici un predicat $W(x)$ astfel încît pentru un obiect a

din U, afirmaţia $W(a)$ să fie adevărată în U dacă şi numai dacă a este numărul de *cod* al unei afirmaţii adevărate în U.

Pentru demonstraţiile ambelor teoreme se efectuează o *codificare* numită şi *aritmetizare* sau *gödelizare* a limbajului L prin numere naturale. Aceasta se realizează atribuind mai întîi simbolurilor fundamentale anumite numere naturale, în aşa fel încît şiruri de simboluri corespund unor şiruri finite de numere naturale. Într-o a doua etapă, şirurile finite de numere naturale sînt puse în corespondenţă biunivocă cu numerele naturale. Numărul natural care corespunde în acest mod unei expresii H se numeşte *numărul de cod* sau *numărul Gödel* al lui H şi se notează H^*.

Să presupunem că L, U şi corelaţia lor semantică sînt incluse într-un nou univers al discursului $\hat{U}$ şi fie $\hat{L}$ un limbaj adecvat pentru $\hat{U}$. Atunci L se numeşte *limbajul obiect* al lui U, iar $\hat{L}$ *metalimbajul* sistemului $\langle L, U\rangle$ (fig. 42.2.1).



42.2.1. Corelaţie semantică

Codificarea lui L face posibilă proiectarea unor predicate ale lui U, care într-o primă instanţă erau exprimabile doar metalingvistic, în limbajul obiect L.

Un exemplu de predicat în domeniul metaobiectelor este predicatul de o variabilă: „afirmaţia H este demonstrabilă (pornind de la A)". Acestuia îi corespunde un anumit predicat aritmetic $B(n)$ care este adevărat pentru un număr natural n dacă şi numai dacă n este numărul de cod al unei afirmaţii demonstrabile. În ipotezele făcute asupra lui U, se poate construi o expresie $Nb(v)$ astfel încît, înlocuind variabila v cu un număr natural n, expresia $Nb(n)$ afirmă: „afirmaţia cu numărul de cod n este nedemonstrabilă (pornind de la A)". Printr-o nouă metodă, aşa-numitul *argument diagonal*, se poate găsi un număr natural m astfel încît $m = Nb(m)$. Afirmaţia $Nb(m)$ poate fi considerată ca o afirmaţie care se referă la sine, cu semnificaţia „Eu sînt nedemonstrabilă".

$Nb(m)$ este adevărată în U, altminteri negaţia ei „Sînt demonstrabilă" ar fi adevărată în U; întrucît orice afirmaţie demonstrabilă pornind de la A este de asemenea adevărată în U, afirmaţia $Nb(m)$ cu numărul de cod m în U ar fi în acelaşi timp adevărată şi falsă, ceea ce ar constitui o contradicţie. Totuşi, conform semnificaţiei lui $Nb(m)$, adevărul lui $Nb(m)$ indică în acelaşi timp nedemonstrabilitatea sa. Deci sistemul de axiome A se dovedeşte a fi incomplet.

Rezultatul lui Tarski se obţine în mod asemănător. Se presupune că există o expresie $W(v)$ cu semnificaţia „v este adevărată" negaţia $Nw(v)$ a acestei expresii reprezintă predicatul „v nu este adevărat".

O afirmaţie referitoare la sine $Nw(m)$ ($Nw(m)^* = m$), ca cea construită mai sus, va însemna atunci: „Eu sînt o afirmaţie neadevărată". Această afirmaţie va fi adevărată dacă este falsă şi va fi falsă dacă este adevărată, Putem elimina această contradicţie numai dacă renunţăm la ipoteza că predicatul „v este adevărat în U" este exprimabil în L.

Acest tip de argumentaţie constituie o analiză profundă a unui paradox cunoscut deja în antichitate care poate fi formulat astfel: „Teorema tipărită cu roşu pe pagina n a acestei cărţi e falsă." Această afirmaţie este şi ea falsă dacă este adevărată şi adevărată dacă este falsă şi deci încalcă legea necontradicţiei.

4. Necontradicţia relativă şi independenţa ipotezei continuumului. O teorie T se numeşte relativ necontradictorie în raport cu o teorie T' dacă conceptele fundamentale din T pot fi definite în limbajul lui T' în aşa fel încît axiomele lui T să corespundă unor afirmaţii valide în T'; se spune atunci că teoria T este interpretată în teoria T'.

Definiţiile date mai sus sînt de natură metodologică. Adesea demonstraţia acestei interpretabilităţi poate fi realizată în interiorul limbajului lui T', deşi argumentările de teoria modelelor, referitoare la T şi T', conduc mai repede la rezultat.

Un interes special îl prezintă cazul cînd T' este o extensie a lui T în cadrul aceluiaşi limbaj L. În particular, o afirmaţie A, în L se numeşte necontradictorie relativ la T, dacă teoria $T \cup \{A\}$ este relativ necontradictorie în raport cu T; de exemplu, se poate arăta că geometria euclidiană şi cea neeuclidiană sînt relativ necontradictorii în raport cu geometria absolută, adică axioma paralelelor, precum şi negaţia ei, sînt necontradictorii în raport cu celelalte axiome ale geometriei, sau, pe scurt, că axioma paralelelor este independentă de celelalte axiome. Faptul că această demonstraţie poate fi făcută în întregime în cadrul geometriei absolute nu este nicidecum banal; totuşi, conform standardelor moderne, demonstraţia

independenței este aproape o banalitate, dacă se realizează prin metodele teoriei modelelor, adică în cazul nostru, prin metodele geometriei analitice.

GÖDEL a arătat în 1938 că ipoteza continuumului și axioma alegerii sînt relativ necontradictorii în raport cu celelalte axiome ale teoriei mulțimilor. Douăzeci și cinci de ani mai tîrziu, P. COHEN a arătat că și negația ipotezei continuumului este necontradictorie în raport cu celelalte axiome.

Deși aceste rezultate prezintă o analogie formală cu situația din geometrie, de fapt situația este cu totul alta, întrucît este posibilă construirea diverselor tipuri de geometrii, pornind de la un punct de vedere unitar, și anume acela al teoriei generale a mulțimilor. În schimb, nu există un principiu unitar pentru construirea unor sisteme diferite ale teoriei mulțimilor care să se excludă reciproc. Conform stării de lucruri prezente, se pare că nici nu există asemenea principii de natură matematică, întrucît este absolut de neconceput o abstracție matematică mai înaltă decît cea a teoriei mulțimilor.

GÖDEL însuși a exprimat părerea că dezvoltarea teoriei mulțimilor va duce la noi axiome, care vor permite infirmarea ipotezei continuumului. Se pare însă că axiomele luate în considerare pînă acum pentru extinderea cadrului obișnuit al teoriei mulțimilor, de exemplu axioma lui TARSKI referitoare la existența unor numere cardinale inaccesibile nu sînt suficiente în acest scop.

Axioma lui Tarski este un exemplu de axiomă care asigură existența unor noi mulțimi, în afara domeniului mulțimilor obținute prin regulile de formare și de alegere ale mulțimilor. Acceptarea unor asemenea axiome poate fi interpretată ca o extindere nelimitată a matematicii. Trebuie să remarcăm totuși că apariția unor noi axiome cu caracter nelimitat nu este o cerință rezonabilă și ar cauza noi probleme grave de necontradicție. Există anumite metode limitate de realizare a posibilității de extindere sus-menționate, printre altele toate afirmațiile constructivist orientate.

Un tip de limitare semiconstructivistă asupra formării nelimitate de mulțimi ar fi acceptarea axiomei de constructibilitate a lui Gödel, care ar implica validitatea ipotezei continuumului.

Se poate afirma, în concluzie, că rezultatele cercetării fundamentelor matematicii au adus contribuții esențiale la clarificarea domeniului și limitelor afirmațiilor clasice, privind fundamentele matematicii și, în plus, au furnizat numeroase aplicații practice, de exemplu în teoria algoritmilor și teoria sistemelor formale.

Tabele *

I. Simboluri matematice

Simbol	Explicația
Geometrie	
$\sim$	similar
$\cong$	congruent
$\triangle$	triunghi; $\triangle ABC$
$\parallel$	paralel
$\nparallel$	neparalel
$\perp$	perpendicular
$\sphericalangle$	unghi, $\sphericalangle ABC$
$^{\circ}$	grade sexagesimale
$'$	minut, $60' = 1^{\circ}$
$''$	secundă, $60'' = 1'$.
g	grade centezimale
$\widehat{AB}$	arc AB
$\widehat{\alpha}$	arc α
AB	segment AB
$\overrightarrow{AB}$	segment orientat, de la A la B
sin	sinus
cos	cosinus
tg	tangentă
cotg	cotangentă
arcsin etc.	inversa funcție sinus etc.
sh etc.	sinus hiperbolic
Aritmetică, algebră	
$=$	egal
$\equiv$	identic
$\triangleq$	corespunde la; de ex. $100^{g} \triangleq 90^{\circ}$
$\neq$	nu este egal
$<$	mai mic decît; $a < b$
$>$	mai mare decît; $b > a$
$\leqslant$	mai mic sau egal cu; de ex. $a \leqslant 0$, nepozitiv
$\geqslant$	mai mare sau egal cu; de ex. $a \geqslant 0$, nenegativ
$+$	plus
$-$	minus
$\cdot$; $\times$	ori; de ex. $3 \cdot 4$, 3×4
$:$; $/$; $-$	împărțit la; de ex. $3:4$; $2/3$; $\frac{3}{5}$
$a\|b$	divide pe; de ex. $3\|12$
$\sum_{i=1}^{n} a_i$	suma, de ex. $\sum_{i=1}^{3} a_i = a_1 + a_2 + a_3$
$\prod_{i=1}^{n} a_i$	produs, de ex. $\prod_{i=1}^{3} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$
a^n	a la puterea n, de ex. $a^3 = a \cdot a \cdot a$
$\sqrt{a}$	rădăcina pătrată din a
$\sqrt[n]{a}$	rădăcina de ordinul n din a
$n!$	n factorial, de ex. $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$
$C_n^k = \binom{n}{k}$	combinări de n luate cîte k; de ex. $\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3}$
$\|a\|$	modul sau valoarea absolută a lui a: de ex. $\|-7\| = 7$
$\log_b$	logaritm în baza b

Simbol	Explicația
lg	logaritm în baza 10
ln	logaritm natural în baza e
e	2,718 ...
i	unitate imaginară, $i^2 = -1$
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$	produs scalar a doi vectori
$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$	produs vectorial a doi vectori
$(a_{ik}) = A$	matrice cu elemente a_{ik}
$[a_{ik}] = \det A$	determinant al matricei pătrate A
$\equiv (\bmod m)$	congruent mod m, de ex. $12 \equiv 2 (\bmod 5)$
Analiză	
(a, b)	interval deschis $a < x < b$
$[a, b]$	interval închis $a \leqslant x \leqslant b$
∞	infinit
π	pi = 3,14159 ...
$\to$	tinde la, converge la
lim	limită
$\approx$	aproximativ egal
d	simbol al diferențialelor
$\frac{dy}{dx}$, y'	dy pe dx; raport diferențial; derivată
$\frac{d^n y}{dx^n}$, $y^{(n)}$	derivata de ordinul n
∂	simbolul derivării parțiale
∇	operatorul nabla
Δ	operatorul lui Laplace
δf	delta f, variația lui f
$\int f(x)\,dx$	integrala nedefinită
$\int_a^b f(x)\,dx$	integrala definită
Teoria mulțimilor	
$\in$	element al, aparține; de ex. $a \in \{a, b\}$
$\notin$	nu este element al; nu aparține; de ex. $c \notin \{a, b\}$
$\subseteq$	inclus în
$\subset$	submulțime proprie, de ex. $\{a\} \subset \{a, b\}$
$\cup$	reunit cu, de ex. $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$
$\cap$	intersectat cu, de ex. $\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\}$
$\emptyset$	mulțime vidă
Logică	
$\neg$	negație
$\wedge$	și (conjuncție)
$\vee$	sau (disjuncție)
$\to$	dacă ..., atunci (implicație)
$\leftrightarrow$	dacă și numai dacă (echivalență)
$\exists$	există (cuantificator existențial)
$\forall$	pentru orice (cuantificator universal)

* În tabele și în unele figuri, în fracții zecimale, în loc de virgulă

II. Pătratul numerelor

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	1.000	1.020	1.040	1.061	1.082	1.102	1.124	1.145	1.166	1.188
1.1	1.210	1.232	1.254	1.277	1.300	1.322	1.346	1.369	1.392	1.416
1.2	1.440	1.464	1.488	1.513	1.538	1.562	1.588	1.613	1.638	1.664
1.3	1.690	1.716	1.742	1.769	1.796	1.822	1.850	1.877	1.904	1.932
1.4	1.960	1.988	2.016	2.045	2.074	2.102	2.132	2.161	2.190	2.220
1.5	2.250	2.280	2.310	2.341	2.372	2.402	2.434	2.465	2.496	2.528
1.6	2.560	2.592	2.624	2.657	2.690	2.722	2.756	2.789	2.822	2.856
1.7	2.890	2.924	2.958	2.993	3.028	3.062	3.098	3.133	3.168	3.204
1.8	3.240	3.276	3.312	3.349	3.386	3.422	3.460	3.497	3.534	3.572
1.9	3.610	3.648	3.686	3.725	3.764	3.802	3.842	3.881	3.920	3.960
2.0	4.000	4.040	4.080	4.121	4.162	4.202	4.244	4.285	4.326	4.368
2.1	4.410	4.452	4.494	4.537	4.580	4.622	4.666	4.709	4.752	4.796
2.2	4.840	4.884	4.928	4.973	5.018	5.062	5.108	5.153	5.198	5.244
2.3	5.290	5.336	5.382	5.429	5.476	5.522	5.570	5.617	5.664	5.712
2.4	5.760	5.808	5.856	5.905	5.954	6.002	6.052	6.101	6.150	6.200
2.5	6.250	6.300	6.350	6.401	6.452	6.502	6.554	6.605	6.656	6.708
2.6	6.760	6.812	6.864	6.917	6.970	7.022	7.076	7.129	7.182	7.236
2.7	7.290	7.344	7.398	7.453	7.508	7.562	7.618	7.673	7.728	7.784
2.8	7.840	7.896	7.952	8.009	8.066	8.122	8.180	8.237	8.294	8.352
2.9	8.410	8.468	8.526	8.585	8.644	8.702	8.762	8.821	8.880	8.940
3.0	9.000	9.060	9.120	9.181	9.242	9.302	9.364	9.425	9.486	9.548
3.1	9.610	9.672	9.734	9.797	9.860	9.922	9.986	10.05	10.11	10.18
3.2	10.24	10.30	10.37	10.43	10.50	10.56	10.63	10.69	10.76	10.82
3.3	10.89	10.96	11.02	11.09	11.16	11.22	11.29	11.36	11.42	11.49
3.4	11.56	11.63	11.70	11.76	11.83	11.90	11.97	12.04	12.11	12.18
3.5	12.25	12.32	12.39	12.46	12.53	12.60	12.67	12.74	12.82	12.89
3.6	12.96	13.03	13.10	13.18	13.25	13.32	13.40	13.47	13.54	13.62
3.7	13.69	13.76	13.84	13.91	13.99	14.06	14.14	14.21	14.29	14.36
3.8	14.44	14.52	14.59	14.67	14.75	14.82	14.90	14.98	15.05	15.13
3.9	15.21	15.29	15.37	15.44	15.52	15.60	15.68	15.76	15.84	15.92
4.0	16.00	16.08	16.16	16.24	16.32	16.40	16.48	16.56	16.65	16.73
4.1	16.81	16.89	16.97	17.06	17.14	17.22	17.31	17.39	17.47	17.56
4.2	17.64	17.72	17.81	17.89	17.98	18.06	18.15	18.23	18.32	18.40
4.3	18.49	18.58	18.66	18.75	18.84	18.92	19.01	19.10	19.18	19.27
4.4	19.36	19.45	19.54	19.62	19.71	19.80	19.89	19.98	20.07	20.16
4.5	20.25	20.34	20.43	20.52	20.61	20.70	20.79	20.88	20.98	21.07
4.6	21.16	21.25	21.34	21.44	21.53	21.62	21.72	21.81	21.90	22.00
4.7	22.09	22.18	22.28	22.37	22.47	22.56	22.66	22.75	22.85	22.94
4.8	23.04	23.14	23.23	23.33	23.43	23.52	23.62	23.72	23.81	23.91
4.9	24.01	24.11	24.21	24.30	24.40	24.50	24.60	24.70	24.80	24.90
5,0	25.00	25.10	25.20	25.30	25.40	25.50	25.60	25.70	25.81	25.91
5.1	26.01	26.11	26.21	26.32	26.42	26.52	26.63	26.73	26.83	26.94
5.2	27.04	27.14	27.25	27.35	27.46	27.56	27.67	27.77	27.88	27.98
5.3	28.09	28.20	28.30	28.41	28.52	28.62	28.73	28.84	28.94	29.05
5.4	29.16	29.27	29.38	29.48	29.59	29.70	29.81	29.92	30.03	30.14
5.5	30.25	30.36	30.47	30.58	30.69	30.80	30.91	31.02	31.14	31.25

II. Pătratul numerelor

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	30.25	30.36	30.47	30.58	30.69	30.80	30.91	31.02	31.14	31.25̄
5.6	31.36	31.47	31.58	31.70	31.81	31.92	32.04	32.15̄	32.26	32.38
5.7	32.49	32.60	32.72	32.83	32.95̄	33.06	33.18	33.29	33.41	33.52
5.8	33.64	33.76	33.87	33.99	34.11	34.22	34.34	34.46	34.57	34.69
5.9	34.81	34.93	35.05̄	35.16	35.28	35.40	35.52	35.64	35.76	35.88
6.0	36.00	36.12	36.24	36.36	36.48	36.60	36.72	36.84	36.97	37.09
6.1	37.21	37.33	37.45̇	37.58	37.70	37.82	37.95̄	38.07	38.19	38.32
6.2	38.44	38.56	38.69	38.81	38.94	39.06	39.19	39.31	39.44	39.56
6.3	39.69	39.82	39.94	40.07	40.20	40.32	40.45̄	40.58	40.70	40.83
6.4	40.96	41.09	41.22	41.34	41.47	41.60	41.73	41.86	41.99	42.12
6.5	42.25	42.38	42.51	42.64	42.77	42.90	43.03	43.16	43.30	43.43
6.6	43.56	43.69	43.82	43.96	44.09	44.22	44.36	44.49	44.62	44.76
6.7	44.89	45.02	45.16	45.29	45.43	45.56	45.70	45.83	45.97	46.10
6.8	46.24	46.38	46.51	46.65̄	46.79	46.92	47.06	47.20	47.33	47.47
6.9	47.61	47.75̄	47.89	48.02	48.16	48.30	48.44	48.58	48.72	48.86
7.0	49.00	49.14	49.28	49.42	49.56	49.70	49.84	49.98	50.13	50.27
7.1	50.41	50.55̇	50.69	50.84	50.98	51.12	51.27	51.41	51.55̇	51.70
7.2	51.84	51.98	52.13	52.27	52.42	52.56	52.71	52.85̇	53.00	53.14
7.3	53.29	53.44	53.58	53.73	53.88	54.02	54.17	54.32	54.46	54.61
7.4	54.76	54.91	55.06	55.20	55.35̇	55.5̇0	55.65̇	55.80	55.95̇	56.10
7.5	56.25	56.40	56.55̇	56.70	56.85̇	57.00	57.15̇	57.30	57.46	57.61
7.6	57.76	57.91	58.06	58.22	58.37	58.52	58.68	58.83	58.98	59.14
7.7	59.29	59.44	59.60	59.75̇	59.91	60.06	60.22	60.37	60.53	60.68
7.8	60.84	61.00	61.15̇	61.31	61.47	61.62	61.78	61.94	62.09	62.25̇
7.9	62.41	62.57	62.73	62.88	63.04	63.20	63.36	63.52	63.68	63.84
8.0	64.00	64.16	64.32	64.48	64.64	64.80	64.96	65.12	65.29	65.45̄
8.1	65.61	65.77	65.93	66.10	66.26	66.42	66.59	66.75̄	66.91	67.08
8.2	67.24	67.40	67.57	67.73	67.90	68.08	68.23	68.39	68.56	68.72
8.3	68.89	69.06	69.22	69.39	69.56	69.72	69.89	70.06	70.22	70.39
8.4	70.56	70.73	70.90	71.06	71.23	71.40	71.57	71.74	71.91	72.08
8.5	72.25	72.42	72.59	72.76	72.93	73.10	73.27	73.44	73.62	73.79
8.6	73.96	74.13	74.30	74.48	74.65̄	74.82	75̄.00	75.17	75.34	75.52
8.7	75.69	75.86	76.04	76.21	76.39	76.56	76.74	76.91	77.09	77.26
8.8	77.44	77.62	77.79	77.97	78.15̄	78.32	78.5̄0	78.68	78.85̇	79.03
8.9	79.21	79.39	79.57	79.74	79.92	80.10	80.28	80.46	80.64	80.82
9.0	81.00	81.18	81.36	81.54	81.72	81.90	82.08	82.26	82.45̄	82.63
9.1	82.81	82.99	83.17	83.36	83.54	83.72	83.91	84.09	84.27	84.46
9.2	84.64	84.82	85.01	85.19	85.38	85.56	85.75̄	85.93	86.12	86.30
9.3	86.49	86.68	86.86	87.05̄	87.24	87.42	87.61	87.80	87.98	88.17
9.4	88.36	88.55̄	88.74	88.92	89.11	89.30	89.49	89.68	89.87	90.06
9.5	90.25	90.44	90.63	90.82	91.01	91.20	91.39	91.58	91.78	91.97
9.6	92.16	92.35̇	92.54	92.74	92.93	93.12	93.32	93.51	93.70	93.90
9.7	94.09	94.28	94.48	94.67	94.87	95.06	95.26	95.45̇	95.65̄	95.84
9.8	96.04	96.24	96.43	96.63	96.83	97.02	97.22	97.42	97.61	97.81
9.9	98.01	98.21	98.41	98.60	98.80	99.00	99.20	90.40	99.60	99.80
10.0	100.0	100.2	100.4	100.6	100.8	101.0	101.2	101.4	101.6	101.8

III. Cubul numerelor

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	1.000	1.030	1.061	1.093	1.12$\bar{5}$	1.158	1.191	1.22$\dot{5}$	1.260	1.29$\dot{5}$
1.1	1.331	1.368	1.40$\bar{5}$	1.443	1.482	1.521	1.561	1.602	1.643	1.68$\dot{5}$
1.2	1.728	1.772	1.816	1.861	1.907	1.953	2.000	2.048	2.097	2.147
1.3	2.197	2.248	2.300	2.353	2.406	2.460	2.51$\dot{5}$	2.571	2.628	2.686
1.4	2.744	2.803	2.863	2.924	2.986	3.049	3.112	3.177	3.242	3.308
1.5	3.375	3.443	3.512	3.582	3.652	3.724	3.796	3.870	3.944	4.020
1.6	4.096	4.173	4.252	4.331	4.411	4.492	4.574	4.657	4.742	4.827
1.7	4.913	$\dot{5}$.000	5.088	5.178	5.268	5.359	5.452	5.54$\dot{5}$	5.640	5.73$\dot{5}$
1.8	5.832	5.930	6.029	6.128	6.230	6.332	6.43$\bar{5}$	6.539	6.64$\bar{5}$	6.751
1.9	6.859	6.968	7.078	7.189	7.301	7.41$\bar{5}$	7.530	7.64$\dot{5}$	7.762	7.881
2.0	8.000	8.121	8.242	8.36$\dot{5}$	8.490	8.61$\dot{5}$	8.742	8.870	8.999	9.129
2.1	9.261	9.394	9.528	9.664	9.800	9.938	10.08	10.22	10.36	10.$\dot{5}$0
2.2	10.6$\bar{5}$	10.79	10.94	11.09	11.24	11.39	11.54	11.70	11.8$\dot{5}$	12.01
2.3	12.17	12.33	12.49	12.6$\bar{5}$	12.81	12.98	13.14	13.31	13.48	13.6$\dot{5}$
2.4	13.82	14.00	14.17	14.3$\bar{5}$	14.53	14.71	14.89	15.07	15.2$\dot{5}$	15.44
2.5	15.62	15.81	16.00	16.19	16.39	16.58	16.78	16.97	17.17	17.37
2.6	17.58	17.78	17.98	18.19	18.40	18.61	18.82	19.03	19.2$\bar{5}$	19.47
2.7	19.68	19.90	20.12	20.3$\bar{5}$	20.57	20.80	21.02	21.2$\dot{5}$	21.48	21.72
2.8	21.9$\dot{5}$	22.19	22.43	22.67	22.91	23.1$\bar{5}$	23.39	23.64	23.89	24.14
2.9	24.39	24.64	24.90	25.1$\dot{5}$	25.41	25.67	25.93	26.20	26.46	26.73
3.0	27.00	27.27	27.54	27.82	28.09	28.37	28.6$\dot{5}$	28.93	29.22	29.$\dot{5}$0
3.1	29.79	30.08	30.37	30.66	30.96	31.26	31.5$\dot{5}$	31.86	32.16	32.46
3.2	32.77	33.08	33.39	33.70	34.01	34.33	34.6$\bar{5}$	34.97	35.29	35.61
3.3	35.94	36.26	36.59	36.93	37.26	37.60	37.93	38.27	38.61	38.96
3.4	39.30	39.6$\dot{5}$	40.00	40.3$\dot{5}$	40.71	41.06	41.42	41.78	42.14	42.51
3.5	42.88	43.24	43.61	43.99	44.36	44.74	45.12	45.$\bar{5}$0	45.88	46.27
3.6	46.66	47.0$\bar{5}$	47.44	47.83	48.23	48.63	49.03	49.43	49.84	50.24
3.7	50.6$\dot{5}$	51.06	51.48	51.90	52.31	52.73	53.16	53.58	54.01	54.44
3.8	54.87	55.31	55.74	56.18	56.62	57.07	57.51	57.96	58.41	58.86
3.9	59.32	59.78	60.24	60.70	61.16	61.63	62.10	62.57	63.04	63.52
4.0	64.00	64.48	64.96	65.4$\dot{5}$	65.94	66.43	66.92	67.42	67.92	68.42
4.1	68.92	69.43	69.93	70.44	70.96	71.47	71.99	72.51	73.03	73.56
4.2	74.09	74.62	75.1$\dot{5}$	75.69	76.23	76.77	77.31	77.8$\dot{5}$	78.40	78.9$\dot{5}$
4.3	79.51	80.06	80.62	81.18	81.7$\bar{5}$	82.31	82.88	83.4$\dot{5}$	84.03	84.60
4.4	85.18	85.77	86.3$\dot{5}$	86.94	87.53	88.12	88.72	89.31	89.92	90.52
4.5	91.12	91.73	92.3$\bar{5}$	92.96	93.58	94.20	94.82	95.44	96.07	96.70
4.6	97.34	97.97	98.61	99.2$\dot{5}$	99.90	100.$\dot{5}$	101.2	101.8	102.$\dot{5}$	103.2
4.7	103.8	104.$\bar{5}$	105.2	105.8	106.$\bar{5}$	107.2	107.9	108.$\dot{5}$	109.2	109.9
4.8	110.6	111.3	112.0	112.7	113.4	114.1	114.8	115.$\dot{5}$	116.2	116.9
4.9	117.6	118.4	119.1	119.8	120.6	121.3	122.0	122.8	123.$\dot{5}$	124.3
5.0	125.0	125.8	126.$\dot{5}$	127.3	128.0	128.8	129.6	130.3	131.1	131.9
5.1	132.7	133.4	134.2	13$\dot{5}$.0	135.8	136.6	137.4	138.2	139.0	139.8
5.2	140.6	141.4	142.2	143.1	143.9	144.7	145.$\dot{5}$	146.4	147.2	148.0
5.3	148.9	149.7	150.6	151.4	152.3	153.1	154.0	154.9	155.7	156.6
5.4	157.$\bar{5}$	158.3	159.2	160.1	161.0	161.9	162.8	163.7	164.6	165.$\bar{5}$
5.5	166.4	167.3	168.2	169.1	170.0	171.0	171.9	172.8	173.7	174.7

III. Cubul numerelor

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	166.4	167.3	168.2	169.1	170.0	171.0	171.9	172.8	173.7	174.7
5.6	175.6	176.6	177.5̇	178.5̄	179.4	180.4	181.3	182.3	183.3	184.2
5.7	185.2	186.2	187.1	188.1	189.1	190.1	191.1	192.1	193.1	194.1
5.8	195.1	196.1	197.1	198.2	199.2	200.2	201.2	202.3	203.3	204.3
5.9	205.4	206.4	207.5̄	208.5̇	209.6	210.6	211.7	212.8	213.8	214.9
6.0	216.0	217.1	218.2	219.3	220.3	221.4	222.5̇	223.6	224.8	225.9
6.1	227.0	228.1	229.2	230.3	231.5̄	232.6	233.7	234.9	236.0	237.2
6.2	238.3	239.5̄	240.6	241.8	243.0	244.1	245.3	246.5̄	247.7	248.9
6.3	25̇0.0	251.2	252.4	253.6	254.8	256.0	257.3	258.5̄	259.7	260.9
6.4	262.1	263.4	264.6	265.8	267.1	268.3	269.6	270.8	272.1	273.4
6.5	274.6	275.9	277.2	278.4	279.7	281.0	282.3	283.6	284.9	286.2
6.6	287.5̄	288.8	290.1	291.4	292.8	294.1	295.4	296.7	298.1	299.4
6.7	300.8	302.1	303.5̄	304.8	306.2	307.5̇	308.9	310.3	311.7	313.0
6.8	314.4	315.8	317.2	318.6	320.0	321.4	322.8	324.2	325.7	327.1
6.9	328.5̇	329.9	331.4	332.8	334.3	335.7	337.2	338.6	340.1	341.5̇
7.0	343.0	344.5̄	345.9	347.4	348.9	350.4	351.9	353.4	354.9	356.4
7.1	357.9	359.4	360.9	362.5̄	364.0	365.5̇	367.1	368.6	370.1	371.7
7.2	373.2	374.8	376.4	377.9	379.5̇	381.1	382.7	384.2	385.8	387.4
7.3	389.0	390.6	392.2	393.8	395.4	397.1	398.7	400.3	401.9	403.6
7.4	405.2	406.9	408.5̇	410.2	411.8	413.5̄	415.2	416.8	418.5̇	420.2
7.5	421.9	423.6	425.3	427.0	428.7	430.4	432.1	433.8	435.5̇	437.2
7.6	439.0	440.7	442.5̄	444.2	445.9	447.7	449.5̄	451.2	453.0	454.8
7.7	456.5̇	458.3	460.1	461.9	463.7	465.5̄	467.3	469.1	470.9	472.7
7.8	474.6	476.4	478.2	480.0	481.9	483.7	485.6	487.4	489.3	491.2
7.9	493.0	494.9	496.8	498.7	500.6	502.5̄	504.4	506.3	508.2	510.1
8.0	512.0	513.9	515.8	517.8	519.7	521.7	523.6	525.6	527.5̇	529.5̄
8.1	531.4	533.4	535.4	537.4	539.4	541.3	543.3	545.3	547.3	549.4
8.2	551.4	553.4	555.4	557.4	559.5̄	561.5̇	563.6	565.6	567.7	569.7
8.3	571.8	573.9	575.9	578.0	580.1	582.2	584.3	586.4	588.5̄	590.6
8.4	592.7	594.8	596.9	599.1	601.2	603.4	605.5̄	607.6	609.8	612.0
8.5	614.1	616.3	618.5̄	620.7	622.8	625̇.0	627.2	629.4	631.6	633.8
8.6	636.1	638.3	640.5̇	642.7	645̄.0	647.2	649.5̄	651.7	654.0	656.2
8.7	658.5̇	660.8	663.1	665.3	667.6	669.9	672.2	674.5̇	676.8	679.2
8.8	681.5̄	683.8	686.1	688.5̄	690.8	693.2	695.5̇	697.9	700.2	702.6
8.9	705̄.0	707.3	709.7	712.1	714.5̇	716.9	719.3	721.7	724.2	726.6
9.0	729.0	731.4	733.9	736.3	738.8	741.2	743.7	746.1	748.6	751.1
9.1	753.6	756.1	758.6	761.0	763.6	766.1	768.6	771.1	773.6	776.2
9.2	778.7	781.2	783.8	786.3	788.9	791.5̄	794.0	796.6	799.2	801.8
9.3	804.4	807.0	809.6	812.2	814.8	817.4	820.0	822.7	825.3	827.9
9.4	830.6	833.2	835.9	838.6	841.2	843.9	846.6	849.3	852.0	854.7
9.5	857.4	860.1	862.8	865.5̇	868.3	871.0	873.7	876.5̄	879.2	882.0
9.6	884.7	887.5̇	890.3	893.1	895.8	898.6	901.4	904.2	907.0	909.9
9.7	912.7	915.5̄	918.3	921.2	924.0	926.9	929.7	932.6	935.4	938.3
9.8	941.2	944.1	947.0	949.9	952.8	955.7	958.6	961.5̇	964.4	967.4
9.9	970.3	973.2	976.2	979.1	982.1	985.1	988.0	991.0	994.0	997.0
10.0	1000	1003	1006	1009	1012	1015̇	1018	1021	1024	1027

IV. Logaritmi zecimali ai numerelor naturale

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	00000	00043	00087	00130	00173	00217	00260	00303	00346	00389
101	00432	00475̇	00518	00561	00604	00647	00689	00732	00775̄	00817
102	00860	00903	00945̇	00988	01030	01072	01115̄	01157	01199	01242
103	01284	01326	01368	01410	01452	01494	01536	01578	01620	01662
104	01703	01745̇	01787	01828	01870	01912	01953	01995̄	02036	02078
105	02119	02160	02202	02243	02284	02325̇	02366	02407	02449	02490
106	02531	02572	02612	02653	02694	02735̄	02776	02816	02857	02898
107	02938	02979	03019	03060	03100	03141	03181	03222	03262	03302
108	03342	03383	03423	03463	03503	03543	03583	03623	03663	03703
109	03743	03782	03822	03862	03902	03941	03981	04021	04060	04100
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645̄	0682	0719	0755̇
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335̇	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875̇	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095̇	2122	2148	2175̄	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355̇	2380	2405̇	2430	2455̇	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625̄	2648	2672	2695̇	2718	2742	2765̄
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945̄	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075̄	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345̄	3365̄	3385̄	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655̄	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945̄	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065̇	4082	4099	4116	4133
26	415̄0	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265̇	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425̄	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955̇	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065̇	5079	5092	5105̇	5119	5132	5145̇	5159	5172
33	5185̇	5198	5211	5224	5237	525̇0	5263	5276	5289	5302
34	5315̄	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465̇	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575̇	5587	5599	5611	5623	5635̄	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705̇	5717	5729	5740	5752	5763	5775̄	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855̄	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955̄	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075̄	6085̇	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325̄
43	6335̄	6345̄	6355̄	6365̄	6375̄	6385̄	6395̄	6405̄	6415̄	6425̄
44	6435̄	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665̇	6675̄	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785̇	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875̇	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955̄	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	705̇0	7059	7067

IV. Logaritmi zecimali ai numerelor naturale

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996
100	0000	0004	0009	0013	0017	0022	0026	0030	0035	0039

Va. Logaritmi naturali ai numerelor prime pînă la 1000

z	ln z	z	ln z	z	ln z
(1)	0.0000	271	5.6021	641	6.4630
2	6931	277	6240	643	4661
3	1.0986	281	6384	647	4723
5	6094	283	6454	653	4816
7	9459	293	6802	659	4907
11	2.3979	307	7268	661	4938
13	5649	311	7398	673	5117
17	8332	313	7462	677	5177
19	9444	317	7589	683	526$\bar{5}$
23	3.135$\bar{5}$	331	8021	691	5381
29	3673	337	8201	701	552$\dot{5}$
31	4340	347	8493	709	5639
37	6109	349	8551	719	5779
41	7136	353	866$\bar{5}$	727	5889
43	7612	359	8833	733	5971
47	8501	367	9054	739	6053
53	9703	373	9216	743	6107
59	4.077$\dot{5}$	379	937$\dot{5}$	751	6214
61	1109	383	9480	757	6294
67	2047	389	9636	761	6346
71	2627	397	9839	769	6451
73	290$\bar{5}$	401	9940	773	6503
79	3694	409	6.0137	787	6682
83	4188	419	0379	797	6809
89	4886	421	0426	809	6958
97	5747	431	0661	811	6983
101	6151	433	0707	821	710$\dot{5}$
103	6347	439	084$\bar{5}$	823	7130
107	6728	443	0936	827	7178
109	6913	449	1070	829	7202
113	7274	457	1247	839	7322
127	8442	461	1334	853	7488
131	8752	463	1377	857	7534
137	9200	467	1463	859	7558
139	934$\bar{5}$	479	1717	863	7604
149	5.0039	487	1883	877	776$\dot{5}$
151	0173	491	1964	881	7811
157	0562	499	2126	883	7833
163	0938	503	2206	887	7878
167	1180	509	2324	907	8101
173	1533	521	2558	911	814$\dot{5}$
179	1874	523	2596	919	8233
181	198$\bar{5}$	541	2934	929	8341
191	2523	547	3044	937	8427
193	2627	557	3226	941	8469
197	2832	563	3333	947	8533
199	2933	569	3439	953	8596
211	3519	571	3474	967	8742
223	4072	577	3578	971	8783
227	42$\bar{5}$0	587	37$\dot{5}$0	977	884$\bar{5}$
229	4337	593	3852	983	8906
233	4510	599	3953	991	8987
239	476$\bar{5}$	601	3986	997	9048
241	4848	607	408$\dot{5}$		
251	525$\bar{5}$	613	4184	(10)	2.3026
257	5491	617	4249	(10^2)	4.6052
263	5722	619	4281	(10^3)	6.9078
269	5947	631	4473	(10^4)	9.2103

Vb. Descompunerea în factori primi mai mari decît 5

$49 = 7^2$	$581 = 7 \cdot 83$
$77 = 7 \cdot 11$	$583 = 11 \cdot 53$
$91 = 7 \cdot 13$	$589 = 19 \cdot 31$
$119 = 7 \cdot 17$	$611 = 13 \cdot 47$
$121 = 11^2$	$623 = 7 \cdot 89$
$133 = 7 \cdot 19$	$629 = 17 \cdot 37$
$143 = 11 \cdot 13$	$637 = 7^2 \cdot 13$
$161 = 7 \cdot 23$	$649 = 11 \cdot 59$
$169 = 13^2$	$667 = 23 \cdot 29$
$187 = 11 \cdot 17$	$671 = 11 \cdot 61$
$203 = 7 \cdot 29$	$679 = 7 \cdot 97$
$209 = 11 \cdot 19$	$689 = 13 \cdot 53$
$217 = 7 \cdot 31$	$697 = 17 \cdot 41$
$221 = 13 \cdot 17$	$703 = 19 \cdot 37$
$247 = 13 \cdot 19$	$707 = 7 \cdot 101$
$253 = 11 \cdot 23$	$713 = 23 \cdot 31$
$259 = 7 \cdot 37$	$721 = 7 \cdot 103$
$287 = 7 \cdot 41$	$731 = 17 \cdot 43$
$289 = 17^2$	$737 = 11 \cdot 67$
$299 = 13 \cdot 23$	$749 = 7 \cdot 107$
$301 = 7 \cdot 43$	$763 = 7 \cdot 109$
$319 = 11 \cdot 29$	$767 = 13 \cdot 59$
$323 = 17 \cdot 19$	$779 = 19 \cdot 41$
$329 = 7 \cdot 47$	$781 = 11 \cdot 71$
$341 = 11 \cdot 31$	$791 = 7 \cdot 113$
$343 = 7^3$	$793 = 13 \cdot 61$
$361 = 19^2$	$799 = 17 \cdot 47$
$371 = 7 \cdot 53$	$803 = 11 \cdot 73$
$377 = 13 \cdot 29$	$817 = 19 \cdot 43$
$391 = 17 \cdot 23$	$833 = 7^2 \cdot 17$
$403 = 13 \cdot 31$	$841 = 29^2$
$407 = 11 \cdot 37$	$847 = 7 \cdot 11^2$
$413 = 7 \cdot 59$	$851 = 23 \cdot 37$
$427 = 7 \cdot 61$	$869 = 11 \cdot 79$
$437 = 19 \cdot 23$	$871 = 13 \cdot 67$
$451 = 11 \cdot 41$	$889 = 7 \cdot 127$
$469 = 7 \cdot 67$	$893 = 19 \cdot 47$
$473 = 11 \cdot 43$	$899 = 29 \cdot 31$
$481 = 13 \cdot 37$	$901 = 17 \cdot 53$
$493 = 17 \cdot 29$	$913 = 11 \cdot 83$
$497 = 7 \cdot 71$	$917 = 7 \cdot 131$
$511 = 7 \cdot 73$	$923 = 13 \cdot 71$
$517 = 11 \cdot 47$	$931 = 7^2 \cdot 19$
$527 = 17 \cdot 31$	$943 = 23 \cdot 41$
$529 = 23^2$	$949 = 13 \cdot 73$
$533 = 13 \cdot 41$	$959 = 7 \cdot 137$
$539 = 7^2 \cdot 11$	$961 = 31^2$
$551 = 19 \cdot 29$	$973 = 7 \cdot 139$
$553 = 7 \cdot 79$	$979 = 11 \cdot 89$
$559 = 13 \cdot 43$	$989 = 23 \cdot 43$

Exemple

$\ln 326 = \ln (2 \cdot 163)$
$= \ln 2 + \ln 163$
$= 0{,}6931 + 5{,}0938 = \underline{5{,}7869}$

$\ln 0{,}319 = \ln (11 \cdot 29 : 1000)$
$= \ln 11 + \ln 29 - \ln 1000$
$= 2{,}3979 + 3{,}3673 - 6{,}9078$
$= \underline{-1{,}1426}$

$\ln 230000 = \ln (23 \cdot 10000)$
$= 3{,}1355 + 9{,}2103 = \underline{12{,}3458}$

VI a. Valorile pentru sin α, cos α, tg α, cotg α

Grade	sin	tg	
0	0.0000	0.0000	**90**
1	017$\bar{5}$	017$\bar{5}$	89
2	0349	0349	88
3	0523	0524	87
4	0698	0699	86
5	0872	087$\bar{5}$	85
6	104$\dot{5}$	1051	84
7	1219	1228	83
8	1392	140$\dot{5}$	82
9	1564	1584	81
10	0.1736	0.1763	**80**
11	1908	1944	79
12	2079	2126	78
13	22$\bar{5}$0	2309	77
14	2419	2493	76
15	2588	2679	75
16	2756	2867	74
17	2924	3057	73
18	3090	3249	72
19	3256	3443	71
20	0.3420	0.3640	**70**
21	3584	3839	69
22	3746	4040	68
23	3907	424$\bar{5}$	67
24	4067	4452	66
25	4226	4663	65
26	4384	4877	64
27	4540	509$\dot{5}$	63
28	469$\bar{5}$	5317	62
29	4848	5543	61
30	0.5000	0.5774	**60**
31	51$\dot{5}$0	6009	59
32	5299	6249	58
33	5446	6494	57
34	5592	674$\dot{5}$	56
35	5736	7002	55
36	5878	726$\dot{5}$	54
37	6018	7536	53
38	6157	7813	52
39	6293	8098	51
40	0.6428	0.8391	**50**
41	6561	8693	49
42	6691	9004	48
43	6820	932$\dot{5}$	47
44	6947	9657	46
45	7071	1.0000	45
	cos	cotg	Grade

Grade	sin	tg	
45	0.7071	1.000	45
46	7193	036	44
47	7314	072	43
48	7431	111	42
49	7547	1$\dot{5}$0	41
50	0.7660	1.192	**40**
51	7771	23$\bar{5}$	39
52	7880	280	38
53	7986	327	37
54	8090	376	36
55	8192	428	35
56	8290	483	34
57	8387	540	33
58	8480	600	32
59	8572	664	31
60	0.8660	1.732	**30**
61	8746	804	29
62	8829	881	28
63	8910	963	27
64	8988	2.0$\dot{5}$0	26
65	9063	14$\bar{5}$	25
66	913$\dot{5}$	246	24
67	920$\dot{5}$	356	23
68	9272	47$\dot{5}$	22
69	9336	60$\dot{5}$	21
70	0.9397	2.747	**20**
71	945$\dot{5}$	904	19
72	9511	3.078	18
73	9563	271	17
74	9613	487	16
75	9659	732	15
76	9703	4.011	14
77	9744	331	13
78	9781	70$\bar{5}$	12
79	9816	5.14$\bar{5}$	11
80	0.9848	5.671	**10**
81	9877	6.314	9
82	9903	7.11$\dot{5}$	8
83	992$\dot{5}$	8.144	7
84	994$\dot{5}$	9.514	6
85	9962	11.43	5
86	9976	14.30	4
87	9986	19.08	3
88	9994	28.64	2
89	9998	57.29	1
90	1.0000	∞	**0**
	cos	cotg	Grade

VI b. Transformarea gradelor sexagesimale în radiani

Grade	rad	Grade	rad
0	0.0000	**50**	0.8727
1	017$\bar{5}$	51	8901
2	0349	52	9076
3	0524	53	92$\dot{5}$0
4	0698	54	942$\bar{5}$
5	0.0873	55	0.9599
6	1047	56	9774
7	1222	57	9948
8	1396	58	1.0123
9	1571	59	0297
10	0.174$\dot{5}$	**60**	1.0472
11	1920	61	0647
12	2094	62	0821
13	2269	63	0996
14	2443	64	1170
15	0.2618	65	1.134$\bar{5}$
16	2793	66	1519
17	2967	67	1694
18	3142	68	1868
19	3316	69	2043
20	0.3491	**70**	1.2217
21	366$\dot{5}$	71	2392
22	3840	72	2566
23	4014	73	2741
24	4189	74	291$\dot{5}$
25	0.4363	75	1.3090
26	4538	76	326$\bar{5}$
27	4712	77	3439
28	4887	78	3614
29	5061	79	3788
30	0.5236	**80**	1.3963
31	5411	81	4137
32	558$\dot{5}$	82	4312
33	5760	83	4486
34	5934	84	4661
35	0.6109	85	1.483$\dot{5}$
36	6283	86	5010
37	6458	87	5184
38	6632	88	5359
39	6807	89	5533
40	0.6981	**90**	1.5708
41	7156	91	5882
42	7330	92	6057
43	750$\bar{5}$	93	6232
44	7679	94	6406
45	0.7854	100	1.7453
46	8029	180	3.1416
47	8203	200	3.4907
48	8378	270	4.7124
49	8552	300	5.2360
50	0.8727	**360**	6.2832

VII. Logaritmii sinusului și cosinusului

	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	(1.0)	
0	(−∞)	7.2419	7.5429	7.7190	7.8439	7.9408	*0200	*0870	*145̄0	*1961	*2419	89
1	8.2419	2832	3210	3558	3880	4179	4459	4723	4971	5206	5406	88
2	5428	5640	5842	6035̄	6220	6397	6567	6731	6889	7041	7188	87
3	7188	7330	7468	7602	7731	7857	7979	8098	8213	8326	8436	86
4	8436	8543	8647	8749	8949	8964	9042	9135̄	9226	9315̇	9403	85
5	9403	9489	9573	9655̇	9736	9816	9894	9970	*0046	*0120	*0192	84
6	9.0192	0264	0334	0403	0472	0539	0605̄	0670	0734	0797	0859	83
7	0859	0920	0981	1040	1099	1157	1214	1271	1326	1381	1436	82
8	1436	1489	1542	1594	1646	1697	1747	1797	1847	1895̇	1943	81
9	1943	1991	2038	2085̄	2131	2176	2221	2266	2310	2353	2397	**80**
10	9.2397	2439	2482	2524	2565̇	2606	2647	2687	2727	2767	2806	79
11	2806	2845̄	2883	2921	2959	2997	3034	3070	3107	3143	3179	78
12	3179	3214	325̄0	3284	3319	3353	3387	3421	3455̄	3488	3521	77
13	3521	3554	3586	3618	365̇0	3682	3713	3745̄	3775̇	3806	3837	76
14	3837	3867	3897	3927	3957	3986	4015̇	4044	4073	4102	4130	75
15	4130	4158	4186	4214	4242	4269	4296	4323	435̇0	4377	4403	74
16	4403	4430	4456	4482	4508	4533	4559	4584	4609	4634	4659	73
17	4659	4684	4709	4733	4757	4781	4805̇	4829	4853	4876	4900	72
18	4900	4923	4946	4969	4992	5015̄	5037	5060	5082	5104	5126	71
19	5126	5148	5170	5192	5213	5235̄	5256	5278	5299	5320	5341	**70**
20	9.5341	5361	5382	5402	5423	5443	5463	5484	5504	5523	5543	69
21	5543	5563	5583	5602	5621	5641	5660	5679	5698	5717	5736	68
22	5736	5754	5773	5792	5810	5828	5847	5865̄	5883	5901	5919	67
23	5919	5937	5954	5972	5990	6007	6024	6042	6059	6076	6093	66
24	6093	6110	6127	6144	6161	6177	6194	6210	6227	6243	6259	65
25	6259	6276	6292	6308	6324	6340	6356	6371	6387	6403	6418	64
26	6418	6434	6449	6465̄	6480	6495̇	6510	6526	6541	6556	6570	63
27	6570	6585̇	6600	6615̄	6629	6644	6659	6673	6687	6702	6716	62
28	6716	6730	6744	6759	6773	6787	6801	6814	6828	6842	6856	61
29	6856	6869	6883	6896	6910	6923	6937	695̇0	6963	6977	6990	**60**
30	9.6990	7003	7016	7029	7042	7055̄	7068	7080	7093	7106	7118	59
31	7118	7131	7144	7156	7168	7181	7193	7205̇	7218	7230	7242	58
32	7242	7254	7266	7278	7290	7302	7314	7326	7338	7349	7361	57
33	7361	7373	7384	7396	7407	7419	7430	7442	7453	7464	7476	56
34	7476	7487	7498	7509	7520	7531	7542	7553	7564	7575̇	7586	55
35	7586	7597	7607	7618	7629	7640	765̇0	7661	7671	7682	7692	54
36	7692	7703	7713	7723	7734	7744	7754	7764	7774	7785̄	7795̄	53
37	7795̄	7805̄	7815̄	7825̄	7835̄	7844	7854	7864	7874	7884	7893	52
38	7893	7903	7913	7922	7932	7941	7951	7960	7970	7979	7989	51
39	7989	7998	8007	8017	8026	8035̇	8044	8053	8063	8072	8081	**50**
40	9.8081	8090	8099	8108	8117	8125̇	8134	8143	8152	8161	8169	49
41	8169	8178	8187	8195̇	8204	8213	8221	8230	8238	8247	8255̇	48
42	8255̇	8264	8272	8280	8289	8297	8305̇	8313	8322	8330	8338	47
43	8338	8346	8354	8362	8370	8378	8386	8394	8402	8410	8418	46
44	8418	8426	8433	8441	8449	8457	8464	8472	8480	8487	8495̄	45
	(1.0)	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	.0	

lg cos 45° … 90°

VII. Logaritmii sinusului și cosinusului

	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	(1.0)	
45	9.8495̄	8502	8510	8517	8525̄	8532	8540	8547	8555̄	8562	8569	44
46	8569	8577	8584	8591	8598	8606	8613	8620	8627	8634	8641	43
47	8641	8648	8655̇	8662	8669	8676	8683	8690	8697	8704	8711	42
48	8711	8718	8724	8731	8738	8745̄	8751	8758	8765̄	8771	8778	41
49	8778	8784	8791	8797	8804	8810	8817	8823	8830	8836	8843	40
50	9.8843	8849	8855̇	8862	8868	8874	8880	8887	8893	8899	8905̇	39
51	8905̇	8911	8917	8923	8929	8935̇	8941	8947	8953	8959	8965̇	38
52	8965̇	8971	8977	8983	8989	8995̄	9000	9006	9012	9018	9023	37
53	9023	9029	9035̄	9041	9046	9052	9057	9063	9069	9074	9080	36
54	9080	9085̇	9091	9096	9101	9107	9112	9118	9123	9128	9134	35
55	9134	9139	9144	9149	9155̄	9160	9165̇	9170	9175̇	9181	9186	34
56	9186	9191	9196	9201	9206	9211	9216	9221	9226	9231	9236	33
57	9236	9241	9246	9251	9255̇	9260	9265̇	9270	9275̄	9279	9284	32
58	9284	9289	9294	9298	9303	9308	9312	9317	9322	9326	9331	31
59	9331	9335̇	9340	9344	9349	9353	9358	9362	9367	9371	9375̇	30
60	9.9375̇	9380	9384	9388	9393	9397	9401	9406	9410	9414	9418	29
61	9418	9422	9427	9431	9435̄	9439	9443	9447	9451	9455̇	9459	28
62	9459	9463	9467	9471	9475̇	9479	9483	9487	9491	9495̄	9499	27
63	9499	9503	9506	9510	9514	9518	9522	9525̇	9529	9533	9537	26
64	9537	9540	9544	9548	9551	9555̄	9558	9562	9566	9569	9573	25
65	9573	9576	9580	9583	9587	9590	9594	9597	9601	9604	9607	24
66	9607	9611	9614	9617	9621	9624	9627	9631	9634	9637	9640	23
67	9640	9643	9647	965̄0	9653	9656	9659	9662	9666	9669	9672	22
68	9672	9675̄	9678	9681	9684	9687	9690	9693	9696	9699	9702	21
69	9702	9704	9707	9710	9713	9716	9719	9722	9724	9727	9730	20
70	9.9730	9733	9735̇	9738	9741	9743	9746	9749	9751	9754	9757	19
71	9757	9759	9762	9764	9767	9770	9772	9775̄	9777	9780	9782	18
72	9782	9785̄	9787	9789	9792	9794	9797	9799	9801	9804	9806	17
73	9806	9808	9811	9813	9815̇	9817	9820	9822	9824	9826	9828	16
74	9828	9831	9833	9835̄	9837	9839	9841	9843	9845̇	9847	9849	15
75	9849	9851	9853	9855̇	9857	9859	9861	9863	9865̇	9867	9869	14
76	9869	9871	9873	9875̄	9876	9878	9880	9882	9884	9885̇	9887	13
77	9887	9889	9891	9892	9894	9896	9897	9899	9901	9902	9904	12
78	9904	9906	9907	9909	9910	9912	9913	9915̄	9916	9918	9919	11
79	9919	9921	9922	9924	9925̇	9927	9928	9929	9931	9932	9934	10
80	9.9934	9935̄	9936	9937	9939	9940	9941	9943	9944	9945̄	9946	9
81	9946	9947	9949	995̄0	9951	9952	9953	9954	9955̇	9956	9958	8
82	9958	9959	9960	9961	9962	9963	9964	9965̄	9966	9967	9968	7
83	9968	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974	9975̄	9975̇	9976	6
84	9976	9977	9978	9978	9979	9980	9981	9981	9982	9983	9983	5
85	9983	9984	9985̄	9985̇	9986	9987	9987	9988	9988	9989	9989	4
86	9989	9990	9990	9991	9991	9992	9992	9993	9993	9994	9994	3
87	9994	9994	9995̄	9995̇	9996	9996	9996	9996	9997	9997	9997	2
88	9997	9998	9998	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	1
89	9999	9999	*0000	*0000	*0000	*0000	*0000	*0000	*0000	*0000	*0000	0
	(1.0)	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	.0	

lg cos 0° ... 45°

VIII. Logaritmii tangentei și cotangentei

	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	(1.0)	
0	(−∞)	7.2419	7.5429	7.7190	7.8439	7.9409	*0200	*0870	*1450	*1962	*2419	89
1	8.2419	2833	3211	3559	3881	4181	4461	4725	4973	5208	5431	88
2	5431	5643	5845	6038	6223	6401	6571	6736	6894	7046	7194	87
3	7194	7337	7475	7609	7739	7865	7988	8107	8223	8336	8446	86
4	8446	8554	8659	8762	8862	8960	9056	9150	9241	9331	9420	85
5	9420	9506	9591	9674	9756	9836	9915	9992	*0068	*0143	*0216	84
6	9.0216	0289	0360	0430	0499	0567	0633	0699	0764	0828	0891	83
7	0891	0954	1015	1076	1135	1194	1252	1310	1367	1423	1478	82
8	1478	1533	1587	1640	1693	1745	1797	1848	1898	1948	1997	81
9	1997	2046	2094	2142	2189	2236	2282	2328	2374	2419	2463	80
10	9.2463	2507	2551	2594	2637	2680	2722	2764	2805	2846	2887	79
11	2887	2927	2967	3006	3046	3085	3123	3162	3200	3237	3275	78
12	3275	3312	3349	3385	3422	3458	3493	3529	3564	3599	3634	77
13	3634	3668	3702	3736	3770	3804	3837	3870	3903	3935	3968	76
14	3968	4000	4032	4064	4095	4127	4158	4189	4220	4250	4281	75
15	4281	4311	4341	4371	4400	4430	4459	4488	4517	4546	4575	74
16	4575	4603	4632	4660	4688	4716	4744	4771	4799	4826	4853	73
17	4853	4880	4907	4934	4961	4987	5014	5040	5066	5092	5118	72
18	5118	5143	5169	5195	5220	5245	5270	5295	5320	5345	5370	71
19	5370	5394	5419	5443	5467	5491	5516	5539	5563	5587	5611	70
20	9.5611	5634	5658	5681	5704	5727	5750	5773	5796	5819	5842	69
21	5842	5864	5887	5909	5932	5954	5976	5998	6020	6042	6064	68
22	6064	6086	6108	6129	6151	6172	6194	6215	6236	6257	6279	67
23	6279	6300	6321	6341	6362	6383	6404	6424	6445	6465	6486	66
24	6486	6506	6527	6547	6567	6587	6607	6627	6647	6667	6687	65
25	6687	6706	6726	6746	6765	6785	6804	6824	6843	6863	6882	64
26	6882	6901	6920	6939	6958	6977	6996	7015	7034	7053	7072	63
27	7072	7090	7109	7128	7146	7165	7183	7202	7220	7238	7257	62
28	7257	7275	7293	7311	7330	7348	7366	7384	7402	7420	7438	61
29	7438	7455	7473	7491	7509	7526	7544	7562	7579	7597	7614	60
30	9.7614	7632	7649	7667	7684	7701	7719	7736	7753	7771	7788	59
31	7788	7805	7822	7839	7856	7873	7890	7907	7924	7941	7958	58
32	7958	7975	7992	8008	8025	8042	8059	8075	8092	8109	8125	57
33	8125	8142	8158	8175	8191	8208	8224	8241	8257	8274	8290	56
34	8290	8306	8323	8339	8355	8371	8388	8404	8420	8436	8452	55
35	8452	8468	8484	8501	8517	8533	8549	8565	8581	8597	8613	54
36	8613	8629	8644	8660	8676	8692	8708	8724	8740	8755	8771	53
37	8771	8787	8803	8818	8834	8850	8865	8881	8897	8912	8928	52
38	8928	8944	8959	8975	8990	9006	9022	9037	9053	9068	9084	51
39	9084	9099	9115	9130	9146	9161	9176	9192	9207	9223	9238	50
40	9.9238	9254	9269	9284	9300	9315	9330	9346	9361	9376	9392	49
41	9392	9407	9422	9438	9453	9468	9483	9499	9514	9529	9544	48
42	9544	9560	9575	9590	9605	9621	9636	9651	9666	9681	9697	47
43	9697	9712	9727	9742	9757	9772	9788	9803	9818	9833	9848	46
44	9848	9864	9879	9894	9909	9924	9939	9955	9970	9985	0.0000	45
	(1.0)	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	.0	

lg cotg 45° … 90°

VIII. Logaritmii tangentei și cotangentei

	.0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	(1.0)	
45	0.0000	0015̇	0030	0045̇	0061	0076	0091	0106	0121	0136	0152	44
46	0152	0167	0182	0197	0212	0228	0243	0258	0273	0288	0303	43
47	0303	0319	0334	0349	0364	0379	0395̄	0410	0425̇	0440	0456	42
48	0456	0471	0486	0501	0517	0532	0547	0562	0578	0593	0608	41
49	0608	0624	0639	0654	0670	0685̇	0700	0716	0731	0746	0762	40
50	0.0762	0777	0793	0808	0824	0839	0854	0870	0885̇	0901	0916	39
51	0916	0932	0947	0963	0978	0994	1010	1025̇	1041	1056	1072	38
52	1072	1088	1103	1119	1135̄	115̇0	1166	1182	1197	1213	1229	37
53	1229	1245̄	1260	1276	1292	1308	1324	1340	1356	1371	1387	36
54	1387	1403	1419	1435̇	1451	1467	1483	1499	1516	1532	1548	35̇
55	1548	1564	1580	1596	1612	1629	1645̄	1661	1677	1694	1710	34
56	1710	1726	1743	1759	1776	1792	1809	1825̇	1842	1858	1875̄	33
57	1875̄	1891	1908	1925̄	1941	1958	1975̄	1992	2008	2025̇	2042	32
58	2042	2059	2076	2093	2110	2127	2144	2161	2178	2195̇	2212	31
59	2212	2229	2247	2264	2281	2299	2316	2333	2351	2368	2386	30
60	0.2386	2403	2421	2438	2456	2474	2491	2509	2527	2545̄	2562	29
61	2562	2580	2598	2616	2634	2652	2670	2689	2707	2725̄	2743	28
62	2743	2762	2780	2798	2817	2835̇	2854	2872	2891	2910	2928	27
63	2928	2947	2966	2985̄	3004	3023	3042	3061	3080	3099	3118	26
64	3118	3137	3157	3176	3196	3215̇	3235̄	3254	3274	3294	3313	25
65	3313	3333	3353	3373	3393	3413	3433	3453	3473	3494	3514	24
66	3514	3535̄	3555̇	3576	3596	3617	3638	3659	3679	3700	3721	23
67	3721	3743	3764	3785̇	3806	3828	3849	3871	3892	3914	3936	22
68	3936	3958	3980	4002	4024	4046	4068	4091	4113	4136	4158	21
69	4158	4181	4204	4227	425̄0	4273	4296	4319	4342	4366	4389	20
70	0.4389	4413	4437	4461	4484	4509	4533	4557	4581	4606	4630	19
71	4630	4655̄	4680	4705̄	4730	4755̄	4780	4805̇	4831	4857	4882	18
72	4882	4908	4934	4960	4986	5013	5039	5066	5093	5120	5147	17
73	5147	5174	5201	5229	5256	5284	5312	5340	5368	5397	5425̇	16
74	5425̇	5454	5483	5512	5541	5570	5600	5629	5659	5689	5719	15
75	5719	575̄0	5780	5811	5842	5873	5905̄	5936	5968	6000	6032	14
76	6032	6065̄	6097	6130	6163	6196	6230	6264	6298	6332	6366	13
77	6366	6401	6436	6471	6507	6542	6578	6615̄	6651	6688	6725̇	12
78	6725̇	6763	6800	6838	6877	6915̇	6954	6994	7033	7073	7113	11
79	7113	7154	7195̇	7236	7278	7320	7363	7406	7449	7493	7537	10
80	0.7537	7581	7626	7672	7718	7764	7811	7858	7906	7954	8003	9
81	8003	8052	8102	8152	8203	8255̇	8307	8360	8413	8467	8522	8
82	8522	8577	8633	8690	8748	8806	8865̄	8924	8985̄	9046	9109	7
83	9109	9172	9236	9301	9367	9433	9501	9570	9640	9711	9784	6
84	9784	9857	9932	*0008	*0085̇	*0164	*0244	*0326	*0409	*0494	*0580	5
85	1.0580	0669	0759	085̇0	0944	1040	1138	1238	1341	1446	1554	4
86	1554	1664	1777	1893	2012	2135̇	2261	2391	2525̇	2663	2806	3
87	2806	2954	3106	3264	3429	3599	3777	3962	4155̄	4357	4569	2
88	4569	4792	5027	5275̇	5539	5819	6119	6441	6789	7167	7581	1
89	7581	8038	855̇0	9130	9800	2.0591	2.1561	2.2810	2.4571	2.7581	(+∞)	0
	(1.0)	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1	.0	

lg cotg 0° … 45°

IX. Funcțiile exponențiale e^x și e^{-x}

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
0.00	1.0000	1.0000	**0.50**	1.6487	0.6065	**1.0**	2.7183	0.3679	**6.0**	403.43	0.0025
0.01	1.0101	0.9900	**0.51**	1.6653	0.6005	**1.1**	3.0042	0.3329	**6.1**	445.86	0.0022
0.02	1.0202	0.9802	**0.52**	1.6820	0.5945	**1.2**	3.3201	0.3012	**6.2**	492.75	0.0020
0.03	1.0305	0.9704	**0.53**	1.6989	0.5886	**1.3**	3.6693	0.2725	**6.3**	544.57	0.0018
0.04	1.0408	0.9608	**0.54**	1.7160	0.5827	**1.4**	4.0552	0.2466	**6.4**	601.85	0.0017
0.05	1.0513	0.9512	**0.55**	1.7333	0.5769	**1.5**	4.4817	0.2231	**6.5**	665.14	0.0015
0.06	1.0618	0.9418	**0.56**	1.7507	0.5712	**1.6**	4.9530	0.2019	**6.6**	735.10	0.0014
0.07	1.0725	0.9324	**0.57**	1.7683	0.5655	**1.7**	5.4739	0.1827	**6.7**	812.41	0.0012
0.08	1.0833	0.9231	**0.58**	1.7860	0.5599	**1.8**	6.0496	0.1653	**6.8**	897.85	0.0011
0.09	1.0942	0.9139	**0.59**	1.8040	0.5543	**1.9**	6.6859	0.1496	**6.9**	992.27	0.0010
0.10	1.1052	0.9048	**0.60**	1.8221	0.5488	**2.0**	7.3891	0.1353	**7.0**	1096.6	0.0009
0.11	1.1163	0.8958	**0.61**	1.8404	0.5434	**2.1**	8.1662	0.1225	**7.1**	1212.0	0.0008
0.12	1.1275	0.8869	**0.62**	1.8589	0.5379	**2.2**	9.0250	0.1108	**7.2**	1339.4	0.0007
0.13	1.1388	0.8781	**0.63**	1.8776	0.5326	**2.3**	9.9742	0.1003	**7.3**	1480.3	0.0007
0.14	1.1503	0.8694	**0.64**	1.8965	0.5273	**2.4**	11.023	0.0907	**7.4**	1636.0	0.0006
0.15	1.1618	0.8607	**0.65**	1.9155	0.5220	**2.5**	12.182	0.0821	**7.5**	1808.0	0.0006
0.16	1.1735	0.8521	**0.66**	1.9348	0.5169	**2.6**	13.464	0.0743	**7.6**	1998.2	0.0005
0.17	1.1853	0.8437	**0.67**	1.9542	0.5117	**2.7**	14.880	0.0672	**7.7**	2208.3	0.0005
0.18	1.1972	0.8353	**0.68**	1.9739	0.5066	**2.8**	16.445	0.0608	**7.8**	2440.6	0.0004
0.19	1.2092	0.8270	**0.69**	1.9937	0.5016	**2.9**	18.174	0.0550	**7.9**	2697.3	0.0004
0.20	1.2214	0.8187	**0.70**	2.0138	0.4966	**3.0**	20.086	0.0498	**8.0**	2981.0	0.0003
0.21	1.2337	0.8106	**0.71**	2.0340	0.4916	**3.1**	22.198	0.0450	**8.1**	3294.5	0.0003
0.22	1.2461	0.8025	**0.72**	2.0544	0.4868	**3.2**	24.533	0.0408	**8.2**	3641.0	0.0003
0.23	1.2586	0.7945	**0.73**	2.0751	0.4819	**3.3**	27.113	0.0369	**8.3**	4023.9	0.0002
0.24	1.2712	0.7866	**0.74**	2.0959	0.4771	**3.4**	29.964	0.0334	**8.4**	4447.1	0.0002

0.25	1.2840	0.7788
0.26	1.2969	0.7711
0.27	1.3100	0.7634
0.28	1.3231	0.7558
0.29	1.3364	0.7483
0.30	1.3499	0.7408
0.31	1.3634	0.7334
0.32	1.3771	0.7261
0.33	1.3910	0.7189
0.34	1.4049	0.7118
0.35	1.4191	0.7047
0.36	1.4333	0.6977
0.37	1.4477	0.6907
0.38	1.4623	0.6839
0.39	1.4770	0.6771
0.40	1.4918	0.6703
0.41	1.5068	0.6637
0.42	1.5220	0.6570
0.43	1.5373	0.6505
0.44	1.5527	0.6440
0.45	1.5683	0.6376
0.46	1.5841	0.6313
0.47	1.6000	0.6250
0.48	1.6161	0.6188
0.49	1.6323	0.6126
0.50	1.6487	0.6065

0.75	2.1170	0.4724
0.76	2.1383	0.4677
0.77	2.1598	0.4630
0.78	2.1815	0.4584
0.79	2.2034	0.4538
0.80	2.2255	0.4493
0.81	2.2479	0.4449
0.82	2.2705	0.4404
0.83	2.2933	0.4360
0.84	2.3164	0.4317
0.85	2.3396	0.4274
0.86	2.3632	0.4232
0.87	2.3869	0.4190
0.88	2.4109	0.4148
0.89	2.4351	0.4107
0.90	2.4596	0.4066
0.91	2.4843	0.4025
0.92	2.5093	0.3985
0.93	2.5345	0.3946
0.94	2.5600	0.3906
0.95	2.5857	0.3867
0.96	2.6117	0.3829
0.97	2.6379	0.3791
0.98	2.6645	0.3753
0.99	2.6912	0.3716
1.00	2.7183	0.3679

3.5	33.115	0.0302
3.6	36.598	0.0273
3.7	40.447	0.0247
3.8	44.701	0.0224
3.9	49.402	0.0202
4.0	54.598	0.0183
4.1	60.340	0.0166
4.2	66.686	0.0150
4.3	73.700	0.0136
4.4	81.451	0.0123
4.5	90.017	0.0111
4.6	99.484	0.0101
4.7	109.95	0.0091
4.8	121.51	0.0082
4.9	134.29	0.0074
5.0	148.41	0.0067
5.1	164.02	0.0061
5.2	181.27	0.0055
5.3	200.34	0.0050
5.4	221.41	0.0045
5.5	244.69	0.0041
5.6	270.43	0.0037
5.7	298.87	0.0033
5.8	330.30	0.0030
5.9	365.04	0.0027
6.0	403.43	0.0025

8.5	4914.8	0.0002
8.6	5431.7	0.0002
8.7	6002.9	0.0002
8.8	6634.2	0.0002
8.9	7332.0	0.0001
9.0	8103.1	0.0001
9.1	8955.3	0.0001
9.2	9897.1	0.0001
9.3	10938	0.0001
9.4	12088	0.0001
9.5	13360	0.0001
9.6	14765	0.0001
9.7	16318	0.0001
9.8	18034	0.0001
9.9	19930	0.0001
10.0	22026	0.00005

$e = 2.718\,281\,83\ldots$

$\lg e = 0.434\,294\,48\ldots$

$1/e = 0.367\,879\,44\ldots$

$\lg 1/e = 0.565\,705\,52\ldots -1$

X. Constante folosite în mod curent

	z	$\lg z$		z	$\lg z$		z	$\lg z$
π	3.1416	0.4971	$^1/_2\pi$	0.1592	0.2018 − 1	$1/e$	0.3679	0.5657 − 1
2π	6.2832	0.7982	$^1/_4\pi$	0.0796	0.9008 − 2	M	0.4343	0.6378 − 1
3π	9.4248	0.9743	π^2	9.8696	0.9943	$1/M$	2.3026	0.3622
4π	12.566	1.0992	$4\pi^2$	39.478	1.5964	e^2	7.3891	0.8686
$2\pi/3$	2.0944	0.3211	$\pi^2/4$	2.4674	0.3922	$1/e^2$	0.13534	0.1314 − 1
$4\pi/3$	4.1888	0.6221	$1/\pi^2$	0.1013	0.0057 − 1	$\sqrt{e}$	1.6487	0.2171
$\pi/2$	1.5708	0.1961	$1/(4\pi^2)$	0.0253	0.4036 − 2	e^π	23.141	1.3644
$\pi/3$	1.0472	0.0200	$\sqrt{\pi}$	1.7725	0.2486	g	9.81	0.9917
$\pi/4$	0.7854	0.8951 − 1	$\sqrt{2\pi}$	2.5066	0.3991	g^2	96.236	1.9833
$\pi/6$	0.5236	0.7190 − 1	$\sqrt{(\pi/2)}$	1.2533	0.0981	$1/g$	0.1019	0.0083 − 1
$\pi\sqrt{2}$	4.4429	0.6477	$1/\sqrt{\pi}$	0.5642	0.7514 − 1	$1/(2g)$	0.0510	0.7073 − 2
$\pi\sqrt{3}$	5.4414	0.7357	$1/\sqrt{(2\pi)}$	0.3989	0.6009 − 1	$1/g^2$	0.0104	0.0167 − 2
$\pi/\sqrt{2}$	2.2214	0.3466	$\sqrt{(2/\pi)}$	0.7979	0.9019 − 1	$\sqrt{g}$	3.1321	0.4958
$\pi/\sqrt{3}$	1.8138	0.2586	e	2.7183	0.4343	$\sqrt{(2g)}$	4.4294	0.6463
$1/\pi$	0.3183	0.5029 − 1				$1/\sqrt{g}$	0.3193	0.5042 − 1

XI. Alfabetul grec

Litera		Se citește	Transliterarea	Litera		Se citește	Transliterarea	Litera		Se citește	Transliterarea
Α	α	alfa	a	Ι	ι	iota	i	Ρ	ρ	ro	r
Β	β	beta	b	Κ	κ	kapa	c, k	Σ	σ	sigma	s
Γ	γ	gama	g, n	Λ	λ	lambda	l	Τ	τ	tau	t
Δ	δ	delta	d	Μ	μ	miu	m	Υ	υ	ipsilon	y, u
Ε	ε	epsilon	e	Ν	ν	niu	n	Φ	φ	fi	ph
Ζ	ζ	zeta	z	Ξ	ξ	csi	x	Χ	χ	hi	ch
Η	η	eta	e	Ο	ο	omicron	o	Ψ	ψ	psi	ps
Θ	ϑ	teta	th	Π	π	pi	p	Ω	ω	omega	o

XII. Alfabetul gotic

Aa	Bb	Cc	Dd	Ee	Ff	Gg	Hh	Ii	Jj	Kk	Ll	Mm
𝔄𝔞	𝔅𝔟	ℭ𝔠	𝔇𝔡	𝔈𝔢	𝔉𝔣	𝔊𝔤	ℌ𝔥	ℑ𝔦	ℑ𝔧	𝔎𝔨	𝔏𝔩	𝔐𝔪
𝒜𝒶	ℬ𝒷	𝒞𝒸	𝒟𝒹	ℰℯ	ℱ𝒻	𝒢ℊ	ℋ𝒽	ℐ𝒾	𝒥𝒿	𝒦𝓀	ℒ𝓁	ℳ𝓂
Nn	Oo	Pp	Qq	Rr	Ss	Tt	Uu	Vv	Ww	Xx	Yy	Zz
𝔑𝔫	𝔒𝔬	𝔓𝔭	𝔔𝔮	ℜ𝔯	𝔖ſ𝔰	𝔗𝔱	𝔘𝔲	𝔙𝔳	𝔚𝔴	𝔛𝔵	𝔜𝔶	ℨ𝔷
𝒩𝓃	𝒪ℴ	𝒫𝓅	𝒬𝓆	ℛ𝓇	𝒮ſ𝓈	𝒯𝓉	𝒰𝓊	𝒱𝓋	𝒲𝓌	𝒳𝓍	𝒴𝓎	𝒵𝓏

XIII. Cifre romane

I 1	V 5	X 10	L 50	C 100	D 500	M 1000

I 1	II 2	III 3	IV 4	V 5	VI 6	VII 7	VIII 8	IX 9	X 10
XX 20	XXX 30	XL 40	L 50	LX 60	LXX 70	LXXX 80	XC 90	IC 99	C 100
CC 200	CCC 300	CD 400	D 500	DC 600	DCC 700	DCCC 800	CM 900	XM 990	M 1000

MCDXCVI 1496 MDCCCLXXXIII 1883 MCMIL 1949 MCMLXXIV 1974

Index alfabetic

D

G

H

I

R

Ş

T

U

V

W

Z

Index de matematicieni

Bun de tipar: 14.04.1980.
Coli de tipar: 58. C.Z. 51(03).